UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE FILOSOFIA, ARTES E CULTURA

Mel Fonseca Bueno dos Santos

REPRESENTAÇÃO DE ESCALAS E MODOS NO CÍRCULO DAS ALTURAS A PARTIR DE RELAÇÕES DE SIMETRIA E ASSIMETRIA

Ouro Preto
2026

Mel Fonseca Bueno dos Santos

REPRESENTAÇÃO DE ESCALAS E MODOS NO CÍRCULO DAS ALTURAS A PARTIR DE RELAÇÕES DE SIMETRIA E ASSIMETRIA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Música da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Música.

Orientador: Dr. André Codeço dos Santos

Ouro Preto

2026

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S237r Santos, Mel Fonseca Bueno dos.
Representação de escalas e modos no círculo das alturas a partir de relações de simetria e assimetria. [manuscrito] / Mel Fonseca Bueno dos Santos. - 2026.
85 f.: il.: color., tab..

Orientador: Prof. Dr. André Codeço dos Santos.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Filosofia, Artes e Cultura. Graduação em Música .

1. Intervalos e escalas musicais. 2. Simetria (Música). 3. Tonalidade (Música). I. Santos, André Codeço dos. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 781

Bibliotecário(a) Responsável: Renata Mara de Almeida - CRB-6: 2507

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE FILOSOFIA ARTES E CULTURA
DEPARTAMENTO DE MUSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Mel Fonseca Bueno dos Santos

Representação de escalas e modos no círculo das alturas a partir de relações de simetria e assimetria

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Música da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Música

Aprovada em 20 de julho de 2026

Membros da banca

Dr. André Codeço dos Santos - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Érico Oliveira Fonseca (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Diogo Rebel e Carvalho (Instituto Federal Fluminense)

André Codeço dos Santos, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 22/09/2026

Documento assinado eletronicamente por **André Codeço dos Santos**, **PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/11/2026, às 22:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 , informando o código verificador **1196899** e o código CRC **B88DA170**.

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família, Marcia, Adriano e Aleixo, pelo amor e apoio incondicionais e por me aceitarem como sou. Este trabalho é uma homenagem a vocês.

À minha companheira, Maya, agradeço pelo amor, cumplicidade, cuidado e pelo companheirismo diário.

Aos meus amigos, agradeço por terem sido minha família em Ouro Preto, tornando mais leve a distância daqueles que estavam longe.

Ao meu orientador, André Codeço, agradeço o acolhimento e todos os ensinamentos. Agradeço por ter chegado em um momento decisivo da minha trajetória, por enxergar potencial onde eu via incertezas, por me escutar e me orientar com sensibilidade, paciência, respeito e rigor. Agradeço também por me iniciar no mundo da composição e por todas as oportunidades que têm me proporcionado.

Ao professor Tabajara Belo, agradeço o companheirismo e os ensinamentos durante todos esses anos. Agradeço por ter contribuído de maneira tão profunda para minha formação e por todas as vezes em que encontrei, além de um professor, uma presença humana que me ofereceu acolhimento. Agradeço o privilégio de ser seu aluno, a confiança, as oportunidades e tudo que me ensinou para além da música.

Ao Departamento de Música, minha gratidão por ter sido minha casa durante todos esses anos. Aos colegas de curso, professores e técnicos, agradeço por terem feito desse espaço um lugar de pertencimento, convivência e afeto, tornando essa trajetória tão significativa.

Aos professores Diogo Rebel e Érico Fonseca, membros da banca examinadora, agradeço a disponibilidade e generosidade em aceitarem o convite para compor a banca.

RESUMO

O presente trabalho investiga o potencial do círculo das alturas como ferramenta de visualização de relações de simetria e assimetria em escalas e modos. A pesquisa fundamenta-se em conceitos da teoria pós-tonal (Straus, 2000), como classes de alturas, notação com inteiros e classes de intervalos, e no uso do círculo das alturas no âmbito da Teoria do Domínio Sonoro (Codeço, 2019) que mobiliza operações de transposição, inversão, retrogradação e rotação. Com base nessa disposição, o trabalho propõe procedimento analítico de simetria por recorrência de classes intervalares, que revela o potencial simétrico por meio da recorrência e diversidade de classes intervalares dos materiais. Este, é aplicado em dois níveis analíticos. No nível interno, verifica-se o potencial de simetria interna por recorrências de classes intervalares (SIRCI) no interior de um conjunto. No nível externo, avalia-se a simetria externa por recorrência de classes intervalares (SERCI) entre dois conjuntos distintos. As análises dos materiais selecionados demonstraram diferentes graus de simetria e assimetria, evidenciados pela recorrência e/ou diversidade das classes intervalares. Os resultados indicam que o círculo das alturas foi satisfatoriamente empregado como ferramenta de visualização, pois permitiu identificar e comparar propriedades estruturais que nem sempre se evidenciam pela notação musical tradicional ou por procedimentos predominantemente numéricos.

Palavras-chave: círculo das alturas, classes intervalares, simetria, recorrência de classes intervalares, escalas e modos.

ABSTRACT

This study investigates the potential of the pitch-class circle as a tool for visualizing relations of symmetry and asymmetry in scales and modes. The research is grounded in concepts from post-tonal theory (Straus, 2000), such as pitch classes, integer notation, and interval classes, as well as in the use of the pitch-class circle within the Theory of the Sonic Domain (Codeço, 2019), which mobilizes operations of transposition, inversion, retrogradation, and rotation. Based on this framework, the study proposes an analytical procedure of symmetry by recurrence of interval classes, which reveals the symmetrical potential of musical materials through the recurrence and diversity of their interval classes. This procedure is applied at two analytical levels. At the internal level, the potential for internal symmetry by recurrence of interval classes (SIRCI) is examined within a single set. At the external level, external symmetry by recurrence of interval classes (SERCI) is evaluated between two distinct sets. The analyses of the selected materials demonstrated different degrees of symmetry and asymmetry, evidenced by the recurrence and/or diversity of interval classes. The results indicate that the pitch-class circle was successfully employed as a visualization tool, since it made it possible to identify and compare structural properties that are not always evident through traditional musical notation or predominantly numerical procedures.

Keywords: pitch class circle, interval classes, symmetry, interval class recurrence, scales and modes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Equivalência de oitavas da altura Lá 19
Figura 2 - Melodias enarmonicamente equivalentes 20
Figura 3 - Círculo das alturas de Straus 22
Figura 4 - Intervalos ordenados e não ordenados entre notas presentes no *Quarteto de Cordas N.03*, de Schoenberg. 23
Figura 5 - Intervalos ordenados e não ordenados entre classes de notas presentes no *Quarteto de Cordas N.03*, de Schoenberg. 24
Figura 6 - Operação T_n 26
Figura 7 - Operação T_nI 27
Figura 8 - Operação I $\boldsymbol{xy}$ 27
Figura 9 - Conjunto inversamente simétrico 28
Figura 10 - Eixo de inversão 29
Figura 11 - Representação do componente altura [10 5 0] no círculo modular das classes de alturas, uma T4+ de [6 1 8], revelando a similaridade de ordenação entre o componente original e o transposto 30
Figura 12 - No primeiro círculo, temos a representação do componente altura [6 1 8]. No segundo, temos sua inversão [6 11 5] (em negrito) revelando a relação espelhada, ou a reflexão, em relação ao componente original (linhas pontilhadas) 31
Figura 13 - No primeiro par de círculos, temos a representação do componente altura [9 4 7] e sua retrogradação [7 4 9] revelando a relação de mudança de direção e ordem entre os componentes. No segundo par, temos a representação do componente altura [10 0 5] e sua retrogradação [5 0 10] evidenciando as relações visuais entre os pares retrogradados 32
Figura 14 - Operações de substituição por rotação revelando a dessemelhança entre os círculos originais e os rotacionados 33
Figura 15 - Exposição das correspondências entre as operações de substituição por transposição, inversão, retrogradação e rotação no círculo das alturas e suas respectivas relações advindas na análise intravetorial 34
Figura 16 - Círculo das alturas 35
Figura 17 - Classes intervalares, suas respectivas cores e representações na pauta 37
Figura 18 - Eixo de simetria interno 38
Figura 19 - Eixo de simetria externo 40
Figura 20 - Projeção interna do trítono 40

Figura 21 - SIRCI na escala maior 46
Figura 22 - Conjunto original (escala maior/modo jônio) 47
Figura 23 - Operação de rotação e transposição para obtenção de conjunto derivado 47
Figura 24 - Vetor intervalar para a escala maior 50
Figura 25 - SIRCI na escala menor melódica (O_2) 52
Figura 26 - SIRCI na escala menor harmônica (O_3) 52
Figura 27 - SERCI no par de escalas maior (O_1) e menor harmônica (O_3) 53
Figura 28 - SIRCI na escala maior harmônica (O_4) 54
Figura 29 - SERCI no par de modos lídio e lócrio 56
Figura 30 - SERCI no par de modos jônio e frígio 57
Figura 31 - SERCI no par de modos mixolídio e eólio 57
Figura 32 - Modo dórico isolado por SIRCI total 58
Figura 33 - Operação de retroinversão aplicada aos pares de modos 60
Figura 34 - Operação de retroinversão aplicada ao modo dórico 60
Figura 35 - Projeção do trítono no par de modos lídio e lócrio 61
Figura 36 - Projeção do trítono no par de modos jônio e frígio 62
Figura 37 - Projeção do trítono no par de modos mixolídio e eólio 62
Figura 38 - Projeção do trítono no modo dórico 63
Figura 39 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{2(O2)}$ e $Ro_{6(O2)}$ 64
Figura 40 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{3(O2)}$ e $Ro_{5(O2)}$ 65
Figura 41 - SERCI no par de conjuntos O_2 e $Ro_{1(O2)}$ 66
Figura 42 - Conjunto $Ro_{4(O2)}$ isolado por SIRCI total 67
Figura 43 - Projeção dos trítonos no par de conjuntos $Ro_{2(O2)}$ e $Ro_{6(O2)}$ 68
Figura 44 - Projeção dos trítonos no par de conjuntos $Ro_{3(O2)}$ e $Ro_{5(O2)}$ 68
Figura 45 - Projeção dos trítonos no par de conjuntos O_2 e $Ro_{1(O2)}$ 69
Figura 46 - Projeção dos trítonos no conjunto $Ro_{4(O2)}$ 69
Figura 47 - SERCI no par de conjuntos O_3 e $Ro_{2(O3)}$ 71
Figura 48 - Conjunto $Ro_{1(O3)}$ 72
Figura 49 - Conjunto $Ro_{5(O3)}$ 73
Figura 50 - Conjunto $Ro_{3(O3)}$ 73
Figura 51 - Conjunto $Ro_{4(O3)}$ 74
Figura 52 - Conjunto $Ro_{6(O3)}$ 74
Figura 53 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{2(O4)}$ e $Ro_{4(O4)}$ 75
Figura 54 - Conjunto $Ro_{3(O4)}$ 78

Figura 55 - Conjunto $Ro_{6(O4)}$ 78
Figura 56 - Conjunto O_4 79
Figura 57 - Conjunto $Ro_{1(O4)}$ 79
Figura 58 - Conjunto $Ro_{5(O4)}$ 81
Figura 59 - SERCI no par de conjuntos O_3 e $Ro_{4(O4)}$ 82
Figura 60 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{1(O3)}$ e $Ro_{3(O4)}$ 82
Figura 61 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{2(O3)}$ e $Ro_{2(O4)}$ 83
Figura 62 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{5(O3)}$ e $Ro_{6(O4)}$ 83
Figura 63 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{3(O3)}$ e $Ro_{1(O4)}$ 84
Figura 64 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{4(O3)}$ e O_4 84
Figura 65 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{6(O3)}$ e $Ro_{5(O4)}$ 85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Notação com inteiros 21
Tabela 2 - Classes de intervalos 25
Tabela 3 - Correspondências entre classes de intervalo, intervalos entre classes de nota e suas respectivas notações com inteiros 36
Tabela 4 - Sistematização das análises de simetria e assimetria 43
Tabela 5 - Relação inversamente proporcional entre quantidade de recorrência e diversidade 45
Tabela 6 - Relação entre os semicírculos opostos das escalas maior (O_1) e menor harmônica (O_3) 54
Tabela 7 - Relação entre os semicírculos opostos de O_3 e $Ro2_{(O3)}$ 71
Tabela 8 - Relação entre os semicírculos opostos de $Ro2_{(O4)}$ e $Ro4_{(O4)}$ 76

LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1 - Equação descritiva das propriedades de recorrência e diversidade, onde R_{ci} simboliza recorrência, D_{ci} simbolizada diversidade e P propriedade..... 45
Equação 2 - Equação descritiva do deslocamento do cromático do trítono nos modos eclesiásticos..... 63
Equação 3 - Equação descritiva do deslocamento do cromático do trítono na escala menor melódica e seus conjuntos derivados 70

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

2 EMBASAMENTO TEÓRICO 17

2.1 Aplicação do círculo das alturas na Teoria Pós-Tonal (Straus, 2000) 17

2.1.1 Conceitos preliminares 18

2.2 Aplicação do círculo das alturas na Teoria do Domínio Sonoro (Codeço, 2019) 29

2.2.1 Conceitos preliminares 30

2.3 Critérios analíticos e de representação gráfica do círculo das alturas 34

3 APLICAÇÕES E DESDOBRAMENTOS 42

3.1 Simetria por recorrência de classes intervalares 44

3.1.1 Análise de SIRCI e SERCI nos conjuntos originais 51

3.1.2 Análise de SERCI em modos 55

3.1.3 Análise de SERCI na escala menor melódica e em suas derivações 63

3.1.4 Análise de SERCI nas escalas menor harmônica e maior harmônica e suas derivações 70

4 CONCLUSÃO 86

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 88

APÊNDICE 90

1 INTRODUÇÃO

A música ocidental, como é conhecida hoje, foi historicamente consolidada enquanto expressão estética vinculada às dinâmicas sociais de diversos períodos. Este processo foi, em larga medida, marcado pela afirmação e predominância do sistema tonal, que paulatinamente passou a estruturar os modos de organização sonora a partir de relações hierárquicas e funcionais.

O amplo panorama de transformações sociais, políticas, tecnológicas e culturais ocorridas no século XX foi determinante na prática musical, sobretudo na chamada *música de concerto*. Os paradigmas artísticos tradicionais se enfraqueciam, favorecendo o desenvolvimento de um cenário marcado por intensas experimentações e pelo surgimento de novas concepções estéticas que redefiniram os modos de criação e fruição da arte em escala global (Grout; Palisca, 2007).

A crise decorrente da saturação do cromatismo romântico ao fim do século XIX e início do século XX, anunciava uma nova era motivando a ruptura com as raízes tonais que historicamente sustentaram a linguagem musical ocidental, fomentando a elaboração de novos paradigmas sonoros. Embora enfrentassem o mesmo dilema criativo ao dispensar os antigos fundamentos harmônicos, movimentos como o expressionismo, o atonalismo, o neoclassicismo, o serialismo, o minimalismo e a música aleatória, dentre outros, desenvolveram princípios composicionais, organizacionais e analíticos próprios, além de promoverem experiências auditivas particulares (Carpeaux, 2001).

Em Viena, no início do século XX, Schoenberg renunciava às formas e técnicas tradicionais ao se afastar do romantismo tardio e da tonalidade expandida e adentrar os territórios desconhecidos da profunda expressão subjetiva. Apesar de sua produção ter sido amplamente rejeitada ao longo de toda a vida, a obra Pierrot Lunaire (1912) obteve certa aceitação e notoriedade, despertando o interesse de grandes nomes da música como Debussy, Ravel e Stravinsky, sobretudo por manter elementos do discurso tradicional enquanto antecipava a estruturação do discurso atonal que seria efetivada com o serialismo (Griffiths, 1998; Grout; Palisca, 2007).

Desenvolvido por Schoenberg, o serialismo pretendia restabelecer a ordem e a coerência formal do discurso musical após o período da chamada "atonalidade livre"[1] (1908 -

[1] O atonalismo livre refere-se à fase em que Schoenberg e seus discípulos renunciaram deliberadamente às leis da tonalidade tradicional, sem ainda possuírem um novo sistema ordenador (Grout; Palisca, 2007; Massin, 1997). Embora tenha permitido uma expressão subjetiva e expressionista sem precedentes, essa fase era percebida por

1923), percebido pelo compositor como excessivamente anárquico. A estruturação do discurso atonal por meio desse sistema consistiu em uma tentativa de organização rigorosa e igualitária das alturas do sistema temperado. O serialismo foi posteriormente aprofundado por seus discípulos Alban Berg e Anton Webern, compositores reconhecidos como integrantes da chamada Segunda Escola de Viena[2] (Carpeaux, 2001; Grout; Palisca, 2007; Massin, 1997).

Em termos gerais, o serialismo estrutura o material musical a partir de uma sequência previamente definida das doze alturas do sistema temperado, denominada série. O pensamento compositivo é fundamentado na própria série, que passa por diferentes operações de transformação, permitindo múltiplas possibilidades de elaboração melódica, harmônica e formal sem recorrer aos mecanismos tradicionais da tonalidade (Grout; Palisca, 2007; Massin, 1997).

Enquanto sistema de organização sonora, o serialismo implicou a relativização de parâmetros historicamente considerados fundamentais para o pensamento compositivo tradicional, como o registro. As alturas passaram a ser concebidas menos em função do registro e mais a partir das relações intervalares estabelecidas entre elas (Griffiths, 1998; Massin, 1997). Este deslocamento produziu transformações significativas tanto no pensamento compositivo quanto nas abordagens analíticas desenvolvidas ao longo do século XX, favorecendo perspectivas voltadas às relações intervalares e às operações de transformação dos materiais musicais (Massin, 1997).

Nesse contexto, consolidou-se, sobretudo no ambiente acadêmico estadunidense, um campo teórico voltado à análise de repertórios não tonais do século XX, convencionalmente chamado de Teoria pós-tonal. Um dos marcos centrais desse processo foi a publicação de *The Structure of Atonal Music*, de Allen Forte, em 1973. A importância dessa obra se deve ao fato de ter oferecido uma sistematização ampla e uma nomenclatura padronizada para o estudo de obras que, até então, não eram abordadas por meio de uma base analítica tão rigorosamente organizada. Na década seguinte, John Rahn deu continuidade a esse processo com *Basic Atonal Theory* (1980), obra que aprofundou o grau de formalização da teoria por meio de modelos matemáticos. Posteriormente, Joseph Straus, em *Introduction to Post-Tonal Theory* (1990),

Schoenberg como um estágio de transição ou "anarquia", pois a atonalidade ainda carecia de uma lógica estrutural interna tão coerente quanto a do sistema tonal, lacuna que seria preenchida com a criação do serialismo (Carpeaux, 2001; Massin, 1997).

[2] A Segunda Escola de Viena foi um influente grupo de compositores do início do século XX, formado por Arnold Schoenberg e seus discípulos Alban Berg e Anton Webern, que revolucionou a música ocidental ao promover a transição da tonalidade tradicional para o atonalismo e o sistema dodecafônico (Massin, 1997).

organizou o consenso teórico emergente e o apresentou de maneira mais acessível, voltada principalmente ao ensino (Lewandowski, 2025; Salles, 2016; Straus, 2000).

Foi nesse âmbito que se consolidou a noção de *espaço de classes de alturas*, categoria conceitual na qual as alturas são compreendidas de forma cíclica, a partir da equivalência de oitavas e da constituição de um sistema modular fechado, em que os pontos inicial e final coincidem. A literatura consultada situa a formulação desse conceito em um percurso que envolve diferentes contribuições, associadas a autores como Babbitt (1987), Forte (1973), Morris (1995) e Straus (1990), entre outros (Forte, 1973; Lewandowski, 2025; Martins, 1999; Straus, 2000).

Em contextos modernos que procuravam superar os acordos hierárquicos tradicionais, o espaço de classes de alturas (ou classes de notas) foi amplamente explorado como ferramenta de mapeamento, organização e articulação das alturas do sistema temperado. Frequentemente, é representado por um diagrama circular (Figura 3) que dispõe as alturas em doze pontos equidistantes, aqui, denominado como círculo das alturas.

Em razão da semelhança com um mostrador de relógio, da qual decorre seu forte apelo visual, o círculo das alturas se configura de maneira autoexplicativa, favorecendo a assimilação espacial intuitiva e incontestável das alturas do sistema temperado. Em contraste com a linearidade característica da notação musical tradicional, o círculo das alturas organiza as alturas de forma cíclica e proporcional, ampliando as possibilidades de visualização de materiais musicais específicos.

Determinadas relações de simetria e assimetria de alturas em escalas e modos, embora estruturalmente presentes nos materiais musicais, podem ser pouco evidentes quando analisadas por meio da notação tradicional ou das profundas abstrações numéricas propostas em vertentes da teoria pós-tonal. É, portanto, conveniente adotar outras formas de concepção que permitam, ao mesmo tempo, a abstração de determinados aspectos representados na notação tradicional e tornar mais acessíveis as relações descritas pelos procedimentos numéricos e matemáticos da teoria pós-tonal. Nesse sentido, o presente trabalho se justifica por propor possibilidades de visualização que permitam observar com maior clareza essas relações estruturais no interior dos materiais musicais e, ainda, por sistematizar os processos pelos quais tal empreendimento será perseguido.

A presente pesquisa tem por objetivo geral investigar o potencial do círculo das alturas como ferramenta de visualização de simetrias e assimetrias em escalas e modos. Como objetivos específicos figuram: a) investigar relações de simetria interna e externa por

recorrência de classes intervalares em conjuntos específicos; b) fundamentar processos analíticos que sirvam de base para verificação da proposta, inclusive em futuras abordagens.

A presente pesquisa é de natureza aplicada, isto é, parte da produção de conhecimento para aplicação prática e possível solução de problemas específicos. Nesse sentido, o círculo das alturas será aplicado ao estudo de certos problemas relacionados à prática de teoria da música visando sua melhor compreensão. Do ponto de vista dos procedimentos metodológicos, a presente pesquisa está situada no campo da pesquisa-ação, pois há uma estreita relação entre a observação do problema (neste caso, a necessidade de possibilitar novas formas de visualização para certas relações teórico-musicais) e ações para mitigação do mesmo (isto é, o uso do círculo das alturas em abordagens originais), bem como a inferência do presente autor na realidade pesquisada.

O segundo capítulo apresenta o referencial teórico que sustenta a utilização do círculo das alturas nesta pesquisa, a partir das perspectivas de Straus (2000) e Codeço (2019). Nesse capítulo são pormenorizados conceitos fundamentais para a compreensão da proposta, além de serem definidas as convenções gráficas que orientam as representações visuais adotadas ao longo do trabalho.

O terceiro capítulo dedica-se às aplicações práticas, introduzindo o procedimento analítico original de *Simetria por Recorrência de Classes Intervalares*. Por meio de representações no círculo das alturas, o capítulo analisa o potencial de simetria interna e externa de escalas e modos.

Por fim, são apresentadas as conclusões da presente pesquisa tanto em caráter a curto prazo quanto a médio e longo prazos.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, serão pormenorizadas duas aplicações distintas do círculo das alturas que serão utilizadas no presente trabalho: uma realizada por Straus (2000); [3] e outra por Codeço (2019).[4]

A aplicação do círculo das alturas proposta por Straus está estabelecida em seu livro *Introdução à Teoria Pós-tonal* (2000). Esta obra, segundo o autor, pretende oferecer uma base conceitual acerca da Teoria Pós-Tonal destinada aos cursos de análise e técnicas composicionais do século XX emergentes no momento de sua publicação em 1990. O livro é conhecido como uma das principais sistematizações dos conceitos básicos que constituem a Teoria Pós-Tonal. Entre eles constam equivalência de oitava, equivalência enarmônica, classe de notas, notação com inteiros, sistema módulo 12, entre outros. Assim, a obra é também fundamental no que diz respeito à compreensão e à utilização do círculo das alturas.

Já o trabalho de Codeço (2019) faz uso específico do círculo das alturas como ferramenta analítica que obedece à sua própria sistematização de possíveis movimentos de desenvolvimento melódico. Este recurso é mobilizado no âmbito da Teoria do Domínio Sonoro (doravante, TDS), que entende o domínio sonoro como um espaço tridimensional abstrato e utiliza modelos matemáticos para descrever e analisar transformações de materiais em níveis distintos, se apresentando como uma proposta analítico-composicional que aproxima os campos da música e matemática.

Tais abordagens serão pormenorizadas a seguir.

2.1 Aplicação do círculo das alturas na Teoria Pós-Tonal (Straus, 2000)

Em seu trabalho, Straus (2000) oferece uma introdução abrangente acerca da teoria pós-tonal focada em três estéticas musicais do século XX (música atonal livre, música de doze

[3] Joseph Nathan Straus é um teórico da música cuja atuação é voltada para a produção musical do século XX. Autor de livros, artigos técnicos sobre teoria musical, estudos analíticos sobre a música moderna e manuais didáticos amplamente relevantes na área, tem parte significativa de sua produção reconhecida com prêmios concedidos pela Society for Music Theory (SMT), instituição da qual foi presidente no período de 1997 a 1999. Para maiores informações, acesse: https://www.josephstraus.com/about.

[4] André Codeço é compositor, maestro, pesquisador, pianista e teórico da música, cuja atuação concentra-se na aproximação entre os campos da música e matemática, tendo sua produção reconhecida por prêmios em concursos nacionais e internacionais. Doutor e mestre em Música pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e atualmente, professor adjunto no Departamento de Música da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Para maiores informações, acesse: https://www.andrecodeco.com/

sons e *música cêntrica*[5]) e desenvolve, ao final de cada capítulo, breves análises de obras representativas e amplamente discutidas de compositores como Webern, Schoenberg, Stravinsky, Bartók dentre outros, a fim de ilustrar os conceitos teóricos apresentados.[6]

O círculo das alturas (no livro denominado mostrador de relógio) é inicialmente apresentado no primeiro capítulo do livro, o qual se dedica aos conceitos e definições básicas, sendo assim intitulado. Neste primeiro momento, o círculo das alturas é mobilizado com intuito de ilustrar o espaço modular no qual as alturas do sistema temperado são compreendidas no âmbito da teoria pós-tonal, e é frequentemente sugerido pelo autor como ferramenta de visualização.

Mais adiante, os capítulos dois, três e quatro adotam o círculo das alturas na exemplificação de certas ferramentas e conceitos fundamentais no tratamento das alturas. Algumas destas formulações serão cruciais no andamento da presente pesquisa, como as operações de transposição, inversão e relações de simetria sobre eixos específicos.

O círculo das alturas será aplicado neste trabalho para representar materiais específicos, não necessariamente aplicados ao contexto pós-tonal, mas recorrentes no estudo contemporâneo da teoria musical em níveis distintos. A plena apropriação do círculo das alturas, no entanto, requer uma extensa compreensão de determinados conceitos elementares formulados no âmbito da teoria pós-tonal e apresentados por Straus (2000) os quais fornecem o suporte necessário para a exploração de suas potencialidades.

2.1.1 Conceitos preliminares

Equivalência de oitava

O primeiro capítulo do livro aborda a adoção de certas equivalências no que diz respeito às alturas do sistema temperado. A primeira delas é a equivalência de oitavas. Quanto a isso, Straus afirma que

> Quando assumimos a equivalência de oitava, e outros tipos de equivalências que discutiremos mais adiante, nosso objetivo não é aplainar ou rejeitar a variedade da superfície musical. Mais que isso, procuramos descobrir as relações que permeiam a superfície e emprestam unidade e coerência a obras musicais (Ibid., 2000, p. 2).

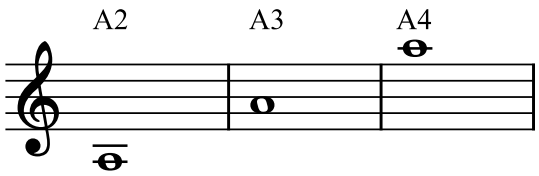
[5] Straus define a música cêntrica como aquela que se organiza em torno de centros referenciais, sejam eles notas individuais, classes de notas, conjuntos de classes de notas ou, ainda, classes de conjuntos. O autor enfatiza que, embora toda música tonal seja cêntrica, nem toda música cêntrica é tonal (Ibid., p 105).

[6] Entre elas: "Nacht", do Pierrot Lunaire, Op. 21 de Schoenberg; Primeiro movimento do Quarteto de Cordas Nº 4 de Bartók; Movimentos para Quarteto de Cordas, Op. 5, Nº 4 de Webern; e Oedipus Rex, nºs de ensaio 167–70 de Stravinsky.

Ao afirmar que “notas separadas por uma ou mais oitavas são geralmente percebidas de algum modo como equivalentes” (Ibid., p. 1) o autor estabelece a correspondência funcional de alturas separadas por intervalos de oitava justa. Sendo assim, “o nome Lá, por exemplo, é dado não somente para uma nota específica [...], mas também a todas as outras notas uma ou mais oitavas acima ou abaixo dela” (Ibid., p. 1).

Segundo o autor, no entanto, “equivalência não é o mesmo que identidade” (Ibid., p. 1). Isto, porque mesmo que se possa considerar todas as alturas num universo limitado de uma oitava para fins analíticos, elas podem se apresentar, na prática, em oitavas, dinâmicas, texturas e timbres distintos, como ilustrado na Figura 1, em que cada nota representa a mesma função de altura, embora em oitavas diferentes.[7]

Figura 1 - Equivalência de oitavas da altura Lá



Fonte: elaborado pelo autor

Classe de notas

A equivalência de oitavas subentende a distinção entre notas e classe de notas. Uma nota, ou altura, refere-se a uma frequência específica, por exemplo, o C3 do piano. Já uma classe de notas diz respeito a um conjunto de notas homônimas (C3, C4, C5 etc.), ou seja, todas as alturas denominadas Dó são abstraídas e consideradas como componentes da classe de notas Dó, independendo da compatibilidade de frequências.

Assim, considerando as alturas do sistema temperado, tem-se 12 classes de notas que correspondem aos 12 semitons cromáticos.

Equivalência enarmônica
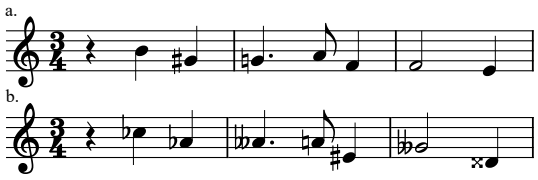
Dando sequência à adoção de equivalências define-se o conceito de equivalência enarmônica, que, embora possa parecer familiar, assume outros princípios interpretativos no pós-tonalismo.

[7] Os índices acústicos Franco-belga e Acústico Internacional diferem quanto à numeração das oitavas. Neste trabalho, adota-se o Índice Acústico Franco-belga, no qual a nota Lá representada como A2 corresponde, no Índice Acústico Internacional, a A3.

As alturas Fá♯ e Sol♭, por exemplo, assumem funções significativamente diferentes em um contexto tonal de Dó maior por representarem diferentes graus da escala (a quarta aumentada e a quinta diminuta, respectivamente). O pós-tonalismo, no entanto, ao abandonar as noções tonais hierárquicas, desconsidera igualmente as distinções funcionais de uma mesma altura. Desta forma, Fá♯ e Sol♭ passam a ser equivalentes tanto do ponto de vista enarmônico quanto funcional.

A grande maioria das estéticas musicais do século XX, entretanto, não deixou de considerar a notação tradicional, em que o Fá♯ e o Sol♭, por exemplo, mesmo equivalentes do ponto de vista enarmônico e funcional, são notados de formas distintas. Neste sentido, o autor destaca que, na maioria das vezes, as escolhas de notação de determinada altura na notação tradicional são definidas arbitrariamente "pela simples conveniência e legibilidade" (Ibid., p. 3). A Figura 2 exemplifica esta afirmação ao representar melodias enarmonicamente equivalentes, dentre as quais a primeira delas (a) é consideravelmente mais legível.

Figura 2 - Melodias enarmonicamente equivalentes



Fonte: Straus (2000, p. 3)

Notação com inteiros

Uma vez que as alturas do sistema temperado poderão, em contextos específicos, prescindir de denominações distintas, o autor introduz a notação com inteiros de 0 a 11 para se referir às 12 classes de notas (Tabela 1).

Para além do fato de os inteiros serem habituais na notação musical (como a própria numeração de oitavas da escala geral), a notação com inteiros permite uma manipulação ampliada das alturas em relação à notação tradicional. Isto, porque viabiliza a realização de operações matemáticas que possuam simultaneamente sentido numérico e musical, desempenhando, portanto, atribuições teóricas e analíticas relevantes (Ibid., p. 3).

Sobre tais operações, Straus afirma que

> Nunca iremos fazer coisas com os inteiros que não tenham significado musical. Não dividiremos inteiros, porque, embora dividindo 7 por 11 tenha sentido numérico, dividir Sol por Si não tem muito sentido musical. Outras operações aritméticas, entretanto, provar-se-ão musicalmente úteis. Iremos, por exemplo, subtrair números,

> porque, como veremos, a subtração nos dá um meio simples de falar sobre intervalos. Computar a distância entre 7 e 11 subtraindo 7 de 11 tem sentido numérico, e a ideia de computar a distância entre Sol e Si tem sentido musical (Ibid., p. 3).

Tabela 1 - Notação com inteiros

NOTAÇÃO COM INTEIROS	CONTEÚDO DA CLASSE DE NOTAS
0	Si♯, Dó, Ré𝄫
1	Dó♯, Ré♭
2	Dó𝄪, Ré, Mi𝄫
3	Ré♯, Mi♭
4	Ré𝄪, Mi, Fá♭
5	Mi♯, Fá,
6	Fá♯, Sol♭
7	Fá𝄪, Sol, Lá𝄫
8	Sol♯, Lá♭
9	Sol𝄪, Lá, Si𝄫
10	Lá♯, Si♭
11	Lá𝄪, Si, Dó♭

Fonte: Straus (2000, p. 3)

O autor enfatiza, ainda, que é possível fazer o uso de ambas as notações, isto é, a notação tradicional e a notação com inteiros, sobretudo no que diz respeito ao trato analítico.

Módulo 12 (Mod 12)

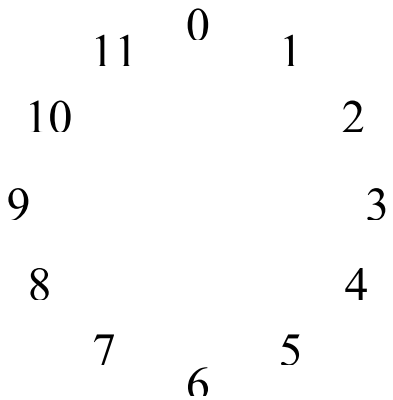
Assumir que toda altura no sistema temperado pode ser reduzida a uma classe de nota entre 0 e 11, sugere, portanto, uma organização cíclica de apenas 12 posições, na qual deslocar uma altura em 12 semitons (uma oitava) acima ou abaixo conduz sempre à mesma classe de nota.

Partindo desta premissa, qualquer número maior que 11 ou menor que 0 deve ser reduzido a um inteiro equivalente entre 0 e 11 por meio da adição ou subtração do valor 12. Por exemplo, o Ré corresponde à classe de nota 2. Ao ser transposto uma oitava acima, acrescentam-se 12 semitons ao seu valor, resultando em 14 ($2 + 12 = 14$). Como este valor (14) não está compreendido entre 0 e 11, subtrai-se 12 ($14 - 12 = 2$), a fim de reduzi-lo a um inteiro equivalente entre 0 e 11, neste caso, retornando ao valor inicial (2).

A essa propriedade atribuímos o nome de módulo 12 aritmético (mod 12), em que o número 12 atua como módulo do sistema. A título de comparação por semelhança, os dias da semana, embora vivenciados em tempo linear, são organizados em um espaço modular de 7 posições, compreendido entre segunda-feira e domingo (no caso, mod 7).

É neste ponto que o autor introduz pela primeira vez o círculo das alturas, o apresentando como recurso visual para a assimilação do conceito de módulo 12.

Figura 3 - Círculo das alturas de Straus



Fonte: Straus (2000, p. 4)

Intervalos entre classes de notas
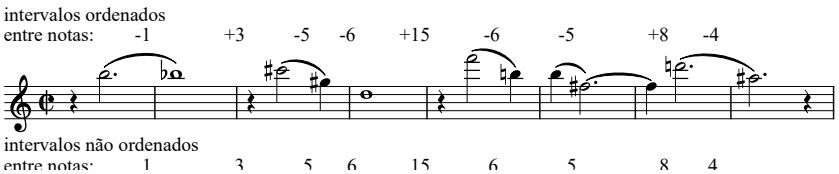
A nomeação dos intervalos (distância entre duas notas) como é conhecida no tonalismo não se faz pertinente no contexto pós-tonal, isto, porque assim como a nomeação de notas, possui implicações funcionais. Em outras palavras, assim como é considerada a equivalência enarmônica das alturas, que prescinde a função tonal e utiliza a notação por inteiros, os intervalos entre notas serão nomeados de acordo com a quantidade de semitons que compreendem.

Um intervalo de quarta aumentada, por exemplo, não será mais interpretado como o quarto grau aumentado de uma escala específica, nem como uma dissonância, mas sim como

um intervalo entre notas de 6 semitons. Em termos mais práticos, uma quarta aumentada, assim como uma quinta diminuta, são entidades pertencentes ao intervalo entre classes de notas 6.

Os intervalos entre notas podem ser compreendidos como *intervalos ordenados* e *intervalos não ordenados*. Os intervalos ordenados levam em conta a direção do deslocamento, sendo precedidos por um sinal de mais (+) para indicar intervalos ascendentes ou um sinal de menos (-) para os descendentes. Por outro lado, os intervalos não ordenados desconsideram a direção do deslocamento, representando apenas o espaço absoluto em semitons entre as classes de notas.

Figura 4 - Intervalos ordenados e não ordenados entre notas presentes no *Quarteto de Cordas N.03*, de Schoenberg.



Fonte: Straus (2000, p. 6)

A esse respeito, o autor afirma que

> Os intervalos ordenados entre notas focam nossa atenção sobre o contorno da linha, seu equilíbrio de movimento ascendente e descendente. Os intervalos não ordenados entre notas ignoram o contorno e concentram-se inteiramente na distância entre as notas (Ibid., p. 6).

A classificação de um intervalo como ordenado ou não ordenado, portanto, varia de acordo com a intenção analítica.

Seguindo para a compreensão de intervalos entre classes de notas, esta noção é entendida como a distância entre duas classes de notas. A distinção entre intervalos de notas e intervalos de classes de notas se deve ao fato de que os intervalos entre classes de notas se dão no espaço modular das alturas.

Os intervalos entre classes de notas podem igualmente ser considerados como ordenados ou não ordenados. Os intervalos ordenados entre classes de notas serão sempre considerados de forma ascendente, isto é, no sentido horário do círculo das alturas. Este critério garante que um intervalo ordenado entre classes de notas seja sempre compreendido como um inteiro entre 0 e 11, respeitando o sistema mod 12. Para calculá-los, Straus estabelece a fórmula $y - x\ (mod\ 12)$, onde subtrai-se a nota inicial (x) da nota final (y). Caso o resultado seja negativo, adiciona-se 12 para encontrar o valor equivalente no sistema mod 12. Como a ordem

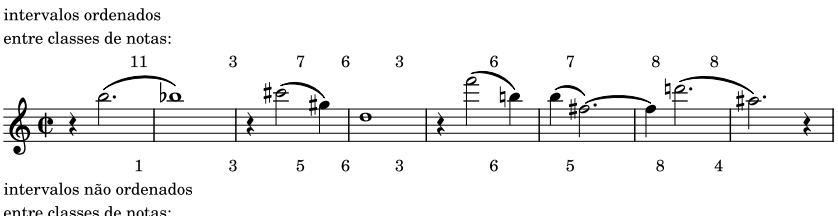
importa, o intervalo ordenado entre classes de notas Lá e Fá ($5 - 9 = -4\ (mod\ 12)\ 8$), por exemplo, será diferente daquele entre Fá e Lá ($9 - 5 = 4$) (Ibid., p. 7). Em termos mais práticos, para calcular um intervalo ordenado entre classes de notas, basta contar os semitons de forma ascendente da classe de notas inicial para a final.

Os intervalos ordenados resultantes da inversão da ordem entre as mesmas classes de notas são considerados complementos um do outro no sistema módulo 12. Isso ocorre porque a soma das duas distâncias (de x para y e de y para x) resulta sempre em 12. No contexto do exemplo anterior (Fá e Lá), os intervalos ordenados entre classes de notas 4 e 8 são complementares, assim como os pares 1 e 11, 2 e 10, 3 e 9, 5 e 7, 6 e 6.

Por outro lado, ao desconsiderar a direção do deslocamento em intervalos não ordenados entre classes de notas, haverá sempre duas rotas disponíveis entre um par de classes de notas ($y - x\ (mod\ 12)$ e $x - y\ (mod 12)$). Dentre elas, adota-se necessariamente aquela de menor extensão, uma vez que foco é exclusivamente a distância absoluta entre as alturas. Neste sentido, o intervalo não ordenado entre as classes de notas Lá e Fá será o mesmo que entre Fá e Lá, pois o caminho mais curto entre estas alturas é de 4 semitons (Ibid., p. 7). De forma mais prática, para calcular um intervalo não ordenado entre classes de notas, basta contar os semitons da rota mais curta entre a classe de notas inicial para a final (Ibid., p. 8).

Um intervalo não ordenado entre classes de notas, portanto, será sempre igual ou menor do que 6 semitons, pois considerando os complementos mod 12, nunca será necessário percorrer mais do que 6 semitons para atingir qualquer outra nota pela via mais curta (Ibid., p. 7).

Figura 5 - Intervalos ordenados e não ordenados entre classes de notas presentes no *Quarteto de Cordas N.03*, de Schoenberg.



Fonte: Straus (2000, p. 6. Adaptado)

Classe de intervalos

As classes de intervalos nada mais são do que intervalos não ordenados entre classes de notas. Assim como uma classe de notas agrupa todas as notas separadas por oitavas, uma classe de intervalos contém todos os intervalos separados por oitavas. Desta forma, tanto os

intervalos entre classes de notas maiores do que 6 semitons, como os intervalos compostos são "equivalentes a seus complementos em mod 12" (Ibid., p. 8). A Tabela 2 expõe as sete classes intervalares[8] possíveis e alguns de seus conteúdos.

Tabela 2 - Classes de intervalos

Classe de intervalos:	0	1	2	3	4	5	6
Intervalos entre as notas:	0 12 24	1 11 13	2 10 14	3 9 15	4 8 16	5 7 17	6 18

Fonte: Straus (2000, p. 9)

A teoria pós-tonal, portanto, apresenta quatro formas diferentes para descrever um intervalo (intervalo ordenado e não ordenado entre notas, e intervalo ordenado e não ordenado entre classes de notas), que oferecem diferentes níveis de abstração e especificidade para a análise musical. O presente trabalho fará uso de intervalos ordenados e não ordenados entre classes de notas mediante o objetivo descritivo e epistemológico.

Conjuntos de classes de notas

Um agrupamento não ordenado de classes de notas é denominado conjunto de classes de notas. Sob esta perspectiva, foca-se apenas na sonoridade pura constituída pelas classes de notas, independentemente de como são distribuídas no tempo ou no espaço. Por essa razão, um conjunto de classes de notas preserva sua identidade independentemente de como é manipulado na música, seja como melodia, acorde ou uma combinação de ambos (Ibid., p. 29).

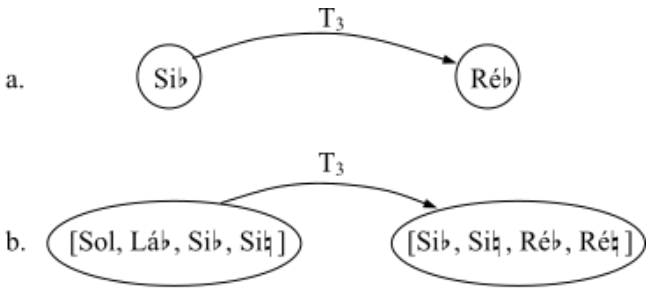
Essa característica de independência da ordem é o que diferencia os conjuntos de classes de notas das séries dodecafônicas, nas quais a sequência das notas é imprescindível e, se alterada, modificará a identidade sonora da série (Ibid., p. 133).

[8] Doravante, "classe de intervalos" e "classe intervalar", no singular e no plural, serão tratados como termos equivalentes, assim como na obra de Straus (2000).

Transposição

Segundo Straus, a transposição corresponde a uma operação de transformação de alturas que desloca simultaneamente todas as classes de notas de um material por uma mesma distância intervalar. Como todos os elementos são submetidos ao mesmo deslocamento, as relações intervalares internas permanecem inalteradas, fazendo com que a estrutura do conjunto seja preservada, apesar da mudança de posicionamento no espaço das alturas. No contexto da teoria pós-tonal, essa operação é representada pela notação T_n, na qual *n* indica a quantidade de semitons empregada no deslocamento (Ibid., p. 33). A Figura 6 exemplifica esta operação ao demonstrar a operação T_3 aplicada a uma nota (a.) e a um conjunto de classes de notas (b.).

Figura 6 - Operação T_n



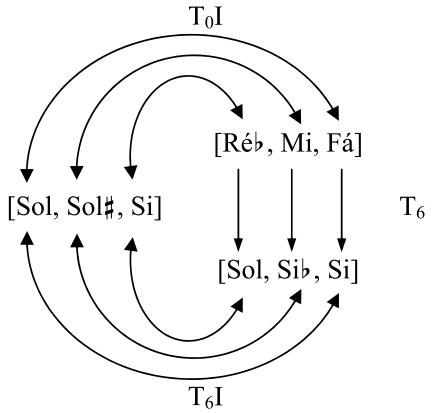
Fonte: Straus (2000, p. 37)

Inversão

A inversão consiste em uma operação que reorganiza as classes de notas de modo simétrico em torno de um eixo de referência. Em termos práticos, cada intervalo ascendente é convertido em um intervalo descendente de mesma magnitude e vice-versa, produzindo uma configuração que pode ser compreendida como uma imagem espelhada do material original. Embora as alturas sejam alteradas, determinadas propriedades estruturais e proporcionais permanecem as mesmas.

Straus apresenta duas formas de representar essa operação. A primeira delas é a inversão expressa como T_nI. Neste caso, a inversão é compreendida como uma operação composta, resultante da combinação entre uma inversão e uma transposição. O procedimento consiste em inverter inicialmente as classes de notas e, em seguida, transpor o resultado por um determinado intervalo n (Ibid., p. 37). O valor de n pode ser identificado a partir da soma entre os pares de classes de notas correspondentes sob a operação de inversão, considerada em mod 12. A Figura 7 exemplifica esta operação ao apresentar três conjuntos de classes de notas relacionados entre si por inversão e transposição.

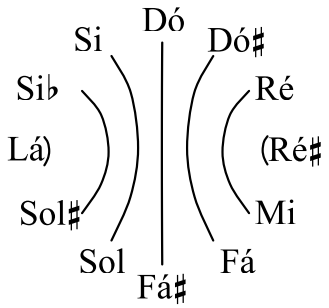
Figura 7 - Operação T_nI



Fonte: Straus (2000, p. 40)

O segundo tipo de inversão é expresso por $I\frac{x}{y}$, em que x e y correspondem a duas classes de notas que se mapeiam uma na outra sob determinada operação de inversão. Como uma mesma operação de inversão estabelece simultaneamente diversas correspondências entre pares de classes de notas, uma única inversão pode receber diferentes designações $I\frac{x}{y}$ igualmente válidas. A Figura 8 exemplifica esta operação ao apresentar diferentes pares de classes de notas associados a uma mesma inversão. A escolha de qual par utilizar como referência depende, portanto, do contexto analítico e dos elementos que se deseja enfatizar (Ibid., p. 43).

Figura 8 - Operação $I\frac{x}{y}$



$$I^{Lá}_{Lá} = I^{Sib}_{Sol♯} = I^{Si}_{Sol} = I^{Dó}_{Fá♯} = I^{Dó♯}_{Fá} = I^{Ré}_{Mi} = I^{Ré♯}_{Ré♯}$$

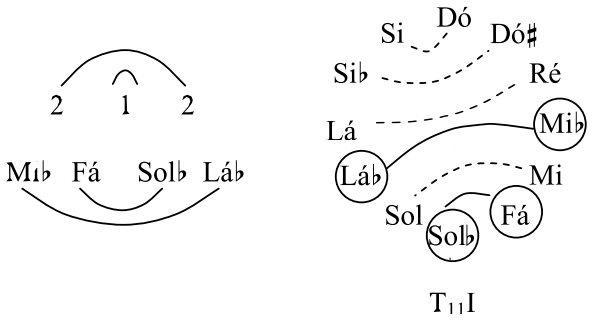
Fonte: Straus (2000, p. 43)

Simetria inversiva

Straus define a simetria inversiva como uma propriedade de conjuntos capazes de se mapear integralmente em si mesmos sob uma operação de inversão T_nI. Nesses casos, cada classe de nota do conjunto possui uma correspondente inversiva que também pertence ao próprio conjunto, fazendo com que a estrutura permaneça inalterada após a transformação. Conjuntos com essa propriedade são denominados como inversivamente simétricos e apresentam suas classes de notas distribuídas de forma proporcional em torno de um ou mais eixos de simetria.

Segundo o autor, essa propriedade pode ser observada pela própria disposição intervalar do conjunto. Quando organizados adequadamente, os intervalos lidos em uma direção correspondem aos intervalos lidos na direção oposta, evidenciando uma organização simétrica das classes de notas. No círculo das alturas, essa relação torna-se particularmente evidente, uma vez que as correspondências inversivas podem ser visualizadas em torno de um eixo comum (Ibid., p. 74). No conjunto da Figura 9, formado por Mi♭, Fá, Sol♭ e Lá♭, a simetria inversiva é evidenciada pela disposição intervalar 2 - 1 - 2. Sob a operação $T_{11}I$, Mi♭ corresponde a Lá♭ e Fá corresponde a Sol♭, de modo que todas as classes de notas são mapeadas em outras classes pertencentes ao próprio conjunto.

Figura 9 - Conjunto inversamente simétrico



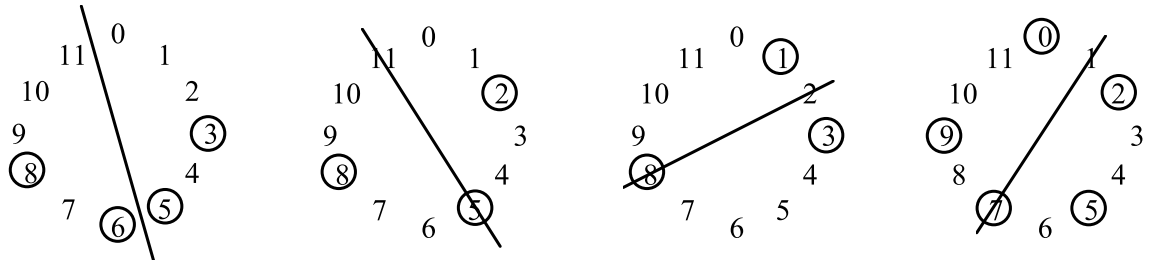
Fonte: Straus (2000, p. 74)

Eixo de inversão

O eixo de inversão corresponde ao referencial em torno do qual se estabelecem as relações de simetria inversiva entre as classes de notas. Sua posição é determinada pela operação T_nI responsável pelo auto mapeamento do conjunto, em que a operação $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 6$ representam as notas pelas quais passa o eixo. Se o valor de n for um número par, o eixo estará disposto exatamente sobre duas classes de notas separadas por um trítono. Se o valor de n for

um número ímpar o eixo de inversão será situado entre dois pares de classes de notas. Por exemplo, a operação $T_{11}I$ produz um eixo de inversão localizado entre as classes de notas 11 e 0 e 5 e 6 (Figura 10). Quando representado no círculo das alturas, o eixo permite visualizar a organização simétrica do conjunto e identificar as relações inversivas estabelecidas entre seus elementos (Ibid., p. 118).

Figura 10 - Eixo de inversão



Fonte: Straus (2000, p. 119)

2.2 Aplicação do círculo das alturas na Teoria do Domínio Sonoro (Codeço, 2019).

O trabalho de Codeço (2019), apresenta uma abordagem própria do círculo das alturas. A seção 3.7.5, intitulada "Operações no círculo das alturas", dispõe o círculo das alturas como uma ferramenta de auxílio visual que pretende evidenciar características temporais qualitativas das alturas, isto é, a direção ordenada das trajetórias intervalares. Assim, diferentemente da maioria das abordagens tradicionais, como a de Straus, o autor propõe a utilização de setas nos segmentos de reta que conectam as alturas priorizando a ordem e direção do caminho melódico realizado.

Segundo o autor, cada evento musical é evidenciado pela confluência de três parâmetros: altura, duração e dinâmica. O processo de variação e desenvolvimento dos materiais musicais, por sua vez, organiza-se em três eixos de transformação: expansão, retração e substituição. Tais transformações são compreendidas, em primeiro lugar, como operações que mantêm ou não as relações temporais entre os materiais. Considerando que as operações de expansão e retração não preservam a relação temporal do contorno (pois enquanto uma provoca aumento da duração, a outra provoca sua diminuição), apenas as operações de substituição que ocorrem no parâmetro altura são representadas no círculo das alturas. Isso não significa, por exemplo, que exista a mesma quantidade de eventos em todos os materiais, mas que a soma da duração de todos os eventos em questão é sempre a mesma (Codeço, 2019, p. 205)

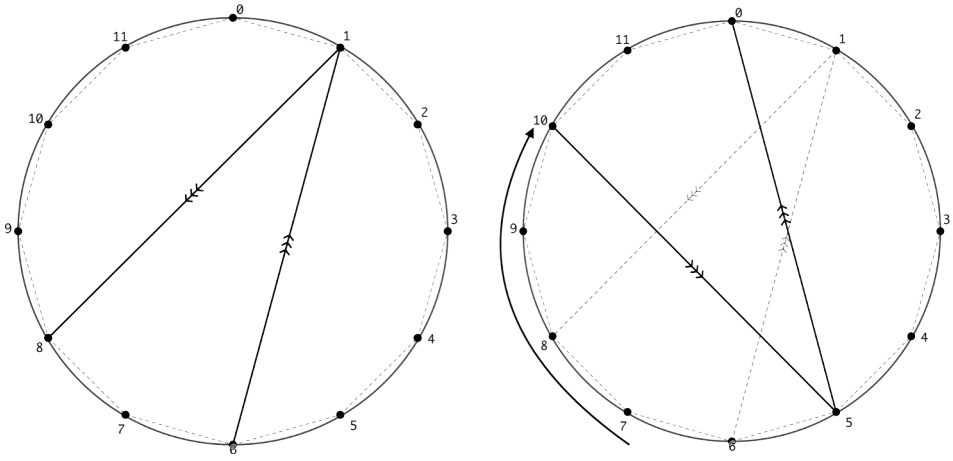
As operações de substituição consideradas por Codeço (2019) e representadas no círculo das alturas são transposição, inversão, retrogradação (já abordadas por Straus), rotação, realocação positiva e realocação negativa, estas duas últimas propostas pelo próprio autor.[9]

2.2.1 Conceitos preliminares

Transposição

Na abordagem proposta por Codeço, a transposição é representada no círculo das alturas como uma rotação geométrica do contorno original. Ao utilizar setas que indicam o percurso entre as alturas, demonstra-se que esta operação preserva tanto o espaço intervalar quanto a ordenação dos elementos e a direção do caminho. Como consequência, o material original e o transposto apresentam figuras geometricamente idênticas, distinguindo-se apenas pela posição ocupada no círculo. Neste sentido, apesar da equivalência estrutural entre os materiais, o autor destaca que a transposição é considerada uma operação geradora de novos elementos contextuais, isto é, as classes de alturas que compõem o material transposto diferem daquelas presentes no material original (Figura 11) (Ibid., p. 207).

Figura 11 - Representação do componente altura [10 5 0] no círculo modular das classes de alturas, uma T4+ de [6 1 8], revelando a similaridade de ordenação entre o componente original e o transposto



Fonte: Codeço (2019, p. 207)

[9] O trabalho de Codeço (2019) elenca uma série de outras ferramentas analíticas que, no entanto, não serão exploradas na presente pesquisa, tais quais: Descrição Algébrica Derivativa (DAD), um sistema proposto pelo autor que realiza abstrações matemáticas das operações de transformação entre os PECs (Potenciais Expressivos Compositivos); Análise Intravetorial que, por sua vez, sustenta a DAD por meio da quantificação algébrica das distâncias, sentidos e trajetórias das transformações melódicas por meio de intravetores; Perturbação Textural, que utiliza uma fórmula matemática original (a Função Textura) para medir a densidade da massa sonora; Interação Linear, uma representação gráfica que expõe isoladamente o nível de perturbação de um único parâmetro de um PEC, revelando o caminho percorrido, e a Interação Multilinear, que integra os índices de perturbação de múltiplos parâmetros expondo a complexidade gestual da superfície musical.

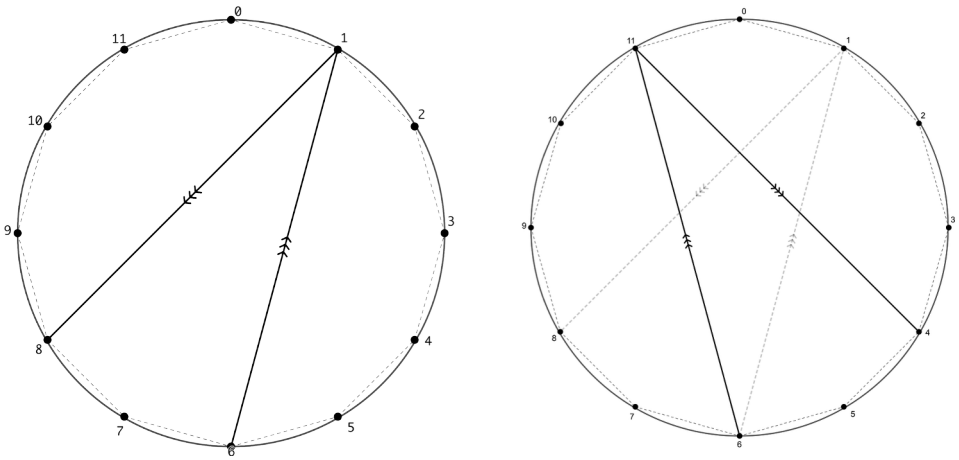
Segundo Codeço, existem casos particulares em que uma operação de transposição pode resultar em uma reflexão parcial em torno de um eixo de simetria[10]. O autor caracteriza esse fenômeno como contextual, uma vez que se manifesta apenas em alguns casos, como na transposição por trítono (T_6). Apesar disso, a operação continua sendo compreendida como uma transposição, e não uma inversão, pois não promove a inversão da direção intervalar nem da ordenação interna dos elementos (Ibid., p. 212).

Portanto, para o autor há uma descrição algébrica específica para as operações de transposição, inversão e retrogradação que mapeiam um círculo no outro, e é esta a ênfase de sua abordagem: descrições algébricas derivativas que sejam suportadas visualmente pelo uso dos círculos. A relação entre a descrição algébrica das operações e sua representação visual se mantém justamente pela proximidade visual entre os círculos.

Inversão

Para o autor, a inversão distingue-se das demais operações por produzir uma reflexão total da figura representada em torno de um eixo associado ao primeiro elemento do material. Como resultado, o material invertido apresenta uma configuração geométrica espelhada em relação ao material original (Ibid., p. 209). A Figura 12 exemplifica esta operação.

Figura 12 - No primeiro círculo, temos a representação do componente altura [6 1 8]. No segundo, temos sua inversão [6 11 5] (em negrito) revelando a relação espelhada, ou a reflexão, em relação ao componente original (linhas pontilhadas)



Fonte: Codeço (2019, p. 209)

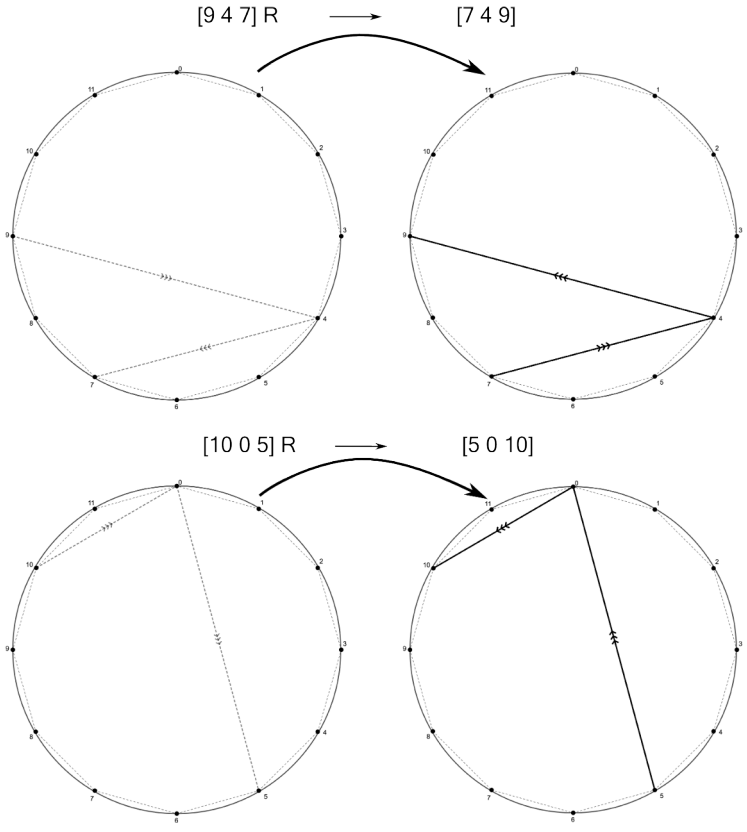
[10] O eixo de simetria pode ser entendido de modo próximo ao eixo de inversão apresentado por Straus (2000), isto é, como uma linha de referência em torno da qual os elementos podem se organizar de forma espelhada, revelando uma relação de simetria entre as alturas.

A reflexão total observada nesta operação decorre da preservação da ordenação interna dos elementos combinada à inversão da direção intervalar, diferentemente da reflexão parcial descrita anteriormente (Ibid., p. 212).

Retrogradação

A retrogradação é caracterizada pela inversão da ordenação interna dos elementos. Nesse procedimento, o último elemento do material original passa a ocupar a primeira posição, enquanto o primeiro passa a ocupar a última, fazendo com que a sequência seja reorganizada em sentido contrário. No entanto, diferentemente da inversão, essa operação preserva a direção dos deslocamentos intervalares, fazendo com que as relações intervalares permaneçam inalteradas apesar da inversão da ordenação interna. No círculo das alturas, a retrogradação resulta em uma figura geometricamente equivalente à do componente original, distinguindo-se apenas pela inversão dos pontos inicial e final da trajetória representada. Por essa razão, não produz relações de reflexão, sejam elas totais ou contextuais (Figura 13) (Ibid., p. 213).

Figura 13 - No primeiro par de círculos, temos a representação do componente altura [9 4 7] e sua retrogradação [7 4 9] revelando a relação de mudança de direção e ordem entre os componentes. No segundo par, temos a representação do componente altura [10 0 5] e sua retrogradação [5 0 10] evidenciando as relações visuais entre os pares retrogradados

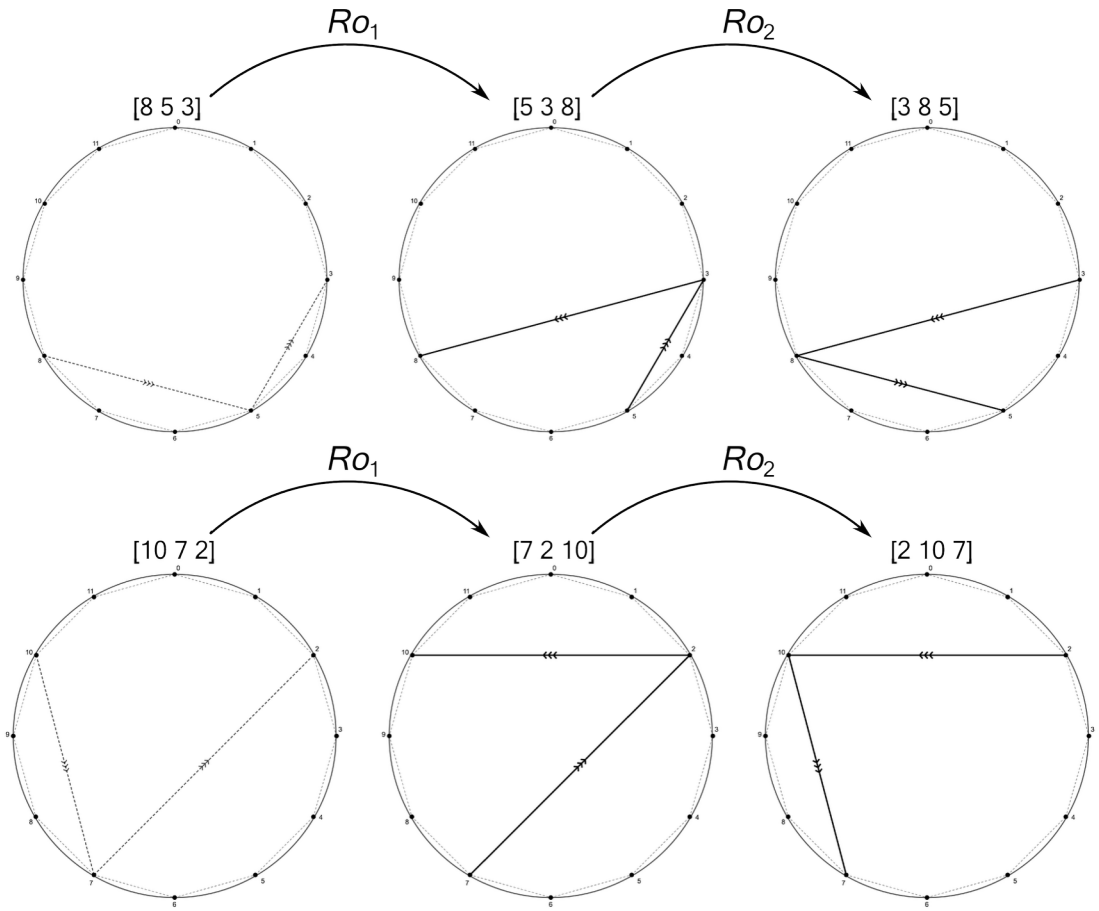


Fonte: Codeço (2019, p. 214)

Rotação

A rotação consiste no deslocamento do ponto de partida do material, fazendo com que a sequência passe a ser considerada a partir de outro elemento. Diferentemente das operações precedentes, essa transformação não preserva a ordenação nem a direção do material original. No círculo das alturas, essa característica resulta em figuras geometricamente distintas do material original, por isso, não são estabelecidas relações de reflexão (Figura 14) (Ibid., p. 213). Como as figuras são distintas, segundo o autor, não há descrições algébricas derivativas que revelem os movimentos de transformação por rotação.

Figura 14 - Operações de substituição por rotação revelando a dessemelhança entre os círculos originais e os rotacionados



Fonte: Codeço (2019, p. 215)

Nesse sentido, o autor afirma que a rotação corresponde à operação de substituição que produz o maior afastamento em relação ao material original, preservando apenas a quantidade de elementos.

Correspondências entre as operações

Após a descrição das operações, Codeço sintetiza suas principais características por meio de um quadro que permite observar os comportamentos de cada operação de forma comparativa. Além das representações geométricas e das relações de reflexão, o quadro evidencia como cada transformação afeta a ordenação dos elementos e a direção do percurso intervalar, relacionando essas propriedades aos respectivos intravetores[11] (Figura 15).

Figura 15 - Exposição das correspondências entre as operações de substituição por transposição, inversão, retrogradação e rotação no círculo das alturas e suas respectivas relações advindas na análise intravetorial

Operação de substituição	***T***	***I***	***Re***	***Ro***
Arquétipo da ordenação interna original (relação *antes que* e *depois que*)	**Mantém**	**Mantem-se de maneira inversa**	**Mantem-se de maneira retrógrada**	**Não é mantida**
Arquétipo da direção intervalar original (relação *maior que* e *menor que*)	**Mantém**	**Mantém (de maneira inversa)**	**Mantem-se de maneira retrógrada**	**Não é mantida**
Reflexão	**Contextual**	**Total**	**Não há reflexão**	**Não há reflexão**
Número de elementos	**Mantém**	**Mantém**	**Não mantém**	**Mantém**
Novos de elementos	**Contextual**	**Contextual**	**Introduz e retira elementos originais**	**Não introduz**
Semelhança gestual com o círculo original	**Total**	**Total**	**Total**	**Nenhuma**
Relações intravetoriais	$\vec{u} = \vec{v}$ $\|\|\vec{u}\|\| = \|\|\vec{v}\|\|$ $f(x) = g(x)$	$\vec{u} = -\vec{v}$, $\|\|\vec{u}\|\| = \|\|\vec{v}\|\|$ $f(x) = -g(x)$	$\vec{u} \neq \vec{v}$ $\|\|\vec{u}\|\| = \|\|\vec{v}\|\|$ $f(x) \neq g(x)$	$\vec{u} \neq \vec{v}$ $\|\|\vec{u}\|\| \neq \|\|\vec{v}\|\|$ $f(x) \neq g(x)$

Fonte: Codeço (2019, p. 216)

2.3 Critérios analíticos e de representação gráfica do círculo das alturas

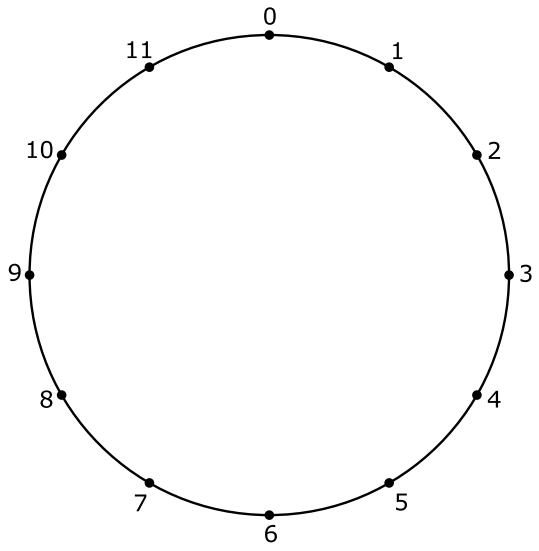
No intuito de fundamentar o uso dos círculos das alturas no presente trabalho, serão adotadas algumas convenções de representação gráfica. Os inteiros compreendidos entre 0 e

[11] Os intravetores são empregados por Codeço como uma ferramenta de descrição algébrica das operações de transformação. Por não se relacionar diretamente com os objetivos da presente pesquisa, a análise intravetorial não será abordada. Para maiores informações, ver Codeço, 2019, p. 151.

11, serão representados por pontos equidistantes dispostos sobre uma circunferência delineada.[12]

Os materiais elencados para a análise serão transformados em curvas geométricas (segmentos de reta), que conectam as classes de nota de maneira específica no círculo das alturas, de acordo com os elementos a eles pertencentes e as interações que se pretende evidenciar. Os segmentos que conectam duas alturas possuirão setas que indicam o caminho intervalar percorrido, isto é, o ponto inicial e final do trajeto e representarão classes intervalares específicas.

Figura 16 - Círculo das alturas



Fonte: elaborado pelo autor

A representação de uma classe intervalar partirá sempre da classe de nota 0 (zero) e se conectará às demais alturas realizando sempre o menor trajeto possível, isto é, considerando os intervalos de forma não ordenada. Assim, as classes de intervalos representarão sempre os mesmos intervalos entre classes de notas, por exemplo, a classe de intervalos 1 compreende os intervalos entre classes de notas Dó – Dó♯ (Ré♭) ou [0 – 1][13] e Dó - Si ou [0 – 11]. A Tabela 3 organiza todas as correspondências seguindo este critério.

[12] As figuras autorais apresentadas na presente pesquisa foram elaboradas utilizando o software GeoGebra e, posteriormente, editadas e finalizadas no software Inkscape.
[13] Para a indicação dos intervalos entre classes de nota, será adotada a notação dos inteiros representativos de cada classe separados por traço e entre colchetes.

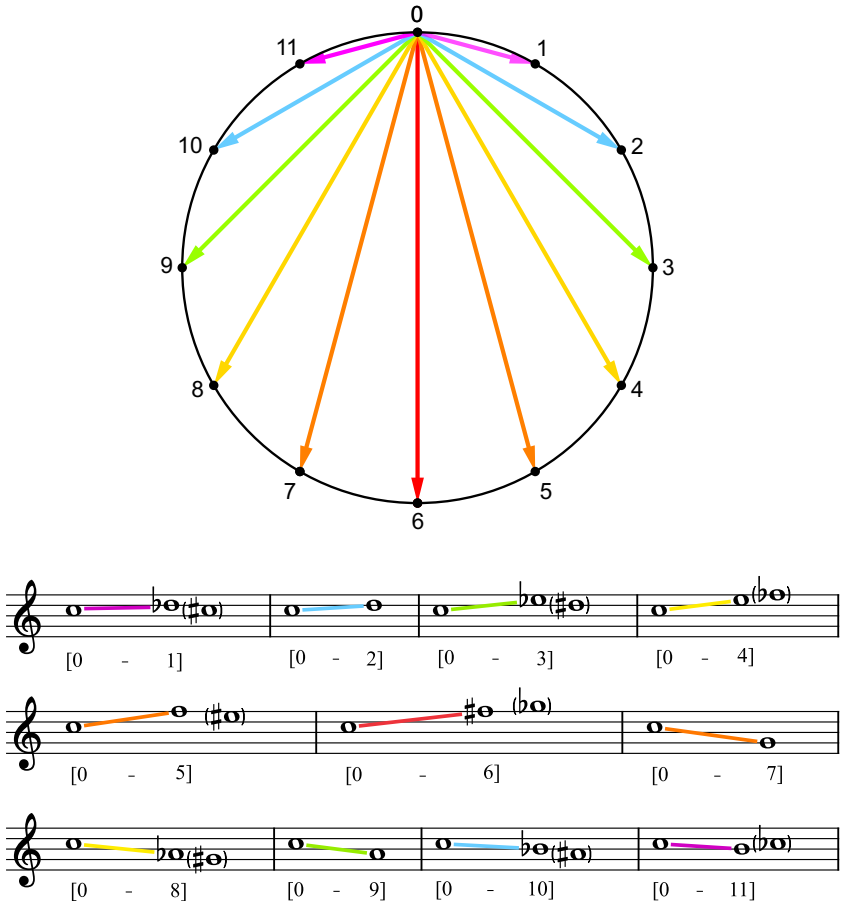
Tabela 3 - Correspondências entre classes de intervalo, intervalos entre classes de nota e suas respectivas notações com inteiros

Classes de intervalo	Intervalos entre classes de nota	Notação com inteiros
1	Dó – Dó♯ (Ré♭)	[0 – 1]
	Dó - Si	[0 – 11]
2	Dó - Ré	[0 – 2]
	Dó - Si♭ (Lá♯)	[0 – 10]
3	Dó - Ré♯ (Mi♭)	[0 – 3]
	Dó - Lá	[0 – 9]
4	Dó - Mi (Fá♭)	[0 – 4]
	Dó - Sol♯ (Lá♭)	[0 – 8]
5	Dó – Fá	[0 – 5]
	Dó – Sol	[0 – 7]
6	Dó - Fá♯ (Sol♭)	[0 – 6]

Fonte: elaborado pelo autor

Cada classe intervalar representada possuirá uma cor específica. Como existem apenas seis classes de intervalos (desconsiderando o uníssono, 0) serão utilizadas apenas seis cores. A escolha reduzida de cores permite uma distinção visual mais nítida entre os intervalos, uma vez que não serão utilizados dois tons de uma mesma cor como azul claro e escuro, por exemplo. Neste sistema, a classe intervalar 1 será representada em roxo; a classe 2, em azul; a classe 3, em verde; a classe 4, em amarelo; a classe 5, em laranja; e a classe 6, em vermelho (Figura 17).

Figura 17 - Classes intervalares, suas respectivas cores e representações na pauta



Fonte: elaborado pelo autor

Diferentemente da abordagem de Codeço (2019), o presente trabalho não busca analisar o percurso melódico dos materiais, mas investigar relações de simetria e assimetria a partir da disposição das classes intervalares de determinadas escalas e modos no círculo das alturas. Assim, a seta que indica o deslocamento entre duas classes de notas tem apenas a função de evidenciar que as classes intervalares partem do ponto 0, demonstrando a distância não ordenada entre essa classe de nota e as demais.

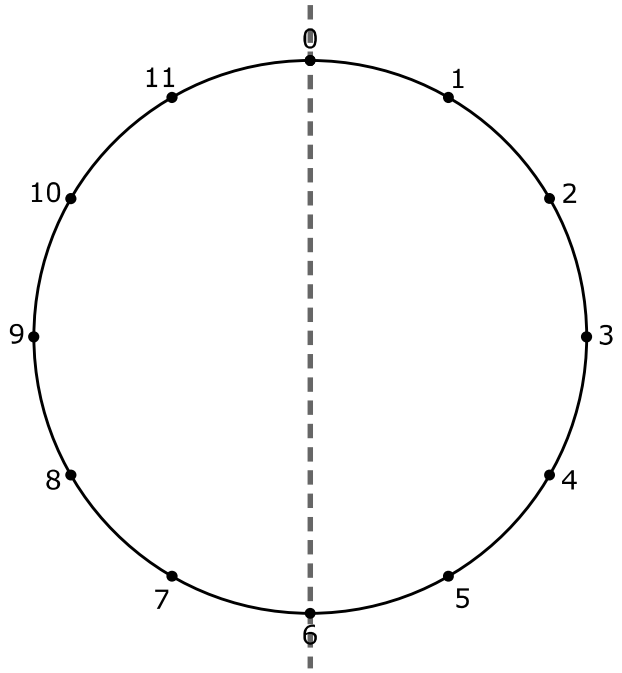
A classe intervalar 6, compreendida entre 0 e 6, aparece uma única vez pois divide o círculo em dois semicírculos simétricos. Observa-se, que a metade da direita do círculo (o semicírculo à direita) opera em sentido horário, enquanto a metade da esquerda do círculo (o semicírculo à esquerda) está operando em sentido anti-horário, de modo que o percurso até a classe 6 possui a mesma extensão em ambas as direções.

Nesse sentido, o intervalo [0 – 6], responsável por dividir o círculo em dois semicírculos, passa a operar como eixo de simetria em torno do qual as classes intervalares se organizam. Considerando a inversão como uma operação de transformação, essa disposição

evidencia relações de simetria inversiva entre intervalos pertencentes a mesma classe intervalar. Assim, intervalos que pertencem a uma mesma classe intervalar como [0 – 1] e [0 – 11], se considerados de forma não ordenada, representam uma segunda menor ascendente e descendente, respectivamente. Por outro lado, se considerados de forma ordenada são, na verdade, inversões intervalares no sentido tradicional do termo, neste caso, uma segunda menor e uma sétima maior, ambas em direção ascendente.

No intuito de evidenciar as relações de simetria e assimetria dos objetos musicais analisados, a classe intervalar 6 servirá como referência para a disposição de um eixo de simetria no círculo. Este será representado por uma linha tracejada na cor cinza disposta sobre as classes intervalares 0 (zero) e 6 (seis) e será, portanto, interno ao círculo e fixo em todas as representações, coincidindo com o intervalo do trítono (Figura 18).

Figura 18 - Eixo de simetria interno



Fonte: elaborado pelo autor

O eixo de simetria (inversão) considerado por Straus (2000) também é predominantemente tomado como uma propriedade interna aos círculos, ou seja, pode ser interpretado como um eixo de simetria interno, embora não seja explicitamente assim chamado. No entanto, este eixo não se dá de forma fixa, uma vez que varia de acordo com os materiais analisados que partem de diferentes pontos do círculo, havendo a possibilidade, ainda, de certos conjuntos podem possuir múltiplos eixos simultâneos. Para o autor, a aplicação do eixo é focada

em conjuntos considerados inversamente simétricos, pois o intuito da análise é justificar a centricidade de certos elementos pertencentes a conjuntos específicos. Para além das possibilidades elencadas por Straus, o presente trabalho adotará o eixo de simetria sempre fixo e o considerará como o eixo interno ao círculo, adotando, portanto, esta nomenclatura.

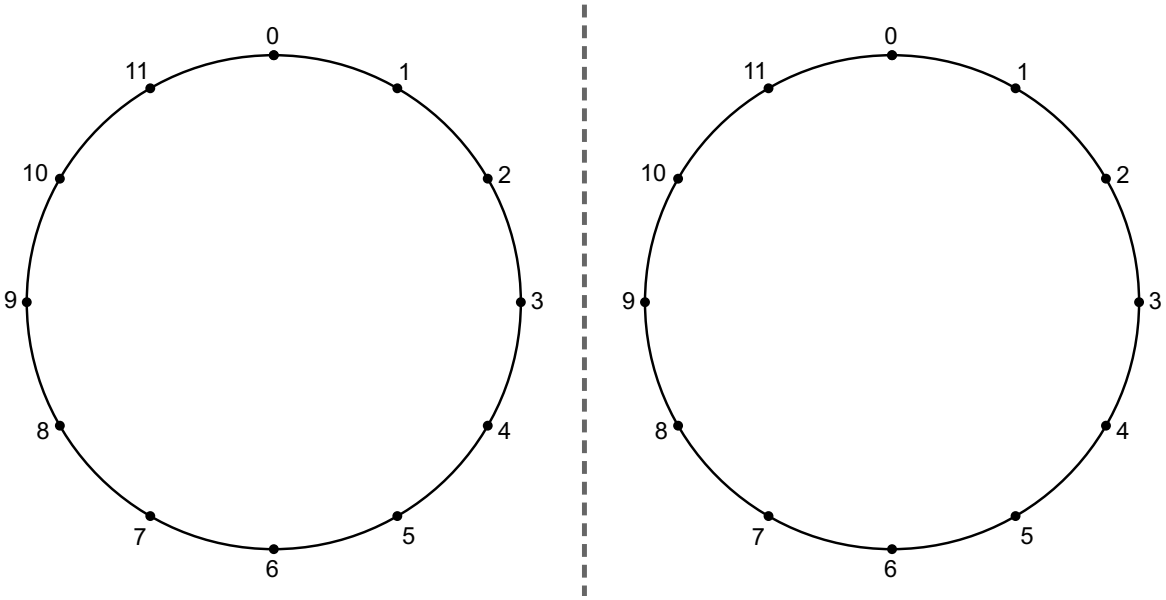
Straus também considera um eixo de simetria externo aos círculos. Para o autor, a aplicação do eixo de simetria externo é conceituada matematicamente ao demonstrar que a operação de inversão T_nI pode conectar dois conjuntos distintos através da constância da soma de suas classes de notas $(a + b = n)$, resultando no chamado *número de índice* (n)[14]. Contudo, esta operação é válida apenas para conjuntos conectados por uma operação de inversão que compreenda todos os seus elementos.

Para além disso, assim como no caso do eixo de simetria interno, o termo eixo de simetria externo não é utilizado e não são realizadas representações visuais. De forma distinta da abordagem de Straus, o presente trabalho adotará ambas as nomenclaturas e realizará as respectivas representações visuais. Assim para além do eixo de simetria interno será também considerado um eixo de simetria externo que, da mesma forma, será fixo e representado por uma linha tracejada na cor cinza, com a diferença de que será posicionado externamente de modo equidistante entre dois círculos de alturas. Isto, porque os círculos serão plotados em pares, no intuito de revelar também relações de simetria e assimetria entre eles por análises comparativas, isto é, entre as diferentes estruturas musicais representadas (Figura 19). Neste sentido, de forma distinta a abordagem de Straus, em que o eixo de simetria atua como um marcador de foco e unidade do material analisado, a presente pesquisa pretende ampliar sua aplicação ao considerá-lo uma ferramenta de comparação que avalia o potencial de similaridade dos objetos em níveis internos e externos.

Os eixos de simetria interno e externo não serão, portanto, necessariamente aplicados a objetos considerados como inversamente simétricos, nem a conjuntos que se mapeiam inteiramente em outros sobre operações de inversão, mas a qualquer material no qual pretende-se investigar um potencial de similaridade, tanto entre elementos internos quanto quando comparado a outros materiais externos.

[14] O número de índice corresponde à soma entre classes de altura correspondentes em dois conjuntos relacionados pela operação T_nI. Quando esta soma se mantém constante para todos os pares de elementos, esse valor identifica qual das doze operações T_nI possíveis relaciona os conjuntos. Por exemplo: considerando dois conjuntos [3, 8, 11] e [5, 8, 1], a soma entre os elementos correspondentes resulta sempre em 4 ($3 + 1 = 4;\ 8 + 8 = 4; 11 + 5 = 4$), indicando que os conjuntos estão relacionados por T_4I, em que 4 é o número de índice.

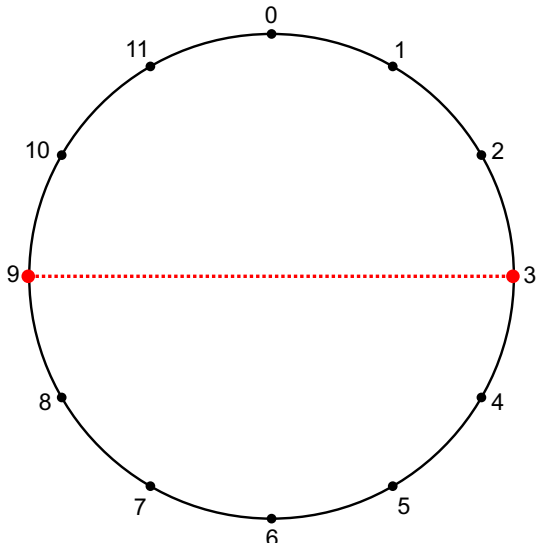
Figura 19 - Eixo de simetria externo



Fonte: elaborado pelo autor

Em casos específicos, a disposição interna do trítono também pode interessar à análise. Isso ocorre quando a classe intervalar 6 se estabelece entre duas classes de notas do próprio conjunto, sem envolver necessariamente a classe de nota 0. Para representar essa disposição, adota-se uma linha pontilhada na cor vermelha, cujas extremidades são marcadas por pontos igualmente vermelhos, posicionados sobre as classes de notas correspondentes ao intervalo.

Figura 20 - Projeção interna do trítono



Fonte: elaborado pelo autor

Em casos específicos, a disposição interna do trítono também pode interessar à análise. Isso ocorre quando a classe intervalar 6 se estabelece entre duas classes de notas do próprio conjunto, sem envolver necessariamente a classe de nota 0. Para representar essa disposição, adota-se uma linha pontilhada na cor vermelha, cujas extremidades são marcadas por pontos igualmente vermelhos, posicionados sobre as classes de notas correspondentes ao intervalo. A Figura 20 demonstra esta representação ao apresentar o trítono estabelecido entre as classes de notas 3 e 9. Este recurso pretende, portanto, indicar a projeção do trítono no interior do conjunto, sendo essa a única ocasião em que um intervalo não partirá, necessariamente, do ponto inicial.

3 APLICAÇÕES E DESDOBRAMENTOS

O presente capítulo pretende expor, de modo sequencial, a aplicação do círculo das alturas e os critérios representativos e analíticos a representação de conjuntos de classes de nota, convencionalmente chamados de escalas e modos. No escopo do presente trabalho, quando houver necessidade de distinção e determinação de certas escalas e/ou modos, seus nomes tradicionais serão utilizados. De outra forma, o termo conjunto será utilizado para significar escalas e modos de maneira geral.

Será realizada uma análise comparativa a fim de revelar propriedades e dinâmicas internas e externas decorrentes da própria organização intervalar de cada conjunto e das suas interações.

A princípio, serão comparadas as classes intervalares pertencentes a um conjunto específico, ou seja, a análise será interna aos conjuntos e, portanto, amparada pelo eixo de simetria interno. Este procedimento colocará em evidência possíveis relações simétricas e assimétricas entre as classes intervalares internas, apontando o potencial de simetria e assimetria interna do material analisado.

Em seguida, círculos distintos serão dispostos em pares organizados em torno do eixo de simetria externo, permitindo que as estruturas de cada círculo sejam examinadas entre si. Em outras palavras, as estruturas internas de cada conjunto, mesmo que diversas, serão comparadas umas às outras em termos equivalentes por serem observadas sob uma dimensão analítica comum.

A viabilidade desta análise comparativa reside justamente na disposição de conjuntos distintos sob o mesmo plano referencial. Em nível local (tomando um único círculo), este plano se sustenta pela disposição do eixo de simetria interno comum a todas as representações. Esta dimensão, por sua vez, sustenta o plano referencial em nível global (tomando o par de círculos), pois uma vez colocados sob a mesma dimensão analítica interna, os materiais são passíveis de serem examinados conjuntamente, isto é, comparados uns aos outros a partir da disposição do eixo de simetria externo. Neste sentido, tanto a adoção do ponto inicial comum, quanto dos eixos de simetria internos e externos, são pontos centrais nas análises que serão realizadas adiante.

As interações identificadas implicam na proposição de um procedimento analítico específico denominado simetria por recorrência de classes intervalares, que surge no escopo do presente trabalho.

Tabela 4 - Sistematização das análises de simetria e assimetria

<table>
<tr><td colspan="2">Categorias de análise</td><td>Simetria</td><td>Assimetria</td></tr>
<tr><td colspan="2">Critérios analíticos</td><td>Recorrência de classes intervalares</td><td>Diversidade de classes intervalares</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procedimentos analíticos</td><td>Simetria por recorrência de classes intervalares</td><td>Assimetria por diversidade de classes intervalares</td></tr>
<tr><td colspan="4">Resultados</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Níveis de aplicação</td><td>Local</td><td>Potencial de simetria interna por recorrência de classes intervalares (SIRCI)</td><td>Potencial de assimetria interna por diversidade de classes intervalares</td></tr>
<tr><td>Global</td><td>Potencial de simetria externa por recorrência de classes intervalares (SERCI)</td><td>Potencial de assimetria externa por diversidade de classes intervalares</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Relações gerais entre os níveis internos e externos de simetrias e assimetrias</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor

Essa investigação parte de duas categorias de análise, simetria e assimetria, e toma recorrência e diversidade como propriedades dos conjuntos analisados (Tabela 4). Ao mesmo tempo, essas propriedades assumem função de critérios analíticos para a verificação dos potenciais de simetria e assimetria. A recorrência de classes intervalares é tomada como critério para a verificação do potencial de simetria, enquanto a diversidade de classes intervalares é tomada como critério para a verificação do potencial de assimetria. A partir disso, definem-se dois procedimentos analíticos: a simetria por recorrência de classes intervalares e a assimetria por diversidade de classes intervalares. Ambos podem ser aplicados em nível local, quando voltados à análise interna de um único material, ou em nível global, quando empregados na comparação entre materiais distintos.

Apesar de o mapeamento de uma das categorias (simetria e assimetria) implicar na revelação da outra, apenas a simetria por recorrência de classes intervalares será pormenorizada no presente trabalho. Isto, porque a análise simultânea e a correlação sistemática entre simetria e assimetria exigiriam uma extensão de procedimentos que excede o escopo desta pesquisa, e da produção manual das representações. Dessa forma, serão desenvolvidas especificamente a

simetria interna por recorrência de classes intervalares, e a simetria externa por recorrência de classes intervalares.

3.1 Simetria por recorrência de classes intervalares

O termo que intitula a presente seção emerge da análise comparativa supracitada, mais precisamente, das relações constatadas a partir dela.

Em nível local e de acordo com os procedimentos estabelecidos até então, as classes intervalares de determinado conjunto serão representadas e observadas por meio da comparação dos semicírculos delimitados pelo eixo de simetria interno. Esta comparação terá o intuito de verificar se alguma classe intervalar pode ser observada em ambos os semicírculos, ou seja, se há recorrência de classes intervalares específicas.

Isto, porque considerando a classe de notas comum (0) das representações e as duas orientações possíveis no círculo (sentido horário ou anti-horário), uma classe intervalar possuirá no máximo duas ocorrências que, logicamente, serão distribuídas entre os semicírculos. Em termos mais práticos, a repetição de uma classe intervalar implica necessariamente sua ocorrência em ambos os semicírculos.

A recorrência de uma classe intervalar representa a correspondência inversiva dos intervalos entre classes de notas que a compõe. Desta forma, tendo em vista que as recorrências de uma classe intervalar possuem, a mesma extensão e são refletidas sob uma classe de nota comum (a qual compõe o eixo de simetria), elas serão obrigatoriamente dispostas de forma proporcional em torno do eixo de simetria interno, estabelecendo uma relação simétrica no interior do conjunto. Isto significa que o potencial de simetria interna de um conjunto é proporcional a recorrência das classes intervalares. A esta propriedade dá-se o nome de simetria interna por recorrência de classes intervalares (doravante, SIRCI). Em suma, a SIRCI analisa as relações de simetria das classes intervalares entre os semicírculos ao observar as correspondências inversivas por meio da presença (ou ausência) de recorrências.

A repetição de uma ou mais classes intervalares implica a redução da diversidade de classes intervalares de um conjunto. Ou seja, conjuntos com maior diversidade tendem a não reproduzir as mesmas classes de intervalos, ocasionando menor recorrência. Por outro lado, conjuntos que apresentam menor diversidade de classes intervalares tendem a apresentar maior recorrência. Em outras palavras, há uma relação inversamente proporcional entre diversidade e recorrência de classes de intervalo, de modo que o maior número de recorrências implica, necessariamente, menor diversidade de classes de intervalos e vice-versa.

Uma vez que o potencial de simetria é diretamente proporcional à recorrência de classes intervalares que, por sua vez, é inversamente proporcional à quantidade de classes intervalares diversas, a relação entre diversidade e potencial de simetria é, da mesma forma, inversamente proporcional.

Considerando conjuntos de sete classes de notas, estabelecem-se necessariamente seis classes intervalares entre o ponto inicial (0) e as demais classes de notas do conjunto. Desse modo, como o total de classes intervalares mapeadas é fixo, a soma entre diversidade e recorrência mantém-se constante e igual a seis. Neste contexto (conjuntos heptatônicos), o mínimo de recorrência será 0 e o máximo 3; já a diversidade tem seu mínimo em 3 e o máximo em 6. Assim, no somatório, o total de classes intervalares possíveis será sempre 6. A Equação 1 e a Tabela 5 demonstram esta relação.

Equação 1 - Equação descritiva das propriedades de recorrência e diversidade, onde R_{ci} simboliza recorrência, D_{ci} simbolizada diversidade e P propriedade

$$\mathrm{P} = \{(R_{ci}, D_{ci}) \in Z^2 : R_{ci} + D_{ci} = 6,\ 0 \leq R_{ci} \leq 3,\ 3 \leq D_{ci} \leq 6\}.$$

Fonte: elaborado na presente pesquisa

Tabela 5 - Relação inversamente proporcional entre quantidade de recorrência e diversidade

Propriedades		Total de classes intervalares possíveis
Recorrência	Diversidade	
0	6	6
1	5	6
2	4	6
3	3	6

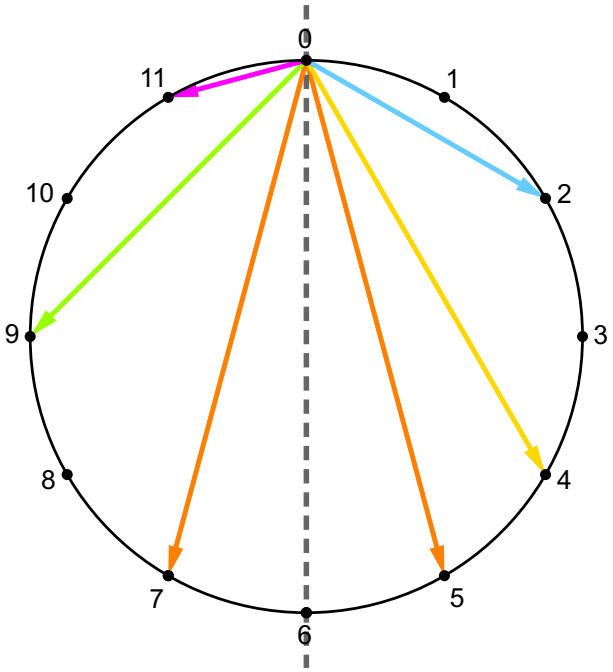
Fonte: elaborado pelo autor

É possível, portanto, alimentar os dados com a propriedade proporcional à simetria, que seria a diversidade. Figuras que representam a análise do potencial de simetria por recorrência de classes intervalares sempre virão acompanhadas de uma legenda na parte inferior, na qual recorrência e diversidade referem-se, respectivamente, às propriedades de recorrência de classes intervalares e diversidade de classes intervalares. Esta legenda indicará

tanto a quantidade de recorrências e diversidade de um conjunto, quanto o conteúdo das mesmas, isto é, quais classes intervalares as compõem.

Como exemplo, a Figura 21 demonstra a representação da escala maior (ou modo jônio) no círculo, revelando seu potencial de SIRCI.

Figura 21 - SIRCI na escala maior



Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

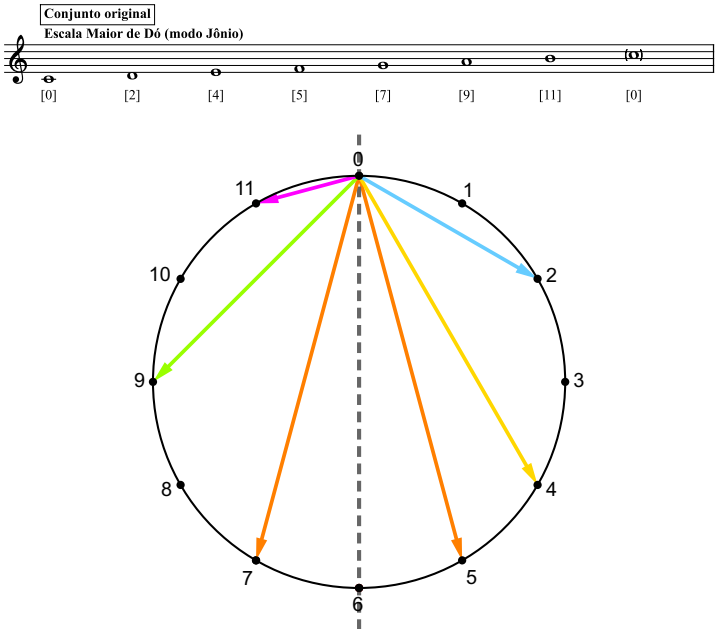
Neste caso, verifica-se a presença das classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5, dentre as quais a classe intervalar 5 é a única recorrente. Dessa forma, com cinco classes intervalares distintas e uma recorrência, o conjunto apresenta diversidade significativa e, consequentemente, baixo potencial de SIRCI.

Uma vez verificado o potencial de SIRCI, a análise pode ser estendida ao nível global, no qual as recorrências de classes intervalares passam a ser observadas na comparação entre conjuntos distintos. Tal procedimento será denominado simetria externa por recorrência de classes intervalares, doravante SERCI.

Na análise de SERCI, os conjuntos comparados poderão ou não ser derivados de um mesmo conjunto. No caso de serem derivados, após verificar a SIRCI do conjunto original, este será submetido a operações de rotações sucessivas seguidas de transposições. Esse procedimento garante que os conjuntos derivados sejam observados sob uma mesma dimensão

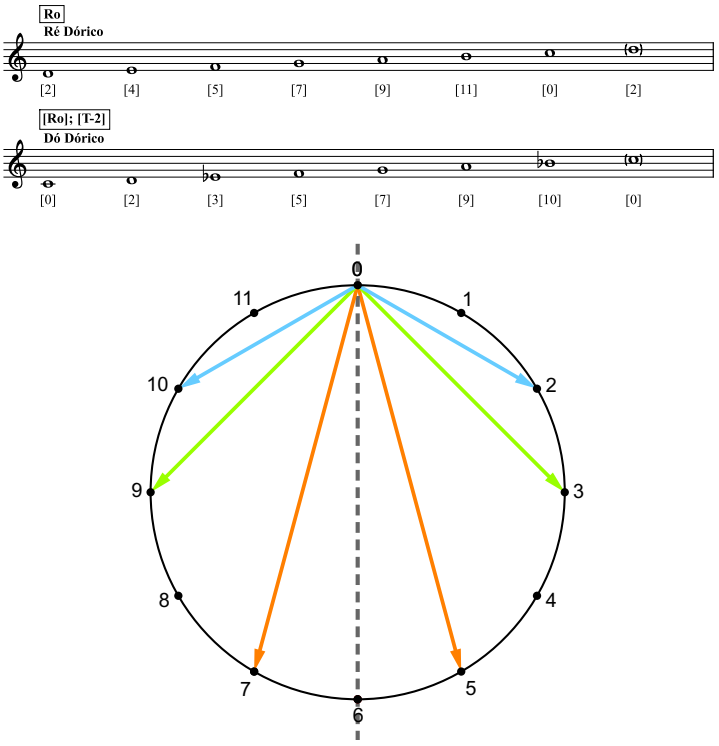
analítica. A transposição posterior à rotação não altera a estrutura intervalar do conjunto, mas apenas reposiciona sua classe inicial em 0.

Figura 22 - Conjunto original (escala maior/modo jônio)



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 23 - Operação de rotação e transposição para obtenção de conjunto derivado



Fonte: elaborado pelo autor

Estes procedimentos (rotação + transposição), portanto, permitem a investigação de SERCI entre conjuntos derivados de um mesmo conjunto (escala ou modo) como, por exemplo, os conjuntos derivados da escala maior (modo jônio), convencionalmente conhecidos como modos. O conjunto original e seus derivados serão chamados de grupo.

Como exemplo, a Figura 22 apresenta o modo jônio como conjunto original, enquanto a Figura 23 demonstra a aplicação das operações descritas e a obtenção de um de seus conjuntos derivados, o modo dórico.

Com intuito de analisar o potencial de SERCI, os conjuntos derivados serão plotados aos pares de acordo com dois critérios. Para serem submetidos a uma análise de SERCI, dois conjuntos deverão apresentar, em primeiro lugar, o mesmo potencial de SIRCI, isto é, a mesma quantidade de classes intervalares distintas e recorrentes. Em segundo lugar, os conjuntos deverão possuir uma correspondência exata do conteúdo intervalar, ou seja, as mesmas classes intervalares e não necessariamente recorrências nas mesmas classes intervalares. Este conteúdo é expresso no parâmetro da diversidade de classes intervalares. O conteúdo das recorrências, no entanto, não será considerado.[15]

Para a investigação de potencial de SERCI, o semicírculo esquerdo de um conjunto do par deve ser observado em relação ao direito do outro e vice-versa, ou seja, as correspondências inversivas observadas por meio das recorrências estarão dispostas em semicírculos distintos de conjuntos distintos. Assim como a SIRCI, o potencial de SERCI será variável, se estabelecendo de acordo com a correspondência inversiva de classes intervalares dos conjuntos.

Com o objetivo de apresentar sonoramente as relações de simetria observadas nos conjuntos analisados, as análises de SERCI contam com vídeos disponibilizados como material complementar. Cada vídeo contém uma representação em áudio partitura referente ao(s) conjunto(s) representado(s) em cada figura. Inicialmente, o primeiro conjunto do par é apresentado em movimento ascendente e, em seguida, o segundo conjunto é apresentado em movimento descendente, de modo a evidenciar auditivamente as relações inversivas estabelecidas entre ambos. O material complementar está disponível em uma playlist online

[15] Os critérios elencados têm por objetivo delimitar o escopo da análise da SERCI no contexto específico deste trabalho. Tal escolha justifica-se pela grande quantidade de combinações possíveis na ausência de parâmetros previamente definidos. A análise de todas as relações entre um conjunto original de 7 classes de notas e seus derivados resultaria, por exemplo, em 21 análises distintas de SERCI. Considerando os quatro conjuntos originais propostos neste trabalho, seriam necessárias 84 análises, o que extrapolaria os limites e objetivos da presente pesquisa. Embora seja possível conceber o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de automatizar esse processo, o foco deste trabalho reside na formulação e sistematização dos princípios teóricos que fundamentam a proposta. A delimitação foi adotada como uma opção metodológica da presente investigação, não constituindo uma restrição às possíveis aplicações futuras da SERCI.

acessível por meio do código QR situado nos apêndices. Os vídeos referentes a cada figura podem ser acessados por meio de hiperlink na própria figura ou pelo código QR nela inserido.

Optou-se, em primeiro momento, por realizar a análise de SERCI entre conjuntos derivados de um mesmo conjunto original, isto é, dentro de um único grupo. Em um segundo momento, no entanto, as análises serão, de forma criteriosa, estendidas a grupos distintos, com o intuito de verificar o potencial de SERCI entre materiais distintos.[16] Isto, porque existem casos em que um grupo possuirá poucos conjuntos elegíveis para análise de SERCI (correspondência de potencial SIRCI e do conteúdo intervalar), portanto, será pertinente verificar um possível potencial de SERCI entre grupos distintos. Essa ampliação possibilita avaliar em que medida o potencial de SERCI pode, ou não, se manifestar em grupos distintos, contribuindo para uma compreensão mais abrangente do potencial simétrico dos materiais investigados.

Por fim, vale notar que a noção de vetor intervalar definida por Straus (2000), representa um procedimento semelhante. O vetor intervalar de Straus lista o conteúdo das classes de intervalos dentro de uma classe de conjuntos[17], ou seja, o número total de ocorrências de cada uma das seis classes de intervalos, considerando todas as combinações possíveis entre todas as notas de um conjunto pertencente a uma classe de conjuntos. Tomando como exemplo a escala maior de Dó, o mapeamento é realizado partindo de Dó em relação as seis notas seguintes, na sequência o mapeamento acontece a partir da nota Ré em relação as cinco notas seguintes e assim por diante. Por ser uma propriedade da classe de conjuntos, esse vetor permanece inalterado sob certas operações de transformação, como a rotação e a transposição. Assim, a escala maior e seus conjuntos derivados (a classe de conjuntos 7-35) compartilham exatamente o mesmo vetor intervalar: 254361 (Figura 24).

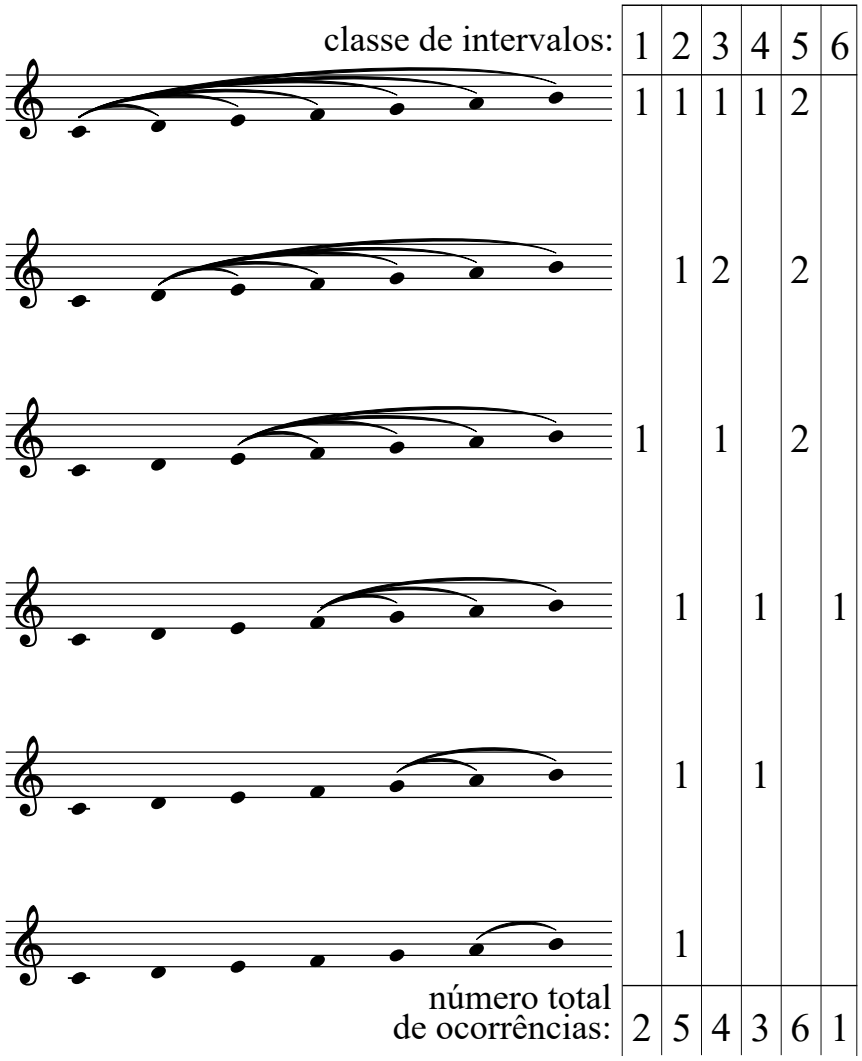
A simetria por recorrência de classes intervalares, no entanto, ao considerar o mapeamento das classes intervalares a partir de uma única classe de notas do conjunto, isto é, do ponto inicial comum às representações, acaba por realizar apenas o primeiro procedimento da análise do vetor intervalar (aquele que mapeia as classes intervalares da nota inicial para as

[16] Esta escolha se fundamenta, novamente, na necessidade de limitar o escopo analítico. Analisar, por exemplo, as 7 variações de um conjunto em relação às 7 variações de outro resultaria em 49 análises de SERCI distintas. Considerando os quatro conjuntos originais e seus respectivos derivados, a comparação entre todos os pares possíveis de conjuntos totalizaria 294 análises de SERCI. Mesmo com as escolhas metodológicas de limitação da formação dos pares, as análises de SERCI excederiam o escopo do presente trabalho.

[17] Uma classe de conjuntos é definida por Straus (2000) como uma família de conjuntos de classes de notas cujos membros estão todos relacionados entre si através das operações de transposição ou inversão. “Cada conjunto de classes de notas pertence a uma única classe de conjuntos” (Ibid., p. 45), e todos os seus membros compartilham o mesmo conteúdo de classes de intervalos (resumido pelo vetor intervalar). Como exemplo, a coleção diatônica, identificada como a classe de conjuntos 7–35, considera todas as escalas maiores, menores naturais e modos eclesiásticos como membros de uma mesma família por serem transposições ou inversões uns dos outros.

seguintes). Por este motivo, a simetria por recorrência de classes intervalares é sensível às operações de transformação. Isso significa que ao rotacionar um conjunto e transpô-lo para a classe de notas 0, serão obtidas organizações distintas de classes intervalares entre conjuntos pertencentes a uma mesma classe de conjuntos.

Figura 24 - Vetor intervalar para a escala maior



Fonte: Straus (2000, p. 12)

Dessa maneira, a principal diferença entre o vetor intervalar apresentado por Straus e a simetria por recorrência de classes intervalares proposta na presente pesquisa reside na abrangência do cálculo e na sensibilidade a certas operações de transformação. Enquanto o vetor intervalar consiste em uma listagem numérica das ocorrências de cada classe de intervalos em uma classe de conjuntos, resumindo o conteúdo intervalar de determinada sonoridade, a análise aqui proposta busca oferecer uma forma de visualizar intuitivamente as relações

simétricas e assimétricas dos conjuntos por meio do mapeamento das classes intervalares. Por esse motivo, no presente trabalho, o termo conteúdo intervalar é empregado em sentido restrito, referindo-se às classes intervalares de cada conjunto analisado, mapeadas em relação ao ponto inicial e expressas pela propriedade da diversidade. Com isso, nesta proposta, conjuntos pertencentes a uma mesma classe de conjuntos podem apresentar diferentes conteúdos intervalares.

Essa distinção também se estende ao conceito de simetria inversiva descrito por Straus. Embora ambas as abordagens investiguem relações de simetria, diferem quanto à abrangência da análise, à concepção do eixo de simetria e à finalidade analítica. Assim como o vetor intervalar, a simetria inversiva em Straus está associada a propriedades da classe de conjuntos como um todo, ao passo que a análise proposta nesta pesquisa produz resultados específicos para cada conjunto, inclusive para aqueles pertencentes à mesma classe.

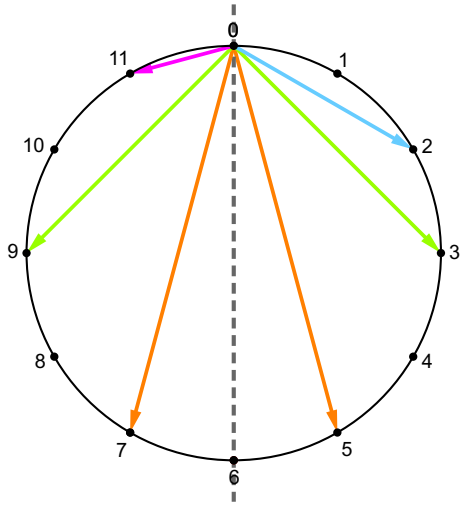
3.1.1 Análise de SIRCI e SERCI nos conjuntos originais

Esta seção propõe verificar o potencial de SIRCI dos conjuntos originais a partir dos quais serão obtidos os conjuntos derivados. Estes grupos, por sua vez, serão submetidos à análise de SERCI nas seções seguintes. Quando atenderem aos critérios estabelecidos para a análise de SERCI, os próprios conjuntos originais também serão analisados entre si. Foram escolhidas como conjuntos originais as seguintes escalas: maior, menor melódica, menor harmônica e maior harmônica. Quando necessário, serão designadas, respectivamente, como conjunto original 1 (O_1), conjunto original 2 (O_2), conjunto original 3 (O_3) e conjunto original 4 (O_4). O critério de escolha reside na ampla utilização destas escalas em diferentes contextos musicais.

A escala maior (O_1) foi anteriormente representada para a exemplificação da análise de SIRCI (Figura 21). Neste caso, constatou-se um baixo potencial de SIRCI em razão da abrangente diversidade de classes intervalares e mínima recorrência.

A escala menor melódica (O_2) (Figura 25), por sua vez, possui um potencial de SIRCI elevado em relação à escala maior. Isto está associado a uma menor diversidade, que abrange quatro classes intervalares: 1, 2, 3 e 5. Esta diversidade resulta, logicamente, em uma maior recorrência, que se apresenta nas classes intervalares 3 e 5. Nesse sentido, observa-se que a configuração intervalar dessa escala possui um potencial de SIRCI considerável.

Figura 25 - SIRCI na escala menor melódica (O_2)

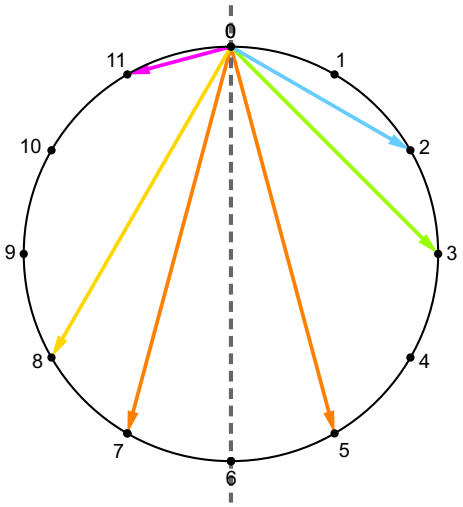


Recorrência: 2 (classes de intervalos 3 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 2, 3 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Já na escala menor harmônica (O_3) (Figura 26), nota-se uma relação de classes intervalares significativamente próxima a escala maior. A princípio, nota-se que estas escalas possuem a mesma quantidade de recorrência (uma) e diversidade de classes intervalares (cinco), ou seja, mesmo potencial de SIRCI. Para além disso, no entanto, observou-se que o conteúdo de classes intervalares de ambas as escalas é exatamente o mesmo, isto é, ambas apresentam as classes intervalares 1, 2, 3, 4 e 5.

Figura 26 - SIRCI na escala menor harmônica (O_3)

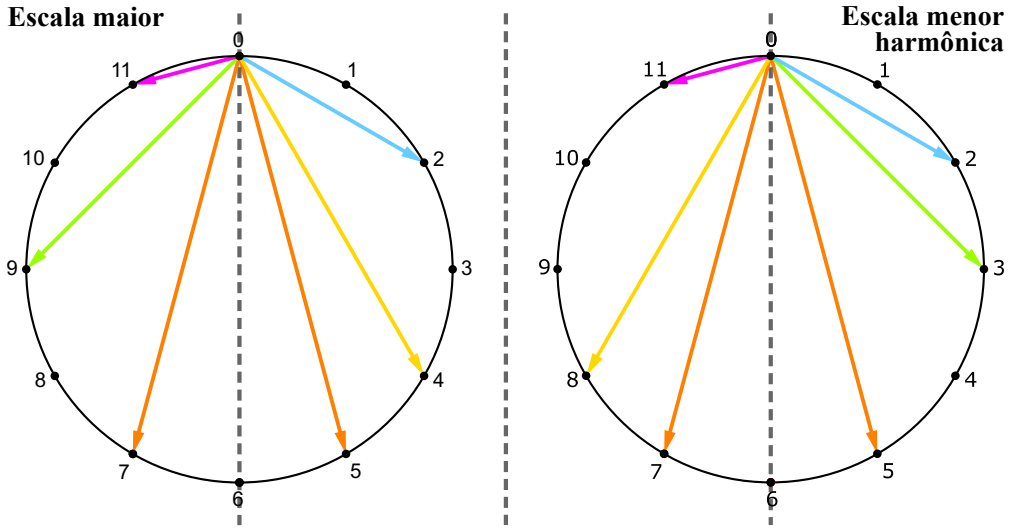


Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Por este motivo, a escala maior e a escala menor harmônica são aptas a formarem um par de conjuntos para que seja realizada a análise de SERCI (Figura 27). Para além de cumprirem os critérios para a análise de SERCI, ambas apresentam, ainda, a única recorrência na classe intervalar 5. Ao comparar o semicírculo direito de uma escala com o esquerdo da outra, nota-se um potencial de SERCI considerável e quase absoluto. No entanto, as escalas não apresentam SERCI total (correspondência simétrica total entre os semicírculos) porque, apesar de possuíres classes intervalares recorrentes entre semicírculos distintos, ambas apresentam a classe intervalar 1 no semicírculo esquerdo e a classe intervalar 2 no semicírculo direito, fazendo com que não haja correspondência inversiva destas classes intervalares. Ou seja, o semicírculo direito de uma escala diverge do esquerdo da outra pela presença das classes intervalares 1 e 2 distribuídas entre eles e vice-versa.

Figura 27 - SERCI no par de escalas maior (O_1) e menor harmônica (O_3)



Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

A Tabela 6 revela a relação entre os semicírculos oposto das escalas maior (O_1) e menor harmônica (O_3).

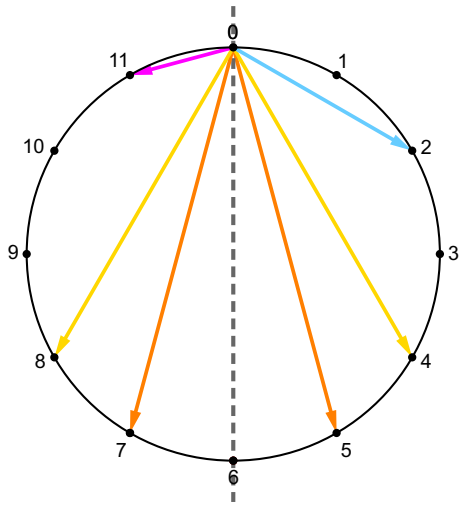
Tabela 6 - Relação entre os semicírculos opostos das escalas maior (O_1) e menor harmônica (O_3)

Semicírculos	Direito de O_1	Esquerdo de O_3	Esquerdo de O_1	Direito de O_3
Classes intervalares	2	1	1	2
	4	4	3	3
	5	5	5	5

Fonte: elaborado pelo autor

A escala maior harmônica (O_4) (Figura 28) apresenta o mesmo potencial de SIRCI da escala menor melódica, que é considerável e elevado se comparado as escalas maior e menor harmônica. No entanto, ao passo que as recorrências da escala menor melódica ocorrem nas classes intervalares 3 e 5, as recorrências da escala maior harmônica ocorrem nas classes intervalares 4 e 5. Desta forma, a escala maior harmônica apresenta quatro classes intervalares distintas, são elas as classes intervalares 1, 2, 4 e 5. Desta maneira, a divergência do conteúdo intervalar entre as escalas impede que sejam submetidas a análise de SERCI.

Figura 28 - SIRCI na escala maior harmônica (O_4)



Recorrência: 2 (classes de intervalos 4 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 2, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Verifica-se, ainda, no material analisado, a correspondência inversamente proporcional entre recorrência e diversidade de classes intervalares descrita anteriormente, uma vez que a soma dos valores de diversidade e recorrência de cada escala se mantém constante e igual a seis.

3.1.2 Análise de SERCI em modos

Os modos eclesiásticos, apesar de serem por vezes compreendidos como conjuntos obtidos a partir da escala maior (O_1), são entidades independentes que constituem o universo modal ocidental. Desta maneira, a presente seção os abordará por meio de suas denominações modais tradicionais, e não segundo a nomenclatura de rotações derivadas de um conjunto original.

Cada um dos modos já foi mapeado e submetido à análise de potencial de SIRCI. Para a análise do potencial de SERCI, eles serão agrupados em pares de conjuntos de acordo com os critérios estabelecidos na seção 3.1. Assim, as análises de SIRCI não serão representadas individualmente nesta etapa a fim de reduzir a extensão das análises. O potencial de SIRCI de cada modo, no entanto, será considerado nas análises de SERCI, uma vez que a comparação entre os pares parte das propriedades intervalares verificadas em cada conjunto.

Evidencia-se que, dentre os sete modos, três deles possuem semelhança tanto de SIRCI, quanto do conteúdo de classes intervalares e recorrências com algum outro, isto é, possuem exatamente as mesmas classes intervalares e recorrências em ambos os semicírculos. É neste momento que o eixo de simetria externo será disposto entre dois círculos, mais precisamente, entre os círculos pertencentes a um par dentre os três pares formados (Figura 29; Figura 30; Figura 31).

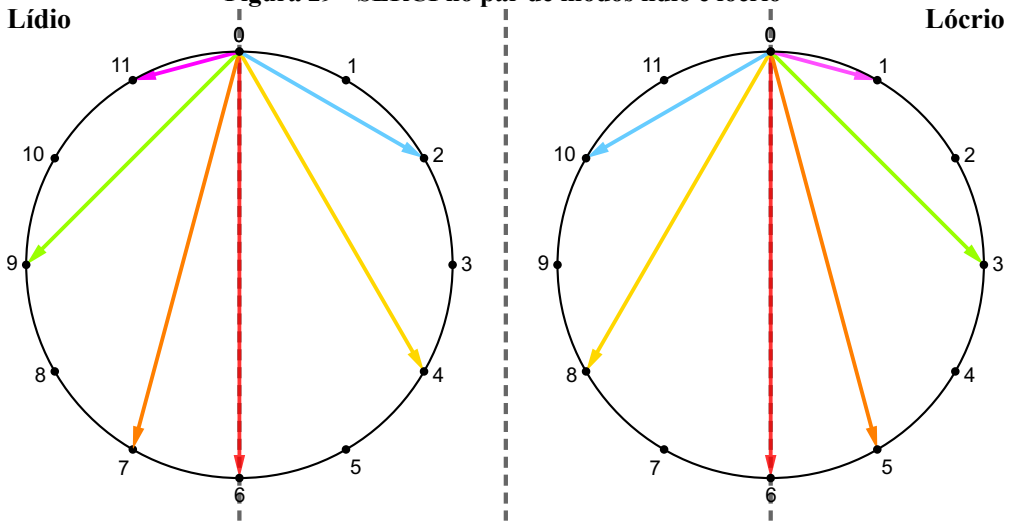
Se analisados os semicírculos que compõe cada um dos pares, verifica-se uma simetria absoluta entre o semicírculo direito de um modo com o esquerdo do seu par correspondente, isto é, uma correspondência inversiva total entre todas as classes intervalares de ambos os modos. Assim, estes conjuntos não possuem apenas algum nível de SERCI, mas apresentam SERCI total. Uma vez que o potencial de SERCI se estabelece de acordo com a correspondência inversiva das classes intervalares de dois conjuntos, o potencial de SERCI total, portanto, corresponde a capacidade de um conjunto de mapear-se inteiramente em outro por uma operação de inversão em torno do eixo de simetria.

Ao longo do trabalho, o uso da tabela de correspondência de classes intervalares entre os semicírculos opostos dos conjuntos será reservado aos casos em que a relação simétrica

entre os semicírculos seja parcial, exigindo maior detalhamento das correspondências observadas. Isso porque, além de evitar o excesso de tabelas, a correspondência inversiva dos conjuntos que apresentam SERCI total já é evidenciada pela própria representação gráfica.

Na progressão das análises os pares de modos serão organizados sequencialmente de acordo com o potencial de SIRCI. Os modos lídio e lócrio formam o primeiro par da sequência por não apresentarem potencial de SIRCI. Isto, porque possuem as seis classes intervalares possíveis, ou seja, apresentam a diversidade máxima de classes intervalares e, consequentemente, recorrência nula. Desta maneira, os modos que compõem este par, apesar de apresentarem SERCI total entre si, não possuem potencial de SIRCI e, portanto, constituem o primeiro par de modos da sequência (Figura 29).

Figura 29 - SERCI no par de modos lídio e lócrio



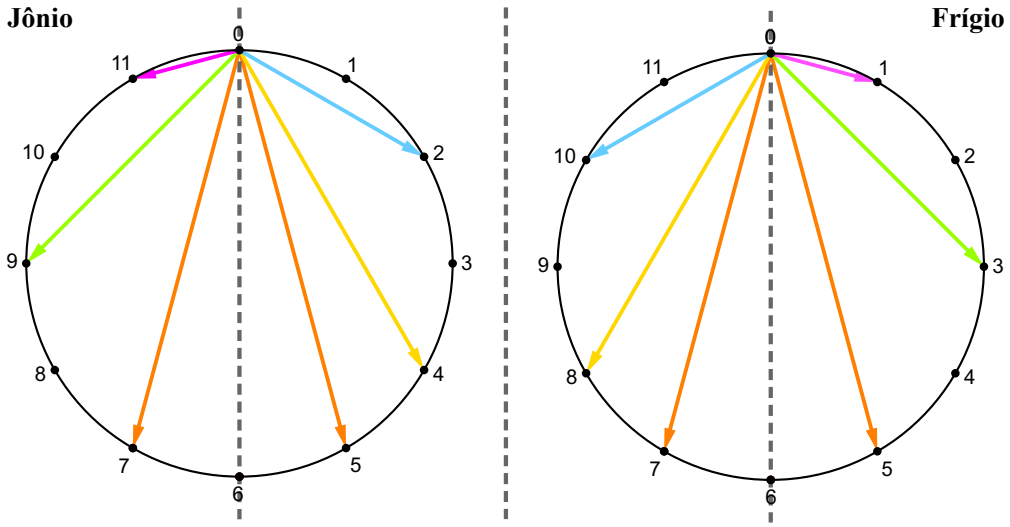
Recorrência: 0
Diversidade: 6 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

O par de modos seguinte, é composto pelos modos jônio e frígio (Figura 30). Estes modos apresentam uma classe intervalar distinta a menos que o par anterior e, consequentemente, uma recorrência a mais.

A análise do modo jônio (escala maior) já foi realizada anteriormente e constatou-se um baixo potencial de SIRCI. Isto, devido a diversidade considerável, abrangendo as classes intervalares 1, 2, 3, 4 e 5, e recorrência mínima, sendo ela a classe intervalar 5. Apesar deste par possuir um baixo potencial de SIRCI, verifica-se um aumento deste potencial em relação ao par anterior, devido ao aumento das recorrências de classes intervalares.

Figura 30 - SERCI no par de modos jônio e frígio

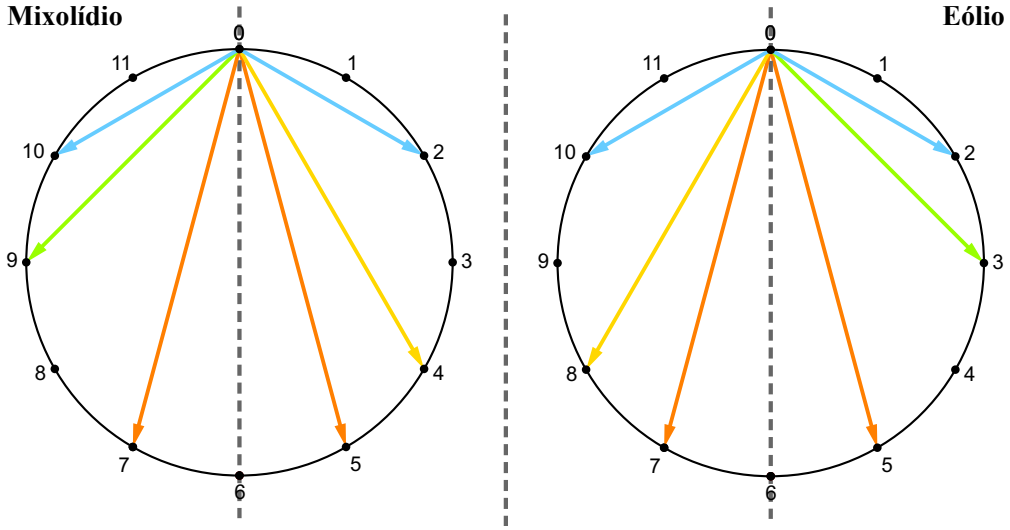


Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

O terceiro e último par de modos é formado pelos modos mixolídio e eólio (Figura 31).

Figura 31 - SERCI no par de modos mixolídio e eólio



Recorrência: 2 (classes de intervalos 2 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 2, 3, 4 e 5)

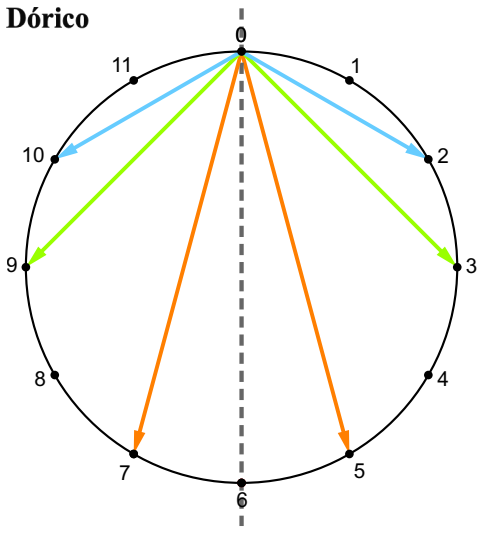
Fonte: elaborado pelo autor

Percebe-se que, seguindo a mesma dinâmica dos primeiros dois pares, este par em questão apresenta uma recorrência de classe intervalar a mais em relação ao par anterior. O conteúdo intervalar destes modos compreende quatro classes intervalares distintas e são elas as classes intervalares 2, 3, 4 e 5. Dentre elas, observa-se a existência de duas recorrências: a classe intervalar 2 e a classe intervalar 5. Isto significa, portanto, que os modos que compõem este par possuem um potencial de SIRCI considerável e elevado em relação aos pares anteriores, por possuírem menor diversidade e maior recorrência de classes intervalares.

Desta forma, observa-se uma dinâmica entre os pares na qual, um par apresentará sempre uma classe intervalar distinta a menos que o par anterior e, consequentemente, uma recorrência a mais. Isto significa que ocorre um aumento gradativo no potencial de SIRCI dos pares. Além disso, percebe-se que os pares de modos apresentados sempre mantêm as recorrências do par anterior e agregam uma nova recorrência. Esta recorrência, por sua vez, será mantida pelo próximo par, o qual igualmente agregará mais uma recorrência e assim sucessivamente, até que se esgotem as possibilidades. O acúmulo de recorrência das classes intervalares, assim como o consequente aumento do potencial de SIRCI, atravessa sucessivamente os pares de modos até atingir seu limite.

Este limite culmina no modo dórico que, particularmente, apresenta SIRCI total.

Figura 32 - Modo dórico isolado por SIRCI total



Recorrência: 3 (classes de intervalos 2, 3 e 5)
Diversidade: 3 (classes de intervalos 2, 3 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Isto, porque ao acumular as recorrências anteriores e agregar uma a mais, ele atinge a capacidade máxima de recorrência e mínima de diversidade de classes intervalares. Este modo possui, portanto, apenas três classes intervalares distintas e que são recorrentes em ambos os semicírculos, são elas as classes intervalares 2, 3 e 5 (Figura 32). Uma vez que o parâmetro da recorrência demonstra a correspondência inversiva das classes intervalares, conclui-se que o modo dórico é um conjunto inversamente simétrico, isto é, tem a capacidade de mapear-se inteiramente em si mesmo sob uma operação de inversão. Desta forma, o potencial de SIRCI total corresponde a propriedade de simetria inversiva de um conjunto.

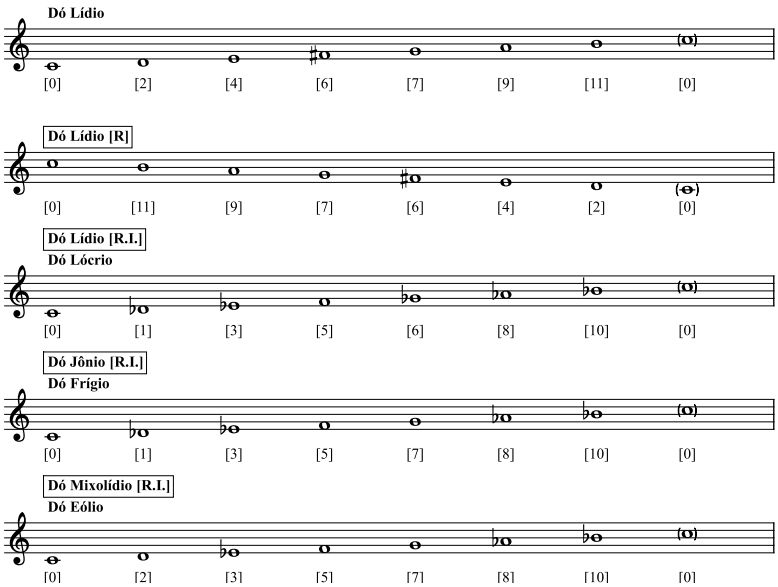
É possível dizer, portanto, que o potencial de SIRCI total, implica em um potencial de SERCI total de um conjunto em relação a si mesmo. Em outras palavras, uma vez que o modo dórico se mapeia em si mesmo (possui SIRCI total), ele não poderá apresentar SERCI total em relação a outro conjunto, a não ser com si mesmo. O contrário, no entanto, não se verifica, isto é, não é possível afirmar que o potencial de SERCI total corresponde ao potencial de SIRCI total, pois, um par de conjuntos pode apresentar SERCI total independentemente do potencial de SIRCI. Isto se verifica nos pares de modos anteriormente apresentados. Os modos que compõem o primeiro par, por exemplo, apesar de possuírem correspondência exata entre os semicírculos (SERCI total), não possuem potencial de SIRCI.

A operação de inversão em torno do eixo de simetria que mapeia todos os modos em seus pares correspondentes será representada por meio da notação tradicional, isto é, na pauta, para fins comparativos de visualização das simetrias inversivas.

Apesar de as representações no círculo das alturas considerarem intervalos não ordenados entre classes de notas, as representações em pauta irão considerar os intervalos de forma ordenada. Isto, para que se mantenha o ordenamento escalar de forma ascendente e a partir da nota inicial de cada modo, no intuito de facilitar a comparação entre eles. Para isso, será realizada uma operação de retroinversão, pois se aplicada unicamente uma operação de inversão, o conjunto resultante apresentará ordenamento descendente. A retroinversão combina duas operações de transformação, inicialmente realiza-se a retrogradação do conjunto e, em seguida, a formação resultante é submetida a uma operação de inversão.

A Figura 33 exemplifica detalhadamente este procedimento no modo lídio, que se mapeia no modo lócrio. Nos pares subsequentes, entretanto, estas operações (retrogradação + inversão) são demonstradas de forma unificada, isto é, com uma única operação de retroinversão.

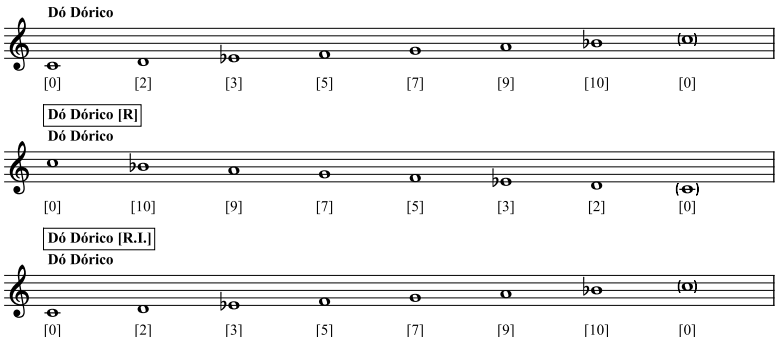
Figura 33 - Operação de retroinversão aplicada aos pares de modos



Fonte: elaborado pelo autor

Por ser inversamente simétrico, o modo dórico é mapeado em si mesmo quando submetido à operação de retroinversão (Figura 34).

Figura 34 - Operação de retroinversão aplicada ao modo dórico



Fonte: elaborado pelo autor

A verificação das dinâmicas e propriedades dos conjuntos analisados motivou a observação de outro aspecto que se estabelece de forma complementar às análises realizadas. Este aspecto é observado a partir da posição do trítono (classe intervalar 6) no interior dos conjuntos, independentemente do ponto inicial, isto é, a localização que este intervalo assume entre os componentes internos dos conjuntos.

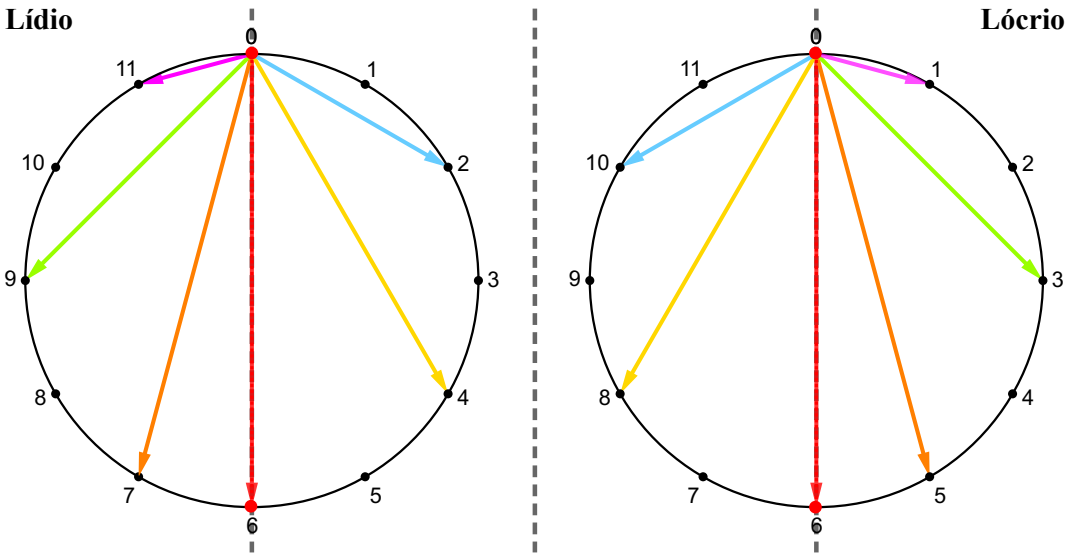
Ao observar este aspecto em cada um dos modos percebe-se que, na medida em que o trítono deixa de se projetar sobre a tônica e assume uma posição entre os elementos internos,

ocorre um aumento gradativo da recorrência de classes intervalares e, consequentemente, de potencial SIRCI.

Supõe-se que a ocorrência da classe intervalar 6 a partir do ponto inicial esteja associada à ampliação da diversidade intervalar do conjunto. Em outras palavras, uma vez que o ponto inicial do conjunto estabelece a maior distância intervalar possível em relação a outra classe de notas do próprio conjunto, este (o conjunto) tende a abranger um espectro mais amplo de classes intervalares, implicando na diversidade máxima de classes intervalares, e, portanto, em um potencial de SIRCI nulo, como acontece com os modos lídio e lócrio (Figura 35).

Uma vez que os pares de modos foram sequenciados por potencial de SIRCI, observa-se que, em cada par subsequente, o trítono se distancia cromática e gradativamente do ponto inicial. Desta forma, é possível dizer que a recorrência de classes intervalares aumenta proporcionalmente à distância de deslocamento do trítono. Isto, porque os conjuntos com recorrência nula possuem o trítono projetado sobre a classe de notas 0 e 6 (Figura 35); os conjuntos com uma recorrência possuem o trítono projetado sobre os intervalos [1 – 7] e [11 – 5] (Figura 36); os conjuntos com duas recorrências possuem o trítono projetado sobre os intervalos [2 – 8] e [10 – 4] (Figura 37); e o conjunto que possui três recorrências possui o trítono projetado entre 3 e 9 (Figura 38).

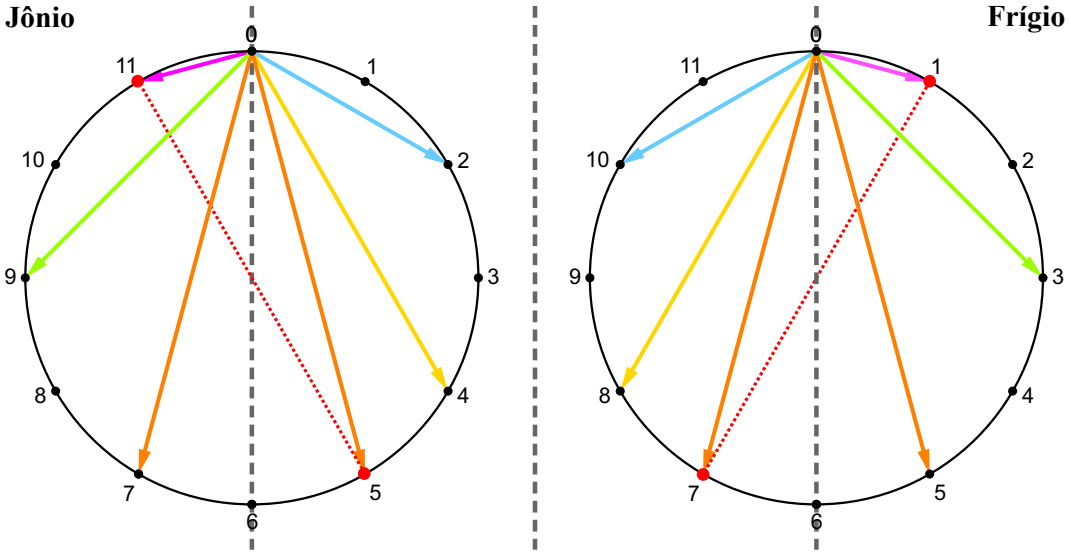
Figura 35 - Projeção do trítono no par de modos lídio e lócrio



Recorrência: 0
Diversidade: 6 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

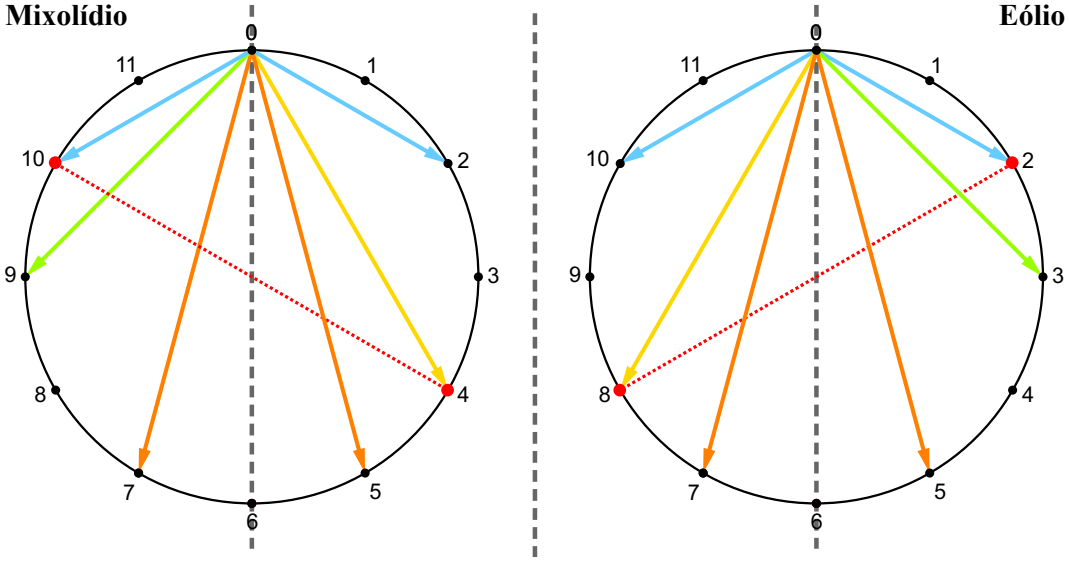
Figura 36 - Projeção do trítono no par de modos jônio e frígio



Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

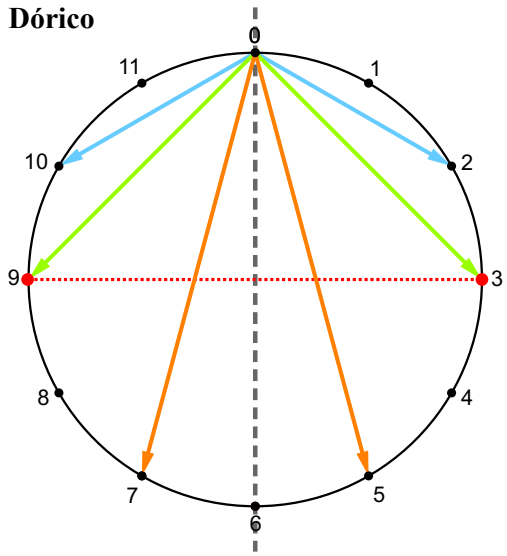
Figura 37 - Projeção do trítono no par de modos mixolídio e eólio



Recorrência: 2 (classes de intervalos 2 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 38 - Projeção do trítono no modo dórico



Recorrência: 3 (classes de intervalos 2, 3 e 5)
Diversidade: 3 (classes de intervalos 2, 3 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

É evidente que, neste caso, se estabelece uma articulação lógica entre propriedades, em que o potencial de SIRCI é diretamente proporcional a recorrência de classes intervalares e, consequentemente, ao deslocamento cromático do trítono (D_t). Assim, cada uma destas dimensões opera como indicador analítico das outras.

Esta propriedade, até onde se tem conhecimento, é exclusiva dos modos eclesiásticos e é descrita pela Equação 2.

Equação 2 - Equação descritiva do deslocamento do cromático do trítono nos modos eclesiásticos

$$\alpha: \{0,1,2,3,4,5\} \rightarrow \{0,1,2,3\}, \alpha(x) = \min(x, 6-x) = D_t = R_{ci}$$

Fonte: elaborado na presente pesquisa

3.1.3 Análise de SERCI na escala menor melódica e em suas derivações

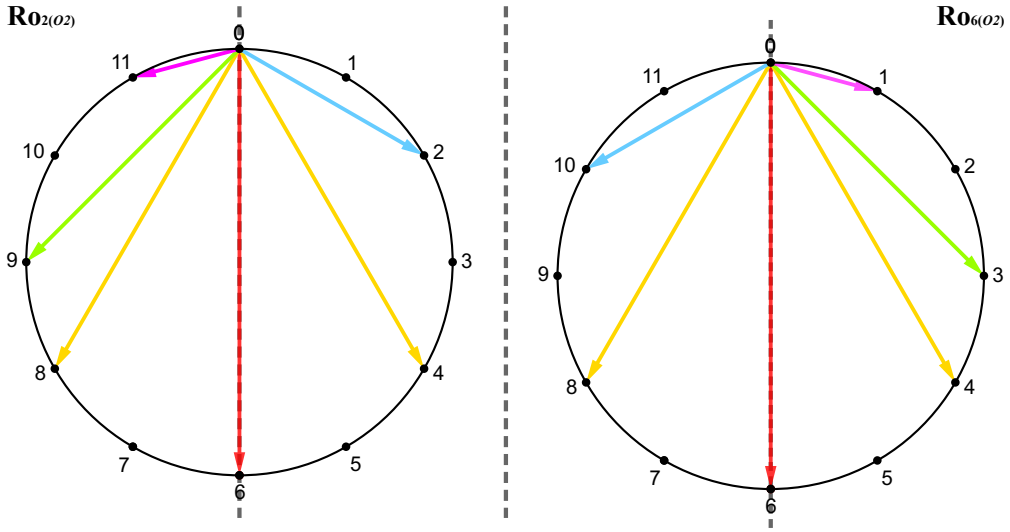
Após realizada a verificação do potencial de SIRCI na escala menor melódica, seus conjuntos derivados foram obtidos e igualmente submetidos à análise de SIRCI. A escala menor melódica, por ser o conjunto original 2 (O_2), será assim denominada. Cada um dos conjuntos derivados serão designados como rotações (Ro), a saber, $Ro_{1(O2)}$, $Ro_{2(O2)}$, $Ro_{3(O2)}$, $Ro_{4(O2)}$, $Ro_{5(O2)}$ e $Ro_{6(O2)}$. Nessa nomenclatura, o identificador entre parênteses indica o conjunto

original do qual cada rotação é derivada, permitindo distingui-las dos demais grupos analisados ao longo deste trabalho.

O agrupamento por SERCI dos conjuntos revelou propriedades semelhantes aos modos. Foram revelados três pares de conjuntos, nos quais o semicírculo direito de um conjunto apresenta simetria completa com o semicírculo esquerdo do seu par, e vice-versa. Portanto, três dos conjuntos são relacionados por operações de inversão com algum outro, ou seja, apresentam SERCI total. O conjunto restante, assim como na seção anterior, apresenta potencial de SIRCI total, ou seja, é inversamente simétrico e, portanto, só pode apresentar SERCI total em relação a si mesmo.

Seguindo o mesmo procedimento, os pares de conjuntos serão dispostos de forma sequencial, de acordo com o potencial de SIRCI. O primeiro par é composto pelos conjuntos $Ro_{2(O2)}$ e $Ro_{6(O2)}$ (Figura 39).

Figura 39 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{2(O2)}$ e $Ro_{6(O2)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 4)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 6)

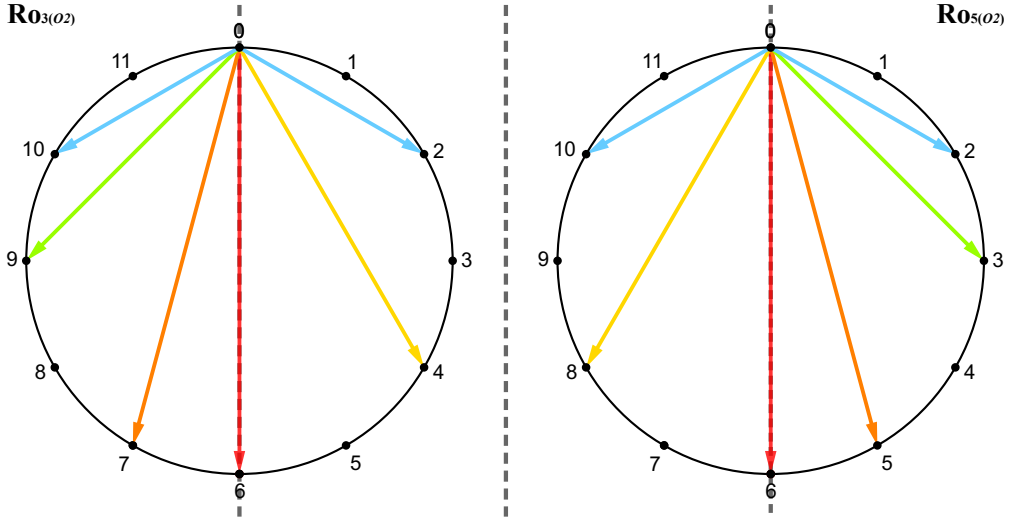
Fonte: elaborado pelo autor

Estes conjuntos, assim como os modos jônio e frígio, possuem apenas uma classe intervalar recorrente em ambos os semicírculos e, portanto, cinco classes de intervalo distintas. No entanto, diferentemente do par de modos jônio e frígio, a recorrência ocorre na classe intervalar 4, ao passo que a diversidade abrange as classes de intervalo 1, 2, 3, 4 e 6. Desta forma, embora os pares não possuam os critérios para análise de SERCI entre si, seria coerente

dizer que o par de modos jônio e frígio, e o par de conjuntos $Ro_{2(O2)}$ e $Ro_{6(O2)}$, possuem o mesmo potencial de SIRCI, ainda que mínimo.

O par subsequente (Figura 40), composto pelos conjuntos $Ro_{3(O2)}$ e $Ro_{5(O2)}$, mantém, assim como o par anterior, o potencial de SIRCI mínimo, que se revela pela presença das classes intervalares 2, 3, 4, 5 e 6, dentre as quais apenas a classe intervalar 2 é recorrente em ambos os semicírculos.

Figura 40 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{3(O2)}$ e $Ro_{5(O2)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 2)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 2, 3, 4, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

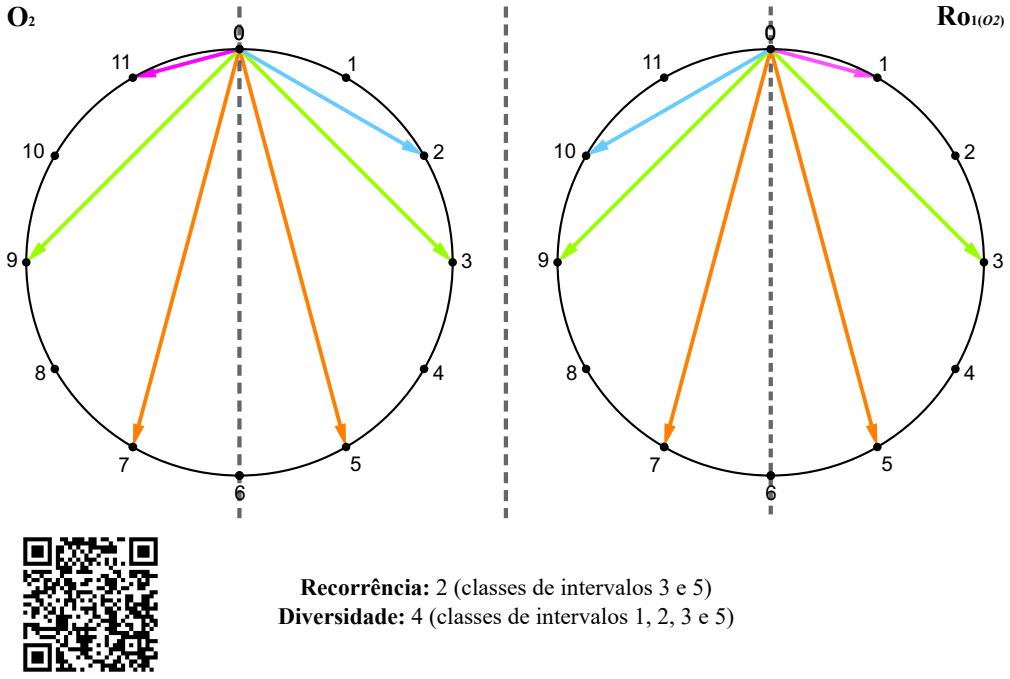
Visto que neste grupo existem pares com o mesmo potencial de SIRCI, a organização da sequência de pares foi estabelecida, para além do potencial de SIRCI, a partir da progressão das rotações, de modo que a presença de $Ro_{3(O2)}$ neste par justifica seu posicionamento sucessivo ao par que contem $Ro_{2(O2)}$.

A partir deste ponto, cada par de conjuntos, assim como ocorre com os modos, apresentará sempre uma recorrência de classe intervalar a mais que o par anterior e, portanto, uma diversidade a menos, implicando no aumento do potencial de SIRCI. No entanto, diferentemente de como ocorre nos modos, os pares em sequência não acumulam as mesmas recorrências que seus antecessores.

O par de modos seguinte (Figura 41), constituído pelo conjunto original 2 (O_2) e $Ro_{1(O2)}$, além de conter uma recorrência a mais em relação aos dois pares que o precedem, não apresenta recorrências comuns a nenhum deles. Enquanto o primeiro e o segundo par

manifestam suas recorrências nas classes intervalares 4 e 2, respectivamente, este par apresenta as recorrências nas classes intervalares 3 e 5. Em consequência da quantidade de recorrências, a diversidade abrange apenas quatro classes intervalares (1, 2, 3 e 5). Este par apresenta, portanto, um potencial de SIRCI considerável e elevado em relação aos conjuntos anteriores.

Figura 41 - SERCI no par de conjuntos O_2 e $Ro_{1(O2)}$



Recorrência: 2 (classes de intervalos 3 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 2, 3 e 5)

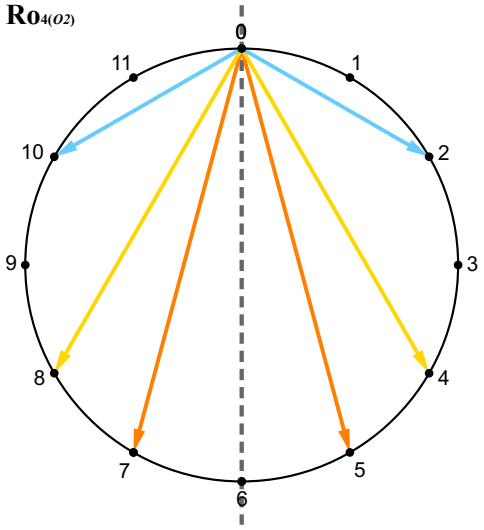
Fonte: elaborado pelo autor

Assim como ocorre nos modos, o acúmulo da quantidade de recorrências e consequente aumento do potencial de SIRCI, percorre progressivamente os pares de conjuntos até alcançar seu limite. Neste caso, o limite é atingido no conjunto $Ro_{4(O2)}$ (Figura 42) que, igualmente ao modo dórico, é um conjunto que apresenta SIRCI total, ou seja, mapeia-se em si mesmo quando submetido a uma operação de inversão e, portanto, não apresenta SERCI total em relação a outro conjunto, mas sim consigo mesmo. O conjunto $Ro_{4(O2)}$ possui, portanto, três classes de intervalos distintas e que são recorrentes em ambos os semicírculos, são elas as classes intervalares 2, 4 e 5. Desta maneira, assim como o modo dórico, este conjunto possui a quantidade mínima de diversidade de classes intervalares e máxima de recorrências de classes intervalares, fazendo com que seus semicírculos sejam completamente simétricos.

Nas análises deste grupo e das seções subsequentes, as correspondências inversivas entre os conjuntos não serão representadas na pauta. Essa escolha se deve ao fato de que a seção anterior (3.1.2) já exemplificou as relações de simetria na notação tradicional, permitindo

comparar sua disposição na pauta com sua representação no círculo das alturas. Desse modo, as análises seguintes serão concentradas nas representações circulares, evitando a repetição de procedimentos já verificados e a inserção excessiva de imagens.

Figura 42 - Conjunto Ro4(O2) isolado por SIRCI total



Recorrência: 3 (classes de intervalos 2, 4 e 5)
Diversidade: 3 (classes de intervalos 2, 4 e 5)

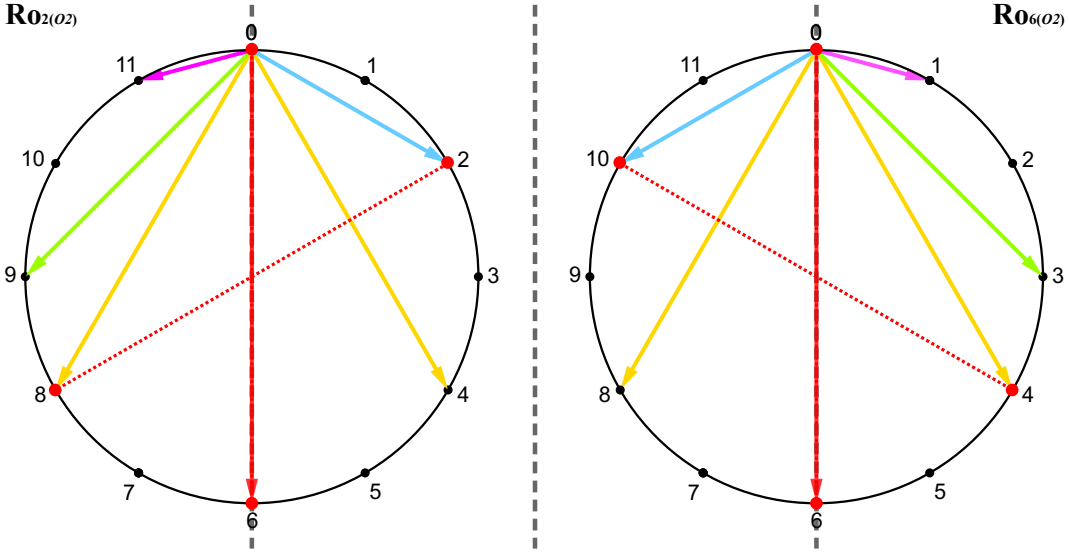
Fonte: elaborado pelo autor

A similaridade analítica entre os modos e grupo formado pelo conjunto O_2 e suas rotações, incentivou, assim como na seção anterior, a investigação da projeção do trítono no interior destes conjuntos. Ao analisar este aspecto, verificou-se que estes conjuntos possuem dois trítonos separados por um tom (dois semitons) de distância.

Já foi suposto que, quando a nota inicial do conjunto determina a maior distância intervalar possível em relação a outra nota que o compõe, ou seja, quando o trítono é projetado sobre o ponto inicial, o conjunto tende a contemplar maior variedade de classes de intervalos. Desta forma, observa-se que os dois primeiros pares de conjuntos, (Figura 43; Figura 44) que apresentam o potencial de SIRCI mínimo deste contexto, possuem um dos dois trítonos projetados sobre o ponto inicial. Isto significa que estes conjuntos apresentam a recorrência mínima e diversidade máxima de classes intervalares possível nesta organização intervalar. Diferentemente dos modos, a mínima recorrência e máxima diversidade nestes conjuntos correspondem a 1 e 5 classes intervalares, respectivamente.

Observando este aspecto a partir da organização dos pares por potencial de SIRCI, verifica-se que os trítonos se distanciam cromaticamente do ponto inicial a cada par da sequência, assim como ocorre com os modos. Ou seja, à medida que o potencial de SIRCI aumenta, os trítonos se distanciam cromaticamente, estabelecendo uma relação proporcional.

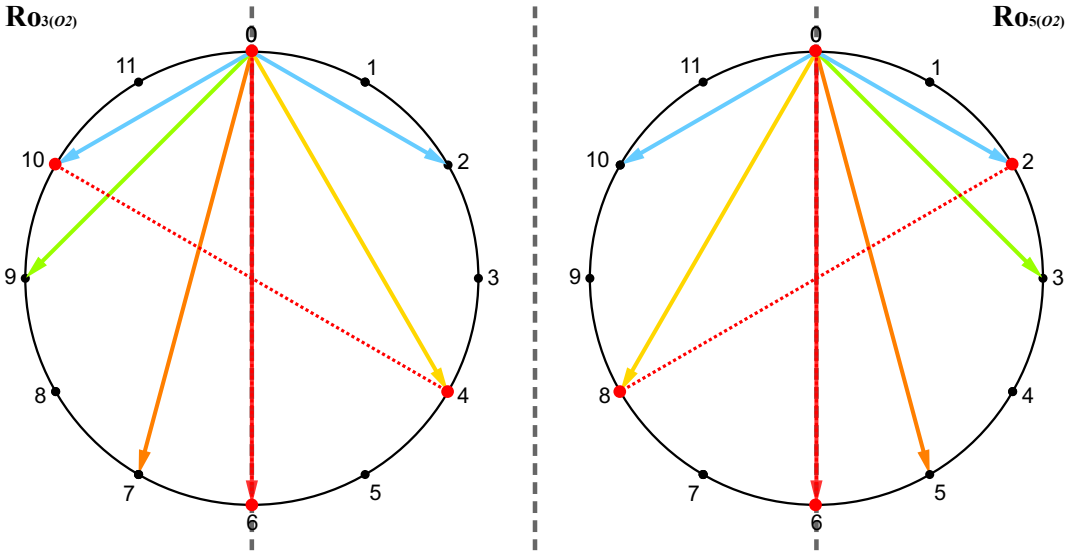
Figura 43 - Projeção dos trítonos no par de conjuntos $Ro_{2(O2)}$ e $Ro_{6(O2)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 4)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 44 - Projeção dos trítonos no par de conjuntos $Ro_{3(O2)}$ e $Ro_{5(O2)}$

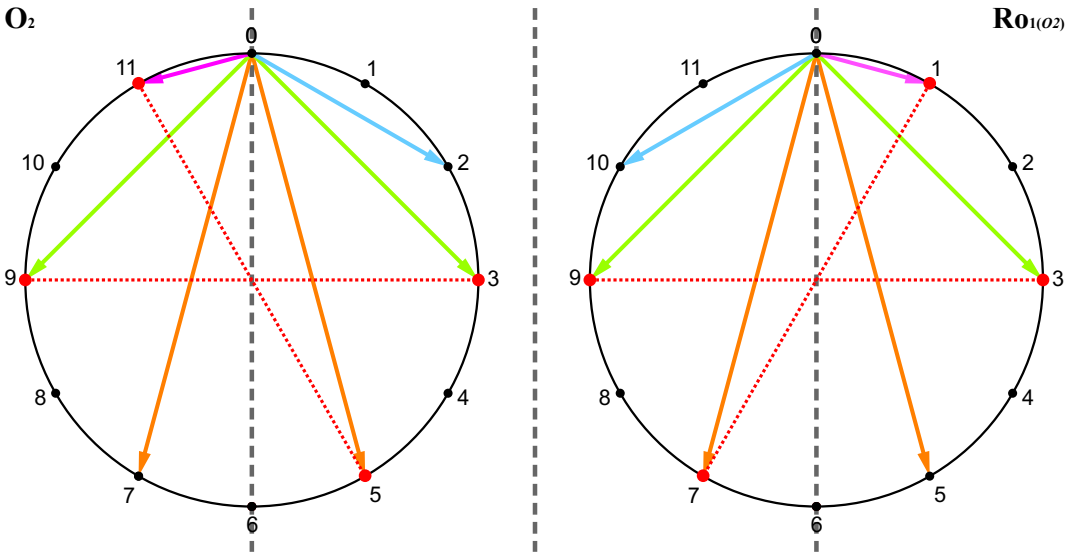


Recorrência: 1 (classe de intervalos 2)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 2, 3, 4, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

Seguindo a lógica apresentada, o par seguinte (Figura 45) apresenta uma recorrência de classe intervalar a mais que os anteriores (maior potencial de SIRCI) e um dos trítonos distanciado em um semitom do ponto inicial.

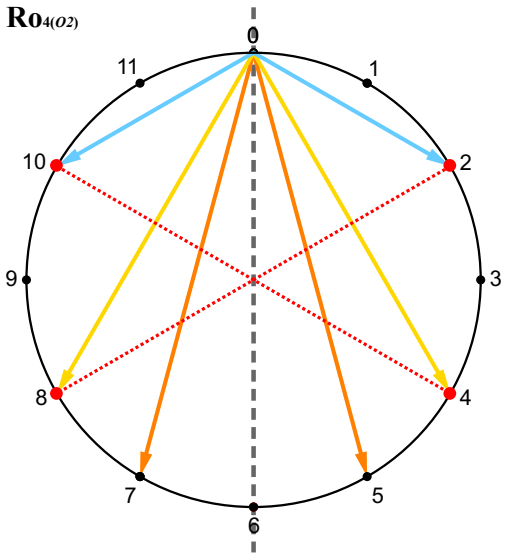
Figura 45 - Projeção dos trítonos no par de conjuntos O_2 e $Ro_{1(O2)}$



Recorrência: 2 (classes de intervalos 3 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 2, 3 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 46 - Projeção dos trítonos no conjunto $Ro_{4(O2)}$



Recorrência: 3 (classes de intervalos 2, 4 e 5)
Diversidade: 3 (classes de intervalos 2, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Por fim, o último conjunto, $Ro_{4(O2)}$ (Figura 46), que possui a recorrência máxima e diversidade mínima de classes intervalares neste contexto, ambas iguais a 3, possui ambos os trítonos distanciados em um tom do ponto inicial.

Constata-se que ambos os conjuntos inversamente simétricos analisados até então no presente trabalho (modo dórico e $Ro_{4(O2)}$), possuem o posicionamento do trítono o mais distante possível do ponto inicial. Ademais, assim como na seção anterior, conclui-se que o potencial de SIRCI pode atuar como marcador analítico da posição dos trítonos no interior dos conjuntos e vice-versa. Esta propriedade, da forma como ocorre neste contexto e até onde se tem conhecimento, é exclusiva da escala menor melódica e de seus conjuntos derivados. A Equação 3 apresenta uma possível descrição algébrica desta propriedade.

Equação 3 - Equação descritiva do deslocamento do cromático do trítono na escala menor melódica e seus conjuntos derivados

$$\alpha: \{0,1,2,3,4,5\} \rightarrow \{0,1,2,3\}, \alpha(x) = \min(x, 6-x) = D_t = R_{ci}$$

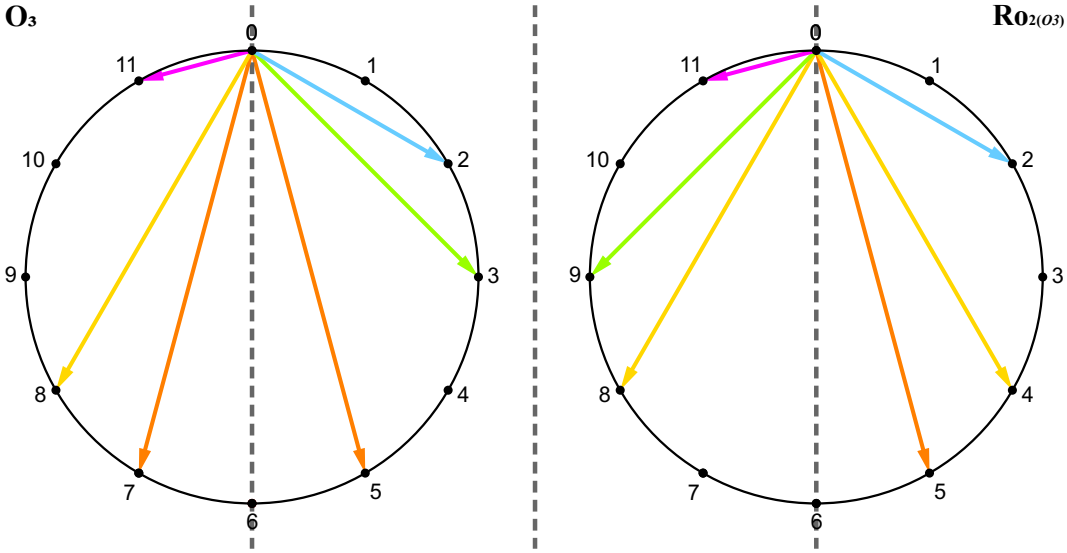
Fonte: elaborado na presente pesquisa

3.1.4 Análise de SERCI nas escalas menor harmônica e maior harmônica e suas derivações

Assim como na seção precedente, as escalas menor harmônica e maior harmônica e suas derivações já foram submetidas às análises de SIRCI para verificação do potencial de SERCI. A escala menor harmônica será denominada como conjunto original 3 (O_3) e, cada um dos seus conjuntos derivados serão designados como: $Ro_{1(O3)}$, $Ro_{2(O3)}$, $Ro_{3(O3)}$, $Ro_{4(O3)}$, $Ro_{5(O3)}$ e $Ro_{6(O3)}$. Da mesma forma, a escala maior harmônica será denominada como conjunto original 4 (O_4) e seus conjuntos derivados serão designados $Ro_{1(O4)}$, $Ro_{2(O4)}$, $Ro_{3(O4)}$, $Ro_{4(O4)}$, $Ro_{5(O4)}$ e $Ro_{6(O4)}$.

Após a verificação dos conjuntos derivados de O_3 e de suas respectivas rotações, observou-se que apenas uma combinação satisfaz os critérios necessários para a realização da análise de SERCI. Entre todos os conjuntos examinados, somente O_3 e $Ro_{2(O3)}$ apresentam condições para constituir um par. Isso ocorre porque ambos compartilham integralmente as classes intervalares 1, 2, 3, 4 e 5, o que significa também que possuem o mesmo potencial de SIRCI, atendendo, assim, aos critérios estabelecidos para a seleção de conjuntos aptos à análise de SERCI (Figura 47).

Figura 47 - SERCI no par de conjuntos O_3 e $Ro_{2(O3)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Recorrência: 1 (classe de intervalos 4)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Ao comparar o semicírculo direito de $Ro_{2(O3)}$ com o semicírculo esquerdo de O_3, observa-se um potencial de SERCI relativamente baixo, uma vez que apenas uma classe intervalar é recorrente entre os semicírculos, sendo esta a classe intervalar 3. Por outro lado, a comparação entre o semicírculo direito de O_3 e o semicírculo esquerdo de $Ro_{2(O3)}$ revela um potencial de SERCI mais elevado, uma vez que há a recorrência das classes intervalares 4 e 5. A Tabela 7 organiza a relação entre os semicírculos opostos.

Tabela 7 - Relação entre os semicírculos opostos de O_3 e $Ro_{2(O3)}$

Semicírculos	Direito de O_3	Esquerdo de $Ro_{2(O3)}$	Esquerdo de O_3	Direito de $Ro_{2(O3)}$
Classes intervalares	2	1	1	2
	3	3	4	4
	5	4	5	5

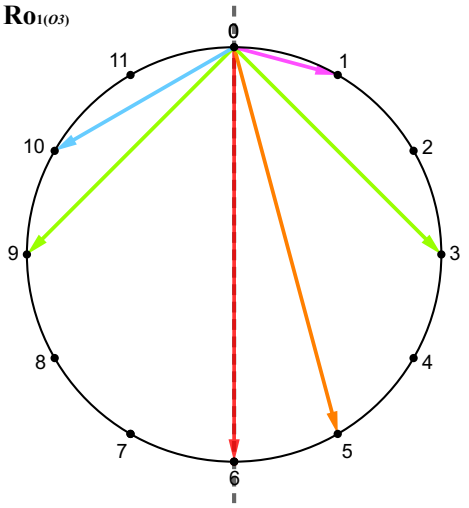
Fonte: elaborado pelo autor

Assim, o potencial limitado de SERCI entre os conjuntos decorre de dois fatores. Em primeiro lugar, as recorrências distribuem-se em classes intervalares distintas nos dois conjuntos, ao passo que a classe intervalar 5 é recorrente em O_3, o conjunto $Ro_{2(O3)}$ possui sua única recorrência na classe intervalar 4, reduzindo o número de correspondências entre alguns semicírculos opostos. Em segundo lugar, da mesma forma como ocorre com o par formado pela escala maior (O_1) e a escala menor harmônica (O_3) (Figura 27), as classes intervalares 1 e 2 encontram-se dispostas nos mesmos semicírculos em ambos os conjuntos, impedindo com que se estabeleça uma correspondência inversiva por meio da recorrência de classes intervalares entre os semicírculos. No entanto, no caso de O_3 e $Ro_{2(O3)}$, o potencial de SERCI é ainda menor, uma vez que a correspondência entre os semicírculos opostos é menos abrangente devido ao conteúdo das recorrências ser distinto em cada conjunto.

Os conjuntos restantes não são aptos à análise de SERCI por apresentarem divergências, seja em relação ao potencial de SIRCI, seja em relação ao conteúdo de classes intervalares. As figuras subsequentes (Figura 48; Figura 49; Figura 50; Figura 51; Figura 52) apresentam os demais conjuntos não elegíveis à análise de SERCI, acompanhados de suas respectivas análises de SIRCI e organizados de acordo com o potencial de SIRCI.

Os conjuntos $Ro_{1(O3)}$ e $Ro_{5(O3)}$ (Figura 48; Figura 49), embora possuam o mesmo potencial de SIRCI, não são elegíveis à análise de SERCI porque apresentam conteúdos de classes intervalares distintos.

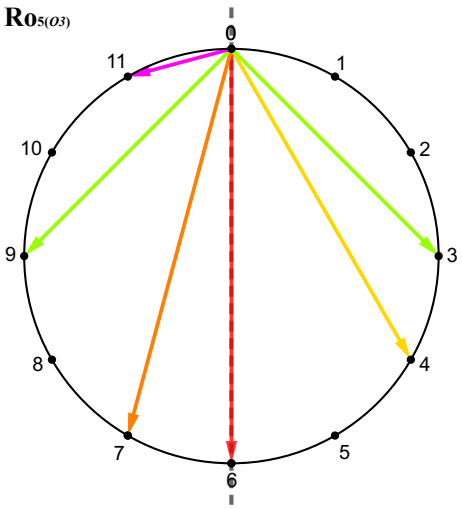
Figura 48 - Conjunto $Ro_{1(O3)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 3)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 49 - Conjunto Ro5(O3)

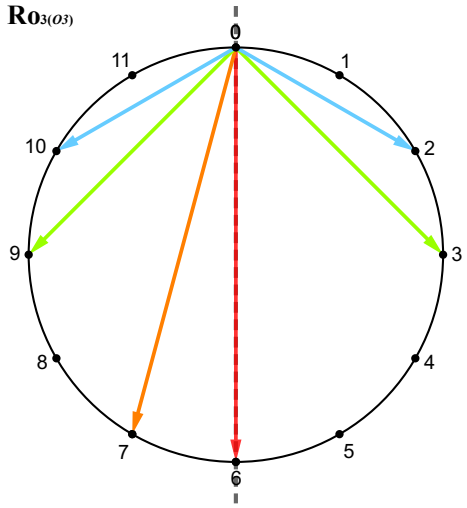


Recorrência: 1 (classe de intervalos 3)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 3, 4, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

Observa-se, ainda, que, embora não seja um critério para análise de SERCI, ambos os conjuntos apresentam recorrência na mesma classe intervalar, a classe intervalar 3. No entanto, apesar da semelhança observada em suas recorrências, os conjuntos apresentam divergência quanto ao conteúdo intervalar, fazendo com que não atendam a um dos critérios necessários para o estabelecimento de um par para análise de SERCI.

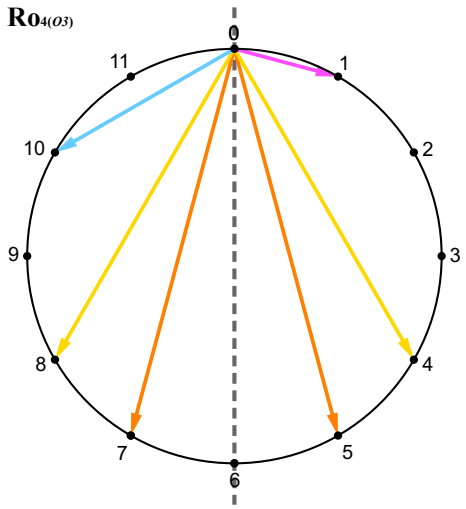
Figura 50 - Conjunto Ro3(O3)



Recorrência: 2 (classes de intervalos 2 e 3)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 2, 3, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

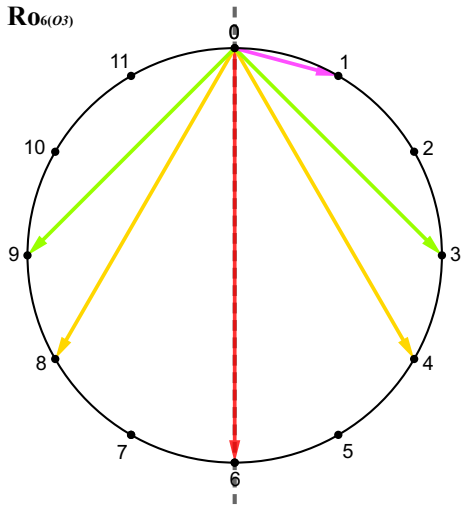
Figura 51 - Conjunto $Ro_{4(O3)}$



Recorrência: 2 (classes de intervalos 4 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 2, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 52 - Conjunto $Ro_{6(O3)}$



Recorrência: 2 (classes de intervalos 3 e 4)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 3, 4 e 6)

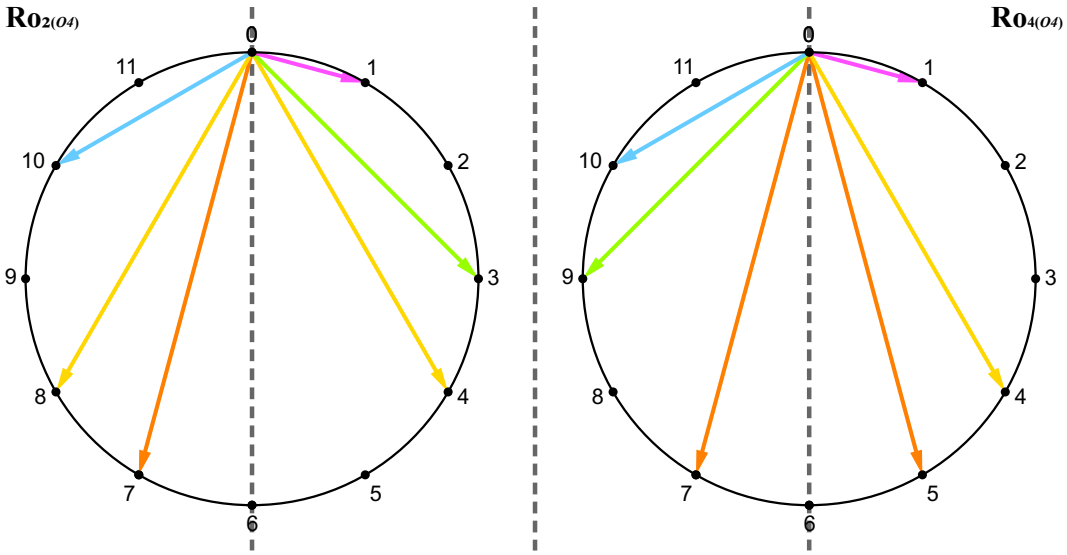
Fonte: elaborado pelo autor

Da mesma forma, os três conjuntos restantes (Figura 50; Figura 51; Figura 52), apesar de apresentarem o mesmo potencial de SIRCI, diferem quanto ao conteúdo de classes intervalares e por esse motivo, não são elegíveis à análise de SERCI.

Para além disso, diferentemente das análises realizadas nas seções precedentes, nem O3 nem suas rotações apresentam SIRCI total. Em outras palavras, nenhum conjunto do grupo é inversamente simétrico.

O grupo formado por O_4 e suas rotações apresenta as mesmas propriedades observadas no grupo anterior. Apenas $Ro_{2(O4)}$ e $Ro_{4(O4)}$ satisfazem os critérios necessários para a análise de SERCI, pois compartilham o mesmo conteúdo intervalar (classes 1, 2, 3, 4 e 5) e, consequentemente, o mesmo potencial de SIRCI. Nota-se que tanto o conteúdo intervalar quanto as recorrências de $Ro_{4(O4)}$ e $Ro_{2(O4)}$ são exatamente as mesmas de O_3 e $Ro_{2(O3)}$, respectivamente. Desta forma, a análise do par formado por $Ro_{2(O4)}$ e $Ro_{4(O4)}$ (Figura 53) revela um padrão praticamente idêntico ao verificado entre O_3 e $Ro_2(O_3)$ (Figura 47).

Figura 53 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{2(O4)}$ e $Ro_{4(O4)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 4)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Um dos pares de semicírculos opostos apresenta apenas a recorrência da classe intervalar 3, enquanto o outro reúne as classes 4 e 5, resultando em um potencial de SERCI relativamente limitado. De forma semelhante como acontece com os pares formados pela escala maior (O_1) e a escala menor harmônica (O_3) (Figura 27) e O_3 e $Ro_{2(O3)}$ (Figura 47), a disposição das classes intervalares 1 e 2 nos mesmos semicírculos restringe o estabelecimento de correspondências inversivas entre os conjuntos. No entanto, de forma distinta aos pares anteriormente citados, que possuem a classe intervalar 1 no semicírculo esquerdo e a classe intervalar 2 no semicírculo direito nota-se que, no par formado por $Ro_{2(O4)}$ e $Ro_{4(O4)}$ a classe

intervalar 1 é disposta no semicírculo direito, enquanto a classe intervalar 2 é disposta no semicírculo esquerdo. Este aspecto, como já visto, faz com que a correspondência inversiva observada pela recorrência das classes intervalares entre os semicírculos seja reduzida, ou seja, restringe o potencial de SERCI. A Tabela 8 revela a relação entre os semicírculos opostos de $Ro_{2(O4)}$ e $Ro_{4(O4)}$.

Tabela 8 - Relação entre os semicírculos opostos de $Ro_{2(O4)}$ e $Ro_{4(O4)}$

Semicírculos	Direito de $Ro_{2(O4)}$	Esquerdo de $Ro_{4(O4)}$	Esquerdo de $Ro_{2(O4)}$	Direito de $Ro_{4(O4)}$
Classes intervalares	1	2	2	1
	3	3	4	4
	4	5	5	5

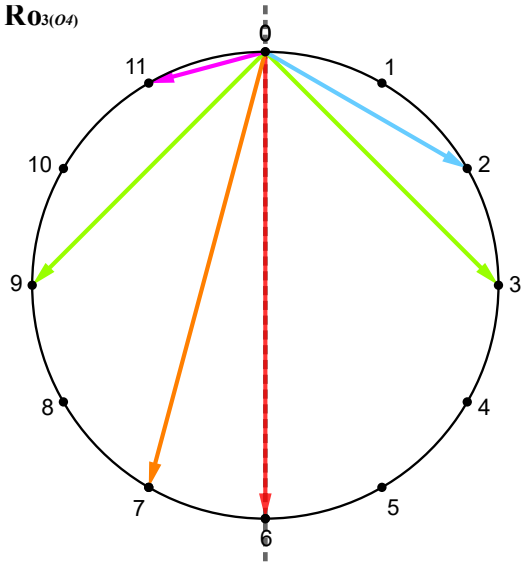
Fonte: elaborado pelo autor

A análise dos conjuntos remanescentes, assim como no grupo anterior, revelou que nenhum deles se mostra elegível para a análise de SERCI, pois verificam-se diferenças referentes ao potencial de SIRCI e/ou ao conteúdo de classes intervalares. As Figuras seguintes (Figura 54; Figura 54; Figura 56; Figura 57; Figura 58) reúnem esses conjuntos, acompanhados de suas respectivas análises de SIRCI e apresentados em ordem de potencial de SIRCI.

Os conjuntos $Ro_{3(O4)}$ e $Ro_{6(O4)}$ (Figura 54; Figura 55), apresentam a mesma propriedade dos conjuntos $Ro_{1(O3)}$ (Figura 48) e $Ro_{5(O3)}$ (Figura 49). Isto, porque além de compartilharem apenas uma recorrência, na classe intervalar 3, possuem conteúdos de classes intervalares distintos. Desta forma, apesar de possuírem o mesmo potencial de SIRCI, a divergência dos conteúdos de classes intervalares impede que sejam elegíveis à análise de SERCI.

Da mesma forma como ocorre no grupo anterior, os conjuntos O_4, $Ro_{1(O4)}$ e $Ro_{5(O4)}$ (Figura 56; Figura 57; Figura 58) apresentam o mesmo potencial de SIRCI, mas não possuem o mesmo conteúdo de classes de intervalos e, portanto, não são aptos a análise de SERCI entre si. Além disso, assim como ocorre em O_3 e suas rotações, nenhum dos conjuntos apresenta potencial de SIRCI total, isto é, nenhum deles é inversamente simétrico.

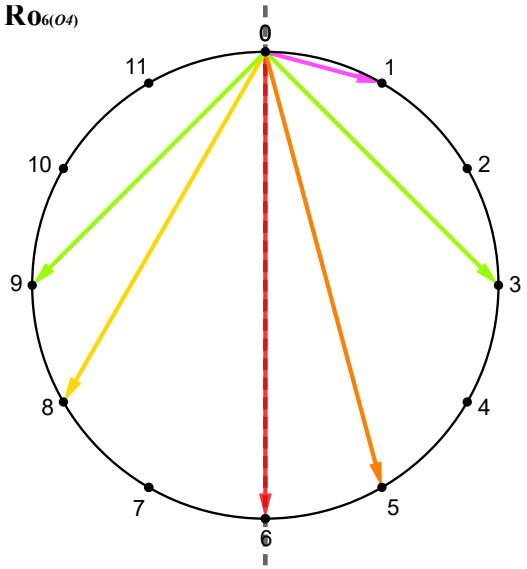
Figura 54 - Conjunto Ro3(O4)



Recorrência: 1 (classe de intervalos 3)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

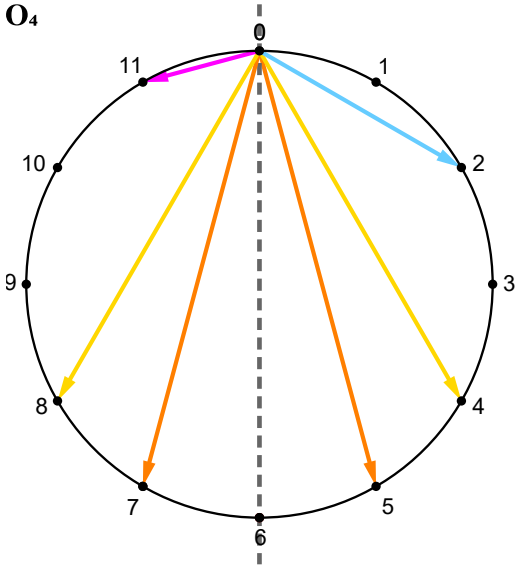
Figura 55 - Conjunto Ro6(O4)



Recorrência: 1 (classe de intervalos 3)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 3, 4, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

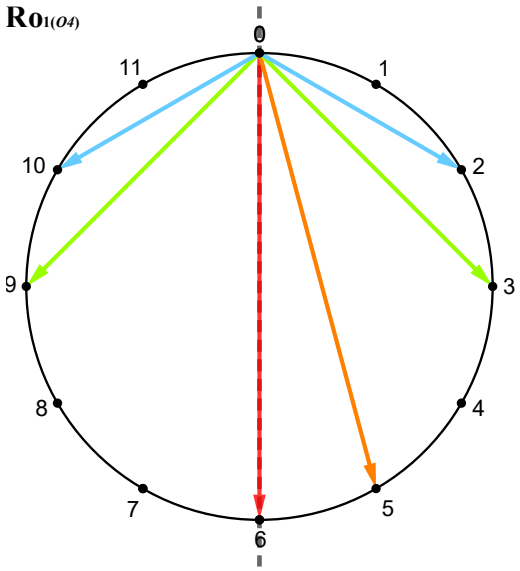
Figura 56 - Conjunto O_4



Recorrência: 2 (classes de intervalos 4 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos1, 2, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

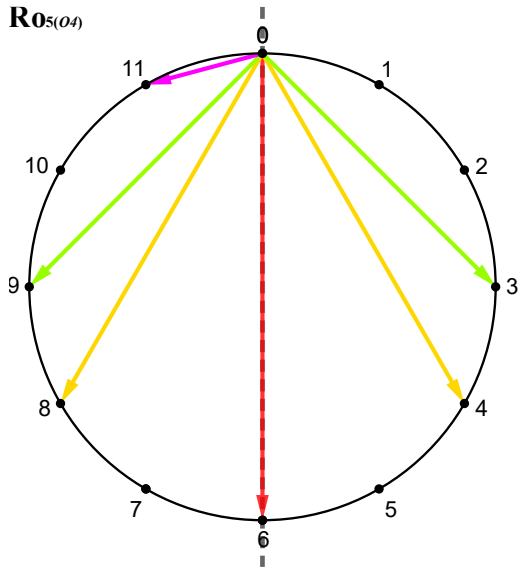
Figura 57 - Conjunto $Ro_{1(O4)}$



Recorrência: 2 (classes de intervalos 2 e 3)
Diversidade: 4 (classes de intervalos2, 3, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 58 - Conjunto Ro5(O4)



Recorrência: 2 (classes de intervalos 3 e 4)
Diversidade: 4 (classes de intervalos1, 3, 4 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

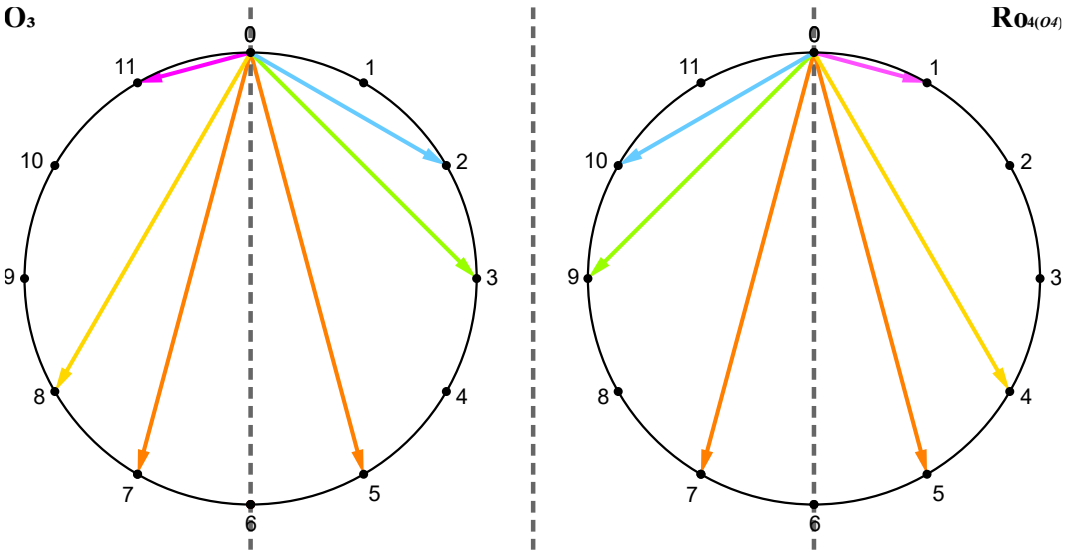
As semelhanças observadas entre as análises de SERCI dos pares elegíveis de O_3 e O_4, bem como entre os conjuntos não elegíveis à análise de SERCI em cada grupo, sugerem a existência de relações estruturais entre esses conjuntos. Verifica-se que os conjuntos de ambos os grupos apresentam propriedades semelhantes quanto ao potencial de SIRCI, ao conteúdo de classes intervalares e à distribuição das recorrências.

Diante desse cenário, tornou-se pertinente investigar possíveis análises de SERCI entre conjuntos derivados de conjuntos originais distintos, buscando verificar em que medida as correspondências observadas podem revelar padrões estruturais entre os dois grupos de conjuntos

Após verificar as condições para análise de SERCI entre os conjuntos dos dois grupos, foram encontrados 7 pares que apresentam potencial de SERCI total, assim como ocorre nas seções 0 e 3.1.3. Isso significa que para qualquer conjunto do grupo formado por O_3 há um conjunto inversamente correspondente no grupo formado por O_4, e vice-versa. Em outras palavras, os grupos apresentam uma relação de simetria inversiva entre si, de modo que a aplicação da operação de inversão aos conjuntos de um dos grupos resulta, sistematicamente, nos conjuntos pertencentes ao outro grupo.

Os pares formados serão expostos a seguir, organizados de acordo com o potencial de SIRCI e com a progressão dos conjuntos originais e de suas respectivas rotações.

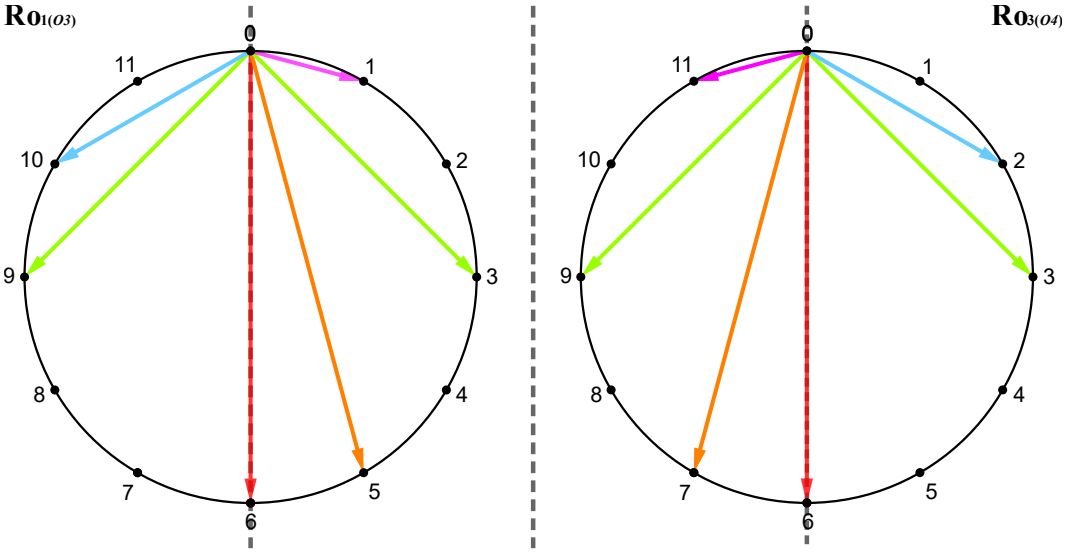
Figura 59 - SERCI no par de conjuntos O_3 e $Ro_{4(O4)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 5)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

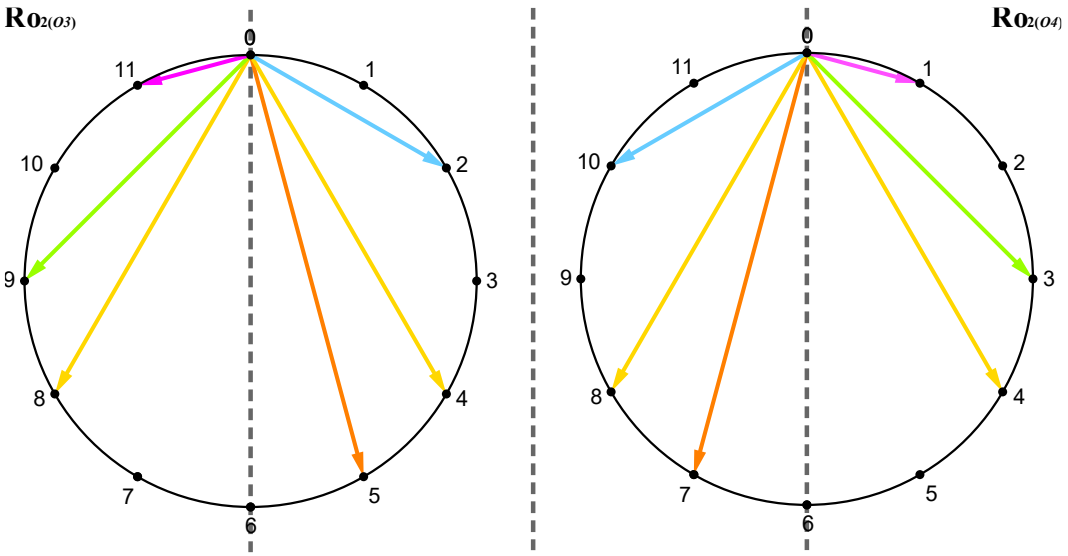
Figura 60 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{1(O3)}$ e $Ro_{3(O4)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 3)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

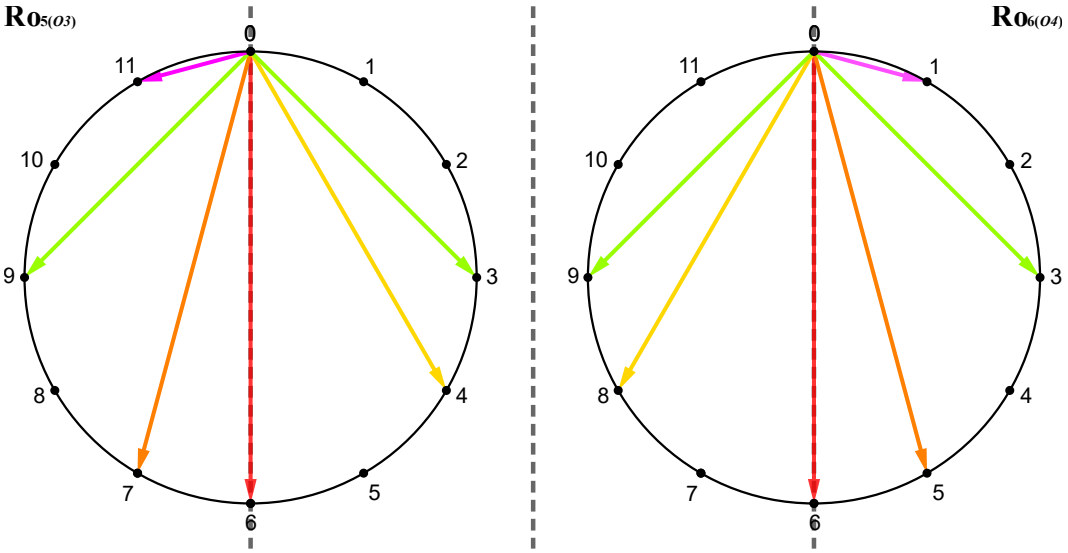
Figura 61 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{2(O3)}$ e $Ro_{2(O4)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 4)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 2, 3, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

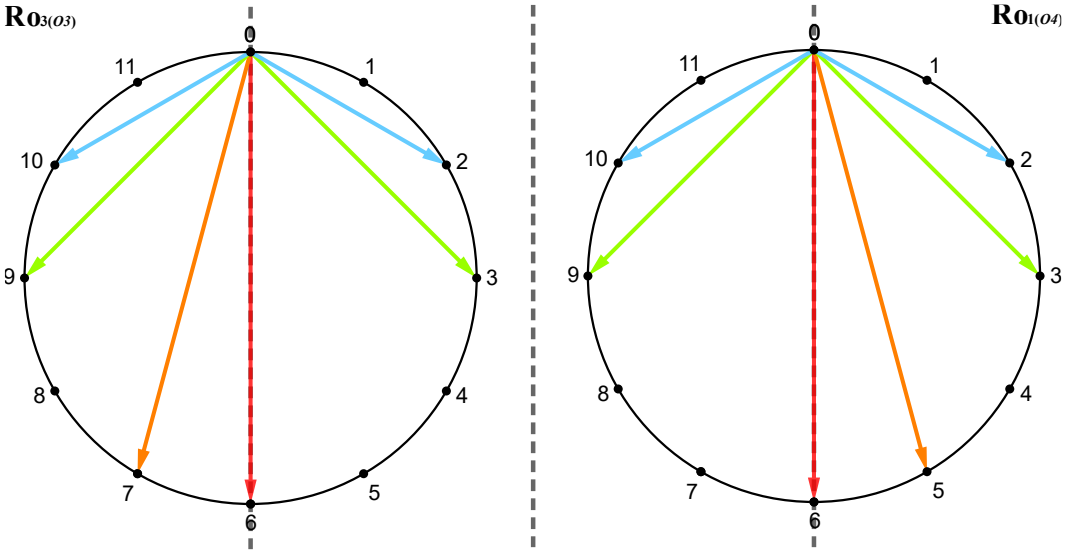
Figura 62 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{5(O3)}$ e $Ro_{6(O4)}$



Recorrência: 1 (classe de intervalos 3)
Diversidade: 5 (classes de intervalos 1, 3, 4, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

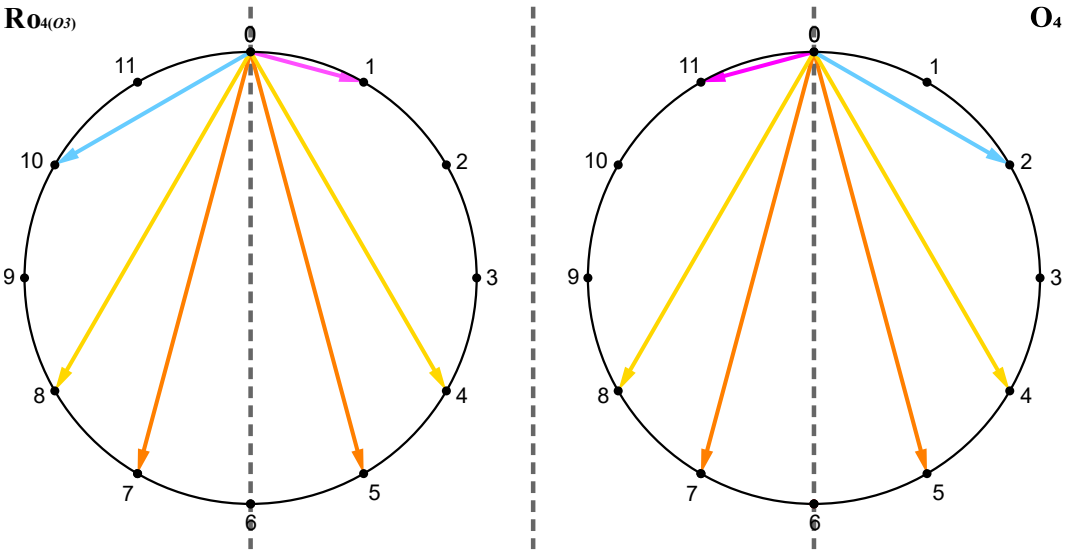
Figura 63 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{3(O3)}$ e $Ro_{1(O4)}$



Recorrência: 2 (classes de intervalos 2 e 3)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 2, 3, 5 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

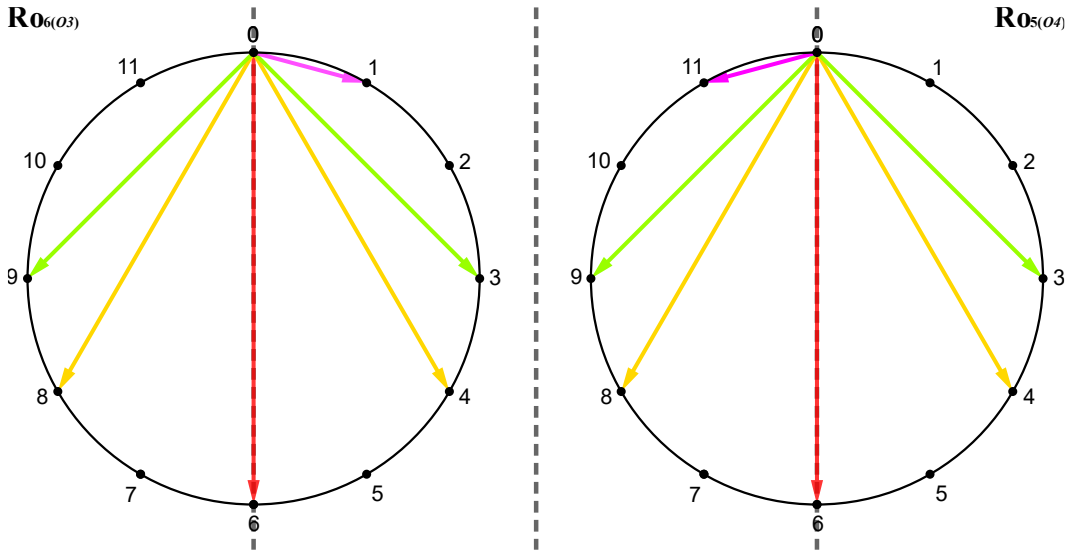
Figura 64 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{4(O3)}$ e O_4



Recorrência: 2 (classes de intervalos 4 e 5)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 2, 4 e 5)

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 65 - SERCI no par de conjuntos $Ro_{6(O3)}$ e $Ro_{5(O4)}$



Recorrência: 2 (classes de intervalos 3 e 4)
Diversidade: 4 (classes de intervalos 1, 3, 4 e 6)

Fonte: elaborado pelo autor

Diferentemente das seções anteriores, a posição interna dos trítonos não será analisada. Embora esse aspecto tenha sido considerado em análises precedentes, sua investigação nos pares apresentados nesta seção não revelou padrões consistentes capazes de contribuir para a compreensão das relações observadas. Dessa forma, optou-se por concentrar a discussão nos aspectos que se mostraram analiticamente mais relevantes para os objetivos do presente estudo.

4 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos permitem concluir que o círculo das alturas foi satisfatoriamente empregado como ferramenta de visualização das relações de simetria e assimetria em escalas e modos. Sua aplicação aos materiais selecionados possibilitou a identificação e comparação de propriedades estruturais que podem não ser imediatamente evidenciadas pela notação musical tradicional ou pelas abstrações predominantemente numéricas de vertentes da teoria pós-tonal. Considera-se, portanto, que o objetivo geral da pesquisa foi alcançado.

A investigação também cumpriu os objetivos específicos ao formular e aplicar procedimentos voltados à análise de simetria por recorrência de classes intervalares em níveis interno e externo. A SIRCI e a SERCI mostraram-se eficazes para diferenciar graus de correspondência inversiva interna e externa e a partir disso relacionar conjuntos pertencentes a um mesmo grupo ou provenientes de grupos distintos. Dessa forma, a pesquisa não se limitou a verificar a adequação de um recurso visual, mas estabeleceu os fundamentos de uma proposta analítica passível de continuidade e ampliação.

No intuito de facilitar as análises de potencial SERCI não total, conclui-se que as representações poderiam destacar os semicírculos analisados e sombrear aqueles que não participam diretamente da relação observada. Para tal aquisição, seriam necessárias mais figuras para representar uma única análise de SERCI, que intensificaria demasiadamente o trabalho manual de produção gráfica. Assim, é também conclusão que o presente trabalho pode e deve avançar em tal direção no intuito de fundamentar e expandir seus resultados.

Aliado a isso, a quantidade de combinações SERCI possíveis demonstrou que a aplicação manual da proposta se torna pouco viável em análises mais abrangentes. Essa limitação aponta para a necessidade de uma ferramenta automatizada que mapeie os potenciais de SIRCI e SERCI, isto é, uma ferramenta capaz de gerar os conjuntos, mapear suas classes intervalares e compará-los a outros conjuntos indicando os potenciais simétricos e assimétricos. Para além disso, a ferramenta demandaria a execução sonora automatizada dos materiais, para que se possa articular os resultados gráficos e analíticos à percepção auditiva.

A análise plena dos potenciais SIRCI e SERCI proporcionada por uma ferramenta de automatização contribuiria, ainda, para articular os potenciais de simetria e assimetria. Visto que, embora a assimetria tenha sido identificada no presente trabalho, ela não foi sistematicamente relacionada ao seu aspecto oposto, a simetria, devido aos limites do escopo analítico.

Esses desdobramentos possibilitariam o desenvolvimento de um repositório que organizasse os conjuntos de acordo com seus níveis de simetria e assimetria interna e externa, no intuito de oferecer a articulação destes aspectos em um acervo de materiais destinados à composição e à improvisação. Assim, a presente pesquisa fornece os fundamentos gráficos, analíticos e práticos para a continuidade da proposta e aplicação nos campos de teoria, análise musical e criação musical, podendo, também, ter ampla aplicação no campo do ensino musical. Tal aprofundamento se daria numa próxima fase da pesquisa a ser estruturada em nível de pós-graduação.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BABBITT, Milton. *Words About Music*. Edição de Stephen Dembski e Joseph N. Straus. Madison: The University of Wisconsin Press, 1987. 205 p.

CARPEAUX, Otto Maria. *O Livro de Ouro da História da Música*. 2. ed. Rio de Janeiro: Ediouro Publicações S.A., 2001. 209 p.

CODEÇO, André. *A Teoria do Domínio Sonoro*. Rio de Janeiro, 2019. 349 f. Tese (Doutorado em Música). Escola de Música, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

FORTE, Allen. *The Structure of Atonal Music*. New Haven: Yale University Press, 1973. 224 p.

GRIFFITHS, Paul. *A música moderna: uma história concisa e ilustrada de Debussy a Boulez*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998. 189 p.

GROUT, Donald J.; PALISCA, Claude V. *História da música ocidental*. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2007. 759 p.

LEWANDOWSKI, Stephan. A music theoretical history of two continents: German and European roots and (re)reception of pitch-class set theory. *Journal of Music Theory and Transcultural Music Studies*, [s. l.], v. 3, n. 2, p. 67-77, 2025.

MARTINS, J. António Oliveira. João Pedro Paiva de Oliveira, Teoria analítica da música do século XX. *Revista Portuguesa de Musicologia*, [s. l.], n. 9, p. 165-187, 1999.

MASSIN, Jean; MASSIN, Brigitte. *História da música ocidental*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 1255 p.

MESSIAEN, Olivier. *The Technique of My Musical Language*. Tradução de John Satterfield. Paris: Alphonse Leduc, 1956. 137 p.

MORRIS, Robert. Compositional Spaces and Other Territories. *Perspectives of New Music*, [s. l.], v. 33, n. 1/2, p. 328-358, 1995.

MORRIS, Robert. Mathematics and the Twelve-Tone System: past, present, and future. *Perspectives of New Music*, [s. l.], v. 45, n. 2, p. 76-107, 2007.

RAHN, John. *Basic Atonal Theory*. New York: Schirmer Books, 1980. 158 p.

RAYNOR, Henry. *História social da música: da Idade Média a Beethoven*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1981. 434 p.

SALLES, Paulo de Tarso. *Teoria dos conjuntos: apontamentos*. [São Paulo]: CMU/ECA-USP, 2016. 20 p. Apostila elaborada como material de apoio para a disciplina Contraponto III.

SALLES, Paulo de Tarso. *Introdução à teoria dos conjuntos e à teoria neorriemanniana: abordagens analíticas para a música pós-tonal*. [s. l.: s. n.], [2017?]. 49 p.

SAMPAIO, Marcos da Silva. *A teoria de relações de contornos musicais: inconsistências, soluções e ferramentas*. Salvador, 2012. 211 f. Tese (Doutorado em Música). Escola de Música, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2012.

SANTOS, Angela Sikorski; NASCIMENTO, Carla Zenita do; LOPES, Claudemir Aparecido (org.). *Manual de orientações metodológicas*. Brusque: Editora UNIFEBE, 2021. 68 p.

SILVA, Renata; URBANESKI, Vilmar. *Metodologia do trabalho científico*. Indaial: UNIASSELVI, 2015. 112 p.

SOUSA, Daniel Moreira de. *Perspectivas para a análise textural a partir da mediação entre a teoria dos contornos e a análise particional*. Rio de Janeiro, 2015. 195 f. Dissertação (Mestrado em música). Escola de Música, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

STRAUS, Joseph N. *Introdução à Teoria Pós-tonal*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil, Ltda, 2000. 248 p.

TYMOCZKO, Dmitri. *A Geometry of Music*. Oxford: Oxford University Press, 2011. 450 p.

APÊNDICE

Material complementar disponível em:

Representação de escalas e modos no círculo das alturas a partir de relações de simetria e assimetria - Material Complementar

Acesso em: 21 set. 2026