



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Estimação de estados de veículos aéreos não tripulado usando filtragem bayesiana

Rangel de Brito Rodrigues

João Monlevade, MG
2026

Rangel de Brito Rodrigues

Estimação de estados de veículos aéreos não tripulado usando filtragem bayesiana

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientadora: Profa. Wendy Yadira Eras Herrera

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2026

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

R696e Rodrigues, Rangel de Brito.
Estimação de estados de veículos aéreos não tripulado usando
filtragem bayesiana. [manuscrito] / Rangel de Brito Rodrigues. - 2026.
97 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientadora: Profa. Dra. Wendy Yadira Eras Herrera.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia
Elétrica .

1. Aeronave drone - Sistemas de controle. 2. Controladores PID. 3.
Controle automático. 4. Filtro de Kalman. 5. Modelos matemáticos. 6.
Sistemas de energia elétrica - Estimativa de estado. I. Herrera, Wendy
Yadira Eras. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 629.73.05:519.246

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6/2431



FOLHA DE APROVAÇÃO

Rangel de Brito Rodrigues

Estimação de estados de veículos aéreos não tripulado usando filtragem bayesiana

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Elétrica

Aprovada em 30 de julho de 2026

Membros da banca

Dra. Wendy Yadira Eras Herrera - Orientadora - Universidade Federal de Ouro Preto
MSc. Anny Verly - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Márcio Feliciano Braga - Universidade Federal de Ouro Preto

Wendy Yadira Eras Herrera, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 07/09/2026



Documento assinado eletronicamente por **Wendy Yadira Eras Herrera, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/09/2026, às 15:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1185478** e o código CRC **39F9D01B**.

Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu irmão, meus maiores incentivadores e pilares ao longo de toda esta caminhada. Obrigado por acreditarem em mim, por todo o apoio, paciência, compreensão e por nunca deixarem que eu desistisse, mesmo nos momentos mais difíceis. Cada palavra de incentivo, cada gesto de carinho e cada demonstração de confiança foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Esta conquista é também de vocês, que sempre estiveram ao meu lado.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha sincera gratidão à minha orientadora, Wendy Yadira Eras Herrera, pela orientação, pelo apoio constante e pelos valiosos ensinamentos compartilhados ao longo de toda a trajetória deste TCC. Sua disponibilidade, paciência e dedicação foram fundamentais para o desenvolvimento e a conclusão deste trabalho.

Agradeço também aos demais professores que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação acadêmica e para a realização deste trabalho, compartilhando conhecimentos, experiências e ensinamentos que levarei comigo para a vida.

Meu agradecimento eterno à minha mãe, Dilva, e ao meu irmão, Rafael, por todo o amor, apoio e incentivo ao longo dessa caminhada. Vocês estiveram ao meu lado em todos os momentos, especialmente nos mais difíceis, e foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui. Esta conquista também é de vocês.

Resumo

Os Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) têm ganhado destaque em diversas áreas, como monitoramento, inspeção e agricultura, devido à sua capacidade de realizar tarefas complexas de forma autônoma. Para garantir a estabilidade e o controle eficiente durante as operações, é necessário empregar métodos de controle adequados, os quais dependem de uma modelagem matemática precisa do sistema. A modelagem matemática de um VANT é essencial para compreender o comportamento dinâmico do sistema e para a implementação de estratégias de controle e estimação de estados. Neste trabalho, é desenvolvido um modelo matemático que descreve a dinâmica de um quadricóptero, o qual é utilizado como base para o projeto de um controlador do tipo PID (Proporcional, Integral e Derivativo), cujos parâmetros são ajustados por meio do algoritmo genético. O desempenho do controlador é avaliado por meio de simulações computacionais realizadas no ambiente Matlab, considerando diferentes trajetórias de referência para o veículo, como movimento em linha reta e circular. A análise do desempenho é conduzida a partir de métricas clássicas de sistemas de controle no domínio do tempo, tais como sobressinal, tempo de acomodação e erro estacionário e métricas como Integral do Erro Absoluto (IAE, do inglês *Integral Absolute Error*) e Integral do Erro Absoluto Multiplicado pelo Tempo (ITAE, do inglês *Integral Time Absolute Error*). Além disso, é implementado um filtro de Kalman com o objetivo de realizar a estimação dos estados do sistema a partir do modelo matemático e medições de sensores. O desempenho do estimador é avaliado em dois cenários distintos: perda de medições dos sensores e presença de ruído elevado nas medições. Para complementar a análise, é utilizado o índice Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE, do inglês *Root Mean Square Error*), permitindo quantificar a precisão das estimativas obtidas. Os resultados obtidos indicam que o controlador PID é capaz de garantir o seguimento das trajetórias propostas, mantendo o sistema estável e com desempenho satisfatório. Adicionalmente, o filtro de Kalman demonstrou ser capaz de fornecer estimativas consistentes dos estados do sistema mesmo em condições adversas de medição, evidenciando sua eficiência na filtragem de ruído e na robustez do processo de estimação.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; VANT; Controle PID; Filtro de Kalman; Estimação de Estados; Sistemas de Controle.

Abstract

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) have gained prominence in several fields, such as monitoring, inspection, and agriculture, due to their ability to perform complex tasks autonomously. To ensure stability and efficient control during operations, appropriate control methods must be employed, which depend on accurate mathematical modeling of the system. The mathematical modeling of a UAV is essential for understanding the dynamic behavior of the system and for implementing control and state estimation strategies. In this work, a mathematical model describing the dynamics of a quadcopter is developed and used as the basis for the design of a Proportional-Integral-Derivative (PID) controller, whose parameters are tuned using a genetic algorithm. The controller's performance is evaluated through computational simulations conducted in the Matlab environment, considering different reference trajectories for the vehicle, such as straight-line and circular motions. Performance analysis is carried out using classical time-domain control system metrics, such as overshoot, settling time, and steady-state error, as well as metrics such as the Integral of Absolute Error (IAE) and the Integral of Time-weighted Absolute Error (ITAE). In addition, a Kalman filter is implemented to estimate the system states based on the mathematical model and sensor measurements. The estimator's performance is evaluated under two distinct scenarios: sensor measurement loss and high levels of measurement noise. To complement the analysis, the Root Mean Square Error (RMSE) is used to quantify the accuracy of the obtained estimates. The results indicate that the PID controller is capable of ensuring the tracking of the proposed trajectories while maintaining system stability and satisfactory performance. Furthermore, the Kalman filter demonstrated its ability to provide consistent estimates of the system states even under adverse measurement conditions, highlighting its effectiveness in noise filtering and the robustness of the estimation process.

Keywords: Mathematical Modeling; UAV; PID Control; Kalman Filter; State Estimation; Control Systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplos de Veículos Aéreos.	1
Figura 2 – Diagrama em blocos do sistema de controle aplicado ao VANT.	2
Figura 3 – Rotação em 2D.	9
Figura 4 – Rotação horária de um vetor	11
Figura 5 – Rotação de $\mathbf{p}$ ao redor do eixo z	12
Figura 6 – Referencial inercial	13
Figura 7 – Referencial do veículo	13
Figura 8 – Eixos do referencial do veículo 2	15
Figura 9 – Referencial fixo ao corpo	16
Figura 10 – Definição dos eixos.	18
Figura 11 – Momentos de inércia do quadricóptero	20
Figura 12 – Vista superior do quadricóptero	21
Figura 13 – Definição das forças e torques que atuam sobre o quadricóptero.	22
Figura 14 – Diagrama em blocos do Controlador PID	26
Figura 15 – Arquitetura do sistema de controle PID em cascata para o quadricóptero.	27
Figura 16 – Resposta ao degrau genérica de um sistema subamortecido.	32
Figura 17 – Funcionamento básico do AG.	37
Figura 18 – Evolução da função objetivo (custo) ao longo das gerações durante uma realização do processo de otimização.	41
Figura 19 – Resposta ao degrau das posições	43
Figura 20 – Resposta ao degrau para os ângulos	44
Figura 21 – Resposta temporal das variáveis de ação de controle	46
Figura 22 – Trajetórias 2D e 3D referentes ao voo em linha reta.	50
Figura 23 – Resposta ao degrau das posições	51
Figura 24 – Resposta ao degrau dos ângulos	53
Figura 25 – Resposta do sistema para ação de controle do PID	54
Figura 26 – Simulação do movimento circular utilizando o controlador PID.	56
Figura 27 – Respostas das posições em trajetória circular	57
Figura 28 – Respostas senoidais para os ângulos ϕ e θ e a rampa para o ângulo ψ	58
Figura 29 – Resultado da simulação para o cenário de teste	59
Figura 30 – Posições reais e estimadas da aeronave pelo EKF	69
Figura 31 – Velocidades lineares reais e estimadas pelo EKF	70
Figura 32 – Ângulos reais e estimados pelo EKF	70
Figura 33 – Velocidades angulares reais e estimadas pelo EKF	71
Figura 34 – Posições reais e estimadas da aeronave pelo EKF	73
Figura 35 – Velocidades lineares reais e estimadas pelo EKF	73

Figura 36 – Ângulos reais e estimados pelo EKF	74
Figura 37 – Velocidades angulares reais e estimadas pelo EKF	75

Lista de tabelas

Tabela 1 – Constantes de tempo (σ) obtidas para as malhas de controle.	31
Tabela 2 – Critérios de desempenho para o controle de posição (x, y e z).	33
Tabela 3 – Critérios de desempenho para o controle de atitude (ϕ, θ e ψ).	34
Tabela 4 – Variáveis das malhas de controle a serem sintonizadas.	38
Tabela 5 – Limites inferiores e superiores dos ganhos dos controladores PID. . . .	40
Tabela 6 – Ganhos obtidos pelo AG para o controlador PID	42
Tabela 7 – Valores do desempenho para controle de posição	44
Tabela 8 – Valores do desempenho para controle de atitude	45
Tabela 9 – Índices de desempenho do controlador PID sintonizado por AG	47
Tabela 10 – Valores do desempenho para controle de posição	51
Tabela 11 – Valores do desempenho para controle de atitude	52
Tabela 12 – Índices de desempenho para a trajetória em linha reta.	54
Tabela 13 – Valores do desempenho para posição na trajetória circular	57
Tabela 14 – Índices de desempenho para a trajetória circular.	60
Tabela 15 – Valores RMSE obtido para cada estado estimado para o cenário 1. . .	72
Tabela 16 – Valores RMSE obtido para cada estado estimado para o cenário 2. . .	75

Lista de siglas e abreviaturas

AG	Algoritmo Genético (GA, do inglês <i>Genetic Algorithm</i>)
APF	Filtro de Partículas Auxiliar (APF, do inglês Auxiliary Particle Filter)
EKF	Filtro de Kalman Estendido (EKF, do inglês Extended Kalman Filter)
IAE	Integral do Erro Absoluto (IAE, do inglês <i>Integral Absolute Error</i>)
IMU	Unidade de Medição Inercial (IMU, do inglês <i>Inertial Measurement Unit</i>)
ITAE	Integral do Erro Absoluto Multiplicado pelo Tempo (ITAE, do inglês <i>Integral Time Absolute Error</i>)
LQG	Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG, do inglês <i>Linear Quadratic Gaussian</i>)
LQR	Regulador Linear Quadrático (LQR, do inglês <i>Linear Quadratic Regulator</i>)
NLPID	PID Não Linear (NLPID, do inglês <i>Nonlinear PID</i>)
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
RMSE	Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE, do inglês <i>Root Mean Square Error</i>)
SLC	Fechamento Sucessivo de Malhas (SLC, do inglês <i>Successive Loop Closure</i>)
UKF	Filtro de Kalman Unscented (UKF, do inglês Unscented Kalman Filter)
VANT	Veículos Aéreos Não Tripulados (UAV, do inglês <i>Unmanned Aerial Vehicles</i>)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Formulação do Problema	4
1.2	Objetivos	5
1.3	Estado da Arte	6
1.4	Estrutura do trabalho	7
2	MODELAGEM DO SISTEMA	8
2.1	Sistema de coordenadas	8
2.1.1	Matrizes de rotação	9
2.1.2	Sistema de Coordenadas do Quadricóptero	12
2.1.2.1	Referencial Inercial $\mathcal{F}^i$	12
2.1.2.2	Referencial do Veículo $\mathcal{F}^v$	13
2.1.2.3	Referencial do Veículo 1 $\mathcal{F}^{v1}$	13
2.1.2.4	Referencial do Veículo 2 $\mathcal{F}^{v2}$	14
2.1.2.5	Referencial Fixo ao Corpo $\mathcal{F}^b$	15
2.2	Equação de Coriolis	17
2.3	Cinemática e Dinâmica	17
2.3.1	Variáveis de estado do quadricóptero	17
2.3.2	Cinemática do quadricóptero	18
2.3.3	Dinâmica dos corpos rígidos	19
2.4	Força e Momento	21
2.5	Considerações Parciais do Capítulo	23
3	CONTROLE DO SISTEMA	25
3.1	Controle PID	25
3.2	Projeto do Controlador	27
3.2.1	Controle de Posição	28
3.2.2	Controle de Atitude e Altitude	28
3.2.3	Controle de Velocidade Angular	30
3.3	Testes das Malhas em Cascata	30
3.4	Especificações de Desempenho	31
3.5	Critérios de Desempenho do Sistema de Controle	32
3.5.1	Critérios para o Controle de Posição	33
3.5.2	Critérios para o Controle de Atitude	33
3.6	Índices de Desempenho	33
3.7	Métodos de Sintonia	34

3.7.1	Algoritmo Genético	35
3.7.2	Determinação dos parâmetros do controlador utilizando Algoritmo Ge- nético	38
3.7.2.1	Função Objetivo e Restrições do Sistema	38
3.7.2.2	Operadores Genéticos e Mecanismo de Evolução	40
3.7.3	Resultados da otimização dos ganhos PID	41
3.7.4	Resultados do controlador PID	42
3.8	Resultados dos Índices de Desempenho	47
4	RESULTADOS DO CONTROLE DE TRAJETÓRIAS	49
4.1	Cenário de testes	49
4.1.1	Trajectoria em Linha Reta	49
4.1.2	Trajectoria Circular	55
5	FILTRO DE KALMAN	61
5.1	Problema de Estimação de Estados	61
5.2	Filtro de Kalman para Sistemas Lineares	62
5.3	Filtragem de Kalman para Sistemas Não Lineares	63
5.3.1	Filtro de Kalman Estendido (EKF)	63
5.4	Aplicação do Filtro de Kalman Estendido ao Modelo do VANT	64
5.4.1	Modelo Não Linear em Tempo Contínuo	64
5.4.2	Discretização e Linearização do Modelo	64
5.4.3	Modelo de Medição	65
5.4.4	Inicialização das Matrizes do EKF	65
5.5	Índice de Desempenho RMSE	66
6	RESULTADOS DO FILTRO DE KALMAN	68
6.1	Descrição do Cenário	68
6.2	Estimativas de estado fornecida pelo EKF	68
6.2.1	Cenário 1: Falha nas Medições dos Sensores	68
6.2.2	Cenário 2: Aumento no Ruído de Medição	72
7	CONCLUSÃO	76
7.1	Considerações Finais	76
7.2	Trabalhos Futuros	79
	REFERÊNCIAS	81

1 Introdução

Os Veículos Aéreos Não Tripulados (UAV, do inglês *Unmanned Aerial Vehicles*) são aeronaves projetadas para operar sem a presença de um piloto a bordo, o que proporciona não apenas a redução de custos, mas também a diminuição dos riscos durante as operações. Atualmente, esses dispositivos têm uma vasta gama de aplicações, tanto em contextos civis quanto militares, sendo capazes de operar de maneira controlada à distância ou de forma autônoma (BALTAZAR, 2023).

A evolução das tecnologias associadas aos VANTs tem impulsionado uma crescente demanda no mercado, resultando em uma diversificação de suas funções e capacidades, tornando-os indispensáveis em várias áreas. Esse progresso é alimentado pelo avanço rápido nas áreas de controle, miniaturização e sistemas de informática, o que tem permitido a criação de aeronaves mais seguras, leves, duráveis, acessíveis e econômicas (MOHSAN et al., 2023).

Em termos de topologias, os VANTs podem ser classificados em diferentes categorias. O avião, por exemplo, é uma aeronave de asa fixa, cujas asas são presas ao corpo para gerar sustentação, como ilustrado na Figura 1(a). Por outro lado, os quadricópteros são aeronaves de asas rotativas, que geram sustentação ao redor do eixo do rotor, conforme mostrado na Figura 1(b). Estes veículos possuem as mesmas características de configuração com quatro braços e rotores de rotação oposta, além de contarem com as vantagens de facilidade de implementação, baixo custo e grande manobrabilidade (NAJM; IBRAHEEM, 2019).

Figura 1 – Exemplos de Veículos Aéreos.



(a) Modelo de asas fixas - Elbit Hermes 900 UAV Rugged.

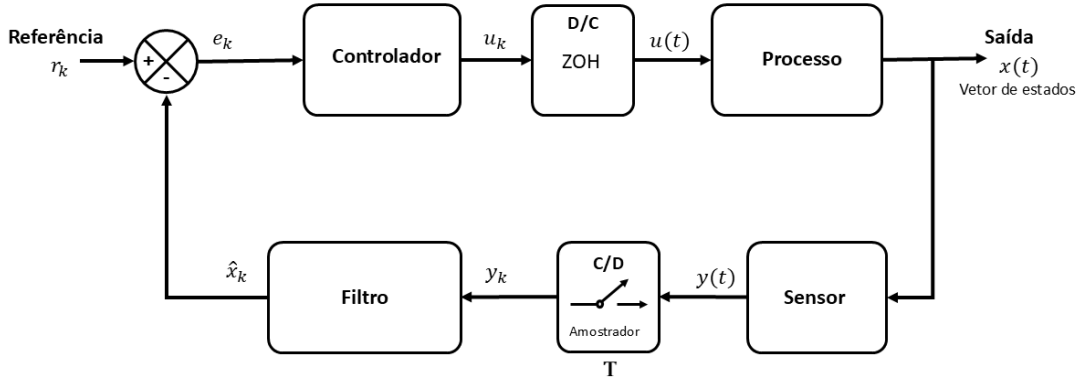


(b) Drone DJI Mavic 3M Multispectral.

Fonte: turbosquid.com e tecnodrones.com.br.

Para representar fisicamente essa aeronave, é necessário formular um conjunto de equações que descrevam sua dinâmica não linear. Essas equações devem representar tanto o movimento translacional quanto o rotacional do veículo, considerando os efeitos das forças de empuxo geradas pelos rotores, da gravidade e dos torques aplicados ao corpo rígido.

Figura 2 – Diagrama em blocos do sistema de controle aplicado ao VANT.



Fonte: Do autor.

No contexto deste trabalho, o bloco denominado Processo, apresentado na Figura 2, representa o próprio VANT. Assim, esse bloco corresponde ao modelo matemático responsável por descrever a evolução temporal dos estados do sistema, tais como posição, velocidade, orientação e velocidades angulares. Várias técnicas têm sido utilizadas na literatura para desenvolver modelos matemáticos que descrevam a dinâmica dos VANTs, entre as quais se destacam o método de Newton-Euler, Euler-Lagrange e os quatérnions. Neste trabalho, optou-se pela modelagem utilizando o método de Newton-Euler, uma abordagem amplamente empregada na literatura (BAHARUDDIN; BASRI, 2023; ALTA-LABANI; ALAIWI, 2022; MARQUES, 2020; NAJM; IBRAHEEM, 2019; LIMA et al., 2015; ALVES, 2012).

Para que o comportamento dinâmico descrito pelo modelo matemático atinja os objetivos de operação desejados, é indispensável a integração de um sistema de controle adequado. Nesse contexto, a modelagem matemática do VANT desempenha um papel fundamental, pois permite compreender a dinâmica do sistema e fornece a base para o desenvolvimento de estratégias de controle e de estimação de estados. A partir do modelo, é possível projetar controladores capazes de garantir a estabilidade, o desempenho e a precisão necessários durante a operação da aeronave.

Um sistema de controle pode ser definido como um conjunto de equipamentos e dispositivos responsáveis por gerenciar o comportamento de máquinas ou outros sistemas físicos (NISE, 2013). Seu principal objetivo é garantir que a saída do sistema apresente o comportamento desejado e permaneça estável, dentro dos parâmetros previamente estabelecidos. Na Figura 2 é apresentado o diagrama em blocos do sistema de controle em malha fechada. Tratando-se de uma arquitetura de controle digital híbrida, em que o processo e a medição do sensor operam no domínio contínuo do tempo, enquanto o filtro, o erro e o controlador funcionam no domínio de tempo discreto dentro do ambiente computacional. A transição entre os domínios é realizada pelas interfaces de amostragem, como os conversores C/D e D/C (PHILLIPS; NAGLE, 1995). Nesse tipo de arquitetura, a saída

do sistema é monitorada e realimentada para ser comparada com a referência desejada, permitindo que o erro calculado corrija continuamente o comportamento dinâmico do sistema (NISE, 2013).

Na literatura, diversas estratégias de controle têm sido empregadas na estabilização e navegação de quadricópteros, destacando-se controladores PID (IZA; IMRON; MARDLIJAH, 2025; GUIMARÃES, 2024; BAHARUDDIN; BASRI, 2023; LIMA, 2020; NAJM; IBRAHEEM, 2019), PID Não Linear (NLPID, do inglês *Nonlinear PID*) (NLPID) (NAJM; IBRAHEEM, 2019), Regulador Linear Quadrático (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*) (LQR), Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG, do inglês *Linear Quadratic Gaussian*) (LQG) (MARQUES, 2020) e técnicas de *Backstepping* (ALVES, 2012).

O controlador PID baseia seu funcionamento em três ações distintas: proporcional, integral e derivativa. A ação proporcional reage imediatamente ao erro instantâneo, a ação integral busca eliminar os erros acumulados ao longo do tempo e a ação derivativa antecipa as variações do erro, contribuindo para reduzir oscilações e melhorar a estabilidade do sistema. A atuação conjunta dessas três componentes proporciona respostas mais rápidas, precisas e estáveis.

Neste trabalho, optou-se pela utilização do controlador PID devido à sua simplicidade de implementação, ao baixo custo computacional e à ampla aplicação em sistemas embarcados e aeronaves não tripuladas. Além disso, tal controlador apresenta desempenho satisfatório em problemas de estabilização e rastreamento de trajetória, sendo amplamente consolidada tanto na literatura quanto em aplicações práticas.

Para determinar os ganhos do controlador PID, existem diferentes técnicas de sintonia como métodos de otimização computacional, como Algoritmo Genético (GA, do inglês *Genetic Algorithm*) (NETO, 2024; SILVA et al., 2021), técnicas clássicas, como Ziegler-Nichols (TUFAILE; DONHA, 2017; NAJM; IBRAHEEM, 2019), Tentativa e Erro (BAHARUDDIN; BASRI, 2023; NAJM; IBRAHEEM, 2019), Alocação de Polos (OKADA, 2022), Fechamento Sucessivo de Malhas (SLC, do inglês *Successive Loop Closure*) (SLC) (MARQUES, 2020). Neste trabalho, será abordado o Algoritmo Genético como método para a determinação dos parâmetros do controlador PID. Essa decisão fundamentou-se na complexidade e no caráter multivariável do sistema analisado, uma vez que o VANT apresentam dinâmica fortemente acoplada e comportamento não linear.

Para que o controlador possa atuar de forma adequada e manter a aeronave estabilizada na trajetória desejada, é necessário que as variáveis de estado do sistema sejam conhecidas com boa precisão. Essas informações são obtidas por meio das medições realizadas por sensores embarcados. Essa função é desempenhada pela Unidade de Medição Inercial (IMU, do inglês *Inertial Measurement Unit*), composta por acelerômetros e giroscópios. Enquanto o giroscópio fornece as velocidades angulares da aeronave, o acelerômetro mede as acelerações lineares atuantes sobre o corpo do veículo. Essas informações per-

mitem acompanhar o comportamento do VANT em tempo real e constituem a base da realimentação do sistema de controle. Entretanto, por se tratarem de dispositivos físicos, suas medições estão sujeitas a ruídos, desvios e outras falhas que podem comprometer a precisão das informações utilizadas pelo controlador.

Além das incertezas inerentes aos sensores, nas aplicações práticas em que há utilização dessas aeronaves, seja para fins recreativos, militares ou comerciais, os veículos também estão sujeitos a falhas em dispositivos eletrônicos que podem ocasionar perda parcial ou até mesmo o comprometimento do seu funcionamento. Segundo [Okada \(2022\)](#), a demanda por esse tipo de aeronave tem crescido significativamente nos últimos anos. Entretanto, esse aumento também tem sido acompanhado por um maior número de acidentes decorrentes de falhas em atuadores, sensores e até mesmo na própria estrutura do veículo. Além disso, o autor destaca que os problemas mais recorrentes estão relacionados aos sistemas de navegação, transmissão e bateria.

Diante desse cenário, torna-se necessário estimar os estados do sistema a partir do modelo matemático, de modo que, mesmo diante de medições imprecisas ou indisponíveis, o veículo continue operando e executando sua tarefa. Nesse contexto, torna-se indispensável a utilização de técnicas capazes de minimizar os efeitos dessas falhas e aumentar a confiabilidade da operação. Na literatura são encontradas abordagens como o Filtro de Kalman Estendido (EKF, do inglês *Extended Kalman Filter*) ([FERRAZ et al., 2023](#); [IZA; IMRON; MARDLIJAH, 2025](#)), o Filtro de Kalman Unscented (UKF, do inglês *Unscented Kalman Filter*) ([NEPOMUCENO, 2025](#)) e o Filtro de Partículas Auxiliar (APF, do inglês *Auxiliary Particle Filter*) ([NEPOMUCENO, 2025](#)). Neste trabalho, optou-se pela utilização do EKF devido à sua facilidade de implementação.

O EKF combina as informações fornecidas pelo modelo matemático do VANT com as medições provenientes da IMU, realizando uma fusão de dados capaz de produzir estimativas mais confiáveis dos estados do sistema. Por lidar diretamente com modelos não lineares, esse filtro é particularmente adequado para aplicações envolvendo quadricópteros ([TEIXEIRA; TÔRRES; AGUIRRE, 2010](#)). Dessa forma, o EKF fornece estimativas mais robustas para serem utilizadas pelo controlador, contribuindo para manter o desempenho do sistema mesmo na presença de incertezas. Para avaliar o filtro, foram definidos dois cenários de teste: falhas nos sensores e aumento do ruído nas medições. O desempenho do EKF em cada cenário foi quantificado por meio da métrica Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE, do inglês *Root Mean Square Error*).

1.1 Formulação do Problema

Neste trabalho investiga três problemas fundamentais. O primeiro problema diz respeito à modelagem matemática, o qual consiste em obter uma representação matemática precisa que descreva o comportamento translacional e rotacional não linear da

aeronave. Esse modelo deve considerar a cinemática, a dinâmica de corpo rígido, os efeitos gravitacionais, bem como as forças de empuxo e torques gerados pelos rotores, servindo como base para o projeto das estratégias de controle e de estimação de estados.

O segundo problema refere-se ao controle de posição e atitude sob dinâmica não linear, cuja finalidade é projetar uma estratégia capaz de estabilizar o veículo e garantir o rastreamento de trajetórias de referência nas variáveis de posição (x, y, z) e orientação (ϕ, θ, ψ) , considerando o forte acoplamento entre os eixos. Adicionalmente, busca-se solucionar a sintonia otimizada dos ganhos do controlador, superando as limitações dos métodos clássicos em sistemas multivariáveis.

O terceiro problema aborda a estimação de estados sob ruído e falhas em sensores, o qual consiste em estimar continuamente as variáveis internas da aeronave quando as medições provenientes da IMU estão corrompidas por ruído ou sujeitas a indisponibilidade temporária.

Para contornar o primeiro problema, utiliza-se a modelagem matemática baseada no método de Newton-Euler. O segundo problema é abordado por meio de um controlador PID com ganhos sintonizados via Algoritmo Genético, cujo desempenho é avaliado pelos índices IAE e ITAE e testado em trajetórias retilíneas e circulares. Por fim, o terceiro problema é tratado utilizando o EKF, avaliado pelo índice RMSE em cenários com falha na medição e aumento do ruído do sinal.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é obter um modelo matemático de um VANT e projetar um controlador capaz de estabilizar as posições $(x, y$ e $z)$ e os ângulos de atitude, especificamente rolagem (ϕ) , arfagem (θ) e guinagem (ψ) , de modo a permitir o rastreamento de uma trajetória de referência. Além disso, busca-se estimar os estados do VANT por meio do EKF e avaliar o desempenho do sistema nos dois cenários de teste considerados neste trabalho. Para alcançá-lo, os seguintes objetivos específicos devem ser cumpridos:

- Obter um modelo matemático que representa o comportamento cinemático e dinâmico do quadricóptero;
- Elaborar o controlador de acordo com as especificações de desempenho para garantir a estabilidade e o controle do veículo;
- Sintonizar os ganhos do controlador PID usando o algoritmo genético;
- Simular o comportamento do sistema no Matlab e analisar o desempenho de acordo com o cenário proposto;

- Avaliar o desempenho do PID usando os critérios de desempenho e métricas como IAE e ITAE;
- Estimar os estados do sistema utilizando o EKF;
- Avaliar o desempenho do estimador usando o índice RMSE por meio de cenários de teste.

1.3 Estado da Arte

Com o intuito de fundamentar o desenvolvimento deste trabalho e identificar as principais abordagens e lacunas na literatura, foi realizado um levantamento bibliográfico focado em modelagem, estimação de estados e estratégias de controle aplicadas a quadricópteros. A seguir, destacam-se as contribuições mais relevantes:

- Os autores [Luis e Ny \(2016\)](#) investigaram o problema de rastreamento de trajetórias dinâmicas em plataformas de pequeno porte (Crazyflie 2.0), propondo a integração de um Rastreador Quadrático Linear (LQT) a um Filtro de Kalman Estendido (EKF). O objetivo principal foi superar as limitações das malhas PID em cascata sob rajadas de vento e trajetórias agressivas. O EKF foi empregado para fundir dados de sensores inerciais e de localização externa, garantindo a estimação contínua das velocidades lineares. Os resultados experimentais comprovaram que o LQT reduziu o erro quadrático médio de posição em até quatro vezes quando comparado ao PID clássico, além de eliminar picos de controle que levavam os motores à saturação. Contudo, a técnica exige a linearização do modelo em torno de pontos de operação, perdendo precisão em manobras de extrema inclinação.
- No trabalho de [Baharuddin e Basri \(2023\)](#), os autores foi realizado um estudo comparativo focado no projeto e na sintonia de controladores PID para o rastreamento tridimensional de trajetórias complexas. Os autores modelaram a aeronave via leis de Newton-Euler e exploraram métodos de sintonia automática baseados em otimização para minimizar o erro de deslocamento. O estudo demonstrou que, embora o PID linear ofereça estabilidade e rápida resposta quando adequadamente ajustado, a abordagem clássica apresenta elevado *overshoot* e perda de desempenho diante de incertezas nos parâmetros de massa e momento de inércia do VANT, evidenciando a necessidade de algoritmos de estimação ou adaptação de ganhos.
- Os autores [Najm e Ibraheem \(2019\)](#) propuseram uma estratégia de Controle PID Não Linear (NLPID) aplicada aos seis graus de liberdade de um quadricóptero. A proposta dos autores buscou contornar a rigidez dos ganhos fixos do PID clássico através do uso de funções exponenciais não lineares que moldam os ganhos Proporcional, Integrativo e Derivativo em tempo real, em função do erro instantâneo. O

trabalho validou por simulação que a abordagem NLPID proporciona maior rejeição a perturbações externas e reduz significativamente o consumo de energia dos motores. Apesar dos avanços, os autores ressaltam a elevada complexidade matemática para a sintonia e prova teórica de estabilidade do sistema.

- No trabalho de [Altalabani e Alaiwi \(2022\)](#), os autores exploraram o uso de técnicas adaptativas inteligentes para o controle de posição e atitude em VANTs sujeitos a variações de carga útil e rajadas de vento. Os autores implementaram uma arquitetura de PID Adaptativo combinada com funções Gaussianas para a atualização contínua dos parâmetros do controlador. O trabalho destacou-se por garantir o rastreamento preciso em trajetórias circulares e helicoidais mesmo sob severas incertezas dinâmicas. Todavia, a solução exige alta capacidade de processamento dos microcontroladores embarcados, o que restringe sua aplicação direta em aeronaves de porte reduzido.

Como pode ser observado, a literatura recente reflete uma evolução contínua das estratégias de controle e estimação de VANTs, transitando de abordagens lineares clássicas para soluções não lineares e adaptativas integradas a estimadores de estado robustos.

1.4 Estrutura do trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em 7 capítulos organizados a seguir.

No Capítulo 1, aborda-se a introdução do tema de estudo descrevendo a motivação e a justificativa e os objetivos principais deste trabalho.

No Capítulo 2, é apresentada a modelagem matemática de um quadricóptero, incluindo o sistema de coordenadas, os referenciais, a cinemática e a dinâmica.

No Capítulo 3, é descrito o projeto de controlador PID, abordando o funcionamento no contexto do controle da aeronave.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados do controle obtidos nas simulações, com a análise do desempenho do sistema de acordo com os cenários simulados.

No Capítulo 5, é apresentada a fundamentação teórica do filtro de Kalman, incluindo os princípios de estimação de estados e sua aplicação no sistema do VANT.

No Capítulo 6, são apresentados os resultados do problema de estimação de estados obtidos nas simulações, com a análise do estimador de estados de acordo com os cenários de teste considerados.

No Capítulo 7, apresentam-se a conclusão do trabalho e propostas de trabalhos futuros.

2 Modelagem do Sistema

O presente capítulo apresenta a fundamentação teórica que é a base para descrever o funcionamento do quadricóptero. Além disso, os modelos matemáticos utilizados neste trabalho foram abordados em [Baharuddin e Basri \(2023\)](#), [Marques \(2020\)](#), [Najm e Ibraheem \(2019\)](#) e [Alves \(2012\)](#). Primeiramente, na Seção 2.1, é feita a definição do sistema de coordenadas, seguido pela cinemática e dinâmica, na Seção 2.3 e, por fim, forças e momentos, Seção 2.4.

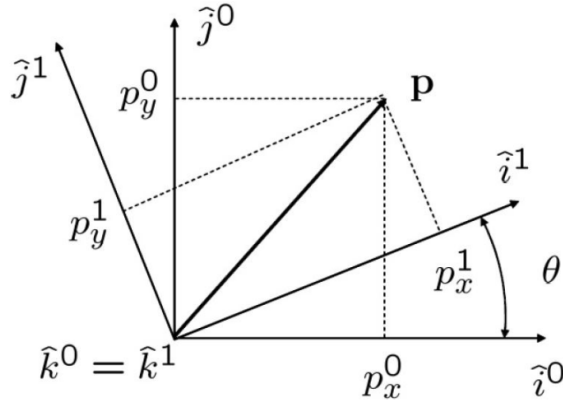
2.1 Sistema de coordenadas

Nesta seção, será discutido o emprego de sistemas de coordenadas para representar tanto a posição quanto a orientação de um quadricóptero, além das transformações necessárias entre diferentes referenciais. A adoção de diferentes sistemas de coordenadas é essencial por vários motivos,

- As equações de movimento de Newton são elaboradas considerando um referencial fixo ao quadricóptero, o que permite uma descrição precisa do comportamento do veículo.
- As forças aerodinâmicas e os torques atuam em um sistema de coordenadas atrelado ao corpo do quadricóptero, sendo fundamental para o cálculo das interações dinâmicas do sistema.
- Sensores integrados, como acelerômetros e giroscópios, fornecem dados relativos ao referencial do próprio corpo do quadricóptero. Em contraste, medições como a posição via GPS, a velocidade no solo e o ângulo de curso são registradas em um referencial inercial.
- A maior parte das missões e exigências operacionais, como pontos de espera (*loiter points*) e trajetórias de voo, são especificadas com base em um referencial inercial. Da mesma forma, informações de mapas são apresentadas segundo esse referencial.

Esses diferentes sistemas de coordenadas são cruciais para uma análise detalhada e consistente do comportamento do quadricóptero, permitindo um controle eficaz e uma navegação precisa durante a execução das tarefas programadas ([ALVES, 2012](#); [MARQUES, 2020](#)).

Figura 3 – Rotação em 2D.



Fonte: (ALVES, 2012).

2.1.1 Matrizes de rotação

Considere o sistema de coordenadas ilustrado na Figura 3.

O vetor $\mathbf{p}$ pode ser expresso tanto no referencial F^0 (especificado por $\hat{i}^0, \hat{j}^0, \hat{k}^0$) quanto no referencial F^1 (especificado por $\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1$). No referencial F^0 , tem-se

$$\mathbf{p} = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0. \quad (2.1)$$

Alternativamente em F_1 tem-se

$$\mathbf{p} = p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1. \quad (2.2)$$

Ao igualar as duas expressões, obtém-se

$$p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0 = p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1. \quad (2.3)$$

Realizando o produto interno (escalar) de ambos os lados com $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$ e expressando o resultado na forma matricial, obtém-se.

$$\mathbf{p}^1 = \begin{pmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{j}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{k}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{k}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Ao analisar geometricamente por meio da Figura 3, obtém-se

$$\mathbf{p}^1 = R_1^0 \cdot \mathbf{p}^0, \quad (2.5)$$

em que

$$R_1^0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Utiliza-se R_1^0 para representar a matriz de rotação que transforma as coordenadas do referencial F_0 para as coordenadas do referencial F_1 . De maneira análoga, seguindo a regra da mão direita, uma rotação em torno do eixo y é dada por

$$R_1^0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Da mesma forma, a rotação em torno do eixo x é dada por

$$R_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

A matriz R_1^0 nas equações (2.6) a (2.8) é um exemplo de uma classe mais geral de matrizes de rotação, que apresentam as seguintes propriedades:

$$\mathbf{P.1.} \quad (R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T = R_b^a \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P.2.} \quad R_b^c R_a^b = R_a^c \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P.3.} \quad \det R_a^b = 1 \quad (2.11)$$

em que a notação R_a^b representa o operador de rotação responsável por descrever a orientação do referencial b em relação ao referencial a . Esse operador realiza a transformação necessária para converter a representação de um vetor expressa no sistema b para sua correspondente no sistema a .

Observa-se que, em (2.5), o vetor $\mathbf{p}$ permanece constante mesmo com a mudança de coordenadas. A coordenada F_1 foi obtida por meio da rotação de F_0 em um ângulo θ . É possível formular uma equação que realiza uma rotação oposta à regra da mão direita no vetor $\mathbf{p}$, em torno de um vetor $\hat{n}$, com um ângulo μ . Considere a Figura 4.

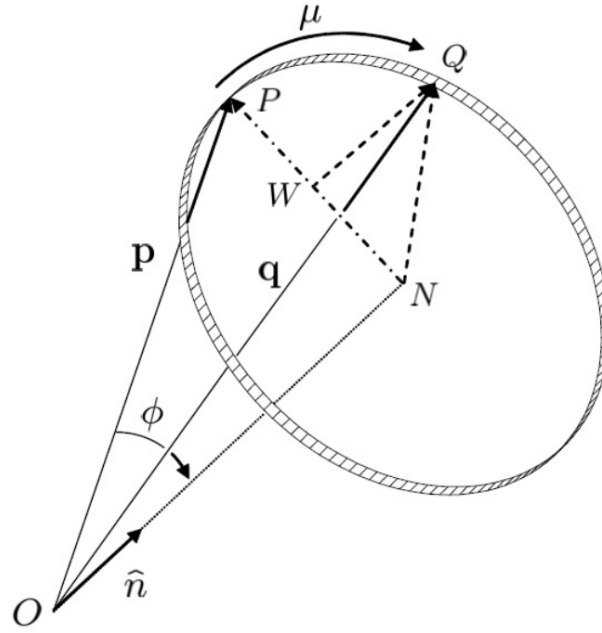
O vetor $\mathbf{p}$ é rotacionado, de acordo com a regra da mão esquerda, em torno do vetor unitário $\hat{n}$ por um ângulo μ , resultando em um novo vetor $\mathbf{q}$. O ângulo entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ é θ . Por meio da análise geométrica, tem-se

$$\mathbf{q} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NW} + \overrightarrow{WQ}. \quad (2.12)$$

O vetor $\overrightarrow{ON}$ pode ser determinado ao calcular a projeção de $\mathbf{p}$ sobre o vetor unitário $\hat{n}$, seguindo a direção de $\hat{n}$

$$\overrightarrow{ON} = (\mathbf{p}\hat{n})\hat{n}. \quad (2.13)$$

Figura 4 – Rotação horária de um vetor $\mathbf{p}$ ao redor do vetor unitário $\hat{n}$ de um ângulo μ , para obter um vetor $\mathbf{q}$.



Fonte: (ALVES, 2012).

O vetor $\overrightarrow{NW}$ está na direção de $\mathbf{p} - \overrightarrow{ON}$, com comprimento igual a $NQ \cos \mu$. Observando que o comprimento NQ é igual ao de NP , que por sua vez é igual a $\|\mathbf{p} - \overrightarrow{ON}\|$, tem-se que

$$\overrightarrow{NW} = \frac{\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n}}{\|\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n}\|} NQ \cos \mu = (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \mu. \quad (2.14)$$

O vetor $\overrightarrow{WQ}$ é perpendicular a $\mathbf{p}$ e $\hat{n}$, e seu comprimento é dado por $NQ \sin \mu$. Observe que $NQ = |\mathbf{p}| \sin \phi$

$$\overrightarrow{WQ} = \frac{\mathbf{p} \times \hat{n}}{\|\mathbf{p}\| \sin \phi} NQ \sin \mu = -\hat{n} \times \mathbf{p} \sin \mu. \quad (2.15)$$

Portanto, em (2.12) torna-se

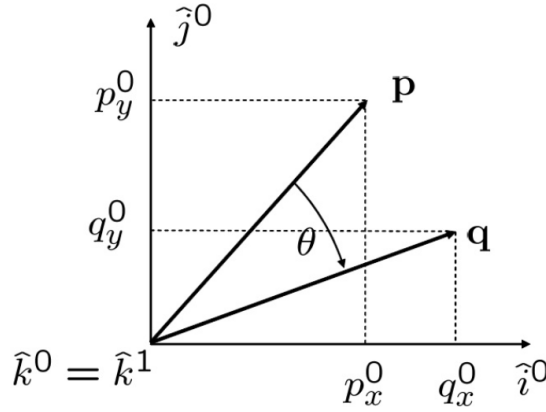
$$\mathbf{q} = (1 - \cos \mu)(\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos \mu \mathbf{p} - \sin \mu (\hat{n} \times \mathbf{p}), \quad (2.16)$$

que é conhecida como a Fórmula de Rotação.

Considere uma rotação no sentido contrário à regra da mão direita de um vetor $\mathbf{p}^0$, em um referencial F_0 , ao redor do eixo z , conforme ilustrado na Figura 5.

Ao aplicar a fórmula de rotação, obtém-se

$$\mathbf{q} = (1 - \cos \theta)(\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos \phi \mathbf{p} - \sin \phi \hat{n} \times \mathbf{p} \quad (2.17)$$

Figura 5 – Rotação de $\mathbf{p}$ ao redor do eixo z .

Fonte: beard2008quadricóptero.

$$= (1 - \cos\phi) p_z^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos\phi \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix} - \sin\phi \begin{pmatrix} -p_y^0 \\ p_x^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}^0. \quad (2.19)$$

Observe que a matriz de rotação R_1^0 pode ser interpretada de duas maneiras distintas. A primeira interpretação é que ela transforma o vetor fixo $\mathbf{p}$ de uma expressão no referencial F^0 para uma expressão no referencial F^1 , sendo que F^1 é obtido a partir de F^0 por uma rotação anti-horária. A segunda interpretação é que a matriz rotaciona o vetor $\mathbf{p}$ para um novo vetor $\mathbf{q}$, no sentido horário, em relação ao mesmo referencial. Rotações de vetores no sentido da regra da mão direita são obtidas por $(R_0^1)^T$.

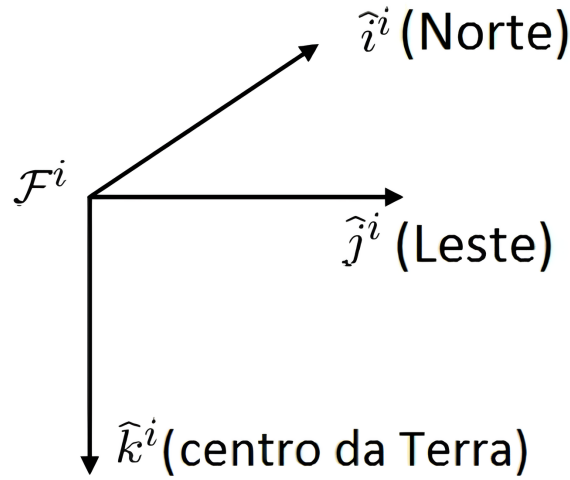
2.1.2 Sistema de Coordenadas do Quadricóptero

Para conveniência, definem-se os seguintes referenciais: referencial inercial ($\mathcal{F}^i$), referencial do veículo ($\mathcal{F}^v$), referencial do veículo 1 ($\mathcal{F}^{v1}$), referencial do veículo 2 ($\mathcal{F}^{v2}$) e referencial fixo ao corpo ($\mathcal{F}^b$). Assume-se que a Terra é plana e estacionária, ou seja, as acelerações de translação e rotação são nulas, uma suposição válida para quadricópteros.

2.1.2.1 Referencial Inercial $\mathcal{F}^i$

O sistema de coordenadas inercial é um sistema fixo à Terra, com a origem definida no ponto de partida. Como mostrado na Figura 6, o vetor unitário $\hat{i}^i$ aponta para o norte, $\hat{j}^i$ aponta para o leste e $\hat{k}^i$ aponta para o centro da Terra.

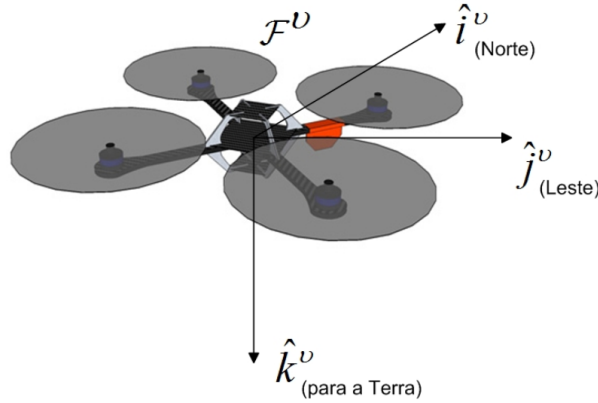
Figura 6 – Referencial inercial. O eixo $\hat{i}^i$ aponta para o Norte, o eixo $\hat{j}^i$ aponta para o Leste e o eixo $\hat{k}^i$ aponta para o centro da Terra.



Fonte: [Alves \(2012\)](#)

2.1.2.2 Referencial do Veículo $\mathcal{F}^v$

Figura 7 – Referencial do veículo. O eixo $\hat{i}^v$ aponta para o Norte, o eixo $\hat{j}^v$ aponta para o Leste e o eixo $\hat{k}^v$ aponta para o centro da Terra.



Fonte: [Alves \(2012\)](#).

A origem do referencial do veículo coincide com o centro de massa do quadricóptero. No entanto, os eixos de $\mathcal{F}^v$ são alinhados com os eixos do referencial inercial $\mathcal{F}^i$. Em outras palavras, o vetor unitário $\hat{i}^v$ aponta para o norte, $\hat{j}^v$ aponta para o leste, e $\hat{k}^v$ aponta para o centro da Terra, como ilustrado na Figura 7.

2.1.2.3 Referencial do Veículo 1 $\mathcal{F}^{v1}$

A origem do referencial do veículo 1 é idêntica à do referencial do veículo, ou seja, o centro de gravidade. Contudo, $\mathcal{F}^v$ é rotacionado positivamente ao redor de $\hat{k}^v$ por um ângulo ψ (*yaw*), de forma que, se o referencial da aeronave não se mover em ϕ (*roll*)

ou em θ (*pitch*), então $\hat{i}^{v1}$ se mantém alinhado com o vetor $\hat{i}^v$. A transformação entre o referencial do veículo e o referencial do veículo 1 é dada por

$$p^{v1} = R_v^{v1}(\psi)p^v. \quad (2.20)$$

A matriz de rotação $R_v^{v1}(\psi)$ é dada por

$$R_v^{v1}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

A Equação 2.20 descreve a relação entre um vetor p , expresso no sistema de coordenadas v , e sua versão transformada no sistema de coordenadas $v1$ após ser submetido a uma rotação em torno do eixo z , com um ângulo de rotação ψ . A matriz $R_v^{v1}(\psi)$, que aparece na Equação 2.21, é responsável por realizar essa transformação, ou seja, ela descreve como o vetor p^v é mapeado para a nova posição p^{v1} no sistema de coordenadas $v1$ após a rotação.

A matriz (2.21) descreve uma rotação no plano xy , onde as coordenadas x e y do vetor são transformadas em função do ângulo ψ , enquanto a coordenada z permanece inalterada, já que a rotação ocorre ao redor do eixo z . Assim, as entradas $\cos(\psi)$ e $\sin(\psi)$ determinam a nova posição do vetor p^v no plano xy , e a matriz reflete a transformação de p^v para p^{v1} , que é a versão do vetor no novo sistema de coordenadas após a rotação.

2.1.2.4 Referencial do Veículo 2 $\mathcal{F}^{v2}$

A origem do referencial do veículo 2 também é o centro de gravidade. Esse referencial é obtido ao rotacionar o referencial do veículo 1 em torno de $\hat{j}^{v1}$ por um ângulo θ . Caso o ângulo ϕ seja zero, então $\hat{i}^{v2}$ aponta para o nariz da aeronave, $\hat{j}^{v2}$ aponta para a asa direita e $\hat{k}^{v2}$ aponta para a barriga da aeronave, conforme ilustrado na Figura 8.

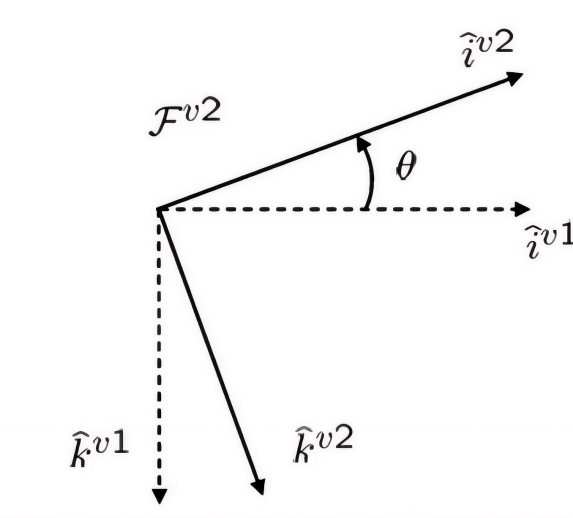
A transformação entre o referencial do veículo 1 e o referencial do veículo 2 é expressa por

$$p^{v2} = R_{v1}^{v2}(\theta)p^{v1}. \quad (2.22)$$

A Equação 2.22 descreve a relação entre um vetor p , expresso no sistema de coordenadas $v1$, e sua transformação para o sistema $v2$ após ser submetido a uma rotação em torno do eixo y por um ângulo θ . A matriz $R_{v1}^{v2}(\theta)$, apresentada na Equação 2.23, é responsável por realizar essa transformação, ou seja, ela define a maneira como o vetor p^{v1} se mapeia para a sua nova posição p^{v2} no sistema $v2$ após a rotação. A matriz de rotação $R_{v1}^{v2}(\theta)$, que descreve a rotação em torno do eixo y , é dada por

$$R_{v1}^{v2}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Figura 8 – No referencial do veículo 2, se o ângulo ϕ for zero, então o eixo $\hat{i}^{v2}$ aponta para o nariz da aeronave, o eixo $\hat{j}^{v2}$ aponta para a asa direita, e o eixo $\hat{k}^{v2}$ aponta para a barriga da aeronave.



Fonte: [Alves \(2012\)](#)

Esta matriz realiza a rotação das coordenadas x e z do vetor p^{v1} , enquanto a coordenada y permanece inalterada. A rotação ao redor do eixo y é caracterizada pelos termos $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, que determinam como as coordenadas x e z do vetor se alteram. A matriz de rotação $R_{v1}^{v2}(\theta)$ transforma o vetor original p^{v1} no sistema de coordenadas $v1$ para o vetor transformado p^{v2} no sistema $v2$.

Portanto, em (2.22) mostra como o vetor p^{v1} , inicialmente no sistema de coordenadas $v1$, é transformado para p^{v2} , no sistema $v2$, através da aplicação da matriz de rotação $R_{v1}^{v2}(\theta)$.

2.1.2.5 Referencial Fixo ao Corpo $\mathcal{F}^b$

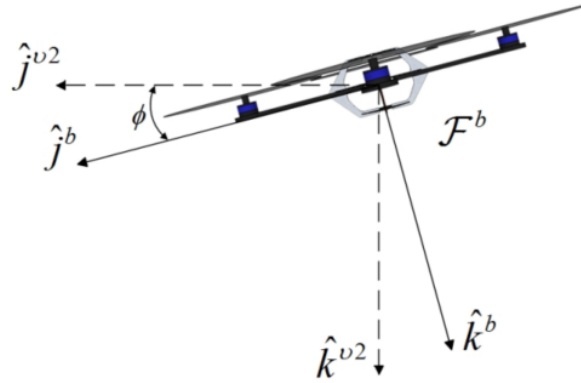
O referencial fixo ao corpo é obtido ao rotacionar o referencial do veículo 2 por um ângulo ϕ (roll), no sentido da regra da mão direita, em torno de $\hat{i}^{v2}$. Assim, a origem é o centro de gravidade, $\hat{i}^b$ aponta para o nariz da aeronave, $\hat{j}^b$ aponta para a asa direita e $\hat{k}^b$ aponta para a barriga do veículo. O referencial fixo ao corpo é ilustrado na Figura 9.

A transformação entre o referencial do veículo 2 e o referencial fixo ao corpo é expressa por

$$p^b = R_{v2}^b(\phi)p^{v2}. \quad (2.24)$$

A expressão (2.24) descreve a transformação de um vetor p , expresso no sistema de coordenadas $v2$, para sua nova forma no sistema de coordenadas b , após ser submetido a uma rotação ao redor do eixo x por um ângulo ϕ . A matriz $R_{v2}^b(\phi)$, apresentada na equação (2.25), é responsável por aplicar essa rotação, ou seja, ela descreve como o vetor

Figura 9 – Referencial fixo ao corpo. O eixo $\hat{i}^b$ aponta para o nariz da aeronave, o eixo $\hat{j}^b$ aponta para a asa direita e o eixo $\hat{k}^b$ para a barriga da aeronave.



Fonte: [Alves \(2012\)](#)

p^{v2} é reorientado no novo sistema b após a rotação. A matriz de rotação $R_{v2}^p(\phi)$, que efetua a rotação ao longo do eixo x , é dada por

$$R_{v2}^b(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

A matriz (2.25) altera as coordenadas y e z do vetor p^{v2} , enquanto a coordenada x permanece fixa, dado que a rotação ocorre apenas ao redor do eixo x . As funções $\cos(\phi)$ e $\sin(\phi)$ determinam como as coordenadas y e z são ajustadas. A matriz de rotação $R_{v2}^p(\phi)$ transforma o vetor p^{v2} para a nova posição p^b no sistema b , após a rotação.

Dessa maneira, em (2.24) mostra que o vetor p^{v2} no sistema $v2$ é rotacionado e mapeado para a nova posição p^b no sistema b por meio da aplicação da matriz $R_{v2}^p(\phi)$.

A transformação entre os referenciais do veículo e o referencial fixo ao corpo é expressa por

$$\begin{aligned} R_v^b &= R_{v2}^b(\phi) R_{v1}^{v2}(\theta) R_v^{v1}(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

em que a notação $c\theta = \cos(\theta)$, $c\phi = \cos(\phi)$, $c\psi = \cos(\psi)$, $s\theta = \sin(\theta)$, $s\phi = \sin(\phi)$ e $s\psi = \sin(\psi)$ é utilizada por conveniência e para simplificar a escrita das expressões trigonométricas.

2.2 Equação de Coriolis

O objetivo da equação de Coriolis é determinar a derivada temporal de $\mathbf{p}$ vista do referencial inercial. Para isso, deve-se inicialmente assumir que o referencial fixo ao corpo não está rotacionando em relação ao referencial inercial. Em seguida, $\mathbf{p}$ é fixado no referencial fixo ao corpo, mas esse referencial rotaciona em relação ao referencial inercial. Sendo $\hat{s}$ o eixo instantâneo de rotação e $\delta\phi$ o ângulo de rotação no sentido horário, após algumas simplificações matemáticas, obtém-se a equação de Coriolis, dada por

$$\frac{d}{dt_i} \mathbf{p} = \frac{d}{dt_b} \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega}_{b_i} \times \mathbf{p}, \quad (2.26)$$

em que $\boldsymbol{\omega}_{b_i}$ é a velocidade angular do referencial fixo ao corpo em relação ao referencial inercial.

2.3 Cinemática e Dinâmica

Nesta seção, são apresentadas as equações que descrevem a cinemática e a dinâmica de um corpo rígido. As fórmulas derivadas possuem caráter geral, sendo aplicáveis a qualquer corpo rígido, no entanto, são utilizadas notações e um sistema de coordenadas comumente encontrados na literatura aeronáutica. Primeiramente, na Subseção 2.3.1, é definida a notação adotada para as variáveis de estado do quadricóptero. Em seguida, na Subseção 2.3.2, são derivadas as expressões cinemáticas, e na Subseção 2.3.3, aborda-se a dinâmica do quadricóptero.

2.3.1 Variáveis de estado do quadricóptero

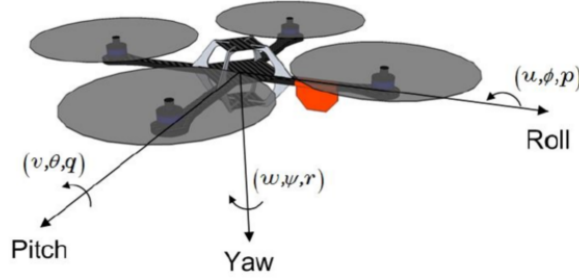
As variáveis de estado do quadricóptero são as 12 grandezas a seguir.

- x : posição inercial (norte) do quadricóptero ao longo de $\hat{i}^i$ em $\mathcal{F}^i$;
- y : posição inercial (leste) do quadricóptero ao longo de $\hat{j}^i$ em $\mathcal{F}^i$;
- z : altitude da aeronave medida ao longo de $-\hat{k}^i$ em $\mathcal{F}^i$;
- u : velocidade do quadricóptero medida ao longo de $\hat{i}^b$ em $\mathcal{F}^b$;
- v : velocidade do quadricóptero medida ao longo de $\hat{j}^b$ em $\mathcal{F}^b$;
- w : velocidade do quadricóptero medida ao longo de $\hat{k}^b$ em $\mathcal{F}^b$;
- ϕ : ângulo de rolagem definido em relação a $\mathcal{F}^{v2}$;
- θ : ângulo de arfagem definido em relação a $\mathcal{F}^{v1}$;
- ψ : ângulo de guinada definido em relação a $\mathcal{F}^v$;

- p : taxa de rolagem (*roll*) medida ao longo de $\hat{i}^b$ em $\mathcal{F}^b$;
- q : taxa de arfagem (*pitch*) medida ao longo de $\hat{j}^b$ em $\mathcal{F}^b$;
- r : taxa de guinada (*yaw*) medida ao longo de $\hat{k}^b$ em $\mathcal{F}^b$.

As variáveis de estado estão ilustradas esquematicamente na Figura 10.

Figura 10 – Definição dos eixos.



Fonte: [Alves \(2012\)](#).

2.3.2 Cinemática do quadricóptero

A conexão entre a posição e a velocidade do quadricóptero é dada por

$$\frac{d}{dt_i} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = R_b^v \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (R_v^b)^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$(R_v^b)^T = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\psi \\ c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

As variáveis x , y e $-z$ correspondem a quantidades no referencial inercial, enquanto as velocidades u , v e w são expressas no referencial fixo ao corpo. É fundamental estabelecer a relação entre p , q , r e ϕ , θ , ψ , uma vez que esses ângulos são pequenos, observando que

$$R_{v2}^b(\dot{\phi}) R_{v1}^{v2}(\dot{\theta}) R_v^{v1}(\dot{\psi}) = I, \quad (2.29)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s\phi tg\theta & c\phi tg\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi sec\theta & c\phi sec\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

em que (2.30), $tg = tangente$ e $sec = secante$.

2.3.3 Dinâmica dos corpos rígidos

Sendo $\mathbf{v}$ a velocidade do quadricóptero, as leis de Newton são aplicáveis apenas a referenciais inerciais. Portanto, a lei de Newton, quando aplicada ao movimento translacional, é dada por

$$m \frac{dv}{dt_i} = \mathbf{f}, \quad (2.31)$$

em que m representa a massa do quadricóptero, $\mathbf{f}$ é a força total aplicada ao quadricóptero, e $\frac{d}{dt_i}$ denota a derivada temporal no referencial inercial. A partir da equação de Coriolis (2.6), obtém-se

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt_i} = m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt_b} + \omega_{\frac{b}{i}} \times \mathbf{v} \right) = \mathbf{f} \quad (2.32)$$

Em que $\omega_{\frac{b}{i}}$ representa a velocidade angular do referencial do corpo em relação ao referencial inercial. Como a força de controle é calculada e aplicada nas coordenadas do corpo, e ω também é medida nessas coordenadas, a Equação (2.10) pode ser expressa em termos do referencial fixo ao corpo, onde $v_b = (u, v, w)^T$ e $\omega_{\frac{b}{i}} = (p, q, r)^T$. Dessa forma, em coordenadas do corpo, a Equação 2.31 é expressa como

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - rv \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

em que $f^b = (f_x, f_y, f_z)^T$. Para o movimento de rotação, a segunda lei de Newton estabelece que

$$\frac{d\mathbf{h}^b}{dt_i} = \mathbf{M}, \quad (2.34)$$

em que $\mathbf{h}^b$ representa o momento angular e $\mathbf{M}$ é o torque aplicado. Aplicando a equação de Coriolis, obtém-se

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = m \left(\frac{d\mathbf{h}}{dt_b} + \omega_{\frac{b}{i}} \times \mathbf{h} \right) = \mathbf{M}. \quad (2.35)$$

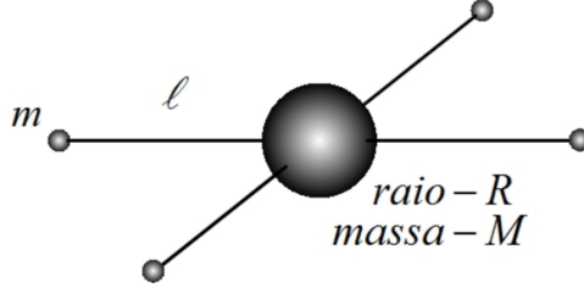
Novamente, em (2.35) é mais facilmente resolvida nas coordenadas do corpo, onde $\mathbf{h}^b = J\omega_{\frac{b}{i}}$, sendo J a matriz constante de inércia dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}.$$

Conforme ilustrado na Figura 11, o quadricóptero é essencialmente simétrico em relação aos eixos, de modo que $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, o que resulta em

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Figura 11 – Os momentos de inércia do quadricóptero são calculados assumindo uma esfera maciça no centro, com massa M e raio R , e massas pontuais de massa m localizadas a uma distância l a partir do centro.



Fonte: [Alves \(2012\)](#)

A inércia de uma esfera sólida é dada por $J = \frac{2MR^2}{5}$ conforme referenciado em [HALLIDAY David; RESNICK \(1998\)](#). Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m, \\ J_y &= \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m, \\ J_z &= \frac{2MR^2}{5} + 4l^2m. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ao definir $\mathbf{M}^b = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$, pode-se reescrever a expressão (2.35) nas coordenadas do corpo da seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O modelo de seis graus de liberdade para a cinemática e dinâmica do quadricóptero pode ser expresso da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi - s\phi c\psi \\ s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

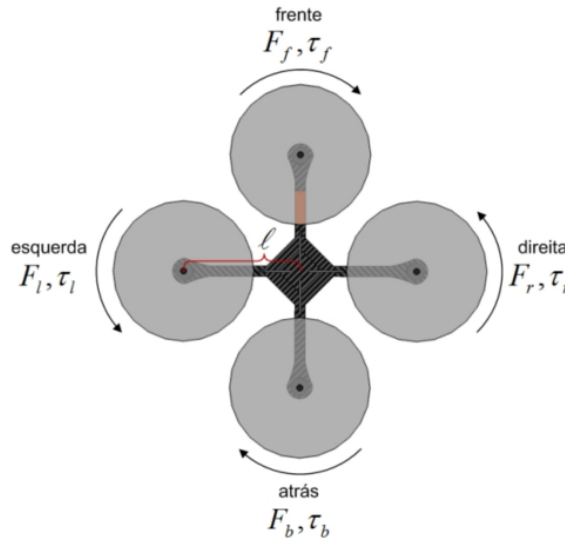
$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & c\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

2.4 Força e Momento

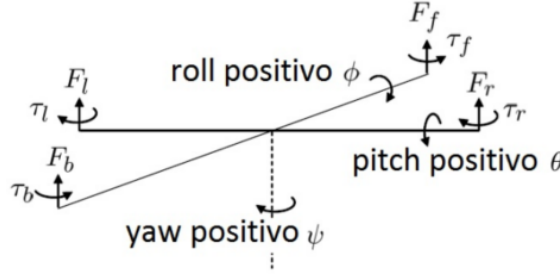
O objetivo desta seção é descrever as forças e torques que atuam sobre o quadricóptero. Como não existem superfícies aerodinâmicas de elevação (*aerodynamic lifting surfaces*), assume-se que as forças e momentos aerodinâmicos sejam desprezíveis. As forças e momentos são, portanto, originados principalmente pela gravidade e pelos quatro propulsores.

Figura 12 – Vista superior do quadricóptero. Cada motor gera uma força F para cima e um torque τ . Os motores dianteiro e traseiro giram no sentido horário, enquanto os motores direito e esquerdo giram no sentido anti-horário.



Fonte: [Alves \(2012\)](#)

Figura 13 – Definição das forças e torques que atuam sobre o quadricóptero.

Fonte: [Alves \(2012\)](#).

A Figura 12 apresenta uma vista superior do quadricóptero. Como ilustrado na Figura 13, cada motor exerce uma força F e um torque τ . A soma das forças que atuam sobre o quadricóptero é dada por

$$F = F_f + F_r + F_b + F_l.$$

O torque de rolamento é gerado pelas forças dos motores direito e esquerdo, de acordo com a seguinte expressão

$$\tau_\phi = l(F_l - F_r).$$

De maneira análoga, o torque de arfagem é produzido pelas forças dos motores dianteiro e traseiro

$$\tau_\theta = l(F_f - F_b).$$

Devido à terceira lei de Newton, o arrasto dos propulsores gera um torque de guinada no corpo do quadricóptero. A direção do torque é oposta à direção de movimento do propulsor. Assim, o torque de guinada total é dado por

$$\tau_\psi = \tau_r + \tau_l - \tau_f - \tau_b.$$

A sustentação e o arrasto produzidos pelos propulsores são proporcionais ao quadrado da velocidade angular. Assume-se que a velocidade angular é diretamente proporcional ao comando de largura de modulação de pulso (PWM) enviado ao motor. Portanto, a força e o torque de cada motor podem ser expressos como

$$F_* = k_1 \delta_*,$$

$$\tau_* = k_2 \delta_*,$$

em que k_1 e k_2 são constantes que precisam ser determinadas experimentalmente, δ_* é o sinal de comando do motor, e $*$ representa f , r , b e l . Portanto, as forças e torques no quadricóptero podem ser escritas na matriz como

$$\begin{pmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ 0 & -lk_1 & 0 & lk_1 \\ lk_1 & 0 & -lk_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

O controle adequado dos motores pode ser determinado por

$$\begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix}.$$

Além da força gerada pelos motores, a gravidade também exerce influência sobre o quadricóptero. No sistema de coordenadas F_ν , a força gravitacional aplicada no centro de massa é dada por

$$f_g^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}.$$

Entretanto, considerando que v em (2.38) está expressa no referencial F^b , é necessário realizar a transformação da força gravitacional para o referencial fixo ao corpo, o que dado por

$$f_g^v = R_v^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, as equações (2.38) a (2.41) podem ser reescritas da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi + s\phi s\psi \\ c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

2.5 Considerações Parciais do Capítulo

Neste capítulo, foi apresentada a modelagem matemática do quadricóptero, estabelecendo os fundamentos teóricos e analíticos necessários para compreender e controlar sua dinâmica de voo. Inicialmente, foram definidos os sistemas de referência inercial, do

veículo e do corpo, bem como suas respectivas matrizes de rotação e a expressão de Coriolis, possibilitando a transformação consistente de vetores entre os diferentes referenciais.

Posteriormente, foram desenvolvidas as equações associadas à cinemática e à dinâmica de corpos rígidos, relacionando as posições, velocidades e orientações da aeronave às suas velocidades angulares e aos correspondentes momentos de inércia. Também foram analisados os mecanismos responsáveis pela produção das forças de sustentação e dos torques que atuam sobre o veículo.

Dessa forma, o modelo não linear obtido neste capítulo fornece a base necessária para o desenvolvimento das etapas subsequentes do trabalho. A partir da caracterização detalhada da dinâmica do quadricóptero, o próximo capítulo será dedicado ao desenvolvimento do sistema de controle, com foco na estabilização da aeronave e no rastreamento de trajetórias.

3 Controle do Sistema

Neste capítulo será apresentado os fundamentos e procedimentos adotados para o projeto do controlador utilizado neste trabalho. Na Seção 3.1 são discutidos os conceitos do controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID), em seguida, é descrito o processo de implementação do projeto. Na Seção 3.4 são apresentadas as especificações e os critérios de desempenho utilizados para avaliar a qualidade da resposta do sistema em malha fechada. Na Seção 3.7 é abordada a metodologia de sintonia dos ganhos do controlador por meio de AGs e por fim, são apresentados os índices de desempenho empregados neste trabalho.

3.1 Controle PID

Nesta seção é descrita a estratégia de controle utilizada para estabilização e rastreamento de trajetória da aeronave. Dessa forma, é apresentado o funcionamento do controlador PID, bem como a justificativa da escolha desse sistema no projeto.

Um controlador PID (Proporcional, Integral e Derivativo) é um algoritmo ou dispositivo usado em sistemas de malha fechada para manter uma variável de processo — como temperatura, pressão ou velocidade — o mais próximo possível de um valor desejado (setpoint). Ele calcula continuamente o erro e aplica ajustes para garantir estabilidade e precisão. Portanto, ele pode ser representado como um controlador de três termos no domínio do tempo dado por (BISHOP, 2001)

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (3.1)$$

em que $u(t)$ representa o sinal de controle aplicado ao sistema e $e(t)$ corresponde ao erro entre a referência desejada e a saída do sistema, enquanto o K_P , K_I e K_D representam, respectivamente, os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador.

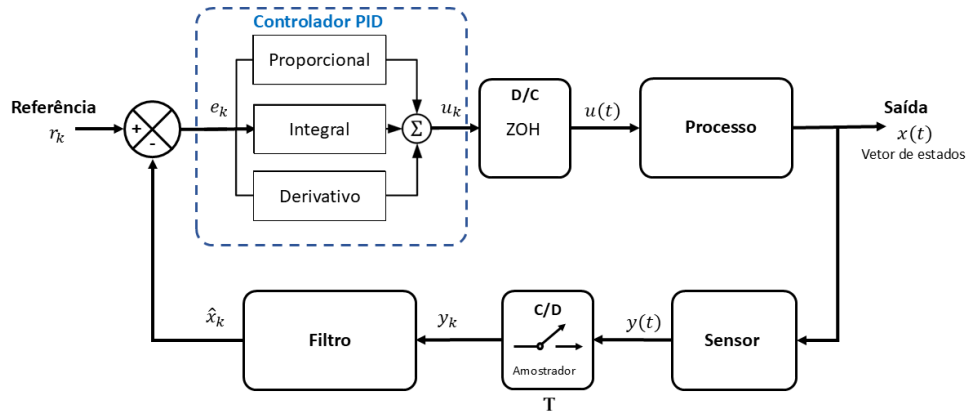
Para a realização da simulação, os termos proporcional, integral e derivativo na (3.1) foram implementados em tempo discreto. Desse modo, a lei de controle discreta aplicada às malhas são descritas por

$$u_k = K_P e_k + K_I T_s \sum_{j=0}^k e_j + K_D \dot{e}_k, \quad (3.2)$$

em que e_k representa o erro de posição no instante de amostragem k , T_s é o período de amostragem do sistema (intervalo de tempo entre amostras consecutivas). A parcela derivativa é calculada diretamente a partir da velocidade do veículo ($\dot{e}_k$).

Na Figura 14, apresenta-se a representação em blocos do controlador PID, descrito pela Equação 3.2, destacada pela linha azul tracejada. Seu funcionamento baseia-se na

Figura 14 – Diagrama em blocos do Controlador PID



Fonte: Do autor.

combinação de três ações distintas, que atuam simultaneamente sobre o erro do sistema, desempenhando funções específicas para melhorar o desempenho do VANT.

O funcionamento do controlador PID baseia-se na combinação de três ações distintas que atuam simultaneamente sobre o erro do sistema. Cada uma dessas ações possui uma função específica na melhoria do desempenho do VANT.

O ganho proporcional (K_p) é responsável por atuar diretamente sobre o erro calculado, que corresponde à diferença entre o valor de referência e a saída do sistema. A ação proporcional aplica um ganho K_p ao erro instantâneo, produzindo uma correção proporcional à magnitude desse erro. Dessa forma, quanto maior o valor de K_p , maior será a intensidade da ação de controle, o que normalmente resulta em respostas mais rápidas. Entretanto, a ação proporcional isoladamente não é capaz de eliminar completamente o erro em regime permanente.

O ganho integral (K_i) tem como principal objetivo reduzir o erro estático do sistema. A ação integral realiza o acúmulo do erro ao longo do tempo, somando continuamente os desvios entre a referência e a saída do sistema. Assim, mesmo pequenos erros persistentes passam a gerar uma ação corretiva crescente até que o erro seja reduzido. Dessa forma, a ação integral permite que a saída alcance o valor desejado da referência, característica que não pode ser obtida apenas com a ação proporcional.

O ganho derivativo (K_d) está relacionado à taxa de variação do erro no tempo. Essa ação possui característica antecipativa, pois avalia a tendência futura do erro antes que ele se torne elevado. Em termos práticos, a ação derivativa contribui para reduzir oscilações, suavizar a resposta transitória e melhorar a estabilidade dinâmica do sistema. Contudo, devido à sua sensibilidade a variações rápidas do sinal, a ação derivativa pode amplificar ruídos de alta frequência provenientes dos sensores, exigindo cuidados em sua utilização.

Ao combinar as ações proporcional, integral e derivativa, o controlador PID torna-se capaz de oferecer uma solução interessante e eficiente para o controle do quadricóptero.

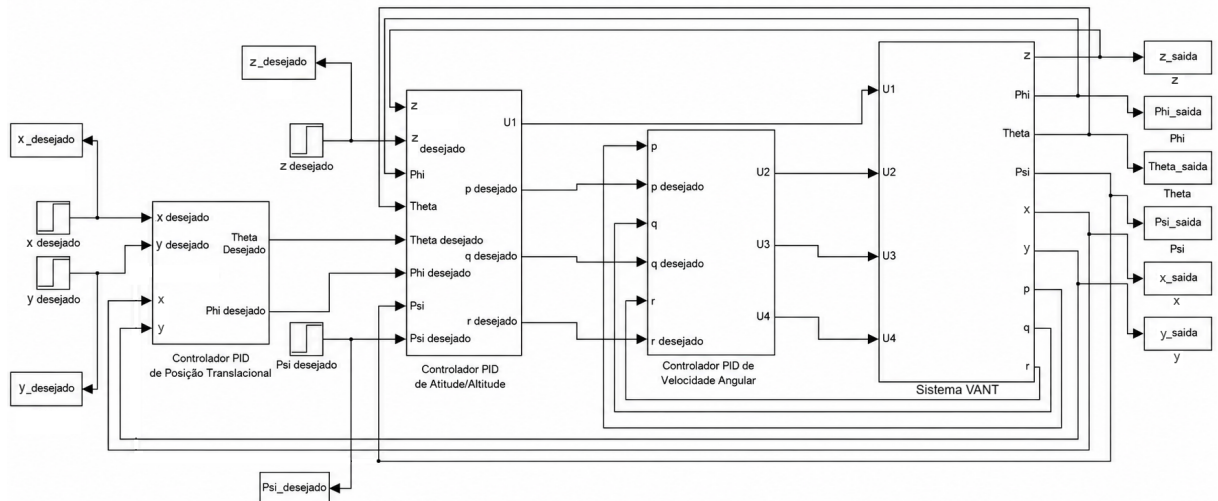
Portanto, a combinação adequada desses três termos permite ajustar o comportamento dinâmico do VANT. Entretanto, para determinar os ganhos do controlador, é necessário definir previamente arquitetura de controle adotada. Assim, na próxima seção será apresentada a estrutura de controle utilizada, de modo a relacionar as variáveis de posição, atitude e atuação dos rotores.

3.2 Projeto do Controlador

Neste trabalho, foi utilizada como base a arquitetura de controle proposta por [Selby \(2015\)](#), devido à sua organização modular e simplicidade de implementação. Essa arquitetura é baseada em controladores PID em cascata, organizados em múltiplos níveis hierárquicos de controle, o que permite dividir o problema de controle do quadricóptero em subsistemas menores e mais simples. Dessa forma, torna-se possível controlar separadamente a posição (x, y, z) , a atitude (ϕ, θ, ψ) e as velocidades angulares da aeronave (p, q, r) . Essa mesma estrutura também é encontrada em [Altalabani e Alaiwi \(2022\)](#).

Na Figura 15, apresenta-se a arquitetura geral do sistema de controle implementado neste trabalho. O sistema é dividido em três níveis principais: controlador de posição translacional, controlador de atitude/altitude e controlador de velocidades angulares, além do bloco que representa a dinâmica do VANT. Nesta seção, será apresentada uma visão geral da função desempenhada por cada um desses blocos e da interação entre eles na arquitetura de controle em cascata. A modelagem e o funcionamento detalhado de cada controlador serão apresentados nas Subseção 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3, respectivamente.

Figura 15 – Arquitetura do sistema de controle PID em cascata para o quadricóptero.



Fonte: Adaptada de [Selby \(2015\)](#).

Cabe ressaltar que as principais diferenças entre a abordagem adotada neste trabalho e a proposta originalmente apresentada por [Selby \(2015\)](#) residem na estratégia de

realimentação dos estados e na metodologia de validação do sistema. Embora a estrutura hierárquica baseada em controladores PID em cascata seja mantida devido às suas características de eficiência e modularidade, a abordagem de [Selby \(2015\)](#) realiza a realimentação diretamente a partir das medições dos sensores. Em contrapartida, este trabalho incorpora o EKF à malha de realimentação, possibilitando a fusão sensorial e a estimação dos estados do VANT sob a presença de ruídos de medição.

3.2.1 Controle de Posição

O controle de posição do quadricóptero é responsável por minimizar o erro entre a posição desejada e a posição atual da aeronave nos eixos horizontais x e y . Diferentemente do controle de atitude, que atua diretamente sobre os ângulos de rolagem (ϕ) e arfagem (θ), o controle de posição atua de forma indireta, gerando referências angulares desejadas para o controlador interno de atitude. Dessa forma, o sistema utiliza uma estrutura em malha cascata, na qual o controlador externo de posição fornece comandos para o controlador interno de atitude ([SELBY, 2015](#)).

Segundo o Selby, o movimento translacional de um quadricóptero nos eixos horizontais depende diretamente da inclinação da aeronave. Assim, para que o veículo se desloque no eixo x , é necessário modificar o ângulo de arfagem (θ); analogamente, o deslocamento no eixo y é obtido por meio da variação do ângulo de rolagem (ϕ).

Neste trabalho, o controle de posição foi implementado utilizando controladores PID independentes para os eixos x e y dados por

$$\theta_{desejado}(t) = K_P(x_{desejado}^G - x^G) + K_I \int_0^t (x_{desejado}^G - x^G) dt + K_D(\dot{x}_{desejado}^G - \dot{x}^G), \quad (3.3)$$

$$\phi_{desejado}(t) = K_P(y_{desejado}^G - y^G) + K_I \int_0^t (y_{desejado}^G - y^G) dt + K_D(\dot{y}_{desejado}^G - \dot{y}^G), \quad (3.4)$$

em que $x_{desejado}^G$ e $y_{desejado}^G$ representam as posições desejadas no referencial global, enquanto x^G e y^G correspondem às posições medidas da aeronave. Já $\theta_{desejado}$ e $\phi_{desejado}$ representam os ângulos desejados de arfagem e rolagem gerados pelo controlador de posição.

Após o cálculo dos ângulos desejados $\phi_{desejado}$ e $\theta_{desejado}$, esses sinais são enviados ao controlador interno de atitude, responsável por estabilizar a aeronave e produzir os comandos necessários aos motores.

3.2.2 Controle de Atitude e Altitude

O controle de atitude e altitude é responsável pela estabilização do quadricóptero durante o voo, garantindo que a aeronave mantenha os ângulos desejados de rolagem (ϕ), arfagem (θ) e guinada (ψ), além do controle da altitude no eixo vertical z . Em sistemas de controle para VANTs do tipo quadricóptero, essa etapa corresponde à malha

intermediária/interna de controle, sendo diretamente responsável pela dinâmica rotacional e de sustentação da aeronave (SELBY, 2015).

De acordo com Selby (2015), os movimentos rotacionais do quadricóptero são controlados por meio da variação diferencial da velocidade dos motores. A alteração dessas velocidades produz torques em torno dos eixos do corpo da aeronave, permitindo controlar os ângulos de atitude e a altitude.

Neste trabalho, a estabilização das velocidades angulares é realizada por controladores do tipo PID. No entanto, para o controle de altitude no eixo vertical, o sinal de empuxo total necessário (u_1) não se configura como um PID linear clássico, mas sim como uma estrutura híbrida baseada na técnica de *Linearização por Realimentação* (*Feedback Linearization*) aliada a um termo de compensação de gravidade em *feedforward*, dado por

$$u_1(t) = \frac{1}{\cos(\phi) \cos(\theta)} \left(K_P e_z(t) + K_I \int_0^t e_z(t) dt + K_D \dot{z} + mg \right), \quad (3.5)$$

em que u_1 representa o empuxo total gerado pelos quatro motores, $e_z(t)$ corresponde ao erro de altitude no instante t , m representa a massa do quadricóptero e g é a aceleração da gravidade.

A inclusão do termo constante mg atua em malha aberta (*feedforward*) para cancelar o peso da aeronave na condição de pairado (*hover*), evitando que a ação integral (K_I) necessite acumular erro para sustentar o veículo. Adicionalmente, o fator multiplicativo $\frac{1}{\cos(\phi) \cos(\theta)}$ realiza uma compensação não linear geométrica da atitude. Quando a aeronave se inclina nos eixos de rolagem (ϕ) e arfagem (θ) para executar movimentos translacionais, a projeção vertical do vetor de empuxo diminui; essa razão trigonométrica ajusta o empuxo total para manter a altitude constante independentemente da orientação do corpo (SELBY, 2015).

Essa mesma abordagem também é empregada por Quiroga e Vargas (2020), reforçando sua aplicação em estratégias de controle de quadricóptero. As velocidades angulares desejadas são dadas por

$$p_{desejado}(t) = K_P e_\phi(t) + K_I \int_0^t e_\phi(t) dt + K_D p, \quad (3.6)$$

$$q_{desejado}(t) = K_P e_\theta(t) + K_I \int_0^t e_\theta(t) dt + K_D q, \quad (3.7)$$

$$r_{desejado}(t) = K_P e_\psi(t) + K_I \int_0^t e_\psi(t) dt + K_D r. \quad (3.8)$$

Os termos $e_\phi(t)$, $e_\theta(t)$ e $e_\psi(t)$ são dados por

$$\begin{aligned} e_\phi(t) &= \phi_{desejado}(t) - \phi(t), \\ e_\theta(t) &= \theta_{desejado}(t) - \theta(t), \\ e_\psi(t) &= \psi_{desejado}(t) - \psi(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Após o cálculo dos sinais de controle, os valores de empuxo e velocidades angulares desejadas são convertidos em velocidades individuais para cada motor por meio da matriz

de mistura do quadricóptero, conforme mostrado nesta Equação 2.42, em que δ representa as velocidades dos motores individuais. Dessa forma, o sistema é capaz de estabilizar a aeronave e realizar movimentos controlados de forma simultânea nos diferentes eixos de movimento.

3.2.3 Controle de Velocidade Angular

O controle de velocidade angular é responsável por regular as taxas de rotação do quadricóptero em torno dos eixos do corpo da aeronave. Esse controle atua diretamente sobre as velocidades angulares associadas aos movimentos de rolagem, arfagem e guinada, representadas por p , q e r , respectivamente. Em arquiteturas de controle em cascata, essa etapa corresponde à malha mais interna do sistema, sendo responsável pela rápida estabilização dinâmica da aeronave (SELBY, 2015).

Segundo o Selby, o controlador de velocidade angular recebe como entrada as velocidades angulares desejadas geradas pelo controlador de atitude e produz os sinais de controle responsáveis por ajustar a velocidade individual dos motores. Dessa forma, o sistema consegue estabilizar o quadricóptero mesmo diante de perturbações externas e variações na dinâmica do voo.

Para a implementação do controlador do laço interno de velocidades angulares, foram utilizados controladores PID independentes para cada eixo de rotação da aeronave. Os sinais de controle gerados por esses controladores correspondem aos torques de controle ($\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$) apresentados no modelo dinâmico em (2.46), são apresentados por

$$\tau_\phi(t) = u_2(t) = K_P e_p(t) + K_I \int_0^t e_p(t) dt + K_D \dot{p}, \quad (3.10)$$

$$\tau_\theta(t) = u_3(t) = K_P e_q(t) + K_I \int_0^t e_q(t) dt + K_D \dot{q}, \quad (3.11)$$

$$\tau_\psi(t) = u_4(t) = K_P e_r(t) + K_I \int_0^t e_r(t) dt + K_D \dot{r}. \quad (3.12)$$

em que cada sinal de erro são dados por

$$\begin{aligned} e_p(t) &= p_{\text{desejado}}(t) - p(t), \\ e_q(t) &= q_{\text{desejado}}(t) - q(t), \\ e_r(t) &= r_{\text{desejado}}(t) - r(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que u_2 , u_3 e u_4 representam os sinais de controle associados aos movimentos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente. Os termos $e_p(t)$, $e_q(t)$ e $e_r(t)$ correspondem aos erros entre as velocidades angulares desejadas e medidas em cada eixo de rotação.

3.3 Testes das Malhas em Cascata

Para validar a estrutura de controle em cascata baseada no projeto de Selby (2015), foram avaliadas as respostas ao degrau das malhas do sistema no MATLAB. Nessa arqui-

tetura, as malhas internas devem apresentar dinâmica mais rápida que as externas. As constantes de tempo (σ), obtidas a partir das respostas ao degrau, são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Constantes de tempo (σ) obtidas para as malhas de controle.

Malha de Controle	Variável Controlada	Constante de Tempo (T)
Interna	Velocidade Angular (p)	0,03 s
Intermediária	Atitude (ϕ)	0,60 s
Externa	Posição (x)	1,20 s

A partir desses valores, foram calculadas as razões entre as constantes de tempo das malhas consecutivas.

1. Malha Interna vs. Malha Intermediária:

$$\frac{\sigma_\phi}{\sigma_p} = \frac{0,60}{0,03} = 20 \quad (3.14)$$

A malha de velocidade angular é 20 vezes mais rápida que a de atitude, superando a razão mínima de 4 recomendada para sistemas em cascata. Dessa forma, a dinâmica de rotação e dos motores responde rapidamente aos comandos de orientação.

2. Malha Intermediária vs. Malha Externa:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_\phi} = \frac{1,20}{0,60} = 2 \quad (3.15)$$

A malha de atitude apresenta dinâmica duas vezes mais rápida que a de posição. Embora a razão seja inferior ao valor ideal, a hierarquia temporal é mantida, garantindo que a malha de atitude responda antes da malha de posição.

3.4 Especificações de Desempenho

Sistemas de controle são arquitetados a fim de realizar funções específicas. As condições necessárias de um sistema de controle são comumente apresentadas como especificações de desempenho, indicadas geralmente em termos de resposta transitória e estacionária, geralmente a uma entrada em degrau unitário. Para comparar as características da resposta transitória, utilizam-se condições iniciais nulas (OGATA, 2010).

Sob essas condições, é habitual definir os seguintes parâmetros conforme abordado por Marques (2020):

- **Máximo sobressinal em porcentagem (M_p):** É o valor em que a forma de onda excede o valor estabelecido em regime permanente, dado por

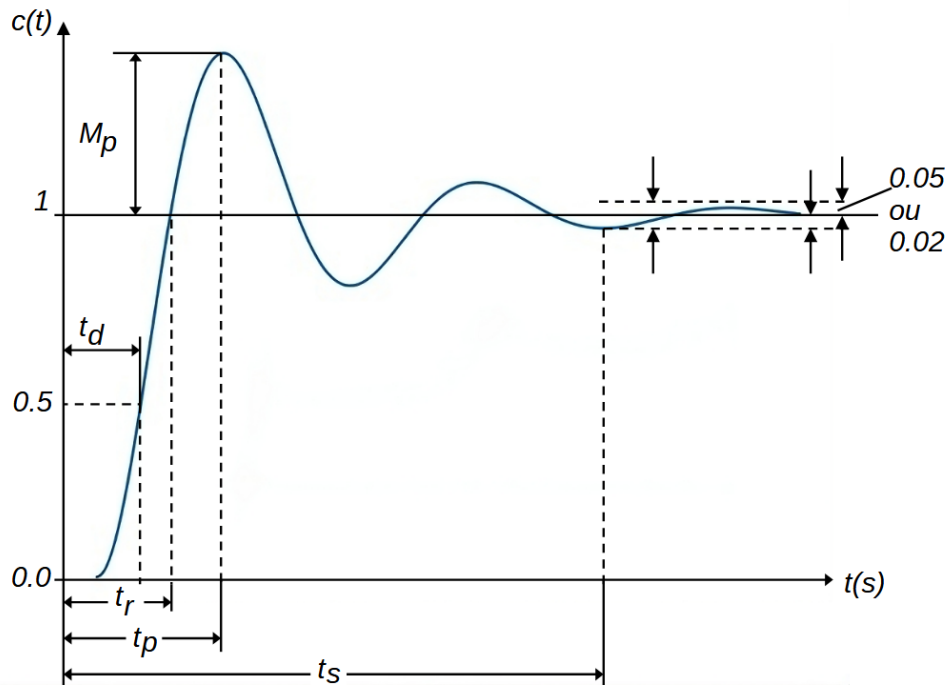
$$\text{Máximo sobressinal percentual} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%.$$

Este parâmetro é diretamente relacionado à estabilidade relativa do sistema.

- **Erro estacionário** (e_{ss}): Avalia a habilidade do sistema em acompanhar o sinal de referência no estado estacionário.
- **Tempo de subida** (t_r): É o tempo necessário para que a resposta do sistema passe de 10% a 90%, ou de 0% a 100%. Neste estudo, foi considerado o intervalo de 0% a 100%.
- **Tempo de acomodação** (t_s): É o tempo necessário para que as oscilações amortecidas transitórias atinjam e se estabilizem dentro de uma faixa de $\pm 2\%$ em torno do valor de regime permanente.

Na Figura 16 estão indicados os parâmetros de desempenho citados acima, dado uma entrada em degrau unitário.

Figura 16 – Resposta ao degrau genérica de um sistema subamortecido.



Fonte: Adaptado de (OGATA, 2010)

3.5 Critérios de Desempenho do Sistema de Controle

A validação do sistema de controle proposto neste trabalho foi realizada a partir de critérios de desempenho estabelecidos com base em referências encontradas na literatura de quadricópteros. Tais critérios permitem verificar se o controlador desenvolvido apresenta comportamento compatível com aplicações reais do VANTs, especialmente considerando limitações típicas de plataformas embarcadas baseadas em microcontroladores

e sensores inerciais do tipo Unidade de Medição Inercial (IMU, do inglês *Inertial Measurement Unit*)

Em sistemas embarcados reais, fatores como ruído de sensores, limitações computacionais, atrasos de processamento e saturação dos atuadores influenciam diretamente a resposta dinâmica do VANTs. Dessa forma, os limites adotados nesta pesquisa não foram estipulados de forma arbitrária, mas fundamentados nos patamares de desempenho otimizados e reportados por [Najm e Ibraheem \(2019\)](#) e [Marques \(2020\)](#), garantindo condições fisicamente plausíveis e comparáveis com simulações e experimentos da área.

3.5.1 Critérios para o Controle de Posição

O controle de posição é responsável pelo rastreamento das coordenadas desejadas nos eixos x , y e z . A definição dos limites de resposta transitória baseia-se nos limites dinâmicos superiores encontrados no trabalho de [Najm e Ibraheem \(2019\)](#) para malhas de translação de quadritores utilizando a estratégia de controle PID Não Linear (NL-PID), bem como nas respostas de regime permanente apresentadas por [Marques \(2020\)](#). A Tabela 2 apresenta os critérios utilizados para validação do controle de posição.

Tabela 2 – Critérios de desempenho para o controle de posição (x, y e z).

Métrica	Critério Adotado
Sobressinal (M_p)	$< 5\%$
Tempo de acomodação (t_s)	$< 5\text{ s}$
Erro estacionário (e_{ss})	Próximo de zero

Fonte: Adaptado de [Najm e Ibraheem \(2019\)](#) e [Marques \(2020\)](#).

3.5.2 Critérios para o Controle de Atitude

O controle de atitude é responsável pela estabilização angular do VANT nos eixos de rolagem (ϕ), arfagem (θ) e guinada (ψ). Os limites para a dinâmica rotacional foram balizados pelo comportamento transitório do ângulo de guinada sob controle não linear em [Najm e Ibraheem \(2019\)](#) e pelas respostas obtidas na sintonia de atitude por [Marques \(2020\)](#), nas quais se prioriza a mitigação de oscilações, de modo a garantir a estabilidade do voo pairado. A Tabela 3 apresenta os critérios adotados para validação do controle de atitude.

3.6 Índices de Desempenho

No contexto deste trabalho, foram empregadas métricas quantitativas capazes de mensurar a qualidade da resposta dinâmica do sistema são eles a IAE ([MARQUES, 2020](#)) e a ITAE ([TUFAILE; DONHA, 2017](#)). Esses índices são amplamente empregados na

Tabela 3 – Critérios de desempenho para o controle de atitude (ϕ , θ e ψ).

Métrica	Critério Adotado
Sobressinal (M_p)	$< 8\%$
Tempo de acomodação (t_s)	$< 4\text{ s}$
Erro estacionário (e_{ss})	Próximo de zero

Fonte: Adaptado de [Najm e Ibraheem \(2019\)](#) e [Marques \(2020\)](#).

literatura de sistemas de controle por fornecerem medidas quantitativas do erro acumulado entre a referência desejada e a resposta efetiva do sistema.

O índice IAE quantifica o erro acumulado em valor absoluto ao longo do tempo, sendo definido por

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt. \quad (3.16)$$

Esse índice atribui a mesma importância a todos os erros, independentemente do instante em que ocorrem, fornecendo uma medida global da capacidade do controlador em minimizar o erro de rastreamento. Valores reduzidos de IAE indicam melhor desempenho geral do sistema, uma vez que refletem menor erro acumulado durante a operação.

Já o índice ITAE incorpora explicitamente o fator temporal na avaliação do erro, sendo definido por

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)| dt. \quad (3.17)$$

Ao multiplicar o erro pelo tempo, o ITAE aumenta progressivamente a penalização para erros persistentes, favorecendo respostas que eliminam rapidamente desvios em relação à referência. Dessa forma, esse índice tende a produzir sistemas com menor tempo de acomodação e reduzido erro estacionário, características desejáveis em aplicações envolvendo veículos aéreos não tripulados.

A utilização conjunta dos índices IAE e ITAE permite analisar o desempenho do sistema sob perspectivas complementares. Enquanto o IAE fornece uma medida global do erro acumulado durante a trajetória, o ITAE enfatiza a permanência do erro ao longo do tempo, permitindo avaliar não apenas a magnitude dos desvios, mas também sua duração. Dessa forma, esses índices tornam-se adequados para caracterizar o comportamento dinâmico do controlador PID implementado neste trabalho.

3.7 Métodos de Sintonia

Diversas técnicas de projeto podem ser empregadas para sintonizar os parâmetros do controlador de forma que as especificações de desempenho em regime transitório e permanente sejam atendidas. No contexto dos controladores PID, a escolha adequada dos ganhos influencia diretamente características como rapidez, estabilidade, robustez e precisão do sistema. Dentre os métodos utilizados para a sintonia dos controladores

PID, destacam-se o método de tentativa e erro (BAHARUDDIN; BASRI, 2023), técnicas clássicas, como o método de Ziegler-Nichols (TUFAILE; DONHA, 2017), e métodos de otimização computacional, como os algoritmos genéticos (SILVA et al., 2021).

Neste trabalho, optou-se pela utilização do Algoritmo Genético (GA, do inglês *Genetic Algorithm*) para determinação automática dos ganhos do controlador PID. Essa escolha foi motivada pela natureza complexa e multivariável do sistema estudado, visto que sistemas de veículos aéreos não tripulados apresentam forte acoplamento dinâmico e não linearidades.

Os AGs pertencem à classe dos métodos heurísticos de otimização inspirados nos mecanismos evolutivos observados na natureza (ARAÚJO, 2025; BASILIO et al., 2024). Esses algoritmos buscam resolver problemas complexos por meio da evolução iterativa de um conjunto de soluções candidatas, denominado população. Ao longo de sucessivas gerações, as soluções são avaliadas e submetidas a operadores genéticos, como seleção, cruzamento e mutação, que promovem a combinação e a diversificação das características dos indivíduos. Como resultado desse processo evolutivo, a população tende a convergir para soluções de melhor qualidade ao longo das gerações.

No problema de sintonia PID, cada indivíduo da população representa um conjunto de parâmetros do controlador, normalmente composto pelos ganhos proporcional (K_p), integral (K_i) e derivativo (K_d). A qualidade desses indivíduos é avaliada por meio de uma função objetivo e assim, o algoritmo realiza sucessivas evoluções da população até encontrar o conjunto de ganhos que apresenta melhor desempenho segundo os critérios estabelecidos.

A utilização desse algoritmo apresenta vantagens importantes quando comparada aos métodos convencionais de sintonia, principalmente devido à sua capacidade de lidar com problemas multimodais, múltiplas restrições e funções objetivo complexas. Além disso, a automatização do processo reduz a subjetividade inerente ao ajuste manual dos parâmetros, tornando o procedimento mais sistemático e reproduzível (ARAÚJO, 2025; BASILIO et al., 2024).

Dessa forma, o emprego do algoritmo genético permite transformar o problema de sintonia PID em um problema de otimização, onde o objetivo consiste em determinar automaticamente os ganhos que proporcionem o melhor compromisso entre rapidez, estabilidade e precisão do sistema controlado.

3.7.1 Algoritmo Genético

Na aplicação de ajuste de PID, cada conjunto de ganhos é inserido no modelo do sistema e avaliado automaticamente. Conforme discutido na literatura, o AG é especialmente atrativo para a sintonia de controladores, pois elimina grande parte do processo manual de ajuste, permitindo encontrar configurações mais eficientes em problemas de elevada complexidade (EMBARCADOS, 2026).

Esses algoritmos simulam mecanismos evolutivos, como reprodução, seleção e mutação, para encontrar soluções otimizadas em problemas complexos, sendo amplamente utilizados em aplicações de otimização de sistemas de controle e ajuste automático de parâmetros (ARAÚJO, 2025; BASILIO et al., 2024).

A principal característica dos AGs consiste em realizar buscas globais em espaços de solução multidimensionais, sendo particularmente adequados para problemas onde métodos tradicionais apresentam dificuldades devido à presença de não linearidades, múltiplos mínimos locais ou funções objetivo complexas (BASILIO et al., 2024).

O funcionamento básico do AG inicia-se com a geração de uma população inicial composta por possíveis soluções candidatas, denominadas indivíduos ou cromossomos. Cada indivíduo é formado por genes que representam as variáveis do problema. No caso da sintonia PID, os genes correspondem aos parâmetros do controlador:

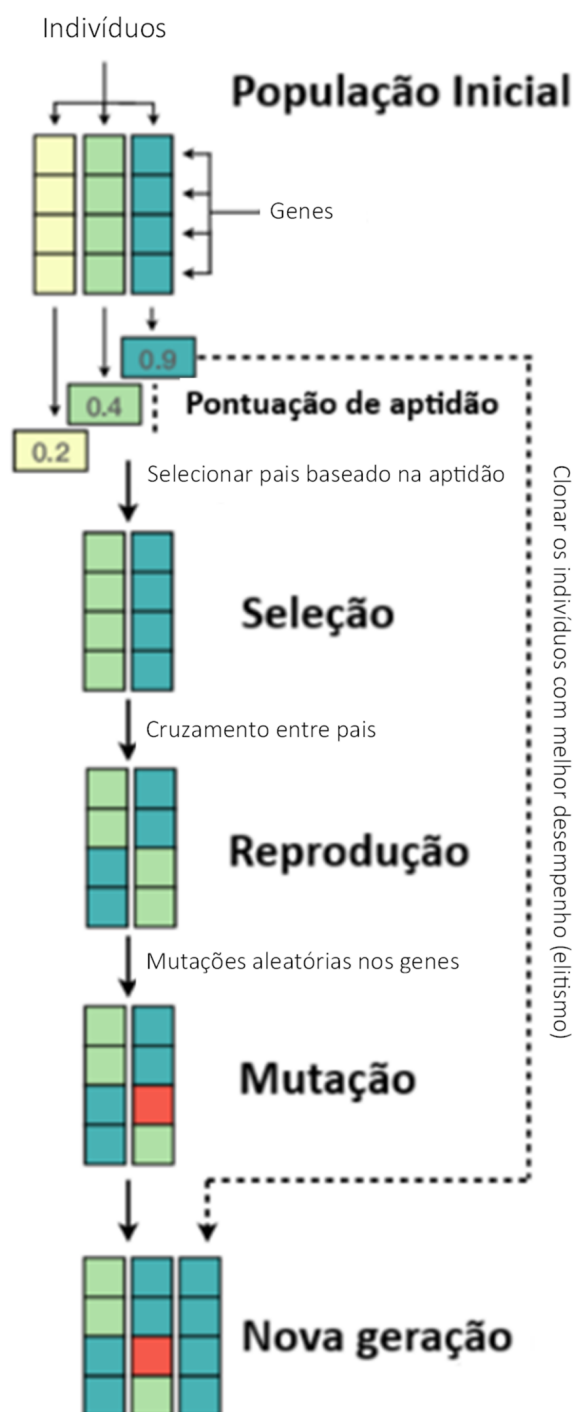
$$Indivíduo = [K_p; K_i; K_d]. \quad (3.18)$$

Após a criação da população inicial, cada indivíduo é avaliado por meio de uma função de aptidão ou objetivo (*fitness function*), responsável por quantificar a qualidade da solução encontrada. Segundo Basilio et al. (2024), essa função objetivo representa o elo entre o processo evolutivo e os requisitos de desempenho do sistema, permitindo identificar quais indivíduos apresentam maior aptidão para permanecer nas gerações seguintes. A Figura 17 apresenta o fluxo geral de funcionamento do AG.

O processo evolutivo empregado inicia-se com a geração aleatória de uma população de indivíduos, cada um representando uma combinação distinta dos ganhos do controlador PID. Em seguida, cada indivíduo é avaliado por meio da função objetivo, calculada a partir de métricas de desempenho do sistema. Com base nesses resultados, os indivíduos mais aptos são selecionados para reprodução, dando origem a novos descendentes por meio da aplicação do operador de cruzamento. Posteriormente, pequenas alterações aleatórias são introduzidas nos genes dos descendentes por meio da mutação, com o objetivo de preservar a diversidade genética da população e reduzir a probabilidade de convergência prematura. Após essas operações, uma nova geração é formada pela substituição dos indivíduos menos aptos. Esse ciclo é repetido sucessivamente até que seja atingido o número máximo de gerações estabelecido ou que seja verificado um critério de convergência.

Essas etapas permitem que o algoritmo explore diferentes regiões do espaço de busca simultaneamente, característica que reduz a possibilidade de convergência prematura e melhora a capacidade de encontrar soluções globais (ARAÚJO, 2025).

Figura 17 – Funcionamento básico do AG.

Fonte: [Basilio et al. \(2024\)](#).

3.7.2 Determinação dos parâmetros do controlador utilizando Algoritmo Genético

Para a determinação dos ganhos (3.1), foi utilizado o *script* desenvolvido por [Basilio et al. \(2024\)](#), implementado no ambiente MATLAB. Inicialmente, definiu-se um vetor contendo as variáveis de decisão do problema. Embora o sistema completo possua múltiplas malhas de controle, foi adotada uma estratégia baseada em simetria física do quadricóptero para reduzir o número de parâmetros independentes. Dessa forma, malhas que apresentam comportamento dinâmico semelhante compartilham os mesmos ganhos. Assim, o problema de otimização foi reduzido para 18 variáveis independentes, organizadas conforme:

Tabela 4 – Variáveis das malhas de controle a serem sintonizadas.

Malha	Variáveis
Posição horizontal	x, y
Altitude	z
Atitude	ϕ, θ
Guinada	ψ
Velocidade angular	p, q
Velocidade de guinada	r

Fonte: Do autor.

Cada indivíduo da população foi representado por um cromossomo de codificação real contendo os 18 parâmetros do controlador, expressa por

$$\text{Indivíduo} = [K_{p1}, K_{i1}, K_{d1}, \dots, K_{p18}, K_{i18}, K_{d18}]. \quad (3.19)$$

3.7.2.1 Função Objetivo e Restrições do Sistema

O desempenho de cada indivíduo é avaliado por uma função objetivo (J), formulada para quantificar o comportamento dinâmico do quadricóptero em malha fechada. Como não há na literatura uma formulação padrão que atenda simultaneamente a todos os requisitos desejados para esta aplicação, uma função objetivo original foi proposta neste trabalho.

A métrica utilizada fundamenta-se no critério ITAE, escolhido por sua capacidade de atribuir maior penalização aos erros residuais que persistem durante a resposta do sistema. Essa característica contribui para a obtenção de respostas com menor tempo de acomodação e menor erro em regime permanente. Como complemento ao ITAE, foram incorporados termos adicionais destinados a aprimorar o comportamento transitório, considerando penalizações referentes ao tempo de subida (t_r), ao tempo de acomodação (t_s) e ao percentual de sobressinal (M_p). Esses parâmetros são avaliados nas malhas responsáveis pelo controle da posição (x, y, z) e da orientação de guinada (ψ). Assim, a função

objetivo pode ser expressa por

$$J = w_{\text{itae}} \cdot J_{\text{ITAE}} + w_{\text{subida}} \cdot \sum t_r + w_{\text{assent}} \cdot \sum t_s + w_{M_p} \cdot \sum M_p. \quad (3.20)$$

em que w_{itae} representa o fator de ponderação associado ao custo decorrente do erro acumulado ao longo do tempo. Os parâmetros w_{subida} , w_{assent} e w_{M_p} , por sua vez, correspondem aos pesos aplicados às penalizações referentes ao tempo de subida, ao tempo de acomodação e ao percentual de sobressinal, respectivamente, considerando as variáveis controladas de posição e orientação (x, y, z, ψ) .

A definição dos pesos globais da função objetivo, dada por w_{itae} , w_{subida} , w_{assent} e w_{M_p} , tem como finalidade tanto compatibilizar as diferentes ordens de grandeza das métricas empregadas quanto estabelecer a prioridade dos requisitos de desempenho do sistema. Dessa forma, busca-se equilibrar grandezas com diferentes unidades e escalas, como tempo, porcentagem de sobressinal e erro acumulado. Os valores adotados foram determinados empiricamente a partir de simulações preliminares, sendo definidos como $w_{\text{itae}} = 50$, $w_{\text{subida}} = 100$, $w_{\text{assent}} = 20$ e $w_{M_p} = 20$.

Entre os termos considerados, o maior peso foi associado ao tempo de subida, com $w_{\text{subida}} = 100$, de modo a priorizar uma resposta rápida do veículo. O critério ITAE, ponderado por $w_{\text{itae}} = 50$, complementa essa característica ao penalizar a persistência dos erros e contribuir para uma resposta mais amortecida e com menor erro residual. Por outro lado, os termos relacionados ao tempo de acomodação e ao sobressinal, ambos com peso 20, desempenham uma função complementar, restringindo oscilações excessivas e contribuindo para a estabilidade da resposta sem reduzir significativamente sua rapidez.

O termo composto do ITAE integra os erros das variáveis de posição e orientação, utilizando coeficientes internos de ponderação de acordo com a relevância dinâmica e de segurança de cada eixo

$$J_{\text{ITAE}} = 1,5 \int t|e_x(t)| dt + 1,5 \int t|e_y(t)| dt + 2,0 \int t|e_z(t)| dt + 0,5 \int t|e_\psi(t)| dt. \quad (3.21)$$

A escolha dos coeficientes 1,5, 2,0 e 0,5 considera a sensibilidade dinâmica e o grau de acoplamento entre as malhas do quadricóptero. O eixo de altitude (z) recebeu maior peso (2,0) devido à sua relação direta com o empuxo total dos motores. Os eixos horizontais (x, y) receberam peso intermediário (1,5), pois sua dinâmica depende dos ângulos de atitude (ϕ, θ). Por fim, a guinada (ψ) recebeu menor ponderação (0,5), devido à sua menor influência sobre a translação, permitindo maior tolerância a variações transitórias sem comprometer o rastreamento da trajetória.

Além da função objetivo, foram estabelecidas restrições para limitar a região de busca do algoritmo e garantir que apenas soluções fisicamente viáveis fossem avaliadas.

As primeiras restrições correspondem aos limites inferiores (lb) e superiores (ub) dos ganhos do controlador, definidos de forma a restringir a busca a valores compatíveis com a dinâmica do sistema, evitando soluções que levassem à instabilidade logo nas primeiras iterações. Os vetores adotados são apresentados a seguir:

Tabela 5 – Limites inferiores e superiores dos ganhos dos controladores PID.

Malha	Limite Inferior (<i>lb</i>)			Limite Superior (<i>ub</i>)		
	K_p	K_i	K_d	K_p	K_i	K_d
Posição horizontal (x, y)	0,0	0,0	-0,2	1,2	1,0	1,0
Altitude (z)	4,0	0,0	-10,0	18,0	0,0	0,0
Atitude (ϕ, θ)	1,5	0,0	-2,0	6,0	0,5	0,0
Guinada (ψ)	1,5	0,0	-2,0	6,0	0,5	0,0
Velocidade angular (p, q)	0,5	0,0	-1,0	4,0	0,5	0,0
Velocidade de guinada (r)	0,5	0,0	-1,0	4,0	0,5	0,0

Fonte: Do autor.

Além dessas restrições, durante a simulação de cada indivíduo foi adotado um critério de segurança para interromper soluções divergentes. Sempre que o quadricóptero ultrapassava os limites espaciais de ± 15 m em qualquer eixo ou excedia $\pm \pi/4$ rad nos ângulos de *roll* (ϕ) e *pitch* (θ), a simulação era encerrada e uma penalização de $J = 10^5$ era atribuída à função objetivo. Esse procedimento impede que indivíduos instáveis permaneçam no processo evolutivo.

3.7.2.2 Operadores Genéticos e Mecanismo de Evolução

A otimização dos 18 ganhos do controlador PID foi implementada via algoritmo genético utilizando a função nativa *ga()* da caixa de ferramentas *Global Optimization Toolbox* do MATLAB, conforme a metodologia descrita por [Basilio et al. \(2024\)](#). O processo evolutivo foi configurado para uma população de 35 indivíduos ao longo de 25 gerações.

O método de seleção adotado foi a Seleção por Torneio (com tamanho de torneio igual a 2). O mecanismo de elitismo foi configurado para preservar exatamente os 2 melhores indivíduos de cada geração (aproximadamente 5,7% da população), transferindo-os intactos para a geração seguinte.

A reprodução dos 33 indivíduos restantes é governada pelo parâmetro de fração de cruzamento (*CrossoverFraction*), ajustado em 0,8. No ecossistema do MATLAB, esse parâmetro define a proporção da população não elite gerada por cruzamento: 80% (26 indivíduos) resultam de cruzamento, enquanto os 20% restantes (7 indivíduos) são gerados exclusivamente por mutação.

Por padrão no MATLAB para problemas de otimização, utilizou-se o operador de Cruzamento Disperso (*crossoverscattered*). Este operador gera um vetor de máscara binária aleatória $m \in \{0, 1\}^{18}$, em que a constituição do vetor de ganhos do filho x_{filho} a partir dos pais x_{pai1} e x_{pai2} é dada por:

$$x_{\text{filho},i} = \begin{cases} x_{\text{pai1},i}, & \text{se } m_i = 1 \\ x_{\text{pai2},i}, & \text{se } m_i = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 18. \quad (3.22)$$

Os indivíduos destinados à mutação seguem o padrão nativo da ferramenta para variáveis limitadas, a Mutação Gaussiana (*gcmutation*). A taxa padrão de mutação por variável é $p_m = 1/nvars = 1/18 \approx 5,55\%$. Quando um gene i é mutado, seu valor é alterado somando-se um ruído aleatório de distribuição normal com média zero:

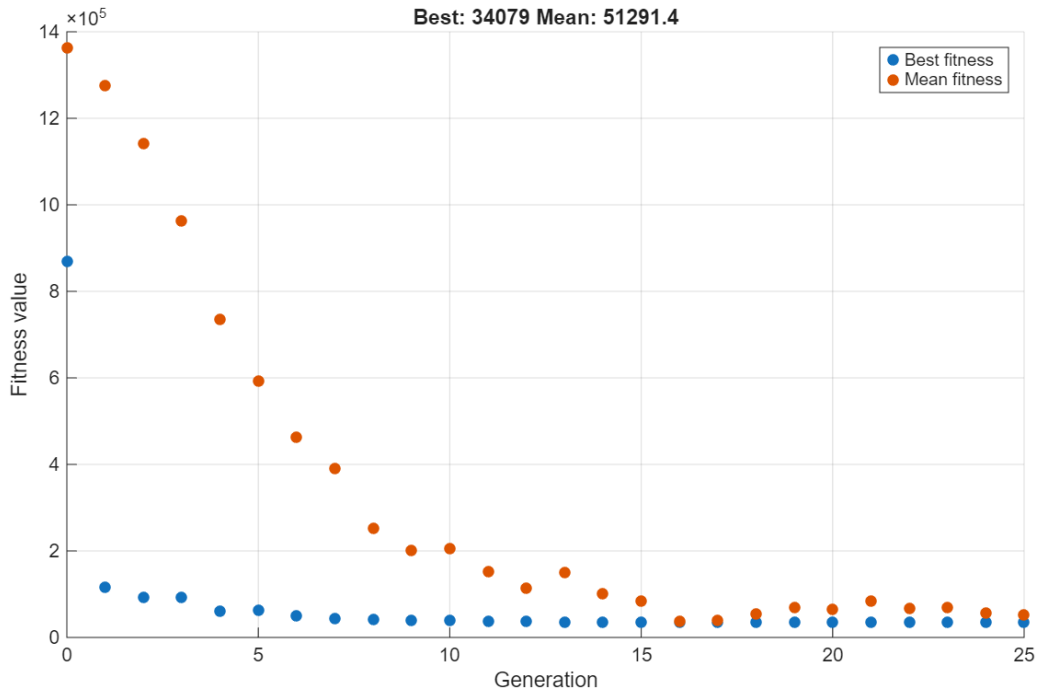
$$x_{\text{filho},i} = x_{\text{pai},i} + \mathcal{N}(0, \sigma_g^2), \quad (3.23)$$

em que σ_g é o desvio-padrão adaptativo do MATLAB para a geração g , o qual encolhe gradativamente ao longo do processo iterativo para promover a exploração inicial e o refinamento local nas gerações finais. Por fim, o acompanhamento do processo convergente foi monitorado via função gráfica nativa *gaplotbestf*.

3.7.3 Resultados da otimização dos ganhos PID

A curva de convergência obtida durante uma realização do algoritmo genético ao longo das 25 gerações é apresentada na Figura 18. No ambiente do MATLAB, a otimização por algoritmo genético atua na minimização da função objetivo; portanto, a métrica de aptidão (*fitness value*) exibida pelo software corresponde diretamente ao valor da função custo J definida na (3.7.2.1), em que menores valores de custo refletem maior aptidão do indivíduo. Foram monitorados dois indicadores ao longo do processo evolutivo: o valor da função custo do melhor indivíduo de cada geração (*Best fitness*) e o valor médio da função custo de toda a população (*Mean fitness*).

Figura 18 – Evolução da função objetivo (custo) ao longo das gerações durante uma realização do processo de otimização.



Fonte: Do autor.

Nas primeiras gerações, observa-se uma redução acentuada da função custo, indicando rápida exploração do espaço de busca e eliminação de soluções de baixo desempenho. A média da população também apresenta comportamento decrescente, enquanto a redução da diferença entre o melhor indivíduo e a média indica menor dispersão e aproximação da convergência.

Nas gerações finais, as melhorias tornam-se menos expressivas, caracterizando a estabilização da busca. Ao final da simulação, na geração 25, o menor custo obtido foi de 34079, enquanto o *Mean fitness* permaneceu próximo de 51291,4. Esses resultados indicam um equilíbrio adequado entre exploração e refinamento das soluções.

Ressalta-se que a otimização por AG é realizada de forma *offline*, determinando, em ambiente de simulação, o vetor de ganhos de maior aptidão. Após a otimização, a matriz de ganhos é fixada nos controladores PID para posterior avaliação do desempenho e rastreamento de trajetórias.

Conforme apresentado em (3.2), o sistema utiliza uma arquitetura de controle em cascata composta por três níveis hierárquicos. A Tabela 6 apresenta os ganhos finais K_P , K_I e K_D do indivíduo de maior aptidão, distribuídos entre as respectivas malhas de controle.

Tabela 6 – Ganhos do controlador PID obtidos para o melhor indivíduo ao término da execução do AG, organizados segundo a arquitetura hierárquica em cascata.

Nível	K_P	K_I	K_D
$G_{PID,x}$	0,189026	0,050000	-0,191871
$G_{PID,y}$	0,189026	0,050000	-0,191871
$G_{PID,z}$	14,074000	0,000000	-9,857459
$G_{PID,\phi}$	5,549390	0,101175	-0,155629
$G_{PID,\theta}$	5,549390	0,101175	-0,155629
$G_{PID,\psi}$	4,639388	0,171452	-0,480486
$G_{PID,p}$	3,870970	0,343879	-0,016243
$G_{PID,q}$	3,870970	0,343879	-0,016243
$G_{PID,r}$	2,869316	0,313453	-0,015585

Fonte: Do autor.

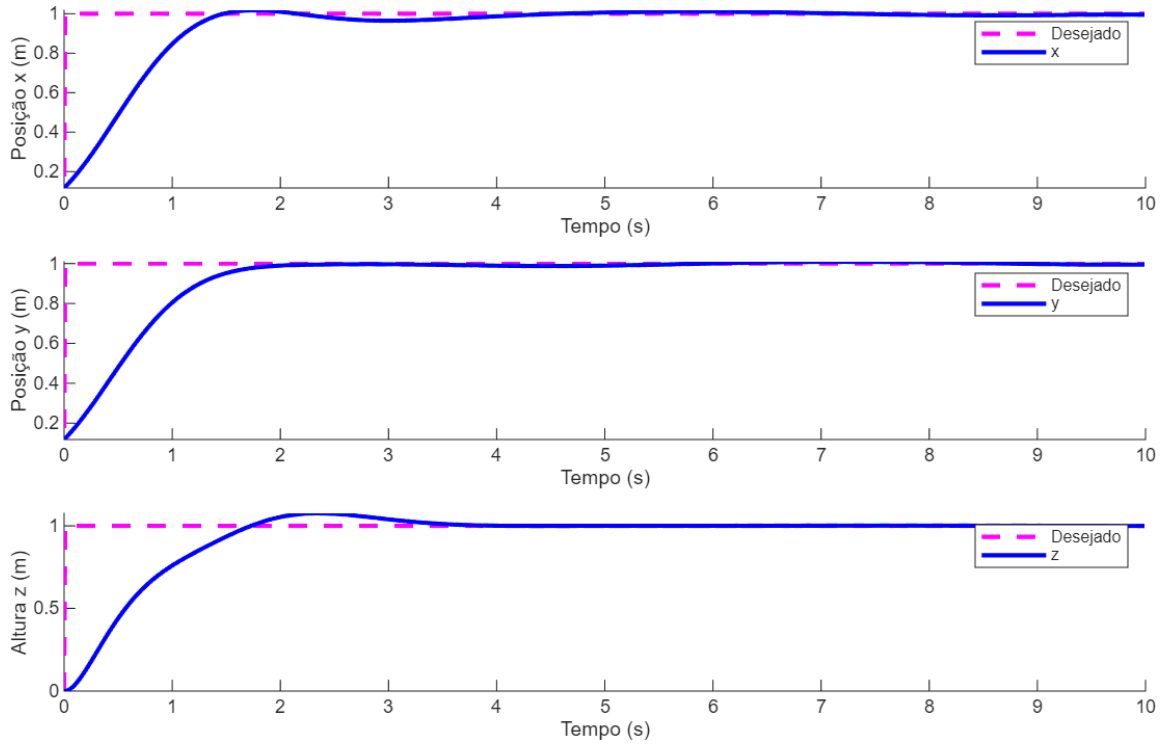
3.7.4 Resultados do controlador PID

Após a obtenção dos ganhos, realizou-se a validação do controlador PID implementado na arquitetura em cascata do quadricóptero. O objetivo desta etapa foi avaliar a capacidade do sistema em rastrear referências de posição e orientação, verificando características relacionadas à estabilidade, comportamento transitório, erro em regime permanente e atendimento aos critérios de desempenho definidos na Seção 3.5.

As Figuras 19 e 20 apresentam as respostas temporais obtidas para as variáveis posicionais e angulares do sistema, respectivamente. As referências utilizadas durante os

ensaios consistem em comandos do tipo degrau aplicados às malhas externas de posição e guinada em um tempo total de 10 segundos.

Figura 19 – Resposta ao degrau somente da posição (x , y e z), em que a linha rosa tracejada representa o sinal desejado e a linha azul representa a posição real da aeronave.



Fonte: Do autor.

Inicialmente, observa-se que a posição x parte do valor inicial no instante zero e aumenta até aproximadamente 2 segundos, quando começa a se estabilizar em torno do valor de referência. Entre 2 e 5 segundos, essa variável apresenta uma pequena oscilação acompanhada de um leve sobressinal, conforme mostrado na Tabela 7. Além disso, o tempo de acomodação apresentou uma melhora em relação ao critério adotado, tornando a resposta mais rápida, enquanto o erro em regime permanente permaneceu bem abaixo do limite especificado.

Para a posição y , o veículo parte do valor inicial igual a zero e cresce até atingir um valor próximo ao desejado, apresentando o menor sobressinal entre os eixos. Observa-se apenas um pequeno sobressinal por volta dos 5 segundos, além disso o sistema atinge e permanece dentro da faixa de tolerância de $\pm 2\%$ e após esse tempo o erro está bem abaixo do valor esperado.

Já para a posição z , o veículo parte do instante inicial, correspondente à decolagem, e sobe até aproximadamente 2 segundos. Em seguida, apresenta um sobressinal, que é superior ao estabelecido, o qual é corrigido até cerca de 4 segundos, mantendo posteriormente o erro em regime permanente abaixo do limite adotado, além de uma diminuição no tempo de acomodação de 1,7 segundos. Portanto, os resultados atendem aos critérios

estabelecidos, apesar da ocorrência de um pequeno sobressinal no eixo z , mas o sistema encontra-se estabilizado.

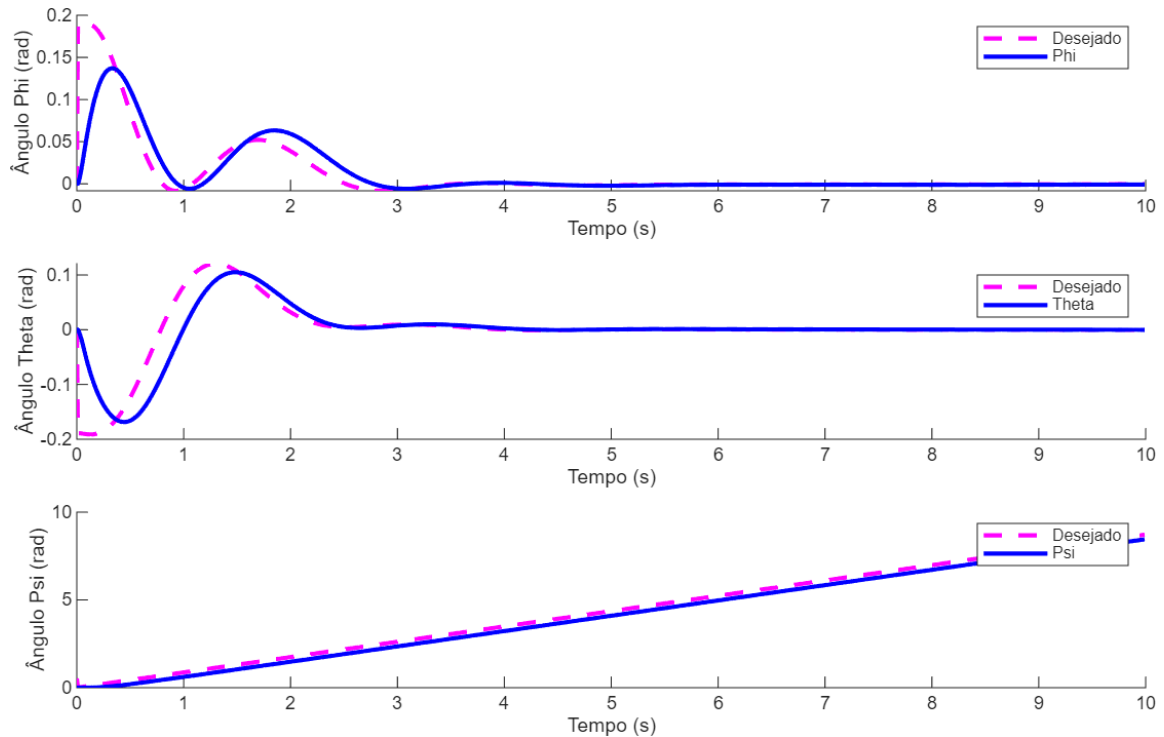
Tabela 7 – Valores do desempenho para controle de posição para resposta ao degrau somente para posição (x , y e z).

Posição	M_p (%)	t_s (s)	e_{ss} (m)
x	2,20	2,46	0,000054
y	1,20	2,26	0,000269
z	7,60	3,30	0,000247

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados obtidos via simulação no MATLAB com base no critério de desempenho PID da Tabela 2.

As respostas angulares são apresentadas na Figura 20 que mostram comportamento para as variáveis angulares (ϕ , θ e ψ). Observa-se que, para a variável ϕ , a resposta da aeronave, entre 0 e 1 segundo, é rápida, porém apresenta um elevado sobressinal, acima do critério adotado, conforme mostrado na Tabela 8. Em seguida, entre 1 e 3 segundos, esse sobressinal é atenuado até que o sinal se estabilize em menos de 5 segundos, resultando em um tempo de acomodação bem inferior ao estabelecido, ou seja, uma diminuição de 1,2 segundos. Após esse instante, o sistema converge para o valor final, apresentando um erro em regime permanente bem próximo de zero.

Figura 20 – Resposta ao degrau em ψ e comportamento dos ângulos de referência ϕ e θ gerados pelos controladores de posição.



Fonte: Do autor.

Tabela 8 – Valores do desempenho para controle de atitude

Ângulo	M_p (%)	t_s (s)	e_{ss} (rad)
ϕ	12,33	2,80	0,0013
θ	10,73	2,80	0,0006
ψ	0,05	1,90	0,0011

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados obtidos via simulação no MATLAB com base no critério de desempenho PID da Tabela 3.

Para o ângulo θ , a aeronave apresenta uma resposta oscilatória até aproximadamente 4 segundos, com um sobressinal acima do critério adotado. Entretanto, o tempo de acomodação permanece bem inferior ao valor estabelecido, e o erro em regime permanente é próximo de zero. Assim, o ângulo θ atende parcialmente aos critérios estabelecidos. Já para o ângulo ψ , a aeronave parte de zero e atinge seu valor máximo em menos de 2 segundos, apresentando baixo sobressinal, cuja melhoria foi de 99,38% em relação ao critério adotado. Após esse intervalo, o erro em regime permanente torna-se próximo de zero. Portanto, esse comportamento atende ao critério estabelecido.

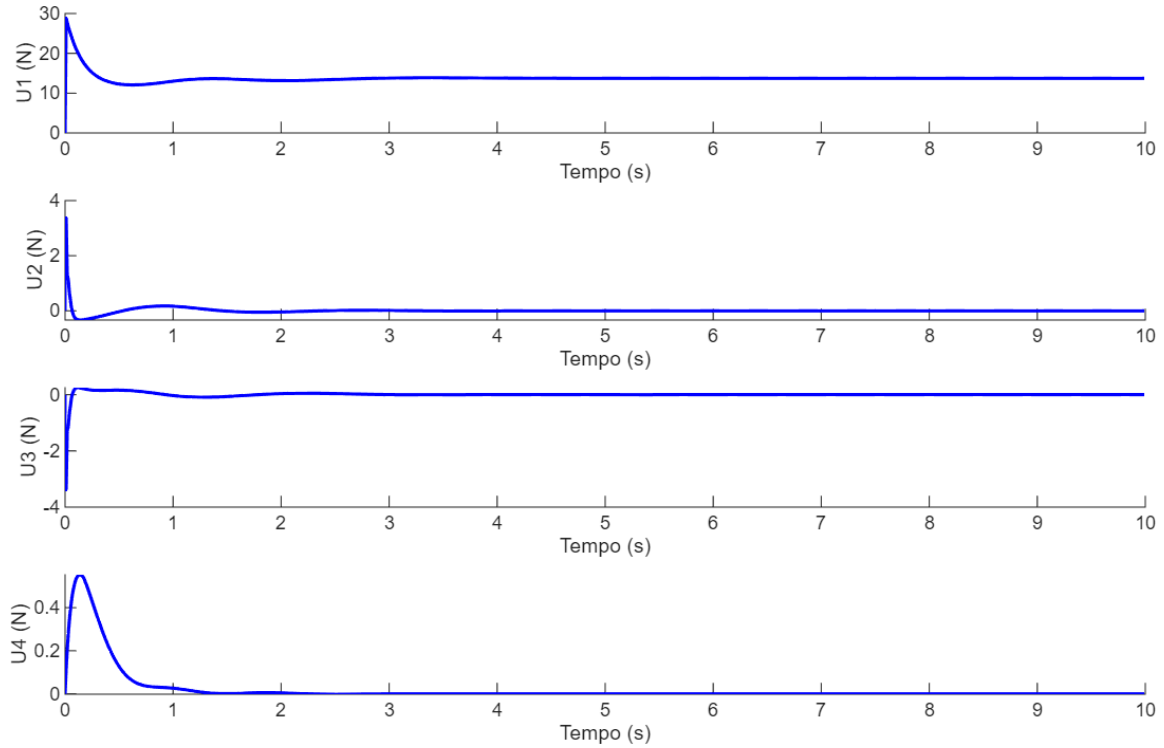
Por fim, observa-se um comportamento oscilatório e amortecido nos ângulos ϕ e θ , uma vez que ambos são responsáveis pela estabilização da aeronave a fim de realizar a trajetória desejada. Em contrapartida, o ângulo ψ , responsável pela direção da aeronave, exerce menor influência na resposta dinâmica do sistema.

Na Figura 21, é apresentada a evolução temporal dos sinais de controle produzidos pelo controlador em cascata para as quatro entradas do sistema, identificadas por U_1 , U_2 , U_3 e U_4 . A avaliação dessas variáveis é fundamental para analisar o esforço de controle necessário ao rastreamento das referências, bem como verificar a ocorrência de saturações, oscilações excessivas ou comportamentos que possam comprometer a implementação prática do sistema.

Visando à implementação física do veículo e à preservação de sua integridade operacional, foram estabelecidos limites de saturação para os atuadores. O empuxo total, representado por U_1 , está limitado ao intervalo entre 0 a 43,50 N. Para os torques, os sinais de rolagem U_2 e arfagem U_3 estão restringidos à faixa de $\pm 6,25$ N · m, enquanto o torque de guinada U_4 está limitado ao intervalo de $\pm 2,25$ N · m.

A partir dos resultados, verifica-se que o sinal U_1 , correspondente ao empuxo total aplicado ao veículo, apresenta a maior amplitude entre as entradas de controle. No início da resposta, observa-se um pico transitório, seguido de uma redução rápida e posterior convergência para um valor constante em regime permanente. Durante todo o processo, o sinal permanece dentro dos limites operacionais estabelecidos, com $U_{1,\min} = 0$ N e $U_{1,\max} = 43,50$ N. Esse comportamento está relacionado à função de U_1 na sustentação do quadricóptero e na regulação da altitude, uma vez que é necessário um maior esforço inicial para compensar a força gravitacional e conduzir o veículo à referência especificada. O valor não nulo observado em regime permanente corresponde ao empuxo necessário

Figura 21 – Resposta temporal das variáveis de ação de controle



Fonte: Do autor.

para sustentar o voo de forma estável.

Em relação aos sinais U_2 e U_3 , associados, respectivamente, aos torques de rolagem e arfagem, nota-se que suas amplitudes são consideravelmente inferiores às observadas em U_1 . Ambos apresentam uma resposta transitória amortecida e permanecem significativamente abaixo dos limites de $\pm 6,25 \text{ N} \cdot \text{m}$. Pequenas oscilações podem ser identificadas no início da resposta, porém são rapidamente reduzidas, evidenciando que as malhas internas responsáveis pelo controle de atitude conseguem realizar os ajustes necessários de maneira rápida, sem exigir esforços elevados dos atuadores ou provocar saturação. A aproximação desses sinais a valores próximos de zero em regime permanente também demonstra que, após a estabilização do veículo, não são necessários torques corretivos de magnitude significativa.

Quanto ao sinal U_4 , responsável pelo torque de guinada, seu comportamento é semelhante ao apresentado por U_2 e U_3 . Inicialmente, observa-se uma resposta transitória, seguida de uma rápida acomodação dentro dos limites estabelecidos de $\pm 2,25 \text{ N} \cdot \text{m}$. Durante esse período, ocorre uma pequena inversão de sinal, característica da atuação corretiva necessária para ajustar e manter a orientação desejada. De forma geral, os quatro sinais de controle apresentam respostas limitadas e suavemente amortecidas, sem ocorrência de saturação e sem indícios de esforços excessivos por parte dos atuadores, indicando um comportamento compatível com os requisitos de implementação prática do sistema.

3.8 Resultados dos Índices de Desempenho

Para complementar a análise qualitativa das respostas temporais apresentadas anteriormente, foram calculados os índices de desempenho IAE e ITAE para as principais variáveis do sistema. Esses índices permitem quantificar o erro acumulado e a persistência do erro ao longo do tempo, fornecendo uma avaliação objetiva da qualidade do rastreamento realizado pelo controlador PID sintonizado pelo AG.

A Tabela 9 apresenta os valores calculados para cada variável analisada. Esses resultados serão avaliados em conjunto com as respostas temporais mostradas nas Figuras 19 e 20, permitindo uma análise mais completa do desempenho do sistema em termos de rapidez e capacidade de rejeição do erro.

Tabela 9 – Índices de desempenho do controlador PID sintonizado por AG

Variável	IAE	ITAE
x	1,0811	0,7545
y	1,1189	1,0058
z	0,7664	0,5666
ϕ	0,0572	0,0504
θ	0,1236	0,1230
ψ	0,7140	0,4256
p	0,0669	0,0466
q	0,0682	0,0624
r	0,1611	0,2077

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados obtidos via simulação no MATLAB.

Para a malha de posição x , o menor valor de ITAE indica que o erro foi atenuado rapidamente, resultado da resposta ágil do sistema à entrada em degrau unitário. Além disso, a ausência de oscilações significativas ao longo do tempo contribuiu para a redução desse índice.

Para a posição y , a resposta foi ligeiramente mais lenta em comparação à posição x . Embora tenha apresentado o menor sobressinal, o maior tempo de acomodação fez com que o erro permanecesse por mais tempo, aumentando sua contribuição temporal e, consequentemente, o valor do ITAE. Isso indica que, apesar de o sistema eliminar o erro em regime permanente, sua dinâmica é menos rápida.

Já a posição z apresentou a resposta mais rápida entre as malhas de posição, porém com o maior sobressinal. Como o sistema atingiu a referência em um curto intervalo de tempo, a área total do erro foi reduzida, resultando em um menor valor de IAE. Da mesma forma, a rápida convergência da resposta contribuiu para a obtenção de um baixo valor de ITAE.

Para o ângulo ϕ , os baixos valores dos índices de desempenho indicam que o sistema reagiu rapidamente à entrada, minimizando o erro ao longo do tempo.

No caso do ângulo θ , o erro foi maior quando comparado ao observado em ϕ , o que resultou em valores mais elevados dos índices de desempenho. Além disso, a permanência desse erro ao longo do tempo aumentou sua contribuição para o ITAE, tornando esse índice superior ao obtido para ϕ .

Já o ângulo ψ , observou-se a resposta mais rápida à entrada em degrau, associada à menor área de erro. Esse comportamento é resultado da rápida atuação do controlador, que permitiu ao sistema atingir a referência sem sobressinal significativo e com tempo de acomodação reduzido. Como o erro foi eliminado rapidamente, a contribuição temporal para o cálculo do ITAE também foi reduzida, resultando em um dos menores valores desse índice entre os casos analisados.

De forma geral, os índices IAE e ITAE corroboram a análise qualitativa das respostas temporais, indicando que o controlador PID sintonizado pelo AG proporcionou baixo erro acumulado e rápida eliminação dos desvios em relação às referências impostas. Dessa forma, os resultados obtidos demonstram a eficácia da metodologia de sintonia adotada, validando sua aplicação ao controle do quadricóptero considerado neste trabalho.

4 Resultados do Controle de Trajetórias

Neste capítulo, os controladores projetados para o seguimento de trajetória são analisados e validados por meio de simulações realizadas no programa Matlab. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos de acordo com o cenário e são avaliados com base nos parâmetros de desempenho, a fim de verificar a eficácia do controlador PID em garantir a estabilidade e o desempenho do modelo aéreo.

4.1 Cenário de testes

Para avaliar a dinâmica do sistema no seguimento de trajetória serão adotados dois cenários de teste, uma manobra em linha reta e uma manobra circular, o que possibilita avaliar não apenas a capacidade do controlador em conduzir o veículo até uma posição desejada, mas também sua habilidade em manter o rastreamento de trajetórias que exigem correções contínuas ao longo do tempo. Esses cenários são descritos a seguir.

4.1.1 Trajetória em Linha Reta

No primeiro ensaio, avalia-se a capacidade do VANT em realizar o rastreamento de uma trajetória retilínea. A escolha desse tipo de movimento deve-se ao fato de representar uma condição de voo relativamente simples, permitindo analisar de forma isolada a capacidade do sistema de controle em conduzir o veículo até as posições desejadas, sem a influência de manobras mais complexas. Dessa forma, torna-se possível avaliar o comportamento das malhas de posição e atitude em um cenário inicial de validação.

O procedimento experimental engloba duas etapas consecutivas: uma fase inicial de decolagem/subida e a fase de rastreamento de trajetória propriamente dita. Inicialmente, o veículo parte da posição de repouso no solo, na origem do sistema de coordenadas $\mathbf{P}_{\text{solo}} = (0, 0, 0)$, e realiza a subida até atingir a altitude operacional de 1 m e o alinhamento no eixo y em 1 m.

Atingida a condição inicial de voo no ponto $\mathbf{P}_0 = (0, 1, 1)$, inicia-se a trajetória de referência retilínea. A trajetória foi definida a partir da equação paramétrica de uma reta no espaço tridimensional (ANTON; RORRES, 2012). Seja $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o ponto de partida do segmento e $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$ o vetor diretor da reta, a equação paramétrica é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} t, \quad (4.1)$$

em que o vetor $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T$ representa a posição inicial da trajetória retilínea no instante $t = 0$ s, e o vetor $\begin{bmatrix} d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}^T$ define a direção e velocidade do deslocamento.

Para o ensaio considerado, a referência retilínea prevê a variação do eixo x de 0 a 8 m ao longo do intervalo de tempo de 10 s, enquanto as coordenadas dos eixos y e z mantêm-se constantes e iguais a 1 m. Assim, o segmento de reta desejado conecta o ponto inicial $\mathbf{P}_0 = (0,1,1)$ ao ponto final $\mathbf{P}_1 = (8,1,1)$. Assumindo deslocamento com velocidade constante ao longo do eixo x , tem-se

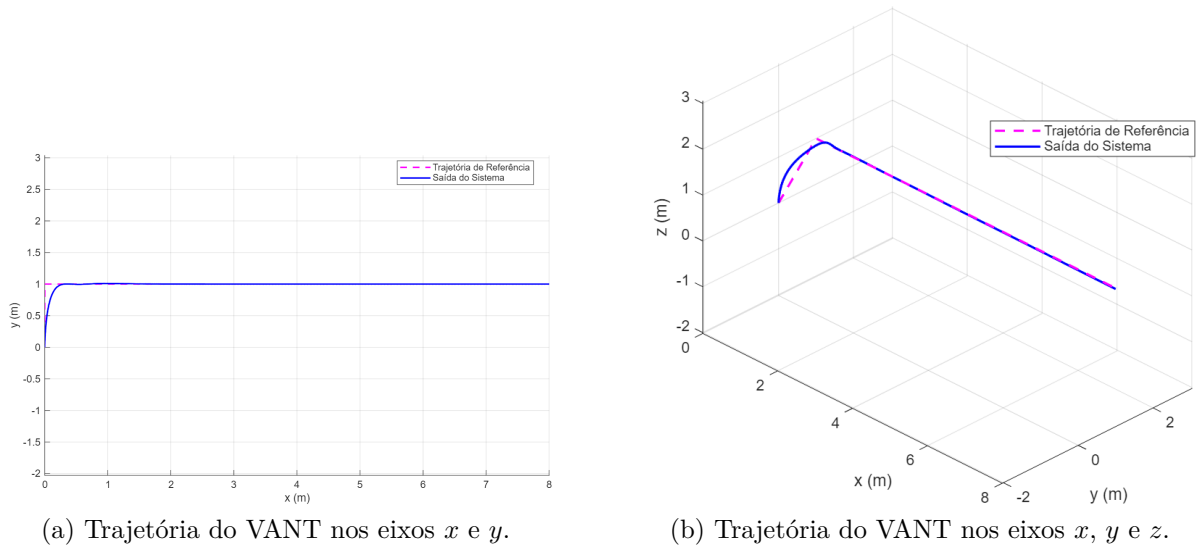
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ m/s.} \quad (4.2)$$

Substituindo essas condições na Equação (4.1), obtém-se as componentes escalares da trajetória de referência para $0 \leq t \leq 10$ s:

$$\begin{aligned} x_{\text{desejado}}(t) &= 0,8t, \\ y_{\text{desejado}}(t) &= 1, \\ z_{\text{desejado}}(t) &= 1, \\ \psi_{\text{desejado}}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dessa forma, a referência retilínea tem início formal em $(0,1,1)$ para $t = 0$ s e finaliza em $(8,1,1)$ para $t = 10$ s. Os resultados obtidos para o rastreamento espacial percorrido pelo veículo são apresentados na Figura 22.

Figura 22 – Trajetórias 2D e 3D referentes ao voo em linha reta.



Fonte: Do autor.

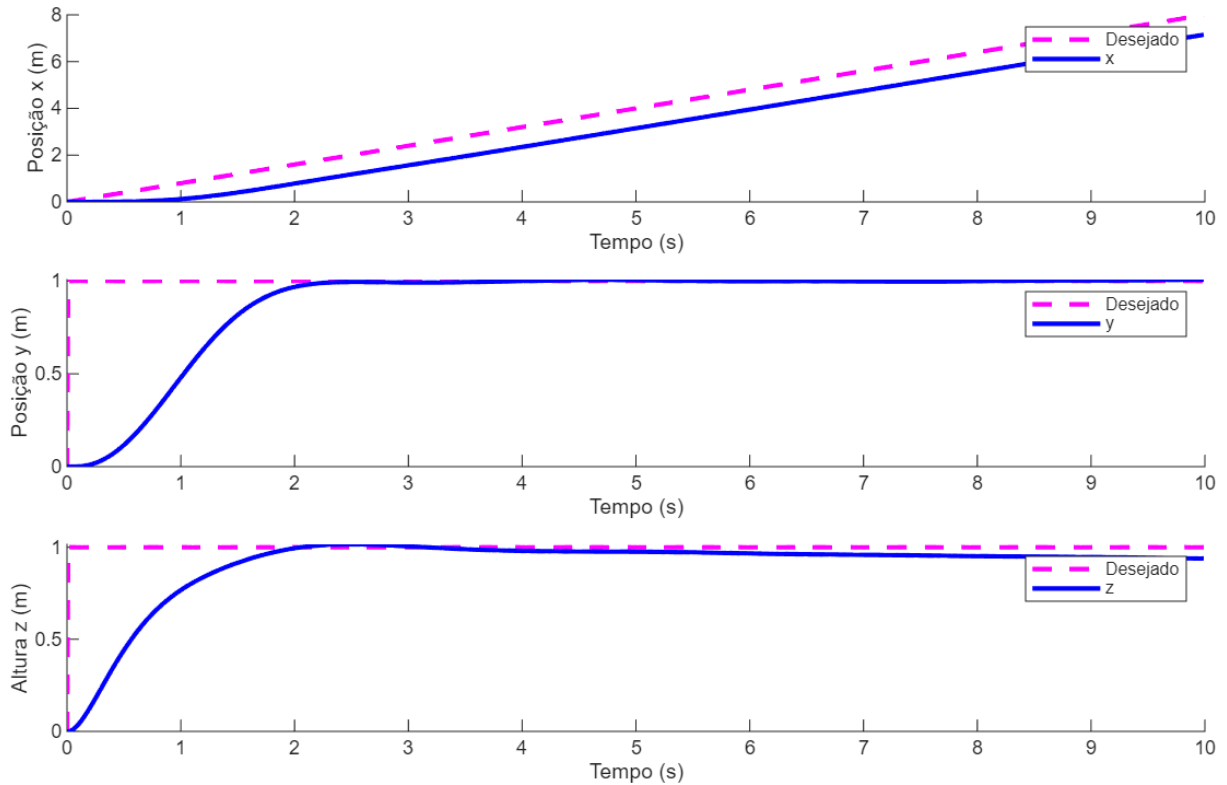
A figura 22(a) ilustra a trajetória de referência (em rosa) e a trajetória real percorrida pelo veículo (em azul) no plano xy . Observa-se a fase transitória de subida e alinhamento, na qual o veículo parte do solo na origem $(0,0,0)$ e se desloca gradativamente até atingir a coordenada de referência em $y = 1$ m. A partir deste ponto, o veículo

estabiliza a posição no eixo y e prossegue o deslocamento contínuo ao longo do eixo x até atingir a posição final de 8 m.

Já a Figura 22(b) evidencia a trajetória tridimensional do veículo, destacando o deslocamento no eixo z . Observa-se que o veículo parte da condição inicial no solo e sobe gradativamente, enquanto a posição no eixo y se desloca no eixo positivo até atingir a trajetória retilínea ao longo do eixo x .

Na Figura 23 são mostradas as respostas temporais das posições x , y e z . Além disso, a Tabela 10 apresenta os valores obtidos para cada variável. Observa-se que no eixo x , no instante inicial, entre 0 e 1 segundo, o veículo apresenta um atraso. A partir desse instante, o sistema começa a realizar correções sem apresentar sobressinal e, após 5 segundos, atinge a estabilidade, com erro próximo de zero.

Figura 23 – Resposta ao degrau somente da posição (x, y e z) para o cenário em linha reta.



Fonte: Do autor.

Tabela 10 – Valores do desempenho para controle de posição

Eixo	M_p (%)	t_s (s)	e_{ss} (m)
x	0,00	5,00	0,0044
y	1,02	2,11	0,0001
z	2,04	2,76	0,0189

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados obtidos via simulação no MATLAB com base no critério de desempenho PID da Tabela 2.

Para o eixo y , no intervalo entre 0 e 2,5 segundos, a aeronave apresenta um movimento ao longo do eixo positivo. Após esse período, observa-se um leve sobressinal, cujo resultado apresentou uma melhoria de 79,6% em relação ao obtido pelo autor. Quanto ao tempo de acomodação, o resultado obtido foi 2,89 segundos melhor que o apresentado pelo autor. Além disso, o erro permaneceu próximo de zero. Dessa forma, o comportamento apresentado atende ao critério estabelecido.

Para o eixo z , a aeronave inicia o deslocamento a partir do solo até atingir a altura de 1 metro, apresentando um comportamento mais agressivo em relação aos eixos x e y . Observa-se um pequeno sobressinal em aproximadamente 2,5 segundos, cujo resultado apresentou uma melhoria de 59,2% em relação ao obtido pelo autor. Além disso, o tempo de acomodação apresentou uma melhoria de 2,24 segundos em relação ao resultado de referência. Após o instante de 4 segundos, o sistema permanece próximo da referência. No entanto, após 10 segundos, observa-se uma pequena perda de altitude, decorrente do acoplamento desse eixo com os ângulos ϕ e θ . Isso ocorre porque, ao se movimentar para frente, esses ângulos também sofrem alterações, modificando o empuxo aplicado à aeronave. Apesar desse pequeno erro, a aeronave permanece dentro dos critérios estabelecidos.

A resposta dos ângulos de atitude é apresentada na Figura 24, bem como a Tabela 11 para os valores do desempenho. Inicialmente, para o ângulo ϕ , no intervalo de 0 a 0,5 segundo, a aeronave realiza um movimento para a direita até atingir o ângulo máximo, apresentando um sobressinal acima do estabelecido. Entre 0,5 e 1,5 segundo, desloca-se para a esquerda até atingir o ângulo mínimo e, entre 1,5 e 3 segundos, move-se novamente para a direita. Após esse instante, a correção de posição para o eixo y já está alinhada e com uma melhoria no tempo de acomodação de 1 segundo e erro próximo de erro, atendendo parcialmente ao critério estabelecido

Tabela 11 – Valores do desempenho para controle de atitude

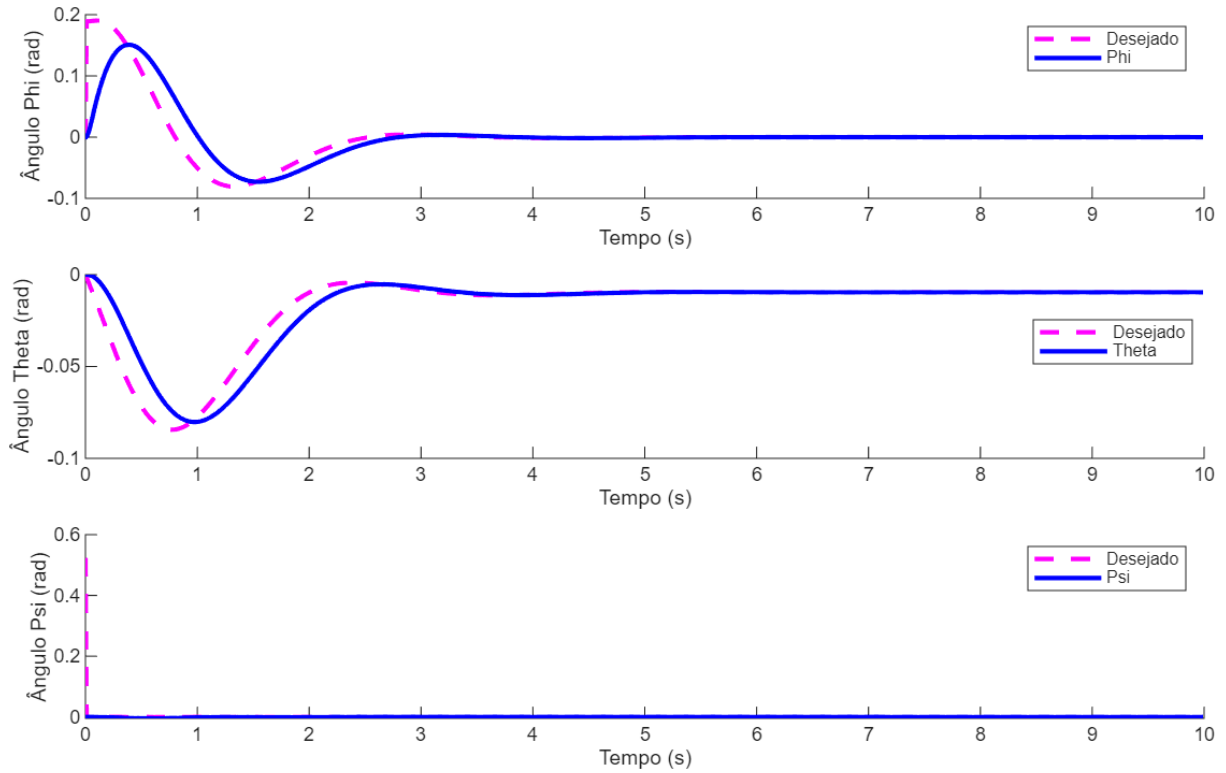
Ângulo	M_p (%)	t_s (s)	e_{ss} (rad)
ϕ	15,00	4,00	0,0000
θ	7,10	4,00	0,0000
ψ	0,00	0,00	0,0000

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados obtidos via simulação no MATLAB com base no critério de desempenho PID da Tabela 3.

Para o ângulo θ , entre 0 e 1 segundo, o veículo se inclina para frente, atingindo o ângulo máximo negativo. Entre 1 e 4 segundos, inclina-se para trás para finalizar a correção ao longo do eixo x , a fim de manter a trajetória. O sobressinal negativo apresentou um valor acima da referência. O tempo de acomodação permaneceu dentro da faixa estabelecida, enquanto o erro foi nulo. Dessa forma, o comportamento apresentado atende parcialmente aos critérios estabelecidos.

Para o ângulo ψ , a referência do sinal foi definida como 0 rad. Dessa forma, o sistema manteve o veículo no ângulo desejado, sem sobressinal, com tempo de acomodação

Figura 24 – Resposta ao degrau zero somente dos ângulos (ϕ , θ e ψ) para o cenário em linha reta.



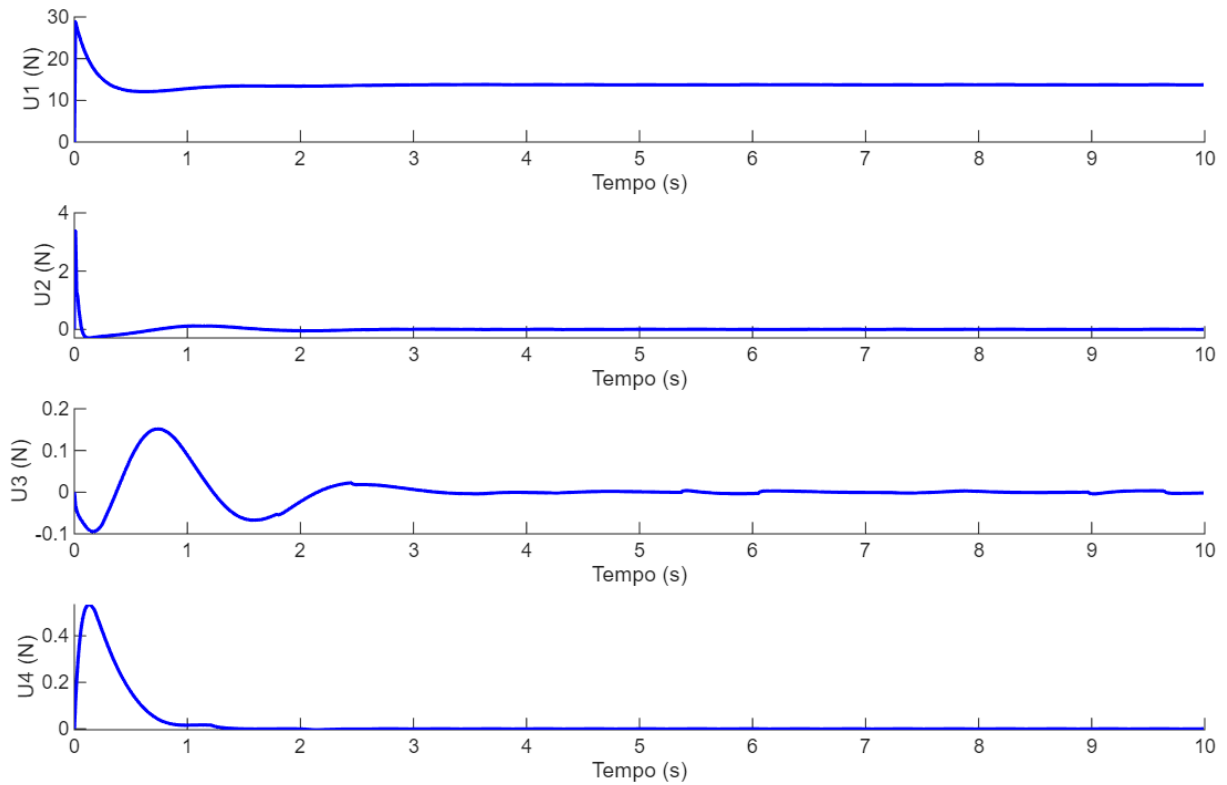
Fonte: Do autor.

e erro nulos, permanecendo dentro dos valores especificados.

Na Figura 25 mostra os sinais de controle gerados pelo controlador PID. Observa-se que o sinal U_1 , responsável pelo empuxo total gerado pelos rotores, apresenta um pico inicial associado à necessidade de elevar o veículo até a altitude desejada. Após essa fase transitória, o sinal converge para um valor aproximadamente constante, correspondente ao empuxo necessário para compensar a ação da gravidade e manter a aeronave em voo estacionário.

Já os sinais U_2 , U_3 e U_4 , associados aos momentos de rolagem, arfagem e guinada, apresentam pequenas variações apenas durante os instantes iniciais da simulação. Essas oscilações decorrem das correções necessárias para eliminar os erros iniciais de posição e atitude. Após a estabilização do sistema, os sinais convergem para valores próximos de zero, evidenciando que não são necessárias ações corretivas significativas para manter o movimento especificado. A ausência de oscilações persistentes, juntamente com a rápida estabilização dos sinais de controle, indica que os ganhos do controlador PID foram adequadamente ajustados, produzindo esforços compatíveis com uma operação estável do VANT. A Tabela 12 apresenta os valores dos índices IAE e ITAE obtidos durante o seguimento da trajetória em linha reta.

Figura 25 – Resposta do sistema para ação de controle do PID



Fonte: Do autor.

Tabela 12 – Índices de desempenho para a trajetória em linha reta.

Variável	IAE	ITAE
x	7,8067	41,3620
y	1,1101	0,9655
z	0,9415	2,2289
ϕ	0,0915	0,0813
θ	0,0323	0,0375
ψ	0,0087	0,0172
p	0,0473	0,0604
q	0,0080	0,0083
r	0,0027	0,0029

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados obtidos via simulação no MATLAB.

Como discutido anteriormente, a trajetória retilínea constitui o cenário mais simples dentre os testes realizados, uma vez que o veículo realiza deslocamento predominante ao longo do eixo longitudinal, mantendo as demais coordenadas praticamente constantes. Dessa forma, espera-se naturalmente que a maior parcela do erro acumulado esteja associada à variável responsável pelo movimento principal da aeronave.

Observa-se que os maiores valores de IAE e ITAE foram obtidos para a posição x , com valores de 7,8067 e 41,3620, respectivamente. Esse resultado era esperado, visto

que a referência aplicada nesse eixo corresponde a uma trajetória em rampa, exigindo acompanhamento contínuo do controlador durante todo o período de simulação.

Por outro lado, as posições y apresentou índices significativamente menores. Como essa variável possui referências constantes, o controlador necessita atuar principalmente durante o período transitório inicial, reduzindo consideravelmente o erro acumulado ao longo do voo. Já na posição z , o ITAE apresentou um valor mais elevado. Esse comportamento está associado à leve queda de altitude observada, resultado do acoplamento existente nesse eixo com os ângulos ϕ e θ . Isso ocorre porque, para que o veículo realize a inclinação necessária para o deslocamento longitudinal, há atuação direta desses ângulos, o que impacta momentaneamente a sustentação.

De forma semelhante, os ângulos de atitude apresentaram valores extremamente reduzidos para ambos os índices. Os baixos valores observados para ϕ , θ e ψ indicam que as malhas internas de controle permaneceram próximas de suas referências durante toda a operação, exigindo pequenas correções para manutenção da estabilidade do veículo.

4.1.2 Trajetória Circular

A avaliação do desempenho de controladores aplicados a veículos aéreos frequentemente envolve a utilização de trajetórias circulares descritas. Esse tipo de trajetória é amplamente empregado na literatura por permitir analisar simultaneamente a capacidade de rastreamento da referência, o comportamento dinâmico do veículo durante movimentos contínuos. Exemplos disso podem ser encontrados nos trabalhos de [Madebo, Abdissa e Lemma \(2024\)](#), [Najm e Ibraheem \(2019\)](#), [Luis e Ny \(2016\)](#) e [Lima et al. \(2015\)](#), nos quais essas trajetórias são utilizadas para a validação de estratégias de controle.

Neste trabalho, optou-se por utilizar a formulação proposta por [Luis e Ny \(2016\)](#) e [Baharuddin e Basri \(2023\)](#), preservando-se a estrutura original das equações utilizadas pelos autores. Entretanto, o raio da trajetória foi modificado para 2 m, em substituição ao valor originalmente empregado. Essa modificação foi realizada com o objetivo de representar uma condição de voo mais próxima de aplicações reais. Dessa forma, a trajetória circular é dada por

$$\begin{cases} x_d(t) = 2 \sin(2\pi 0.05 t) \\ y_d(t) = 2 \cos(2\pi 0.05 t) \\ z_d(t) = 1 \\ \psi_d(t) = 50t \end{cases} \quad (4.4)$$

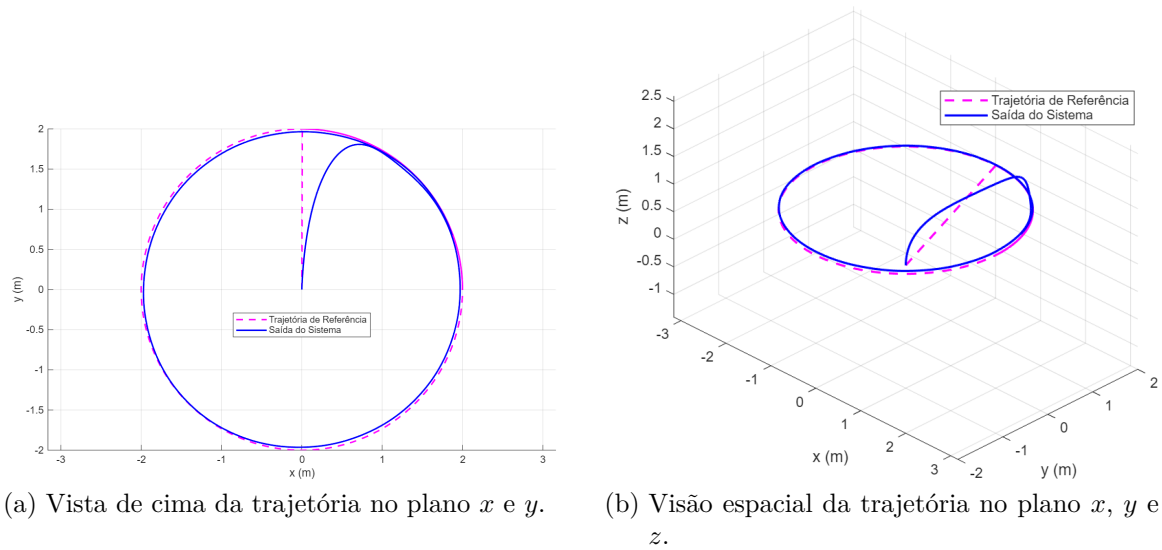
em que $x_d(t)$, $y_d(t)$ e $z_d(t)$ representam as coordenadas de referência da posição do VANT no espaço, enquanto $\psi_d(t)$ corresponde à referência do ângulo de guinada.

Com o objetivo de estabelecer uma referência para a análise dos resultados obtidos neste trabalho, serão considerados os índices de desempenho reportados por [Baharuddin e Basri \(2023\)](#) para o rastreamento de uma trajetória circular. Os valores apresentados pelos

autores serão utilizados como parâmetro de comparação e contextualização dos resultados obtidos neste trabalho, especialmente quanto ao comportamento do sobressinal, do tempo de subida e do tempo de acomodação.

A representação espacial do movimento executado pelo VANT é apresentada na Figura 26, que reúne as visualizações bidimensional e tridimensional da trajetória realizada.

Figura 26 – Simulação do movimento circular utilizando o controlador PID.

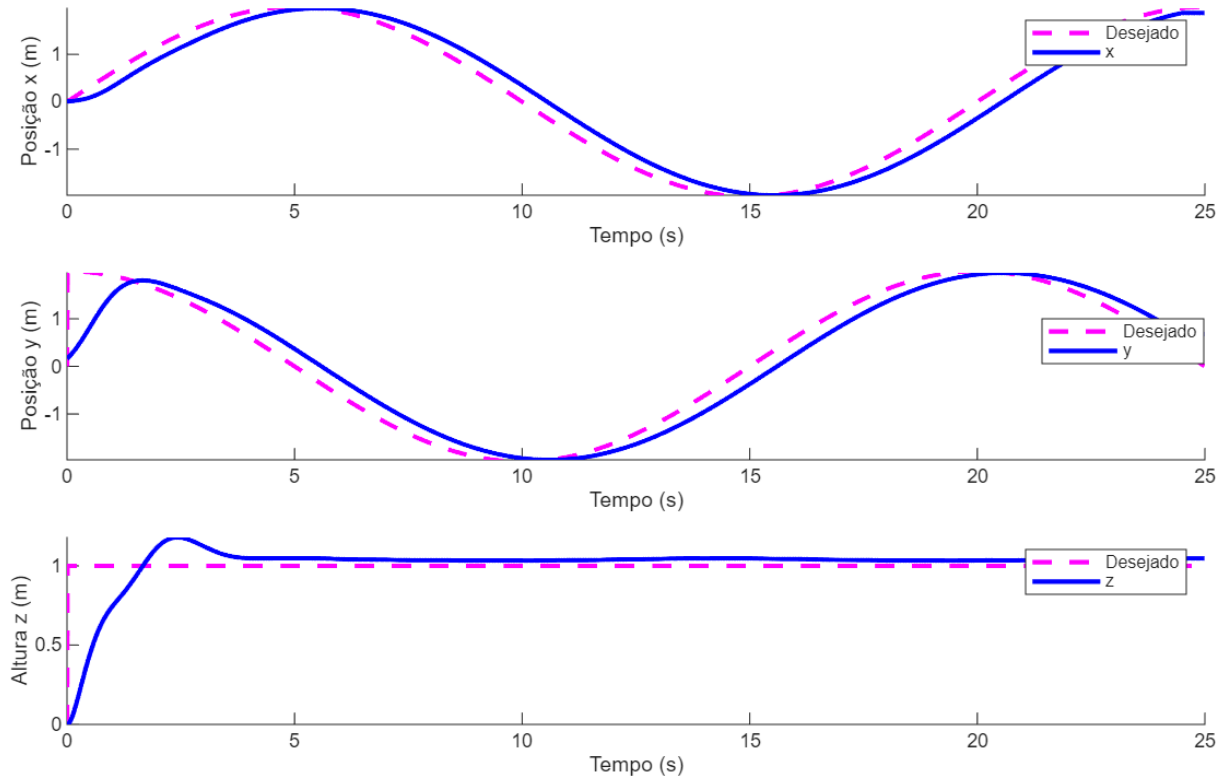


Fonte: Do autor.

Diferentemente dos ensaios baseados em sinais de degrau, a trajetória circular impõe um desafio adicional ao sistema de controle, uma vez que as referências variam continuamente ao longo do tempo. Consequentemente, o controlador deve atuar de forma permanente para minimizar os erros de posição e orientação durante todo o percurso.

Na Figura 27, é apresentada a evolução temporal das posições x , y e z durante a execução da trajetória. Observa-se que, no eixo x , o veículo apresenta atraso e defasagem em relação à referência, decorrentes da dinâmica mais lenta desse eixo. Ao mesmo tempo, verifica-se a ausência de sobressinal, correspondendo a uma diferença de 86,44% em relação à referência de [Baharuddin e Basri \(2023\)](#). Além disso, o sistema não se estabiliza em um valor final devido à correção contínua necessária para acompanhar a trajetória. Como o tempo de simulação considerado foi inferior ao utilizado pelos autores, o tempo de acomodação também apresentou um valor menor. Por fim, o tempo de subida, definido como o intervalo entre o instante inicial e o primeiro valor máximo positivo, apresentou uma diferença de 0,26 segundos em relação à referência, permanecendo dentro dos limites especificados.

Figura 27 – Resposta senoidal na posição x , cossenoidal na posição y e degrau para a posição z na trajetória circular



Fonte: Do autor.

Tabela 13 – Valores do desempenho para posição na trajetória circular

Eixo	M_p (%)	t_r (s)	t_s (s)
x	0,00	4,24	40,00
y	0,00	1,54	40,00
z	16,0	1,44	10,04

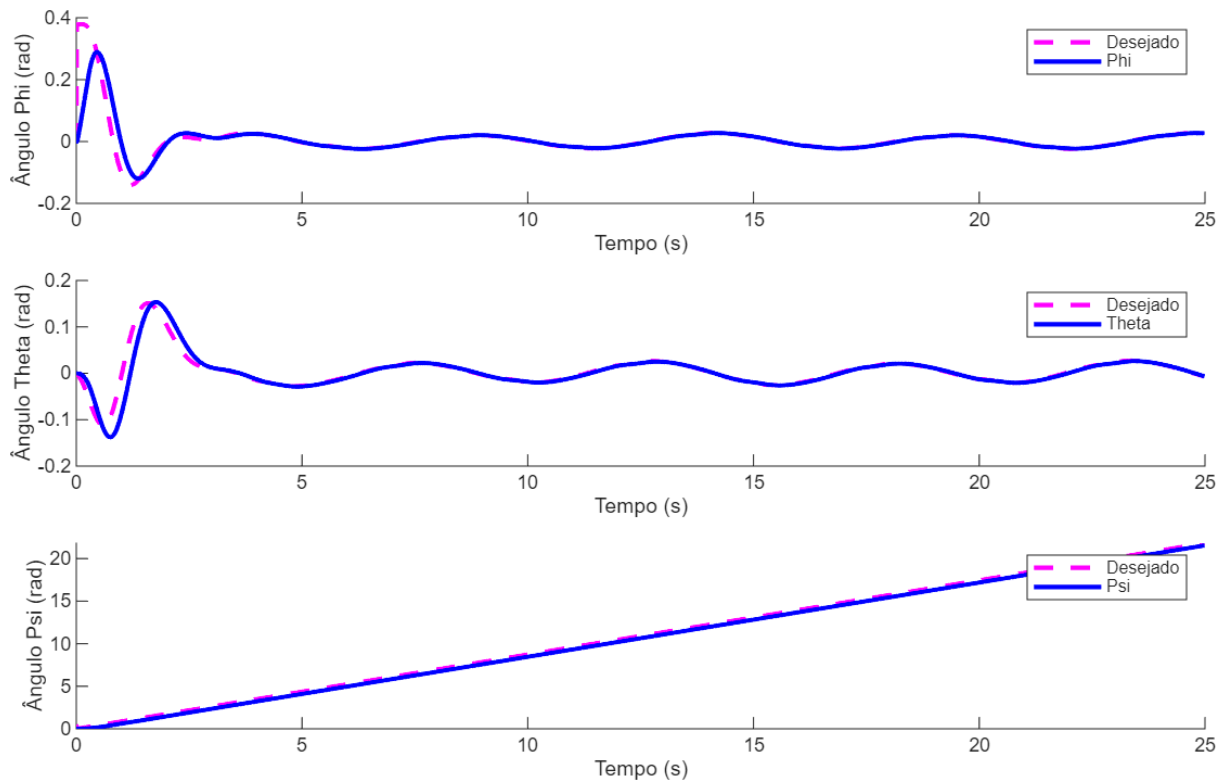
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos resultados obtidos via simulação no MATLAB.

Para a posição y , o veículo inicia o movimento no instante zero e, aos 1,54 segundos, passa a acompanhar a trajetória desejada sem apresentar sobressinal. Dessa forma, observa-se uma melhoria de 0,92 segundos no tempo de subida, enquanto o sobressinal apresentou uma diferença de 44,94% em relação à referência. Além disso, o tempo de acomodação foi inferior ao da referência, em decorrência do menor tempo de simulação considerado.

Para a posição z , o veículo parte do solo no instante inicial e atinge a altura máxima aos 2,2 segundos, apresentando um sobressinal ligeiramente superior ao da referência de Baharuddin e Basri (2023). Além disso, a resposta apresentou maior velocidade, com uma melhoria de 1,63 segundos no tempo de subida. No entanto, o tempo de acomodação foi superior ao da referência. Dessa forma, apenas o tempo de subida atendeu ao critério estabelecido.

Na Figura 28, apresenta-se os comportamentos dos ângulos ϕ , θ e ψ ao longo do tempo. Observa-se que, no ângulo ϕ , o sistema inicia em 0 segundo e atinge o valor máximo entre em 0,5 segundos, sem apresentar sobressinal. Em seguida, entre 0,5 e 4 segundos, realiza correções sucessivas e, após esse intervalo, o erro torna-se nulo. Esse comportamento oscilatório inicial deve-se ao fato de o veículo partir da inércia para atingir a posição correta, realizando inicialmente uma contribuição maior para a direita e, em seguida, uma contribuição menor para a esquerda. Após esse processo, o sistema se estabiliza, passando a acompanhar a referência imposta pelo controlador.

Figura 28 – Respostas senoidais para os ângulos ϕ e θ e a rampa para o angulo ψ



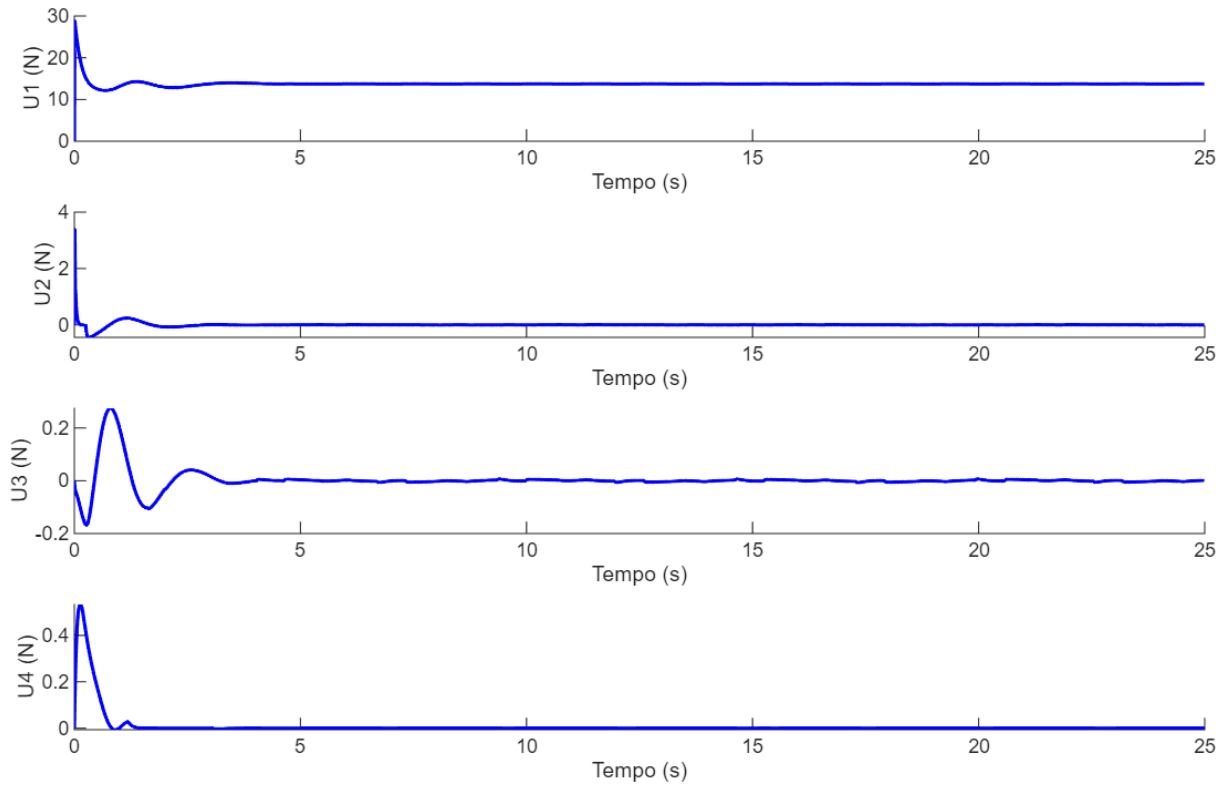
Fonte: Do autor.

Para o ângulo θ , entre 0 e 3 segundos, não ocorre sobressinal, sendo observadas apenas correções na resposta. Após esse intervalo, o erro torna-se nulo. Entre 0 e 0,73 segundos, a aeronave realiza um deslocamento para frente e, entre esse instante e 1,63 segundos, desloca-se para trás com maior intensidade. Posteriormente, o sistema se estabiliza, seguindo a referência do controlador de posição no eixo x . Para o ângulo ψ , não houve presença de sobressinal, o erro permaneceu próximo de zero e o tempo de acomodação foi equivalente ao tempo de simulação.

Na Figura 29 mostra os sinais de controle gerados pelo controlador PID. Observa-se que o sinal U_1 , associado ao empuxo total produzido pelos rotores, apresenta um pico inicial responsável por elevar o veículo até a altitude de operação. Após essa etapa, o sinal converge para um valor aproximadamente constante em torno de 14, correspondente ao

empuxo necessário para equilibrar o peso da aeronave em voo estabilizado.

Figura 29 – Resultado da simulação para o cenário de teste



Fonte: Do autor.

Os sinais U_2 , U_3 e U_4 , relacionados aos ângulos ϕ , θ e ψ , respectivamente, apresentam transientes suaves durante os instantes iniciais da simulação, período em que o veículo se aproxima da trajetória desejada. Após a estabilização, esses sinais permanecem próximos de zero e não apresentam oscilações nem indícios de saturação significativa. Esse comportamento sugere que os esforços de controle permanecem compatíveis com uma eventual implementação prática em sistemas embarcados e atuadores reais.

A Tabela 14 apresenta os índices de desempenho obtidos durante o seguimento da trajetória circular. Observa-se que os valores das posições x e y são maiores devido ao atraso entre a referência e o sinal de saída do sistema. Como a dinâmica para a posição z é mais lenta, o valor do ITAE torna-se mais elevado, já que esse critério penaliza os erros ao longo do tempo. Já para a posição z , o controlador apresentou dificuldade em zerar o erro. Embora o erro seja pequeno, como indica o valor do IAE, ele se torna maior ao longo do tempo, ainda assim, o sistema manteve-se em torno da referência.

Já para os ângulos ϕ e θ , os baixos valores dos índices indicam que a malha responsável pela estabilidade apresentou menor esforço de atuação ao longo do voo. Esse comportamento está associado ao fato de que o controlador realiza movimentos mais significativos apenas nos instantes iniciais, quando o veículo parte do solo e atinge a altura de aproximadamente 1 metro, passando então a executar correções mais suaves para manter

Tabela 14 – Índices de desempenho para a trajetória circular.

Variável	IAE	ITAE
x	8,6502	175,1800
y	10,5920	195,2500
z	2,3557	32,0600
ϕ	0,2083	0,8766
θ	0,1314	0,9323
ψ	10,6150	213,3300
p	0,1077	0,5106
q	0,0853	0,5173
r	0,1145	0,4846

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos resultados obtidos via simulação no MATLAB.

a estabilidade durante os deslocamentos laterais e as pequenas variações de inclinação. Em contrapartida, o ângulo ψ , conforme observado na Figura 28, apresenta um comportamento linear onde o erro nunca é zerado, pois o controlador tenta corrigir continuamente o seu valor. O índice IAE demonstra a existência de um erro considerável que, por não ser zerado, acumula-se e torna-se elevado ao longo do tempo, como evidenciado pelo valor do ITAE.

5 Filtro de Kalman

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos do filtro de Kalman. Inicialmente, discute-se o problema de estimação de estados na Seção 5.1. Em seguida, apresenta-se a formulação do filtro de Kalman para sistemas lineares na Seção 5.2. Posteriormente, são abordadas suas extensões para sistemas não lineares na Seção 5.3. Na sequência, é apresentada a aplicação do filtro de Kalman ao modelo do VANT na Seção 5.4. Por fim, é introduzido o índice de desempenho RMSE, utilizado para quantificar a qualidade das estimativas na Seção 5.5.

5.1 Problema de Estimação de Estados

A estimação de estados consiste em um conjunto de algoritmos que utilizam o modelo dinâmico do sistema e as medições disponíveis para estimar os estados do sistema, bem como as incertezas associadas tanto ao modelo matemático quanto às medições (FERREIRA, 2015).

Considere um sistema dinâmico discreto no tempo, possivelmente não linear, descrito na forma de espaço de estados como

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k-1), \quad (5.1)$$

$$y_k = h(x_k, k) + v_k, \quad (5.2)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, as funções não lineares do modelo de processo e de observação. Os vetores do sistema são definidos por $x_k \in \mathbb{R}^n$ (vetor de estados), $u_{k-1} \in \mathbb{R}^p$ (entrada de controle conhecida), $w_{k-1} \in \mathbb{R}^q$ (ruído de processo representando perturbações e incertezas do modelo), $y_k \in \mathbb{R}^m$ (vetor de medições) e $v_k \in \mathbb{R}^m$ (ruído de medição associado às observações).

A Equação (5.1) descreve a evolução dinâmica do sistema ao longo do tempo, indicando que o estado atual depende do estado anterior, das entradas aplicadas e das incertezas presentes no modelo. Já a Equação (5.2) representa a obtenção das medições disponíveis a partir do estado real do sistema, considerando a influência do ruído de medição.

As abordagens baseadas na filtragem Bayesiana são compostas por duas etapas principais. Na etapa de predição, utiliza-se o modelo matemático para estimar o próximo estado do sistema. Em seguida, na etapa de atualização, essa estimativa é corrigida com base na nova medição disponível, produzindo uma estimativa mais precisa do estado do sistema (TEIXEIRA; TÔRRES; AGUIRRE, 2010).

5.2 Filtro de Kalman para Sistemas Lineares

Quando o sistema é linear, sua representação em espaço de estados (5.1)-(5.2) pode ser reescrita como

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, \quad (5.3)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k. \quad (5.4)$$

em que $A_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de transição de estados que caracteriza a dinâmica natural do sistema, $B_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ incorpora o efeito das entradas conhecidas $u_{k-1} \in \mathbb{R}^p$, $G_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ modela a influência do ruído de processo $w_{k-1} \in \mathbb{R}^q$ sobre os estados, e $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de observação que relaciona o vetor de estados $x_k \in \mathbb{R}^n$ ao vetor de medições $y_k \in \mathbb{R}^m$.

Assume-se também que, para todo $k \geq 1$, os ruídos w_{k-1} e $v_k \in \mathbb{R}^m$ são vetores aleatórios brancos, Gaussianos, de média nula e mutuamente independentes, com matrizes de covariância conhecidas $Q_{k-1} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ e $R_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, respectivamente. O estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é assumido como um vetor aleatório Gaussiano com média $\hat{x}_{0|0}$ e covariância $P_{0|0}^{xx} \triangleq E[(x_0 - \hat{x}_{0|0})(x_0 - \hat{x}_{0|0})^T]$, ambas conhecidas.

O filtro de Kalman é um algoritmo recursivo que estima variáveis de estado a partir de um modelo matemático e um conjunto de medições ruidosas. Esse algoritmo é composto por duas etapas:

Etapas de Predição: nesta etapa, apenas o modelo matemático do sistema é utilizado para estimar o estado no instante seguinte e a correspondente matriz de covariância associada à estimativa. A etapa de predição é dada por

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}, \quad (5.5)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}^{xx}A_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T. \quad (5.6)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = C_k\hat{x}_{k|k-1}, \quad (5.7)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = C_k P_{k|k-1}^{xx} C_k^T + R_k, \quad (5.8)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{xx} C_k^T. \quad (5.9)$$

Etapas de Atualização: a estimativa é corrigida incorporando uma nova medição. Esta etapa é descrita por

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} (P_{k|k-1}^{yy})^{-1}. \quad (5.10)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \hat{y}_{k|k-1}), \quad (5.11)$$

$$P_{k|k}^{xx} = P_{k|k-1}^{xx} - K_k P_{k|k-1}^{yy} K_k^T. \quad (5.12)$$

5.3 Filtragem de Kalman para Sistemas Não Lineares

Quando o sistema é não linear (5.1)–(5.2), a densidade de probabilidade a posteriori não pode ser representada por uma distribuição Gaussiana. Como consequência, a média e a covariância não caracterizam completamente essa distribuição, impedindo o uso direto do algoritmo do Filtro de Kalman clássico (TEIXEIRA; TÔRRES; AGUIRRE, 2010). Para contornar essa limitação, utilizam-se diferentes mecanismos para linearizar as funções não lineares.

5.3.1 Filtro de Kalman Estendido (EKF)

Como as funções $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são não lineares, as equações matriciais do Filtro de Kalman clássico não podem ser aplicadas diretamente. Assim, a estratégia adotada consiste em linearizar o sistema em torno da estimativa atual, permitindo utilizar a mesma estrutura recursiva apresentada para o caso linear (NEPOMUCENO, 2025).

Na etapa de predição é dada por

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1), \quad (5.13)$$

A linearização do modelo em torno da estimativa atual por meio da expansão de Taylor de primeira ordem, obtendo-se a matriz Jacobiana é dada por

$$A_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}}. \quad (5.14)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = A_{k-1} P_{k-1|k-1}^{xx} A_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T. \quad (5.15)$$

Na etapa de atualização, a função de observação $h(\cdot)$ é não linear sendo necessária sua linearização. A matriz de observação aproximada é obtida por

$$C_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}}. \quad (5.16)$$

As equações clássicas do Filtro de Kalman podem ser empregadas para calcular o ganho de Kalman, corrigir a estimativa dos estados e atualizar a matriz de covariância do erro (5.10)–(5.12).

Embora seja uma das técnicas mais utilizadas para estimação em sistemas não lineares, o desempenho do EKF depende diretamente da qualidade da linearização realizada. Em sistemas fortemente não lineares, os erros introduzidos por essa aproximação podem degradar a qualidade das estimativas e, em alguns casos, levar à divergência do filtro, conforme discutido por Teixeira, Tôrres e Aguirre (2010). Ainda assim, devido à sua eficiência computacional e ao bom desempenho apresentado em diversas aplicações práticas.

5.4 Aplicação do Filtro de Kalman Estendido ao Modelo do VANT

Nesta seção, apresenta-se a aplicação do Filtro de Kalman Estendido (EKF) ao modelo dinâmico do quadricóptero. Para manter a coerência simbólica com a modelagem apresentada nas Equações (2.43)–(2.46), o estado da aeronave é representado por um vetor de 12 variáveis de estado

$$x = [x \ y \ h \ u \ v \ w \ \phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r]^T \in \mathbb{R}^{12}. \quad (5.17)$$

O vetor de entradas de controle $u_c \in \mathbb{R}^4$ engloba a força de empuxo total F e os momentos aplicados nos eixos do VANT $(\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$

$$u_c = [F \ \tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T. \quad (5.18)$$

5.4.1 Modelo Não Linear em Tempo Contínuo

Substituindo as componentes de aceleração gravitacional e a força de empuxo na dinâmica translacional, a função vetorial do modelo não linear em tempo contínuo $\dot{x}(t) = f(x(t), u_c(t))$ é dada por

$$f(x, u_c) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi u + (s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi)v + (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi)w \\ c\theta s\psi u + (s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi)v + (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi)w \\ s\theta u + s\phi c\theta v + c\phi c\theta w \\ rv - qw - g\sin\theta \\ pw - ru + g\cos\theta\sin\phi \\ qu - pv + g\cos\theta\cos\phi - \frac{F}{m} \\ p + s\phi\tan\theta q + c\phi\tan\theta r \\ c\phi q - s\phi r \\ \frac{s\phi}{c\theta} q + \frac{c\phi}{c\theta} r \\ \frac{J_y - J_z}{J_x} qr + \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr + \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq + \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

em que $s(\cdot)$ e $c(\cdot)$ denotam abreviadamente as funções seno e cosseno, m é a massa da aeronave, g é a aceleração da gravidade e J_x, J_y, J_z são os momentos de inércia nos eixos do corpo.

5.4.2 Discretização e Linearização do Modelo

Para a implementação do EKF no domínio discreto, adota-se o período de amostragem $T_s = 0,01$ s (100 Hz). A predição de estados é obtida via discretização por Euler, dada por

$$\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_{k-1|k-1} + T_s \cdot f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{c,k-1}). \quad (5.20)$$

A linearização da dinâmica é realizada calculando-se as matrizes Jacobianas em relação ao vetor de estados e ao vetor de entradas a cada instante de amostragem. A matriz Jacobiana do sistema $A_{k-1} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ é dada por

$$A_{k-1} = \left. \frac{\partial f(x, u_c)}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{c,k-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x} & \frac{\partial f_{12}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial r} \end{bmatrix}_{12 \times 12}, \quad (5.21)$$

a qual é discretizada para obter a matriz de transição de estados dada por

$$A_{d,k-1} = \mathbf{I}_{12} + T_s \cdot A_{k-1} = \mathbf{I}_{12} + 0,01 \cdot A_{k-1}. \quad (5.22)$$

A matriz Jacobiana em relação às entradas de controle $B_{k-1} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$ é dada por

$$B_{k-1} = \left. \frac{\partial f_c(x, u_c)}{\partial u_c} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{c,k-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ M^{-1} \end{bmatrix}_{12 \times 4}, \quad \text{com} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix}_{6 \times 4}. \quad (5.23)$$

5.4.3 Modelo de Medição

O modelo de observação relaciona o vetor de estados x_k ao vetor de medições y_k por meio de $y_k = Cx_k + v_k$. A matriz de observação $C \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ determina quais variáveis do estado são observadas pelos sensores embarcados:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{12 \times 12}. \quad (5.24)$$

A estrutura da matriz C indica que apenas as últimas seis variáveis do vetor de estados — os ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) e as velocidades angulares (p, q, r) — são medidas diretamente. Na aplicação prática considerada, essas medições são fornecidas exclusivamente pela unidade de medição inercial (IMU MPU-6050), não havendo medição direta das posições e velocidades translacionais via GPS.

5.4.4 Inicialização das Matrizes do EKF

Para a implementação do EKF, foi necessário definir as condições iniciais do vetor de estados e das matrizes de covariância. Seguindo a abordagem adotada por [Ries, Waltrich e Vaccari \(2024\)](#), essa inicialização foi realizada de forma estruturada, considerando as características físicas do sistema e dos sensores embarcados.

$$x_{k-1|k-1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (5.25)$$

Essa escolha implica assumir que, no instante inicial, o veículo encontra-se em repouso, sem deslocamento, sem velocidades lineares, sem orientação angular e sem velocidades angulares. Sendo a matriz de covariância $P_{k-1|k-1}$ do erro da estimação dada por

$$P_{k-1|k-1} = 0,1 \cdot I_{12}, \quad (5.26)$$

em que I_{12} é a matriz identidade de dimensão 12×12 .

Além disso, segundo [Ferreira \(2015\)](#), o ruído de medição pode ser obtido a partir da análise do histórico de dados fornecidos pelos sensores. Em contrapartida, o ruído de processo corresponde a uma grandeza desconhecida, cuja mensuração direta não é possível. A partir disso, define-se as matrizes de covariância R e Q , que representam, respectivamente, os ruídos de medição e de processo.

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_{pos}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{pos}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{giro}^2 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_{PN}^2 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & \sigma_{PN}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & 0 & \cdots & \sigma_{PN}^2 \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

$$Q_{k-1} = 2^{-8} \cdot I_{12}, \quad (5.27)$$

$$R_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & R_{cov} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

em que I_{12} é a matriz identidade de dimensão 12×12 , $\mathbf{0}_{6 \times 6}$ é uma matriz nula 6×6 e a matriz R_{cov} é definida por

$$R_{cov} = \text{diag} \left(8,82 \times 10^{-5}, 1,22 \times 10^{-4}, 2,62 \times 10^{-4}, 4,44 \times 10^{-7}, 2,88 \times 10^{-7}, 1,93 \times 10^{-7} \right). \quad (5.29)$$

5.5 Índice de Desempenho RMSE

Para avaliar a qualidade das estimativas fornecidas pelo EKF, foi utilizado o índice de desempenho conhecido como Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE, do inglês *Root Mean Square Error*). Essa métrica é amplamente empregada para quantificar a precisão das estimativas, por meio da comparação entre os valores estimados e os valores reais de referência ([NEPOMUCENO, 2025](#)).

O RMSE fornece uma medida global do erro de estimação, permitindo avaliar o quão próxima a estimativa se encontra do valor real do estado. Dessa forma, quanto menor

o valor desse índice, maior é a precisão do estimador. O RMSE é calculado como

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \hat{x}_k)^2} \quad (5.30)$$

em que x_k representa o valor real do estado no instante k , $\hat{x}_k$ corresponde ao valor estimado pelo filtro de Kalman e N representa o número total de amostras consideradas na análise.

6 Resultados do Filtro de Kalman

Neste capítulo, é apresentada a descrição do cenário utilizado para avaliar a implementação do filtro de Kalman na Seção 6.1. Em seguida, são apresentadas as estimativas de estado fornecidas pelo EKF na Seção 6.2.

6.1 Descrição do Cenário

Para avaliar a implementação do filtro EKF, foi definido um cenário de teste no qual o giroscópio e o acelerômetro deixam de fornecer medições confiáveis após um determinado instante de tempo. Essa condição representa situações que podem ocorrer em aplicações reais, como falhas de *hardware*, interrupções na comunicação entre os sensores e a unidade de processamento ou até mesmo o desligamento temporário dos dispositivos de medição, conforme descrito por Okada (2022). O objetivo é verificar se o VANT é capaz de manter a trajetória circular, apresentada anteriormente, mesmo diante da ocorrência de falhas nos sensores.

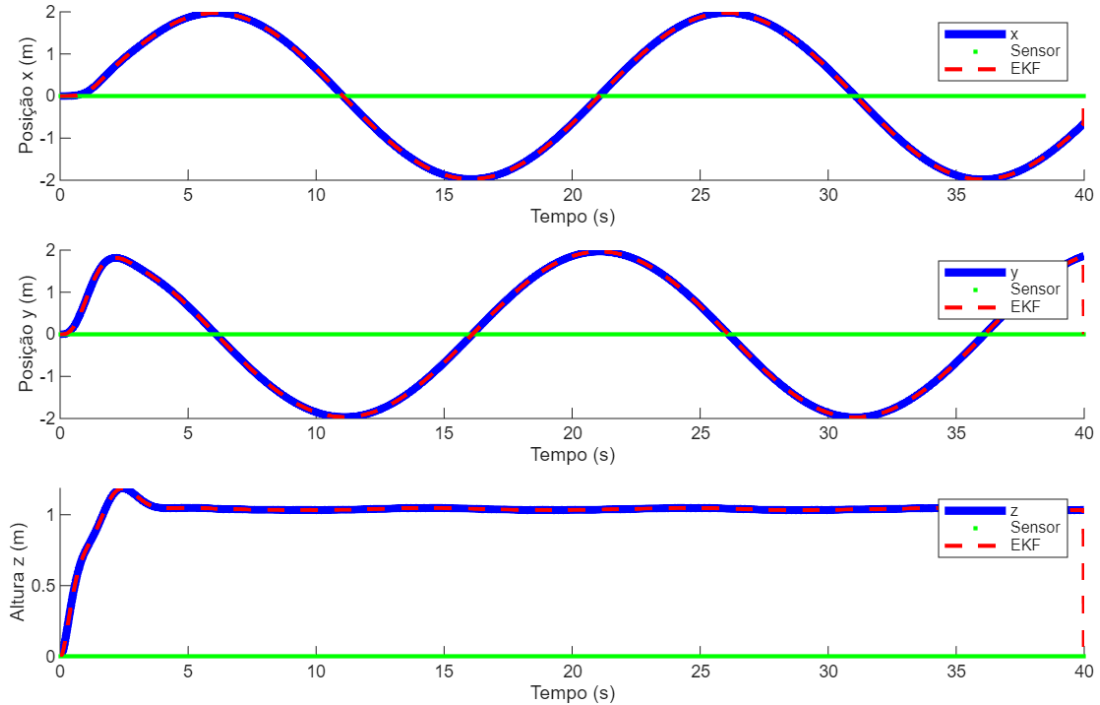
No primeiro cenário, a aeronave parte do solo e inicia o movimento desejado. Após $t = 5s$, ela atinge uma altura de 1 metro em relação ao solo. A partir desse instante, é simulada uma falha completa do sensor, representando a interrupção total do sinal de medição. Com isso, o sensor deixa de fornecer informações ao algoritmo de estimação, como se tivesse deixado de funcionar. No segundo cenário, considera-se uma falha parcial do sensor, na qual o dispositivo permanece operando, porém, a partir de $t = 1s$ após a decolagem, as medições passam a apresentar ruído de elevada amplitude, simulando uma degradação significativa da qualidade do sinal. Esse cenário permite avaliar a robustez do EKF diante de medições com baixa confiabilidade e analisar o impacto do aumento do ruído na qualidade das estimativas dos estados.

6.2 Estimativas de estado fornecida pelo EKF

6.2.1 Cenário 1: Falha nas Medições dos Sensores

Na Figura 30, apresenta-se a evolução temporal das posições reais e estimadas da aeronave. Observa-se que, durante todo o intervalo de simulação, o sensor (linha verde) não fornece informações de posição, uma vez que a aeronave não dispõe de um sensor de posicionamento, como um GPS. Assim, o EKF realiza apenas a etapa de predição, sem executar a etapa de atualização. Dessa forma, os estados estimados realizaram o movimento senoidais imposta nas entrada das posições x e y e degrau em z .

Figura 30 – Resposta do sistema para as posições reais da aeronave e estimadas pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 1. A linha azul representa a posição real, os pontos verdes correspondem às medições do sensor e a linha vermelha tracejada representa os estados estimados.



Fonte: Do autor.

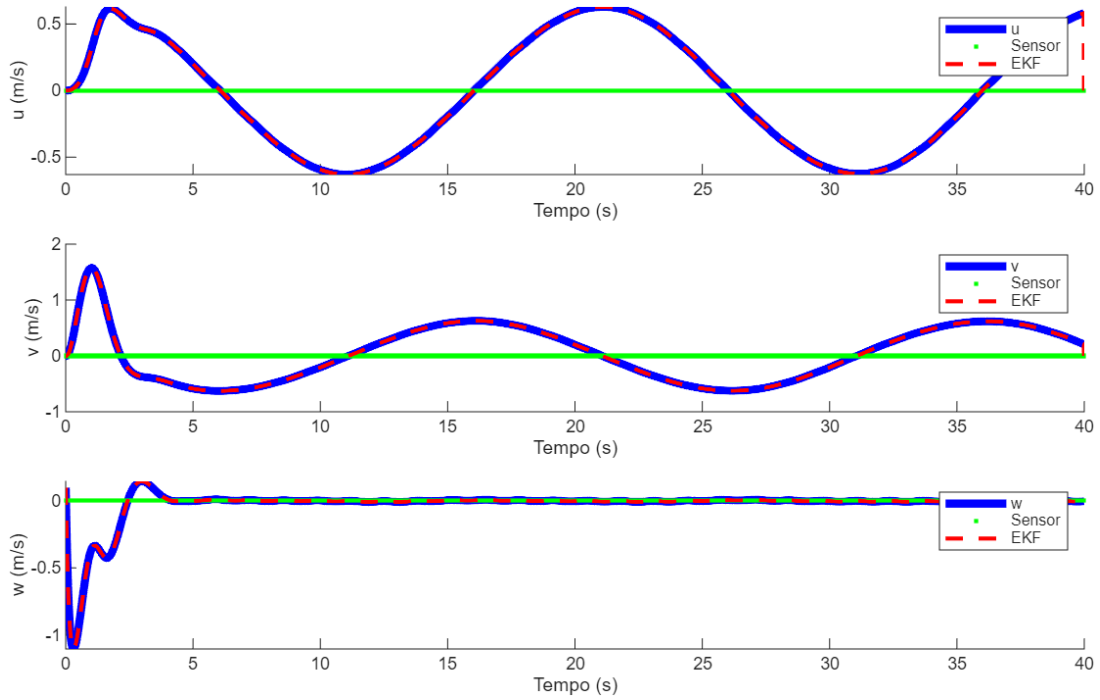
Comportamento semelhante pode ser observado na Figura 31, uma vez que, neste cenário, não há um sensor que forneça diretamente os valores das velocidades lineares. Dessa forma, o EKF passa a confiar predominantemente no modelo dinâmico do sistema.

Na Figura 32, observa-se que, durante os primeiros 5 segundos, o EKF utiliza as medições fornecidas pelo sensor, uma vez que a aeronave está executando a fase de decolagem e as informações de orientação estão disponíveis. Nesse intervalo, nota-se uma oscilação nos ângulos ϕ e θ , decorrente da correção das trajetórias por conta do controle PID. Já o ângulo ψ acompanha o movimento de guinada da aeronave durante a mudança de direção. Após esse período, ocorre a perda total das medições do sensor, representada pela linha verde, que passa a assumir valor nulo. Como consequência, o EKF passa a confiar predominantemente no modelo dinâmico do sistema para realizar a estimação dos estados.

Na Figura 33, é observado o mesmo comportamento, entretanto, para a velocidade angular r , verifica-se um pico inicial para $t < 1s$, decorrente da aceleração angular presente no início da manobra. Após essa fase transitória, o ângulo ψ passa a variar aproximadamente de forma linear, resultando em uma velocidade angular praticamente constante ao longo do restante da trajetória. Mesmo na ausência das medições do sensor, após $t = 5s$, o EKF continua estimando esse estado com base no modelo dinâmico do sistema.

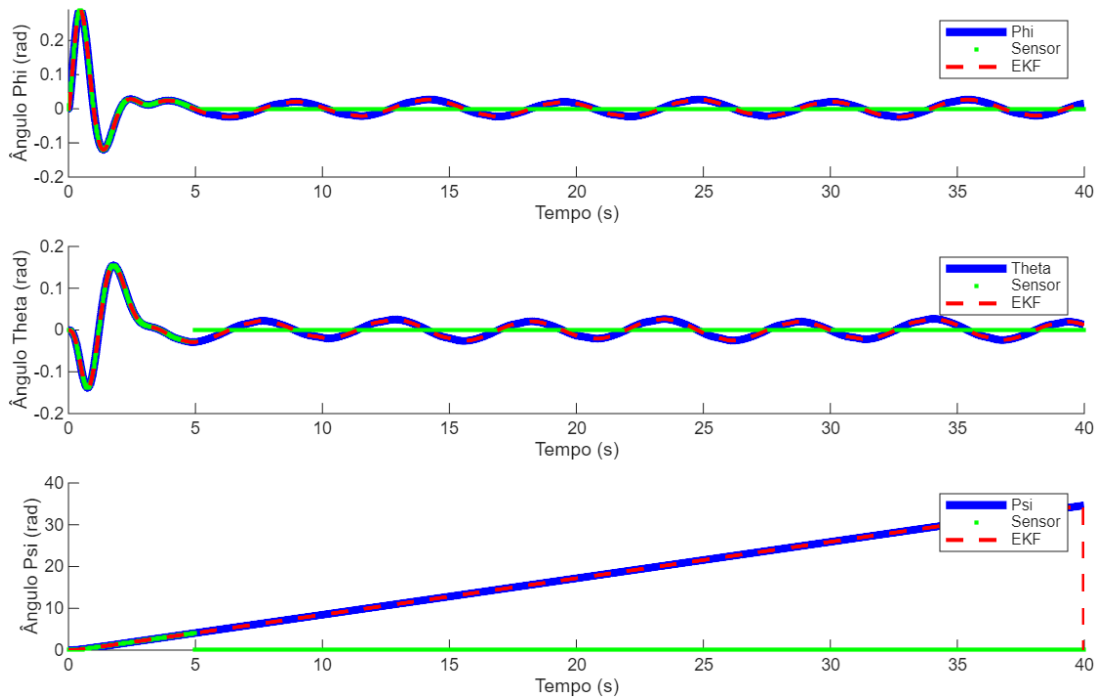
A Tabela 15 apresenta os valores do RMSE obtidos para cada estado estimado ao

Figura 31 – Resposta do sistema para as velocidades lineares da aeronave e estimadas pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 1.



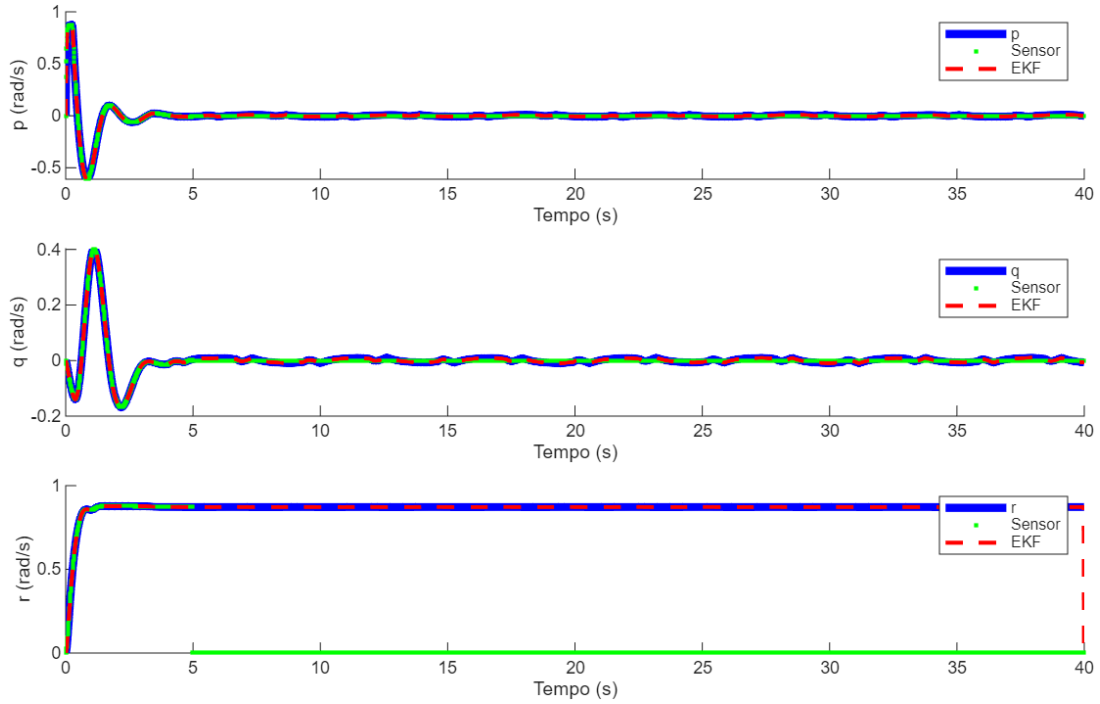
Fonte: Do autor.

Figura 32 – Resposta do sistema para os ângulos reais da aeronave e estimados pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 1.



Fonte: Do autor.

Figura 33 – Resposta do sistema para as velocidades angulares da aeronave e estimadas pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 1.



Fonte: Do autor.

longo de 40 segundos de simulação para o cenário 1. Observa-se que, para os estados x , y e z , os erros foram inferiores a 1 cm. Como a aeronave realiza um movimento com raio de 2 m, esses valores apresentam erros próximos de zero. Para as velocidades lineares, os erros foram inferiores a 0.3 cm/s, indicando também valores próximos de zero.

Para os ângulos ϕ e θ , os valores permaneceram próximos de zero, uma vez que, após os primeiros 5 segundos, o sistema passa a oscilar em torno desse valor. O mesmo não ocorre para o ângulo ψ , cujo erro se acumula ao longo do tempo, resultando em um RMSE mais elevado. Comportamento semelhante é observado para as velocidades angulares.

Tabela 15 – Valores RMSE obtido para cada estado estimado para o cenário 1.

Estado	RMSE
x	0,0026
y	0,0074
z	0,0041
u	0,0024
v	0,0011
w	0,0005
ϕ	0,0001
θ	0,0001
ψ	0,1369
p	0,0002
q	0,0002
r	0,0035

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos resultados obtidos via simulação no MATLAB.

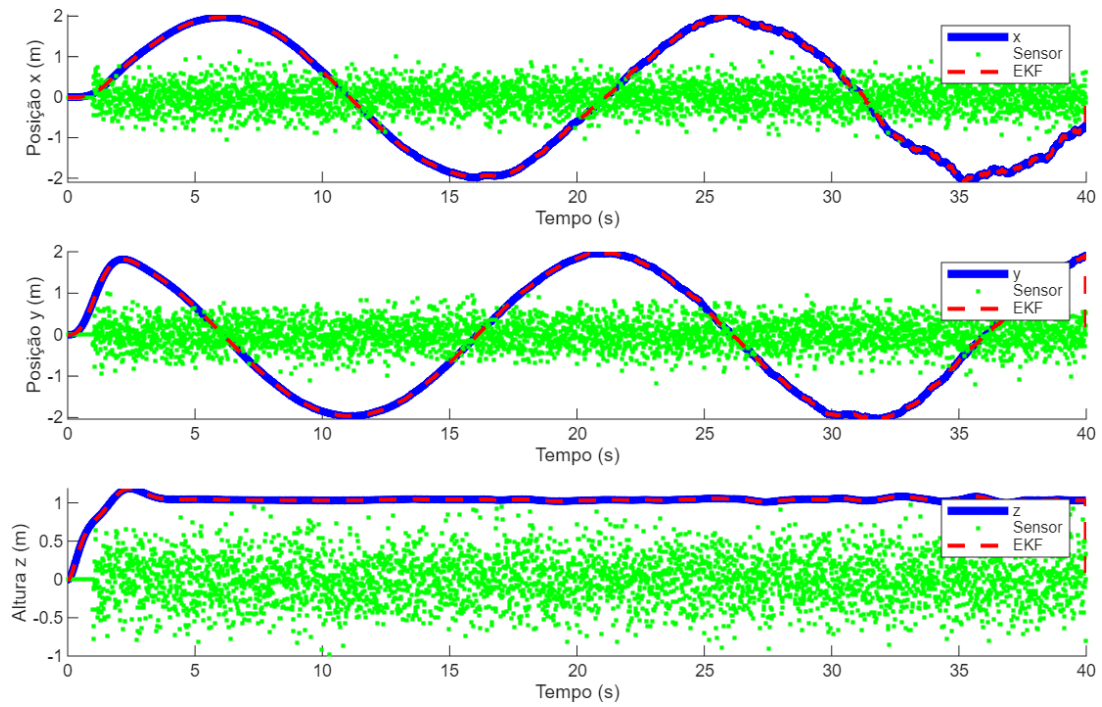
6.2.2 Cenário 2: Aumento no Ruído de Medição

Na Figura 34, observa-se que, entre os instantes de $t = 0$ e $t = 1s$, quando o veículo realiza a decolagem, não há informações do sensor de posição. Nesse intervalo, o EKF (linha tracejada em vermelho) estima as posições nos três eixos. Após esse instante, o veículo passa a operar na presença de uma falha caracterizada pela inserção de ruído elevado no sistema do VANT, simulando uma condição de degradação dos sensores, representada pela linha pontilhada em verde. Os valores reais das posições (x , y e z), representados pela linha azul, seguem a trajetória desejada, assim como os valores estimados pelo EKF. A partir de $t = 25s$, observa-se que o ruído passa a influenciar os estados estimados, gerando uma pequena deformação no sinal. Isso ocorre devido ao ruído residual, que pode se acumular ao longo do tempo e o filtro não consegue eliminar completamente esse ruído, enquanto é amplificado pelos estágios dos controladores. Esse mesmo comportamento é observado na Figura 35

Na Figura 36, observa-se que, no cenário 2, para os ângulos, entre os instantes de $t = 0$ e $t = 1s$, os sensores fornecem as medições, e o EKF estima esses estados com base nessas informações e no modelo do sistema. Nesse intervalo, a linha azul, que representa os ângulos reais da aeronave, a linha pontilhada em verde, correspondente às medições dos sensores, e a estimativa do EKF encontram-se sobrepostas. No entanto, após esse instante, enquanto a aeronave realiza uma subida circular, um ruído elevado passa a estar presente nas medições, indicando uma perda da qualidade do sinal. Mesmo assim, o EKF continua estimando esses estados.

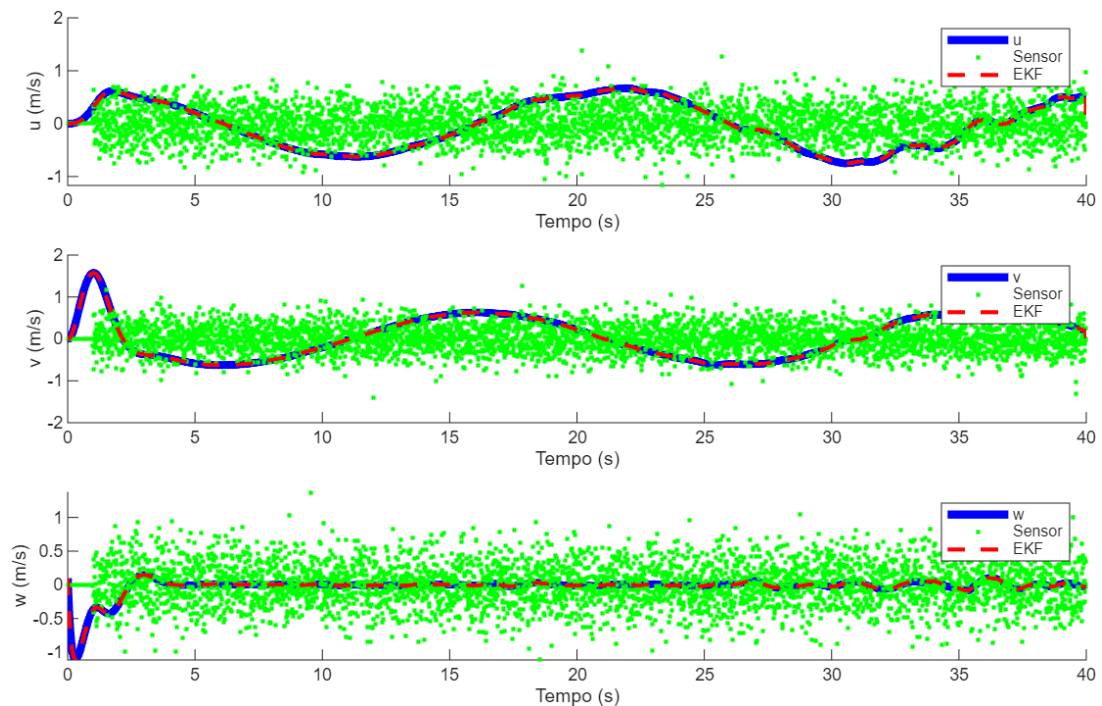
Comportamento semelhante é observado na Figura 37. No entanto, para as velocidades angulares p e q , após 25 segundos, o ruído residual passa a influenciar os valores estimados, gerando uma oscilação indesejada em torno de zero. Já para a velocidade

Figura 34 – Resposta do sistema para as posições reais da aeronave e estimadas pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 2.



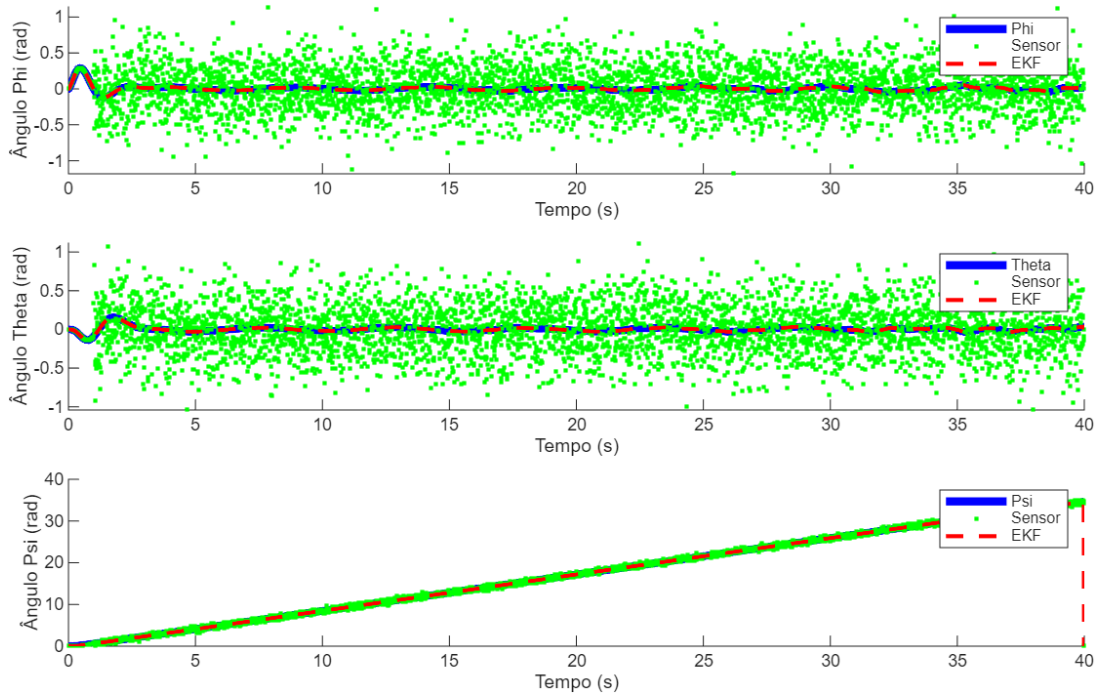
Fonte: Do autor.

Figura 35 – Resposta do sistema para as velocidades lineares da aeronave e estimadas pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 2.



Fonte: Do autor.

Figura 36 – Resposta do sistema para os ângulos reais da aeronave e estimados pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 2.

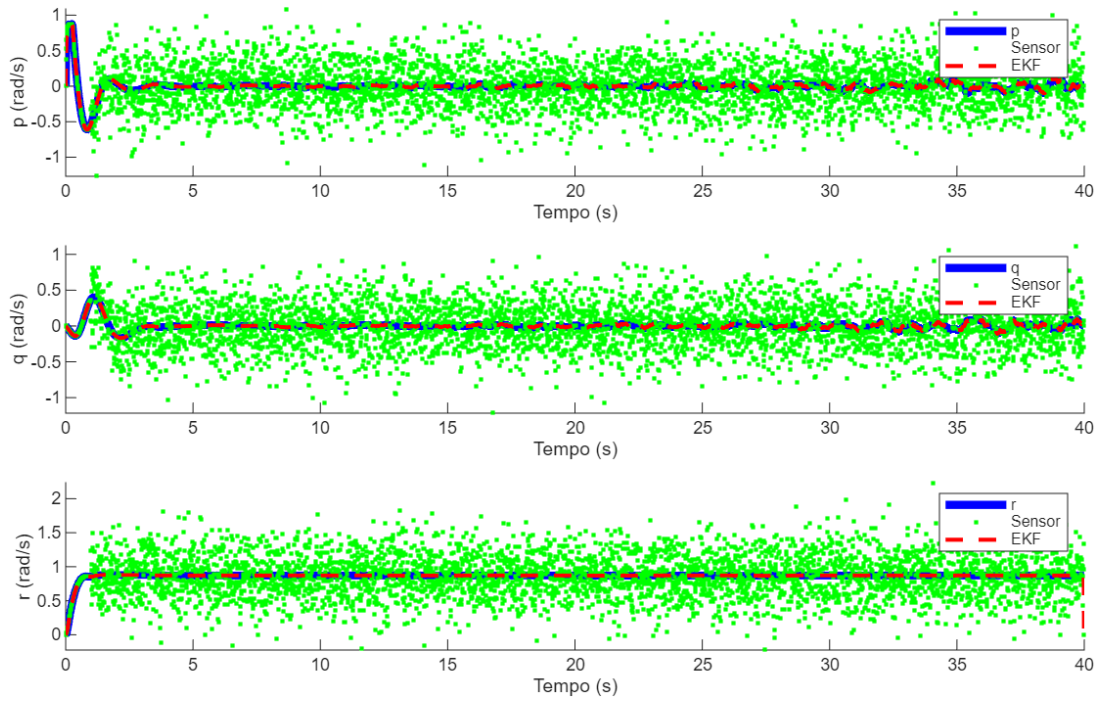


Fonte: Do autor.

angular r , não foi observado efeito do ruído residual.

A Tabela 16 apresenta os valores de RMSE obtidos para cada estado no cenário 2. Observa-se que, com a presença de ruído elevado, os erros nas posições aumentaram 5,42 vezes em relação ao cenário 1, correspondendo a um aumento de 442,3%, embora tenham permanecido abaixo de 2 cm. Para as velocidades lineares, verificou-se um aumento de 5,05 vezes em comparação ao cenário 1. Os ângulos ϕ e θ apresentaram um leve aumento devido à presença do ruído, enquanto o ângulo ψ manteve praticamente o mesmo valor em razão do erro acumulativo ao longo do tempo. Por fim, as velocidades angulares apresentaram um aumento de 29 vezes em relação ao cenário 1.

Figura 37 – Resposta do sistema para as velocidades angulares da aeronave e estimadas pelo EKF em uma trajetória circular para o cenário 2.



Fonte: Do autor.

Tabela 16 – Valores RMSE obtido para cada estado estimado para o cenário 2.

Estado	RMSE
x	0,0141
y	0,0128
z	0,0047
u	0,0121
v	0,0087
w	0,0049
ϕ	0,0017
θ	0,0019
ψ	0,1369
p	0,0057
q	0,0058
r	0,0035

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos resultados obtidos via simulação no MATLAB.

7 Conclusão

7.1 Considerações Finais

Os VANTs têm se consolidado como uma tecnologia de grande relevância devido à sua capacidade de realizar operações remotas ou autônomas com menor custo e maior segurança. O avanço nas áreas de controle, miniaturização e computação ampliou significativamente suas aplicações e contribuiu para o desenvolvimento de aeronaves mais eficientes, confiáveis e acessíveis. Dentre as diferentes configurações existentes, os quadricópteros destacam-se por sua simplicidade construtiva, elevada manobrabilidade e facilidade de implementação, características que justificam sua ampla utilização em aplicações de pesquisa e desenvolvimento.

Para representar fisicamente o veículo, adotou-se o modelo de Newton-Euler, por se tratar de uma abordagem amplamente empregada na modelagem da dinâmica de VANTs e capaz de representar adequadamente o comportamento da aeronave. Com base nesse formalismo, foi obtido um modelo dinâmico não linear composto por 12 variáveis de estado, correspondentes às posições, velocidades lineares, ângulos e velocidades angulares. A partir desse modelo, foram descritas as equações que representam a dinâmica do VANT, as quais serviram de base para as etapas de análise, simulação e desenvolvimento da estratégia de controle proposta neste trabalho.

Além disso, foi abordado o uso do controlador PID devido à sua simplicidade de implementação, ao baixo custo computacional e à ampla aplicação em sistemas embarcados e em VANTs. O controlador PID baseia seu funcionamento em três ações: proporcional, responsável pela resposta ao erro instantâneo; integral, que elimina o erro acumulado ao longo do tempo; e derivativa, que antecipa as variações do erro, reduzindo oscilações e melhorando a estabilidade do sistema. Para a sintonia dos ganhos foi empregado o Algoritmo Genético, em razão da complexidade e do caráter multivariável do sistema, cuja dinâmica apresenta forte acoplamento e não linearidades.

Para avaliar o desempenho do controlador, foram definidos cenários de teste de seguimento de trajetória. O primeiro consistiu em uma trajetória retilínea, na qual apenas a posição no eixo x variou linearmente no tempo, enquanto as posições y e z permaneceram constantes em 1 m. O ângulo de guinada ψ foi mantido constante, sendo as referências de ϕ e θ fornecidas pelo controlador de posição. Como critérios de desempenho, adotou-se, para o controle de posição, sobressinal (M_p) inferior a 5%, tempo de acomodação (t_s) inferior a 5 s e erro estacionário (e_{ss}) próximo de zero. Para o controle de atitude, foram estabelecidos $M_p < 8\%$, $t_s < 4$ s e e_{ss} próximo de zero.

No resultado, foi observado que, no eixo x , não foi apresentado sobressinal, o tempo de acomodação foi de 5,0 s e o erro estacionário de 0,0044 m. Para o eixo y , o sobressinal

foi de apenas 1,02%, representando uma redução de 79,6% em relação ao trabalho de referência, com tempo de acomodação de 2,11 s e erro estacionário de 0,0001 m. No eixo z , o sobressinal foi de 2,04%, correspondendo a uma redução de 59,2%, enquanto o tempo de acomodação foi reduzido em 2,89 s, mantendo erro estacionário de 0,0189 m. Apesar da pequena perda de altitude observada durante o deslocamento longitudinal, decorrente do acoplamento entre os eixos de posição e atitude, o sistema permaneceu dentro dos critérios especificados.

Para o controle de atitude, o ângulo θ apresentou sobressinal de apenas 0,12%, equivalente a uma redução de 98,5% em relação ao método de referência, tempo de acomodação de 4 s e erro estacionário nulo. Para o ângulo ψ , não foram observados sobressinal, tempo de acomodação ou erro estacionário. O ângulo ϕ apresentou sobressinal de 15%, superior ao limite especificado de 8%; entretanto, manteve tempo de acomodação de 4 s e erro estacionário nulo, indicando que apenas o critério de sobressinal não foi atendido. Portanto, ao avaliar os resultados obtidos, observa-se que a maior parte do sistema encontra-se estabilizada, permitindo que a aeronave realize a trajetória descrita no cenário.

Como métricas de desempenho, foram empregados os índices IAE e ITAE. Os resultados apresentados na Tabela 12 mostraram que a maior contribuição para o erro acumulado ocorreu na posição x , que apresentou IAE de 3,72010 e ITAE de 80,65900, valores superiores aos das demais variáveis. Esse comportamento é compatível com a natureza da trajetória retilínea, na qual o deslocamento ocorre predominantemente ao longo desse eixo. Em contrapartida, a posição y apresentou baixos índices ($IAE = 0,63383$ e $ITAE = 0,62593$), indicando reduzido erro de acompanhamento devido à referência constante. Para a posição z , embora o IAE tenha permanecido relativamente baixo (1,06260), o ITAE atingiu 10,32300, evidenciando a persistência de pequenas oscilações ao longo da simulação. Os ângulos de atitude apresentaram os menores valores de erro, com IAE inferiores a 0,10 e ITAE inferiores a 0,16, indicando que as malhas internas mantiveram a aeronave próxima das referências durante todo o percurso.

O segundo cenário consistiu no seguimento de uma trajetória circular. Nesse caso, a posição no eixo x foi definida por uma função senoidal, enquanto o eixo y seguiu uma função cossenoidal, mantendo-se a altitude constante em 1 m. O ângulo de guinada ψ variou linearmente, enquanto as referências de ϕ e θ foram fornecidas pelo controlador de posição.

De acordo com os resultados, foi observado que, para os eixos x e y , não houve sobressinal, representando uma diferença de 86,44% e 44,94% em relação ao trabalho de referência, respectivamente. No eixo x , o tempo de subida foi de 4,24 s, correspondendo a uma redução de 0,26 s em relação ao autor, enquanto o tempo de acomodação foi de 40 s, inferior ao obtido na referência em razão do menor tempo de simulação. Para o eixo y , o tempo de subida foi reduzido em 0,92 s, com tempo de acomodação também limitado a

40 s pelo horizonte de simulação.

Para o eixo z , foi observado sobressinal de 16,0%, superior ao valor de 0,0157% reportado pelo autor. Entretanto, o tempo de subida foi reduzido de 3,07 s para 1,44 s, correspondendo a uma melhoria de aproximadamente 53,1%, indicando uma resposta mais rápida. Em contrapartida, o tempo de acomodação aumentou de 0,50 s para 10,04 s, evidenciando maior dificuldade em estabilizar a altitude, embora o sistema tenha permanecido próximo da referência.

Além disso, foram obtidos os valores dos índices de desempenho, conforme apresentado na Tabela 14. Os valores mostram que os maiores erros acumulados ocorreram nas posições x ($IAE = 8,65480$ e $ITAE = 175,32000$) e y ($IAE = 10,59300$ e $ITAE = 195,31000$), refletindo o atraso entre a trajetória de referência e a resposta do sistema durante o movimento circular. Na posição z , apesar do baixo erro acumulado ($IAE = 2,35570$), o valor de $ITAE = 32,06400$ indica a persistência de pequenas oscilações ao longo da simulação. Em relação às variáveis de atitude, os ângulos ϕ e θ apresentaram baixos índices (IAE inferiores a 0,21 e $ITAE$ inferiores a 0,93), evidenciando a boa atuação da malha de estabilização. Por outro lado, o ângulo ψ apresentou os maiores índices entre as variáveis de atitude ($IAE = 10,70900$ e $ITAE = 215,23000$), indicando a presença de um erro persistente durante o acompanhamento da referência, o que resulta em maior penalização pelo critério $ITAE$. Assim, com base nos resultados obtidos, verifica-se que a maior parte do sistema atingiu um estado de estabilidade, permitindo que a aeronave percorra a trajetória estabelecida para o cenário analisado.

Após a análise da estabilidade e do controle do sistema, os veículos estão sujeitos a falhas nos sensores durante a operação. Diante disso, foi implementado o EKF para estimar os estados do sistema a partir do modelo dinâmico e das medições disponíveis. Dessa forma, mesmo diante desse problema, o veículo pode continuar executando sua trajetória utilizando os estados estimados pelo filtro. Para avaliar o desempenho do filtro, foram considerados dois cenários de teste: falha completa dos sensores e aumento do nível de ruído nas medições.

No primeiro cenário, a aeronave realiza a decolagem e atinge a altitude de 1 m aos 5 s de simulação. A partir desse instante, é simulada a perda total das medições do sensor, representando uma falha completa. De acordo com os resultados, foi observado que, mesmo após a perda das medições, ao longo do tempo, o EKF estimou os estados como as posições, velocidades lineares, ângulos de atitude e velocidades angulares ao longo da trajetória.

A Tabela 15 apresentou os valores de RMSE para cada estado estimado ao longo dos 40 s de simulação. Para as posições, foram obtidos erros de 0,0026 m, 0,0074 m e 0,0041 m para os eixos x , y e z , respectivamente. O maior erro foi observado na posição y , cujo RMSE foi aproximadamente 2,85 vezes superior ao de x e 1,80 vez superior ao de z . Ainda assim, todos os erros permaneceram inferiores a 1 cm, o que representa menos

de 0,5% do raio da trajetória circular de 2 m.

Para os ângulos de atitude, os menores erros foram obtidos para ϕ e θ , ambos iguais a 0,0001 rad. Em contrapartida, o ângulo ψ apresentou RMSE de 0,1369 rad, aproximadamente 1.369 vezes superior aos demais ângulos. Esse comportamento é esperado, uma vez que a referência de guinada varia continuamente durante a trajetória, fazendo com que pequenos desvios se acumulem ao longo do tempo na ausência da etapa de atualização do EKF.

No segundo cenário, foi considerada uma falha parcial do sensor, na qual o dispositivo permaneceu em funcionamento durante o primeiro segundo de operação. A partir de $t = 1$ s, após a decolagem, as medições passaram a apresentar ruído de elevada amplitude, simulando uma degradação significativa da qualidade das informações fornecidas pelos sensores. Durante o intervalo inicial da simulação, entre $t = 0$ e $t = 1$ s, o EKF realizou a estimação dos estados utilizando o modelo dinâmico do sistema, uma vez que não havia informações disponíveis do sensor de posição, como o GPS. Após esse instante, com a presença do ruído nas medições, o filtro passou a combinar as informações do modelo com os dados degradados do sensor para realizar a estimação dos estados.

Os resultados mostraram que, entre o instante $t = 0$ e $t = 25$ o EKF estimou os estados e permitiu que trajetória continuasse sendo realizada pela aeronave. Entretanto, após aproximadamente 25 s de simulação, observou-se uma pequena deformação nos estados estimados $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{u}, \hat{w}, \hat{\phi}, \hat{\theta})$, causada pelo ruído residual presente nas medições.

A Tabela 16 apresentou os valores de RMSE obtidos para cada estado estimado no cenário 2. Para as posições, os erros foram de 0,0141 m, 0,0128 m e 0,0047 m para x , y e z , respectivamente. Comparando com o cenário 1, os erros nas posições aumentaram de forma significativa, passando de uma média aproximada de 0,0047 m para 0,0105 m, representando um aumento de aproximadamente 2,2 vezes. O maior aumento individual ocorreu no eixo x , cujo RMSE passou de 0,0026 m para 0,0141 m, correspondendo a um aumento de aproximadamente 5,4 vezes.

Nos ângulos de atitude, os valores de RMSE foram 0,0017 rad para ϕ , 0,0019 rad para θ e 0,1369 rad para ψ . Os ângulos de rolagem e arfagem apresentaram aumento em relação ao cenário 1, sendo aproximadamente 17 e 19 vezes superiores, respectivamente. Já o ângulo de guinada permaneceu com o mesmo valor observado no cenário anterior, indicando que seu erro continua sendo predominantemente influenciado pelo acúmulo decorrente da variação contínua da referência.

7.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, destacam-se alguns pontos a serem considerados para a complementação desta pesquisa:

- Desenvolvimento do Controle por Realimentação de Estados com Integrador, uma técnica que visa aprimorar o desempenho do sistema.
- Implementação de filtragem híbrida para sistemas não lineares, proporcionando uma alternativa na estimação de estados em sistemas dinâmicos.
- Realização de testes experimentais em um protótipo aéreo, com a implementação dos algoritmos de controle, estimação de estados e simulação de falhas em um microcontrolador embarcado, como o Arduino. Essa etapa permitiria validar o desempenho do sistema em condições reais de operação, avaliando a capacidade de controle, estabilidade e seguimento de trajetória da aeronave mesmo na presença de falhas nos sensores.

Referências

- ALTALABANI, W.; ALAIWI, Y. Optimized adaptive PID controller design for trajectory tracking of a quadcopter. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, v. 9, n. 6, 2022.
- ALVES, A. S. C. *Estudo e Aplicação de Técnicas de Controle Embarcadas para Estabilização de voo de Quadricópteros*. 2012. 121 f. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), 2012.
- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- ARAÚJO, J. R. B. d. Projeto de controladores PID multivariáveis para sistemas de segunda ordem com atraso. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2025.
- BAHARUDDIN, A.; BASRI, M. A. M. Trajectory tracking of a quadcopter uav using PID controller. *ELEKTRIKA-Journal of Electrical Engineering*, v. 22, n. 2, p. 14–21, 2023.
- BALTAZAR, P. C. R. *Modelagem e controle de um quadricóptero Parrot Rolling SPIDER*. Monografia (Graduação) — Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Ceará, 2023.
- BASILIO, J. C. d. C. et al. Controladores fracionários sintonizados por metaheurísticas em dinâmica não linear. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2024.
- BISHOP, R. C. D. e R. H. *Sistema de Controle Moderno*. 8. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2001.
- EMBARCADOS. *Algoritmos Genéticos e Controladores PID*. 2026. Disponível em: <<https://embarcados.com.br/algoritmos-geneticos-e-controladores-{PID}>>.
- FERRAZ, G. A. et al. Estimção de atitude utilizando filtro de kalman. Blumenau, SC., 2023.
- FERREIRA, F. P. *Controle de estabilidade de um quadricóptero*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015.
- GUIMARÃES, A. N. *Desenvolvimento de unidade de controle e processamento emFPGA para veículo autônomo não tripulado*. Monografia (Graduação) — Universidade Politécnica de São Paulo - USP, 2024.
- HALLIDAY DAVID; RESNICK, R. W. J. *Fundamentals of Physics*. 3rd. ed. [S.l.]: WileyInterscience, 1998.
- IZA, B. A.; IMRON, C.; MARDLIJAH, M. Adaptive trajectory control for quadcopter using extended kalman filter-based self-tuning PID under gaussian disturbances. *Journal of Robotics and Control (JRC)*, v. 6, n. 5, p. 2249–2259, 2025.
- LIMA, F. M. B. Controle de estabilização de voo de vants quadrirrotores: modelagem, controle, simulação e prototipagem. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2020.

- LIMA, G. V. et al. Análise dinâmica e controle PID de um quadricóptero. Universidade Federal de Uberlândia, 2015.
- LUIS, C.; NY, J. L. Design of a trajectory tracking controller for a nanoquadcopter. *arXiv preprint arXiv:1608.05786*, 2016.
- MADEBO, N. W.; ABDISSA, C. M.; LEMMA, L. N. Enhanced trajectory control of quadrotor uav using fuzzy PID based recurrent neural network controller. *IEEE Access*, IEEE, v. 12, p. 190454–190469, 2024.
- MARQUES, J. L. *Análise do desempenho de técnicas de controle aplicadas a quadrotores*. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, 2020.
- MOHSAN, S. A. H. et al. Unmanned aerial vehicles (uavs): Practical aspects, applications, open challenges, security issues, and future trends. *Intelligent service robotics*, Springer, v. 16, n. 1, p. 109–137, 2023.
- NAJM, A. A.; IBRAHEEM, I. K. Nonlinear PID controller design for a 6-dof uav quadrotor system. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 1087–1097, 2019.
- NEPOMUCENO, F. C. *Técnicas de estimação de estados aplicadas em veículos aéreos*. 2025.
- NETO, J. B. d. S. *Modelagem e análise de dinâmica de voo para VANT quadrirrotor com aplicação de controle PID*. 2024.
- NISE, N. S. *Engenharia de sistemas de controle*. 6 ed.. ed. [S.l.]: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora, 2013.
- OGATA, K. *Engenharia de sistemas de controle*. 5 ed.. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro : Pearson, 2010.
- OKADA, K. *Controle tolerante de quadricópteros em cenários com falhas em atuadores e sensores*. Tese (Doutorado), 2022.
- PHILLIPS, C. L.; NAGLE, H. T. *Digital Control System Analysis and Design*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- QUIROGA, M. S.; VARGAS, F. J. T. Análise e síntese de controladores: Simulação e construção de um quadricóptero. In: *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. [S.l.: s.n.], 2020. v. 2, n. 1.
- RIES, V. H. K.; WALTRICH, G.; VACCARI, A. Estimativa de mapa de eficiência para máquinas elétricas através do método de filtro de kalman estendido. *Eletrônica de Potência*, v. 29, p. e202426, Aug. 2024. Disponível em: <<https://journal.sobraep.org.br/index.php/rep/article/view/935>>. doi: 10.18618/REP.2005.2.061068.
- SELBY, W. *Controller Design - ArduCopter*. 2015. Acesso em: 22 maio 2026. Disponível em: <<https://wilselby.com/research/arducopter/controller-design/>>.
- SILVA, W. d. S. et al. Modelagem, planejamento de movimentos e controle PID sintonizado com algoritmo genético de um veículo aéreo autônomo do tipo quadrirrotor. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2021.

TEIXEIRA, B. O. S.; TÔRRES, L. A. B.; AGUIRRE, L. A. Filtragem de kalman com restrições para sistemas não-lineares: revisão e novos resultados. *SBA: Controle & Automação*, v. 21, n. 2, p. 127–146, 2010. doi: [10.1590/S0103-17592010000200003](https://doi.org/10.1590/S0103-17592010000200003).

TUFAILE, F. M.; DONHA, D. C. *Análise dinâmica e projeto de controle de um quadricóptero*. 2017.