



Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas
Engenharia de Controle e Automação



João Vítor Fagundes

Análise do Ângulo de Repouso de Pilhas Granulares Cônicas Utilizando Goniômetro e Scanner 3D

Ouro Preto
2026

João Vítor Fagundes

Análise do Ângulo de Repouso de Pilhas Granulares Cônicas Utilizando Goniômetro e Scanner 3D

Trabalho apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro(a) de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Giovanni Decot Galgano

Coorientador: Prof. Dr. Caio Fernando Teixeira Portela

Ouro Preto
2026



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CONTROLE E
AUTOMACAO



FOLHA DE APROVAÇÃO

João Vítor Fagundes

Análise do Ângulo de Repouso de Pilhas Granulares Cônicas Utilizando Goniômetro e Scanner 3D

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação

Aprovada em 29 de agosto de 2026

Membros da banca

[Doutor] - Giovanni Decot Galgano - Orientador - (Universidade Federal de Ouro Preto)
[Doutor] - Caio Fernando Teixeira Portela - Coorientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
[Mestre] - Gabriel Carvalho Matoso - (Universidade Federal de Ouro Preto)
[Doutor] - Danny Augusto Vieira Tonidandel - (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Dr. Giovanni Decot Galgano], orientador do trabalho e o [Dr. Caio Fernando Teixeira Portela], coorientador do trabalho, aprovaram a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 03/08/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Caio Fernando Teixeira Portela, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/08/2026, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1151642** e o código CRC **F868611D**.

Agradecimentos

À minha mãe, Júnia, por todo o apoio, carinho e cuidado ao longo da minha vida, por estar sempre disposta a me ajudar quando preciso e, principalmente, por nunca deixar de acreditar em mim. Sem dúvida alguma, você é uma das minhas maiores inspirações como pessoa e alguém que carrego como exemplo em tudo o que faço.

Ao meu pai, Roberto, primeiramente, por ter paciência com a minha teimosia e com as inúmeras discussões que tivemos ao longo dos anos. Hoje compreendo que, mesmo nos momentos em que discordamos, suas palavras e atitudes sempre buscaram o meu bem. Sem dúvida, você foi uma das principais pessoas responsáveis pelo meu amadurecimento e por me fazer crescer e me tornar quem sou hoje.

À minha irmã, Maria Fernanda, por estar sempre presente, mesmo entre as inevitáveis brigas e implicasções de irmãos. Apesar dos oito anos que nos separam, seu desempenho acadêmico, sua dedicação e, principalmente, a pessoa que você vem se tornando me inspiram constantemente a buscar ser alguém melhor e, acima de tudo, um irmão melhor para você. Tenho muito orgulho de ser seu irmão mais velho e sou extremamente feliz por poder acompanhar seu crescimento.

À minha namorada, Pérola, uma das pessoas mais maravilhosas que tive a oportunidade de conhecer, por todo o carinho, companheirismo e apoio. Sua determinação em correr atrás dos próprios sonhos e sua disposição em mover o mundo, se necessário, pelas pessoas que ama são algumas das inúmeras qualidades que admiro em você e que me inspiram todos os dias.

Às minhas companheiras Kitana e Minie, que infelizmente partiram durante alguns dos momentos mais difíceis da minha vida. A dor de uma despedida nunca é simples, mas todo o carinho, a companhia e os momentos que compartilhamos permanecerão para sempre comigo. Vocês ocupam um lugar especial no fundo do meu coração, e jamais me esquecerei de como era bom ter vocês ao meu lado e de toda a felicidade que trouxeram para a minha vida.

Aos meus amigos: Danilo, Emmanuell, Felipe, Gustavo, Pedro, Samuel e Vilker, pela amizade e pelo apoio inabaláveis ao longo de todos esses anos. Sou grato por cada conversa, cada momento compartilhado e, principalmente, por conseguirem me fazer rir até mesmo nas situações em que, provavelmente, não deveríamos estar rindo.

À minha família, especialmente aos meus avós, tios e primos, por estarem sempre presentes e desejarem o melhor para mim. Seja perguntando e cobrando sobre minhas notas e meus estudos, seja simplesmente me chamando para comer um hambúrguer e

aproveitar bons momentos juntos, cada demonstração de carinho e preocupação teve sua importância ao longo dessa caminhada.

Aos meus orientadores: Prof. Dr. Américo, Prof. Dr. Caio Portela e Prof. Dr. Giovanni, pela orientação, disponibilidade e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por compartilharem seus conhecimentos, pelas contribuições ao longo de cada etapa e pela paciência diante das dificuldades encontradas durante o percurso. O apoio e os ensinamentos de vocês foram fundamentais para a realização e conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas de laboratório: Gabriel Matoso, Luana, Miguel e Victor, pela parceria construída durante esta trajetória, pelas discussões, pela troca de experiências e conhecimentos e pela disposição em ajudar sempre que necessário. A convivência e a colaboração de vocês tornaram este caminho mais leve e contribuíram de maneira significativa para o meu aprendizado e para o desenvolvimento deste trabalho.

À EMBRAPPII, à Vale, e à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), pelo suporte e pelos recursos disponibilizados ao longo desta trajetória. O apoio dessas instituições foi fundamental para o desenvolvimento das atividades de pesquisa, para a ampliação dos conhecimentos adquiridos durante minha formação acadêmica e para a realização deste trabalho.

“Você vai falhar muitas vezes antes que as coisas deem certo. Mas não pode desistir apenas por ter medo de falhar.”

— Zuko

Resumo

A crescente demanda global por minerais e recursos naturais tem intensificado as atividades de exploração, produção, transporte e armazenamento de minérios, impondo desafios relevantes à indústria mineral. Entre esses desafios, destaca-se o gerenciamento eficiente, sustentável e seguro das pilhas de materiais granulares, cuja estabilidade é fundamental para prevenir deslizamentos, reduzir riscos operacionais e ambientais e assegurar a continuidade das atividades. Nesse contexto, a formação e o armazenamento de pilhas constituem etapas críticas nos processos de manuseio de materiais, especialmente em pátios de estocagem, portos e terminais de exportação. Um dos principais parâmetros associados ao comportamento dessas estruturas é o ângulo de repouso, que pode sofrer alterações em função das propriedades do material e do teor de umidade. A presença de água modifica as interações entre as partículas, podendo influenciar a coesão, a inclinação dos taludes e a geometria final das pilhas. Diante disso, este trabalho investiga o comportamento do ângulo de repouso da areia em diferentes condições de umidade, avaliando os resultados obtidos por medição manual com goniômetro e por diferentes técnicas de ajuste geométrico aplicadas a modelos tridimensionais das pilhas.

Palavras-chave: ângulo de repouso; pilhas granulares cônicas; umidade; escaneamento tridimensional; ajuste geométrico.

Abstract

The growing global demand for minerals and natural resources has intensified mining, production, transportation, and storage activities, creating significant challenges for the mineral industry. Among these challenges, the efficient, sustainable, and safe management of granular material stockpiles stands out, since their stability is essential to prevent landslides, reduce operational and environmental risks, and ensure the continuity of industrial activities. In this context, stockpile formation and storage represent critical stages in material-handling operations, especially in storage yards, ports, and export terminals. One of the main parameters associated with the behavior of these structures is the angle of repose, which may vary according to the material properties and moisture content. The presence of water alters the interactions between particles and may affect cohesion, slope inclination, and the final geometry of the stockpiles. Therefore, this study investigates the behavior of the angle of repose of sand under different moisture conditions by evaluating the results obtained through manual measurements using a goniometer and through different geometric fitting techniques applied to three-dimensional models of the stockpiles.

Keywords: angle of repose; conical granular piles; moisture content; three-dimensional scanning; geometric fitting.

Lista de figuras

Figura 1 – Pátio de estocagem de minério	18
Figura 2 – Representação geométrica simplificada de uma pilha troncocônica, com indicação da altura H , do raio da base R_{base} , do raio do topo R_{topo} e do ângulo da pilha com a horizontal θ_h	19
Figura 3 – Representação esquemática da interação entre partículas granulares nas condições seca, parcialmente úmida e com maior presença de água.	22
Figura 4 – Representação do modelo estatístico da busca por grade (<i>Grid Search</i>).	25
Figura 5 – Representação esquemática do método das fatias horizontais aplicado à nuvem de pontos.	26
Figura 6 – Representação do modelo estatístico dos mínimos quadrados.	27
Figura 7 – Representação do funcionamento do método RANSAC: conjunto de dados contendo <i>outliers</i> (à esquerda) e ajuste do modelo com identificação dos <i>inliers</i> e <i>outliers</i> (à direita).	31
Figura 8 – Representação esquemática do funcionamento do método ICP aplicado ao ajuste geométrico da nuvem de pontos. O método realiza iterativamente o alinhamento entre o modelo geométrico inicial e a nuvem de pontos, buscando minimizar as distâncias entre os pontos correspondentes até a obtenção do modelo ajustado.	33
Figura 9 – Fluxograma geral da metodologia experimental e computacional adotada no trabalho.	37
Figura 10 – Vista lateral da pilha de areia formada.	40
Figura 11 – Pilha escaneada e processada no software Creality Scan em vista frontal e vista superior.	42
Figura 12 – Nuvem de pontos da pilha após o recorte, ainda descentralizada e desalinhada em relação ao sistema de coordenadas. Visualização realizada no software CloudCompare.	43
Figura 13 – Nuvem de pontos da pilha após a centralização e o alinhamento da base ao plano XY , com o eixo Z associado à altura. Visualização realizada no software CloudCompare.	46
Figura 14 – Exemplos de ajuste geométrico para a pilha com 10% de umidade. À esquerda, apresenta-se o resultado obtido pelo método ICP e, à direita, o resultado obtido pelo método de mínimos quadrados. A variação das cores representa a diferença radial entre a superfície ajustada e a superfície escaneada.	52

Figura 15 – Variação do ângulo de repouso em função da umidade, considerando as medições realizadas com o goniômetro e os resultados obtidos pelos diferentes métodos de ajuste geométrico.	54
Figura 16 – Ajuste logarítmico aplicado às médias dos ângulos de repouso medidos com o goniômetro.	57
Figura 17 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de busca em grade.	58
Figura 18 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de fatias horizontais.	58
Figura 19 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método ICP.	59
Figura 20 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de mínimos quadrados.	60
Figura 21 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de mínimos quadrados robustos com perda <i>soft-L1</i>	61
Figura 22 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método RANSAC.	62

Lista de tabelas

Tabela 1 – Ângulos de repouso medidos com o goniômetro e respectivos desvios-padrão combinados.	51
Tabela 2 – Ângulos médios obtidos pelos métodos de ajuste geométrico das pilhas.	53
Tabela 3 – Parâmetros dos ajustes logarítmicos da relação entre umidade e ângulo de repouso.	55

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	15
1.1.1	Objetivo geral	15
1.1.2	Objetivos específicos	15
1.2	Justificativa	15
1.3	Estrutura do Trabalho	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1	Pilhas Granulares, Geometria e a Influência da Umidade	17
2.1.1	Representação geométrica da pilha	18
2.1.2	Ângulo de repouso	20
2.1.3	Coesão capilar em materiais granulares	20
2.1.4	Influência da umidade e forças capilares	21
2.2	Modelo Geométrico Adotado para Representar a Pilha	22
2.3	Modelos Estatísticos e Geométricos	23
2.3.1	Busca em grade (<i>Grid Search</i>)	23
2.3.2	Fatias horizontais	24
2.3.3	Mínimos quadrados	26
2.3.4	Mínimos quadrados robustos com perda <i>soft-L1</i>	28
2.3.5	Random Sample Consensus (RANSAC)	29
2.3.6	Iterative closest point (ICP)	31
2.4	Métodos de Validação e Avaliação Estatística	33
2.4.1	Coeficiente de determinação R^2	33
2.4.2	Qui-Quadrado (χ^2)	34
3	METODOLOGIA	36
3.1	Visão Geral da Metodologia	36
3.2	Materiais utilizados	38
3.3	Preparação das Amostras	38
3.4	Formação das Pilhas	39
3.5	Medição Manual do Ângulo de Repouso	40
3.6	Aquisição e Tratamento da Nuvem de Pontos	41
3.6.1	Escaneamento tridimensional e processamento inicial	41
3.6.2	Recorte e preparação da nuvem de pontos	42
3.6.3	Tratamento geométrico e alinhamento da nuvem	44
3.6.4	Resultado do tratamento da nuvem	45

3.7	Métodos de Ajuste do Tronco de Cone	47
3.7.1	Preparação Comum	47
3.8	Aplicação dos Métodos de Fitting	48
3.9	Ajuste da Relação entre Umidade e Ângulo de Repouso	49
4	RESULTADOS	50
4.1	Resultados das Medições com o Goniômetro	50
4.2	Resultados dos Métodos de Ajuste Geométrico	52
4.3	Análise Matemática e Estatística da Relação entre Umidade e Ângulo	54
4.3.1	Ajuste logarítmico das leituras do goniômetro	56
4.3.2	Ajuste logarítmico da busca em grade	56
4.3.3	Ajuste logarítmico das fatias horizontais	57
4.3.4	Ajuste logarítmico do ICP	59
4.3.5	Ajuste logarítmico dos mínimos quadrados	60
4.3.6	Ajuste logarítmico dos mínimos quadrados robustos	60
4.3.7	Ajuste logarítmico do RANSAC	61
5	CONCLUSÃO	63
5.1	Trabalhos Futuros	65
	Referências	66
	APÊNDICE A – FUNCIONAMENTO DO CÓDIGO DE CORREÇÃO DA PILHA	70
A.1	Fluxo Geral	70
A.2	Etapas do Processamento e Funções Principais	71
A.2.1	Aquisição e leitura das nuvens	71
A.2.2	Amostragem para o PCA	71
A.2.3	Cálculo da direção inicial de altura	71
A.2.4	Cálculo da matriz de rotação	73
A.2.5	Estimativa do centro no plano XY	74
A.2.6	Deteção dos pontos da base	75
A.2.7	Ajuste robusto do plano da base	77
A.2.8	Validação da rotação de refinamento	79
A.2.9	Posicionamento e centralização da pilha	79
A.2.10	Rotação das normais	79
A.2.11	Exportação da nuvem corrigida	79
A.3	Aplicação das Correções	79

	APÊNDICE B – FUNCIONAMENTO DOS CÓDIGOS DE AJUSTE GEOMÉTRICO	82
B.1	Fluxo Geral	82
B.2	Etapas Comuns aos Seis Métodos	83
B.2.1	Aquisição e seleção dos arquivos	83
B.2.2	Leitura e pré-processamento da nuvem	83
B.2.3	Estimativa do centro da pilha	83
B.2.4	Extração do perfil radial	83
B.2.5	Modelo geométrico	84
B.2.6	Validação dos candidatos	84
B.2.7	Avaliação do ajuste	85
B.2.8	Repetições e critério de paciência	85
B.2.9	Exportação dos resultados	86
B.3	Funções Específicas dos Métodos de Ajuste	86
B.3.1	Busca em grade	87
B.3.2	Fatias horizontais	90
B.3.3	Mínimos quadrados e Soft-L1	92
B.3.4	RANSAC	97
B.3.5	ICP	101
	APÊNDICE C – DECLARAÇÃO DE USO DE FERRAMENTAS DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL	107

1 Introdução

No contexto operacional industrial nas áreas de mineração, a geometria da pilha de minério ou de produto exerce influência direta sobre sua estabilidade, seu volume armazenado e sua resposta às condições do material a ser utilizado. Assim, a pilha de produto deixa de ser apenas uma forma resultante do empilhamento e passa a representar uma informação técnica relevante para a análise do minério coletado. A representação geométrica adotada considera a pilha em formato cônico, permitindo relacionar sua altura, seu raio da base e seu ângulo de repouso. Essa simplificação geométrica facilita a análise da superfície da pilha e possibilita a comparação entre diferentes métodos de ajuste aplicados à nuvem de pontos obtida por escaneamento *3D*. A estabilidade das pilhas de materiais granulares, como minérios, areia e outros granéis, é um tema central na engenharia, em razão dos riscos associados a deslizamentos, colapsos e perdas operacionais. Essa estabilidade depende de fatores físicos e operacionais, entre os quais o teor de umidade do material, que se destaca como uma das variáveis mais influentes. Alterações no teor de água modificam o atrito e a coesão capilar entre partículas, afetando a geometria da pilha, o ângulo de repouso e a inclinação máxima que a superfície pode manter de forma estável (JONES, Robert *et al.*, 2002; JONES *et al.*, 2003).

Compreender os fatores que condicionam a estabilidade dessas estruturas é essencial para assegurar operações seguras e eficientes na cadeia logística mineral. Pesquisas analíticas, numéricas e experimentais investigam o comportamento desses materiais granulares por meio da caracterização física dos materiais, do estudo de mecanismos de ruptura, da análise da influência da umidade e do desenvolvimento de modelos capazes de representar a forma assumida pela pilha após sua deposição. Entre os fatores que mais influenciam a geometria e a estabilidade de pilhas granulares, a umidade é a que mais se destaca em relação a outros fatores. Em materiais com fração fina relevante, pequenas variações no teor de água podem alterar o nível de coesão aparente entre partículas, permitem a modificação do escoamento superficial durante a deposição e gera mudanças na inclinação final da superfície livre. Em consequência, a análise geométrica da pilha constitui uma via objetiva para investigar como a umidade interfere no comportamento macroscópico do material. Ao mesmo tempo, o avanço das técnicas de aquisição tridimensional tornou possível registrar de forma mais fiel a superfície dessas pilhas. O uso de escaneamento *3D* permite substituir avaliações visuais ou medições pontuais por uma representação espacial mais completa da pilha, descrita por uma nuvem de pontos. A partir dessa nuvem, torna-se possível aplicar rotinas de tratamento geométrico, extrair perfis representativos da borda e ajustar modelos simplificados, como cone e tronco de cone, para estimar parâmetros geométricos de interesse de forma reprodutível e comparável entre diferentes condições experimentais

(GANS; ABRAMIAN *et al.*, 2023; RICHEFEU; EL YOUSSEFI; PEYROUX *et al.*, 2008; GANS; POULIQUEN; NICOLAS, 2020).

É nesse ponto que o presente trabalho se insere. Este trabalho parte da aquisição tridimensional de pilhas experimentais, do tratamento da nuvem de pontos e do ajuste geométrico da superfície por diferentes estratégias matemáticas e computacionais. Em vez de se limitar a um único procedimento de ajuste, a proposta considera seis métodos computacionais distintos, permitindo avaliar sensibilidade a ruído, estabilidade numérica, custo computacional e consistência geométrica dos resultados. Essa abordagem combina medição experimental, representação geométrica e análise comparativa, com foco na estimativa do ângulo de repouso e na interpretação da influência da umidade sobre a forma final da pilha.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Comparar diferentes métodos de determinação do ângulo de repouso de pilhas granulares formadas sob distintas condições de umidade, incluindo a medição manual com o goniômetro e os métodos de ajuste geométrico aplicados às nuvens de pontos obtidas por escaneamento tridimensional.

1.1.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- analisar a formação de pilhas granulares cônicas;
- analisar o ângulo de repouso e sua relação com a umidade;
- utilizar o escaneamento $3D$ na aquisição de superfícies reais;
- analisar métodos de ajustes geométricos e métricas estatísticas.

1.2 Justificativa

Compreender a formação e a geometria de pilhas granulares é importante para melhorar o aproveitamento de recursos, reduzir as perdas de material e evitar problemas associados à instabilidade, ao armazenamento inadequado e à interpretação imprecisa do comportamento da pilha. Ao utilizar o escaneamento $3D$, o tratamento da nuvem de pontos e os métodos de ajuste geométrico, torna-se possível analisar a forma da pilha de maneira mais objetiva, relacionando parâmetros como altura, raio e ângulo de repouso

com a influência da umidade. Dessa forma, o estudo contribui tanto para o entendimento experimental da formação das pilhas quanto para a escolha de métodos mais confiáveis de medição e comparação.

1.3 Estrutura do Trabalho

O trabalho está organizado em 5 capítulos de forma a conduzir o leitor desde a contextualização do problema até a análise comparativa dos métodos adotados.

O Capítulo 1 apresenta a introdução ao tema, a relevância da geometria das pilhas granulares, a influência da umidade no comportamento do material, o objetivo geral da pesquisa e sua justificativa.

O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica e o embasamento teórico necessário ao desenvolvimento do trabalho. Nesse capítulo são discutidos os conceitos de pilhas granulares, ângulo de repouso, coesão e forças capilares, bem como o uso de escaneamento 3D, o tratamento da nuvem de pontos, os seis métodos computacionais de ajuste geométrico considerados e os critérios estatísticos de validação e comparação.

O Capítulo 3 apresenta a metodologia experimental e computacional adotada no desenvolvimento do trabalho. São descritos os materiais e equipamentos utilizados, a preparação das amostras em diferentes condições de umidade, a formação das pilhas, a medição manual do ângulo de repouso, o escaneamento tridimensional, o tratamento das nuvens de pontos e a aplicação dos diferentes métodos de ajuste geométrico.

O Capítulo 4 apresenta e discute os resultados obtidos pelas medições com o goniômetro e pelos seis métodos computacionais de ajuste geométrico. Nesse capítulo também é analisada a influência da umidade sobre o ângulo de repouso e são avaliados os ajustes matemáticos realizados para representar o comportamento dos resultados obtidos pelos diferentes procedimentos.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho a partir dos resultados experimentais e computacionais obtidos, destacando as principais características, vantagens e limitações dos métodos analisados. Por fim, são apresentadas sugestões para trabalhos futuros, considerando a aplicação da metodologia a outros materiais granulares, diferentes configurações de pilhas e condições de aquisição tridimensional.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Pilhas Granulares, Geometria e a Influência da Umidade

Pilhas granulares são estruturas formadas pela deposição de materiais particulados, como a areia, o minério, os grãos ou os outros sólidos fragmentados. A geometria final dessas pilhas não depende apenas da quantidade de material depositado, mas também da forma como ocorre o empilhamento, das propriedades físicas das partículas, do atrito interno, da presença de coesão aparente e da ação da gravidade. Do ponto de vista macroscópico, a pilha pode ser interpretada como o resultado do equilíbrio entre as forças que tendem a deslocar o material ao longo do talude e as forças que resistem a esse deslocamento. Assim, a superfície inclinada da pilha representa uma condição geométrica de estabilidade. Em aplicações envolvendo produto mineral, essa geometria tem importância direta, pois influencia o volume armazenado, a estabilidade superficial, a drenagem, a segurança operacional e a repetibilidade do processo de empilhamento ([SCHOFIELD, 1981](#); [BUZZI; FITYUS, 2022](#); [COELHO; SOUZA; REZENDE, 2021](#); [ANDREOTTI; FORTERRE; POULIQUEN, 2013](#)). Neste trabalho, a pilha é analisada a partir de uma representação geométrica simplificada em formato cônico ou troncocônico. Essa aproximação permite descrever a forma global da pilha por poucos parâmetros: a altura, o raio da base, o raio do topo e a inclinação do talude. Embora uma pilha real apresente irregularidades locais, assimetrias e rugosidades superficiais, o modelo cônico fornece uma referência matemática adequada para comparar diferentes métodos de ajuste aplicados à nuvem de pontos obtida por escaneamento 3D.

A Figura 1 apresenta o pátio de estocagem do qual foi coletado o minério destinado à análise de umidade.



Figura 1 – Visão panorâmica de um pátio de estocagem com pilhas longitudinais em terminal portuário.

Fonte: Elaboração própria.

2.1.1 Representação geométrica da pilha

A geometria de uma pilha granular pode ser interpretada a partir de seus elementos principais: a base, o topo, a altura e a superfície inclinada, também chamada de talude. Em uma pilha real, esses elementos não aparecem de forma perfeitamente regular, pois a deposição do material gera irregularidades, pequenas assimetrias, rugosidades superficiais e variações locais de inclinação. Mesmo assim, para fins de análise, é possível representar a forma global da pilha por uma geometria simplificada. Neste trabalho, a pilha é aproximada por uma forma cônica ou troncocônica. A representação cônica considera que a pilha possui uma base circular, uma altura H e um topo idealizado em um ponto. Já a representação troncocônica considera que o topo não se fecha em um único ponto, mas apresenta uma pequena região superior com raio R_{topo} . Essa segunda representação é mais flexível para dados experimentais, pois pilhas reais dificilmente apresentam um vértice perfeitamente definido (HORNBAKER *et al.*, 1997; RICHEFEU; EL YOUSOUFI; PEYROUX *et al.*, 2008).

A Figura 2 apresenta, de forma esquemática, os principais parâmetros geométricos utilizados para descrever a pilha. O raio da base, indicado por R_{base} , representa a dimensão horizontal da pilha junto ao plano de apoio. A altura H corresponde à diferença entre a base e a região mais elevada da pilha. No caso do tronco de cone, o raio do topo R_{topo} representa uma região superior achatada ou irregular, comum em medições experimentais obtidas por escaneamento 3D.

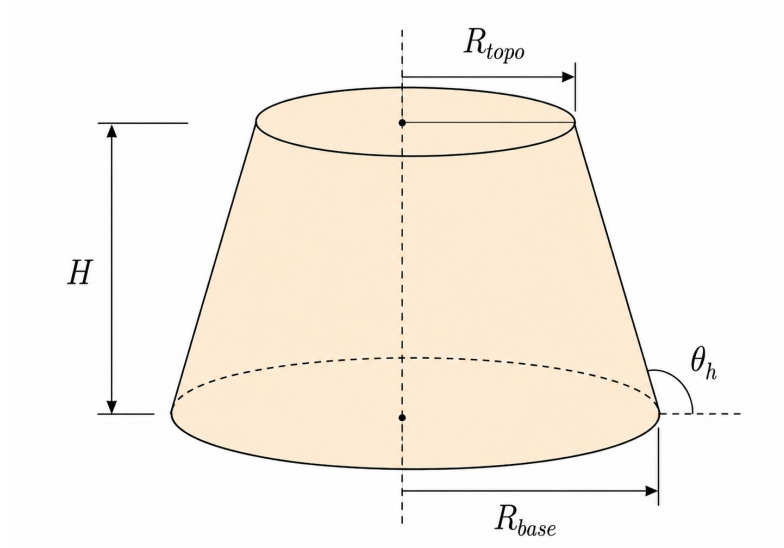


Figura 2 – Representação geométrica simplificada de uma pilha troncocônica, com indicação da altura H , do raio da base R_{base} , do raio do topo R_{topo} e do ângulo da pilha com a horizontal θ_h .

Fonte: Elaboração própria.

A diferença entre o raio da base e o raio do topo define o avanço horizontal do talude:

$$\Delta R = R_{base} - R_{topo}. \quad (2.1)$$

Esse termo é importante porque representa a distância horizontal associada à inclinação da superfície lateral da pilha. Quanto maior for H em relação a ΔR , mais íngreme será o talude. Por outro lado, quando ΔR é grande em relação à altura, a pilha apresenta uma superfície mais aberta e menos inclinada.

A adoção dessa representação geométrica permite transformar a análise da pilha em um problema de identificação de parâmetros. Em vez de avaliar a superfície apenas por observação visual ou por medições pontuais, busca-se determinar valores representativos para H , R_{base} e R_{topo} . A partir desses parâmetros, é possível calcular o ângulo de repouso e comparar diferentes pilhas e diferentes métodos de ajuste de forma mais objetiva. Embora não represente todas as irregularidades locais da superfície, esse modelo permite capturar a tendência global da pilha e serve como base para a estimativa do ângulo de repouso a partir da nuvem de pontos (GEORGIEV; AL-HAMI; LAKAEMPER, 2016; WYSER *et al.*, 2023). Além disso, a aproximação por cone ou tronco de cone é adequada ao objetivo deste trabalho porque fornece uma descrição simples, interpretável e compatível com a geometria esperada de pilhas formadas por deposição.

2.1.2 Ângulo de repouso

O ângulo de repouso é uma das grandezas mais utilizadas para caracterizar o comportamento de materiais granulares. Ele representa a inclinação característica da superfície livre de uma pilha em condição de estabilidade, isto é, a inclinação na qual o material consegue permanecer sem escoamento contínuo ao longo do talude. Fisicamente, esse ângulo está relacionado ao equilíbrio entre a componente do peso que tende a provocar o deslizamento das partículas e os mecanismos resistentes, como atrito, intertravamento entre grãos e coesão. Em materiais secos e pouco coesivos, o ângulo de repouso depende principalmente do atrito interno, da forma das partículas, da granulometria e da rugosidade superficial. Já em materiais úmidos ou parcialmente coesivos, a presença de água pode alterar essa inclinação ao modificar as forças de interação entre partículas (SOUSA PINTO, 2016; ANDREOTTI; FORTERRE; POULIQUEN, 2013).

O ângulo do talude com a horizontal pode ser calculado por:

$$\theta_h = \arctan \left(\frac{H}{\Delta R} \right), \quad (2.2)$$

A análise do ângulo de repouso é feita a partir da geometria ajustada à nuvem de pontos. Portanto, o ângulo não é medido diretamente em apenas uma seção da pilha, mas estimado a partir de um modelo global que considera a distribuição espacial da superfície. Essa abordagem reduz a dependência de medições pontuais e permite comparar diferentes métodos de ajuste de maneira mais objetiva.

2.1.3 Coesão capilar em materiais granulares

A coesão pode ser entendida como uma parcela adicional de resistência entre partículas, capaz de complementar o atrito interno do material. Em materiais granulares secos e não coesivos, a resistência ao escoamento depende principalmente do contato entre grãos, da força normal e do atrito. Nesses casos, a estabilidade da pilha é governada majoritariamente pelo peso próprio e pelo atrito intergranular.

Uma forma simplificada de representar a resistência ao cisalhamento de um material granular é dada pelo critério de Mohr-Coulomb:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi, \quad (2.3)$$

em que τ é a resistência ao cisalhamento, c é a coesão, σ é a tensão normal e ϕ é o ângulo de atrito interno do material. Para materiais idealmente secos e não coesivos, o termo c tende a ser pequeno ou próximo de zero. Entretanto, em materiais com presença de finos, umidade ou ligações entre partículas, esse termo pode se tornar relevante.

No caso de pilhas granulares parcialmente úmidas, o efeito macroscópico das forças capilares é frequentemente representado como uma coesão aparente, pois não necessariamente resulta de ligações permanentes entre partículas, mas de efeitos temporários associados à presença de água. Essa coesão capilar pode aumentar a estabilidade do talude e permitir que a pilha apresente inclinações maiores do que aquelas observadas em condição seca. Entretanto, a coesão não deve ser interpretada isoladamente. A resposta da pilha depende da combinação entre granulometria, rugosidade, forma das partículas, teor de umidade, compactação, modo de deposição e distribuição da água no interior dos vazios. Por isso, o estudo da geometria da pilha fornece uma forma indireta, mas relevante, de observar os efeitos macroscópicos dessas interações (HORNBAKER *et al.*, 1997; RICHEFEU; EL YOUSOUFI; PEYROUX *et al.*, 2008; RADJAI; RICHEFEU, 2009).

2.1.4 Influência da umidade e forças capilares

A umidade exerce influência significativa sobre o comportamento dos materiais granulares, especialmente quando há presença de partículas finas. Em uma condição seca, as partículas interagem principalmente por contato direto, atrito e peso próprio. Com a adição de pequenas quantidades de água, podem se formar pontes líquidas entre partículas próximas, gerando forças capilares atrativas e aumentando a coesão capilar do material. As forças capilares surgem quando o líquido ocupa parcialmente os espaços entre grãos, formando meniscos. Esses meniscos geram uma diferença de pressão entre o líquido e o ar, associada à curvatura da interface (JONES, Robert *et al.*, 2002; JONES *et al.*, 2003; RICHEFEU; EL YOUSOUFI; PEYROUX *et al.*, 2008).

De forma simplificada, essa diferença de pressão pode ser relacionada pela equação de Young-Laplace:

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.4)$$

em que Δp é a diferença de pressão na interface, γ é a tensão superficial do líquido e R_1 e R_2 são os raios principais de curvatura do menisco. Essa diferença de pressão contribui para uma força atrativa entre partículas, favorecendo a formação de ligações capilares.

De maneira simplificada, a força capilar entre duas partículas pode ser entendida como dependente da tensão superficial do líquido, da geometria dos grãos, do volume de água presente, da distância entre partículas e do ângulo de contato entre o líquido e a superfície sólida. Embora sua formulação completa dependa da geometria local do menisco, seu efeito macroscópico é o surgimento ou o aumento da coesão aparente e, consequentemente, da resistência do material ao escoamento. Esse comportamento, porém, não é necessariamente monotônico em toda a faixa de umidade. Em baixos teores de

água, a formação de pontes líquidas pode aumentar a coesão capilar e, conseqüentemente, elevar o ângulo de repouso. Em teores intermediários, a quantidade e a conectividade das pontes líquidas passam a influenciar a resistência do material de forma mais complexa. Já em condições de maior saturação, os vazios entre partículas podem ser progressivamente preenchidos por água, modificando a drenagem, a compactação e o atrito efetivo entre os grãos (JARRAY; MAGNANIMO; LUDING, 2018; RICHEFEU; EL YOUSOUFI; RADJAI, 2006; GANS; POULIQUEN; NICOLAS, 2020).

Assim, a umidade pode tanto aumentar quanto reduzir a estabilidade da pilha, dependendo da quantidade de água presente e das características do material. Por esse motivo, a interpretação do ângulo de repouso deve ser feita em conjunto com a condição de umidade. Essa relação é investigada a partir da geometria das pilhas escaneadas, permitindo comparar como diferentes condições experimentais influenciam os parâmetros ajustados do cone ou tronco de cone.

A Figura 3 apresenta, de forma esquemática, três condições de interação entre partículas granulares em função da presença de água. Na condição seca, não há formação de ponte líquida nem atuação de força capilar. Com a adição de uma pequena quantidade de água, forma-se um menisco entre as partículas, originando uma força capilar atrativa. Em uma condição com maior presença de água, a pressão do líquido atua sobre a superfície dos grãos, enquanto a força capilar associada a uma ponte líquida individual deixa de estar representada.

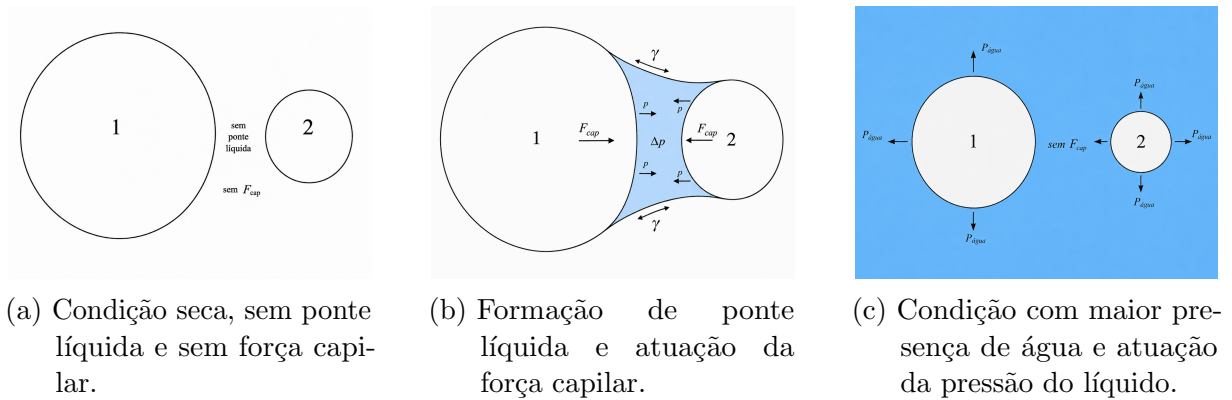


Figura 3 – Representação esquemática da interação entre partículas granulares nas condições seca, parcialmente úmida e com maior presença de água.

Fonte: Adaptado de Matoso *et al.* (2025).

2.2 Modelo Geométrico Adotado para Representar a Pilha

Após o tratamento, a pilha é descrita por um modelo geométrico simplificado de cone ou tronco de cone. Essa aproximação não pretende reproduzir todos os detalhes locais

da superfície, mas sim capturar o envelope principal da pilha e permitir a estimativa de parâmetros globais comparáveis entre amostras.

Seja (x_c, y_c) o centro estimado da pilha. O raio de cada ponto em relação ao centro é dado por

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}. \quad (2.5)$$

A partir daí, extrai-se um perfil da borda no plano (z, r) . Para isso, a altura é dividida em fatias horizontais e, em cada fatia, escolhe-se um percentil alto do raio para representar a borda da pilha. O conjunto final é formado por pares

$$(z_k, r_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.6)$$

que sintetizam a superfície externa de modo mais estável do que o uso direto de todos os pontos.

No modelo troncocônico, o raio previsto para uma altura z é

$$r_{mod}(z) = R_{base} + (R_{topo} - R_{base}) \frac{z}{H}, \quad 0 \leq z \leq H, \quad (2.7)$$

em que H é a altura total, R_{base} é o raio da base e R_{topo} é o raio do topo. Quando $R_{topo} = 0$, o modelo se reduz a um cone ideal. O resíduo geométrico em cada fatia pode ser escrito como:

$$e_k = r_k - r_{mod}(z_k). \quad (2.8)$$

2.3 Modelos Estatísticos e Geométricos

2.3.1 Busca em grade (*Grid Search*)

A busca em grade é o método mais direto e interpretável para testar as combinações de parâmetros que são próximos de uma estimativa inicial e escolher aquela que produz o menor erro segundo uma função de avaliação. Em termos gerais, se:

$$\boldsymbol{\theta} = (H, R_{base}, R_{topo}), \quad (2.9)$$

o método procura

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{G}} S(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.10)$$

em que $\mathcal{G}$ representa o conjunto de candidatos testados e $S(\boldsymbol{\theta})$ é o critério de ajuste.

Esse tipo de estratégia está relacionado aos métodos de busca direta, que não dependem do cálculo de derivadas da função objetivo. Métodos desse tipo são úteis quando a função a ser minimizada é simples de avaliar, mas não possui derivadas analíticas convenientes, ou quando se deseja uma abordagem mais transparente e de fácil auditoria (HOOKE; JEEVES, 1961; KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003). No caso deste trabalho, a busca

em grade testa variações discretas nos parâmetros H , R_{base} e R_{topo} , calculando para cada candidato o raio previsto, os resíduos e o score final.

Na prática, o método parte de uma estimativa inicial

$$\boldsymbol{\theta}_0 = (H_0, R_{base,0}, R_{topo,0}) \quad (2.11)$$

e define passos de variação para cada parâmetro. Para cada rodada, são testadas combinações do tipo

$$H' = H + \Delta H, \quad R'_{base} = R_{base} + \Delta R_{base}, \quad R'_{topo} = R_{topo} + \Delta R_{topo}, \quad (2.12)$$

com deslocamentos positivos, negativos ou nulos. Cada candidato é aceito apenas se respeitar os limites físicos do problema, como altura compatível com a nuvem, topo menor que a base e ângulo dentro de uma faixa plausível.

A principal vantagem desse método é a clareza. É possível acompanhar exatamente quais candidatos foram testados e por que determinado conjunto de parâmetros foi escolhido. Além disso, a busca em grade serve como uma referência inicial para verificar se métodos mais sofisticados estão encontrando soluções coerentes. Sua limitação é o custo computacional quando a grade se torna muito densa. Quanto mais refinados forem os passos, maior será o número de candidatos testados. Além disso, como a busca ocorre em torno de uma estimativa inicial, o resultado pode ser influenciado pela qualidade desse ponto de partida. Se a estimativa inicial estiver muito distante da geometria real da pilha, o método pode explorar uma região pouco adequada do espaço de parâmetros (HOOKE; JEEVES, 1961; KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2003).

Portanto, a busca em grade é adequada como método de referência, principalmente por sua simplicidade e interpretabilidade. Ela não é necessariamente a alternativa mais eficiente, mas fornece uma base confiável para comparação com métodos contínuos e robustos.

A Figura 4 ilustra o método da busca por grade, com os testes de combinações de parâmetros testando combinações de parâmetros para encontrar a estimativa de menor erro.

2.3.2 Fatias horizontais

O método das fatias horizontais explora diretamente a propriedade geométrica do cone ou tronco de cone. O raio varia aproximadamente de forma linear com a altura. Assim, após a extração do perfil (z_k, r_k) , o problema pode ser tratado como um ajuste de reta no plano raio-altura:

$$r(z) = az + b. \quad (2.13)$$

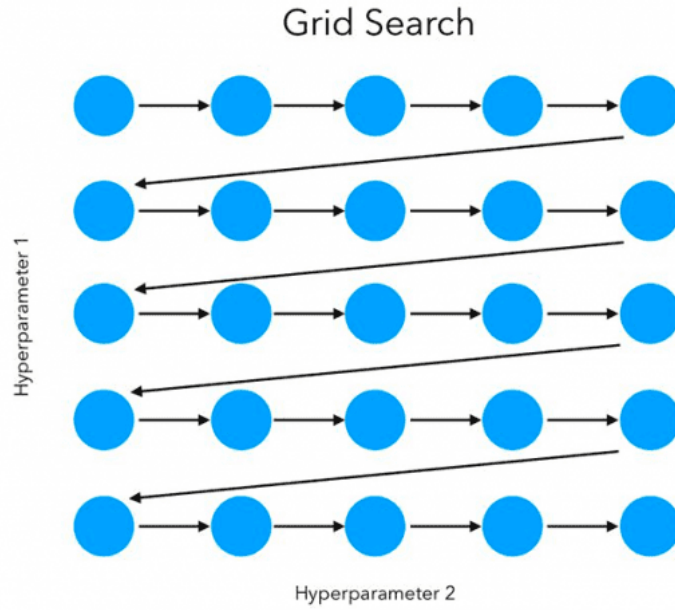


Figura 4 – Representação do modelo estatístico da busca por grade (*Grid Search*).

Fonte: (SHAMS *et al.*, 2024; BAO; LIU, 2006)

Nessa relação, b representa o raio estimado próximo à base, enquanto a representa a variação do raio com a altura. Para uma pilha cônica ou troncocônica regular, espera-se que $a < 0$, pois o raio diminui conforme a altura aumenta.

Esse procedimento pode ser interpretado como uma aplicação de regressão linear ao perfil da borda da pilha, uma vez que se busca encontrar a reta que melhor representa a tendência global entre altura e raio. A formulação por mínimos quadrados é amplamente utilizada para esse tipo de ajuste, pois permite estimar os coeficientes da reta minimizando os desvios entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo. Quando algumas fatias apresentam maior quantidade de pontos ou são consideradas mais confiáveis, essa ideia também pode ser estendida para uma forma ponderada, na qual essas fatias têm maior influência no ajuste final (SEBER; LEE, 2003; BIRDAL *et al.*, 2020).

Depois de ajustada a reta, os parâmetros do tronco de cone são obtidos por conversão geométrica. O intercepto da reta fornece uma estimativa para R_{base} , enquanto o raio no topo pode ser estimado avaliando a reta na altura considerada para o modelo:

$$R_{topo} = aH + b. \quad (2.14)$$

Como a altura real da pilha pode ser afetada por irregularidades no topo ou por cortes aplicados durante o tratamento da nuvem, o método pode testar diferentes valores de H dentro de uma faixa fisicamente aceitável e selecionar aquele que produz o melhor critério de ajuste. A principal vantagem desse método é a rapidez. Como o problema se reduz ao ajuste de uma reta, o custo computacional é baixo e a interpretação geométrica é imediata. A limitação principal é a dependência da qualidade do perfil extraído. Se algumas

fatias estiverem contaminadas por ruído, sombra do scanner, base espalhada ou pontos isolados, a reta pode ser deslocada e produzir uma estimativa enviesada. Além disso, o método assume uma tendência linear global, não sendo capaz de representar deformações locais da pilha (SEBER; LEE, 2003; BIRDAL *et al.*, 2020).

Desse modo, o método das fatias horizontais é indicado quando a pilha apresenta geometria regular e o perfil (z_k, r_k) está bem definido. Ele é simples, rápido e adequado para uma primeira aproximação da geometria troncocônica.

A Figura 5 apresenta, de forma esquemática, a aplicação do método das fatias horizontais à nuvem de pontos da pilha, destacando a divisão da geometria em diferentes alturas para a obtenção dos respectivos raios.

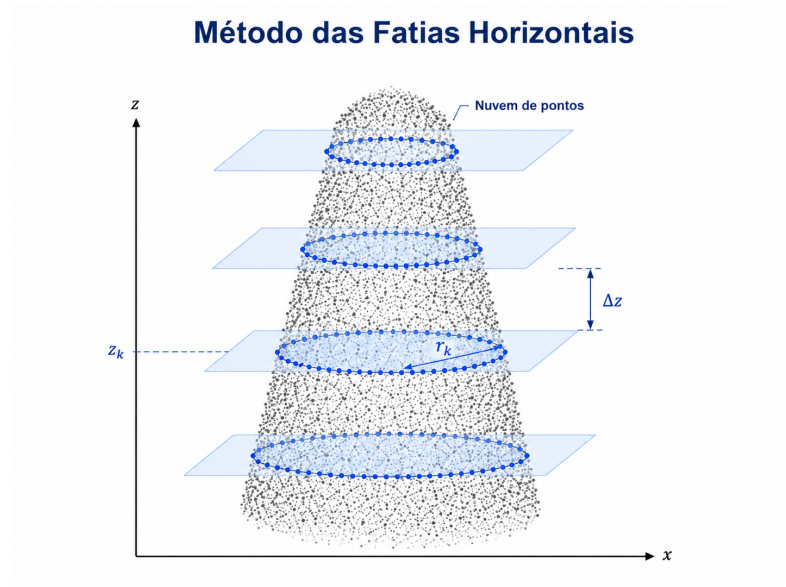


Figura 5 – Representação esquemática do método das fatias horizontais aplicado à nuvem de pontos.

Fonte: Autoria própria.

2.3.3 Mínimos quadrados

O método de mínimos quadrados estima diretamente os parâmetros do modelo por meio da minimização da soma dos resíduos ao quadrado. Diferentemente da busca em grade, que testa candidatos discretos, os mínimos quadrados tratam os parâmetros como variáveis contínuas. O problema pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{k=1}^m e_k(\boldsymbol{\theta})^2. \quad (2.15)$$

No contexto deste trabalho,

$$e_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r_k - r_{\text{mod}}(z_k; \boldsymbol{\theta})}{\max(|r_k|, \varepsilon)}. \quad (2.16)$$

Embora o modelo seja linear em relação à variável z , o problema é tratado como não linear em relação aos parâmetros quando H , R_{base} e R_{topo} são ajustados simultaneamente. Isso ocorre porque H aparece no denominador da expressão do raio previsto. Por isso, o ajuste é realizado por algoritmos iterativos de mínimos quadrados não lineares, como métodos baseados em Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt ou regiões de confiança (BRANCH; COLEMAN; LI, 1999; SCIPY COMMUNITY, 2026; HELENE, 2006).

Uma parametrização conveniente consiste em otimizar:

$$\phi = (H, R_{base}, f_{topo}), \quad (2.17)$$

em que

$$R_{topo} = f_{topo} R_{base}. \quad (2.18)$$

Essa forma facilita a imposição de limites, pois basta restringir f_{topo} a uma faixa fisicamente aceitável. Assim, evita-se que o otimizador gere soluções com topo maior que a base ou com tronco de cone incompatível com a forma esperada da pilha. O processo iterativo pode ser interpretado da seguinte maneira. Em cada iteração, o algoritmo avalia os resíduos e estima como eles mudam quando os parâmetros sofrem pequenas variações. Essa sensibilidade é representada pela matriz Jacobiana. A partir dessa aproximação local, calcula-se uma nova combinação de parâmetros que tende a reduzir a função objetivo. O procedimento se repete até que a redução do erro se torne pequena, até que as variações dos parâmetros sejam mínimas ou até que seja atingido o número máximo de avaliações (BRANCH; COLEMAN; LI, 1999).

A Figura 6 apresenta o modelo estatístico do método dos mínimos quadrados.

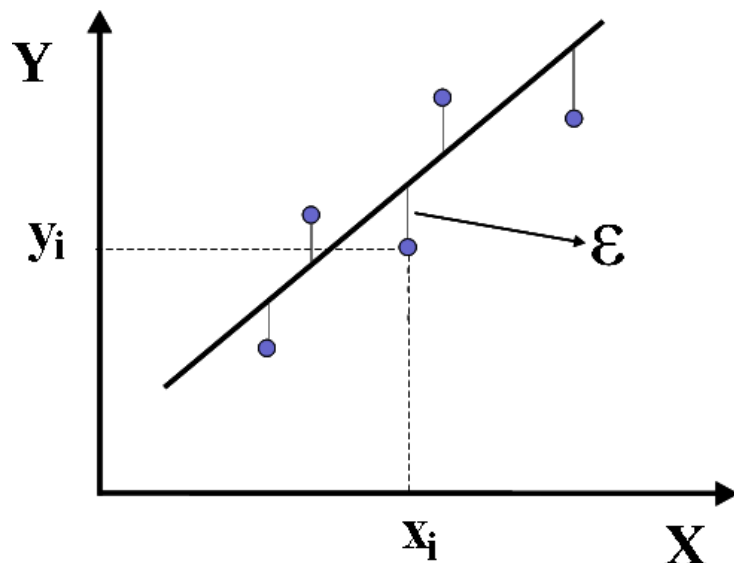


Figura 6 – Representação do modelo estatístico dos mínimos quadrados.

Fonte: (INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, s.d.)

A vantagem dos mínimos quadrados é a eficiência. Quando a borda extraída é limpa e a estimativa inicial é razoável, o método costuma convergir rapidamente e produzir um ajuste contínuo e suave. Sua formulação matemática é clássica e amplamente utilizada em problemas de ajuste de modelos. A principal limitação é a sensibilidade a outliers. Como os resíduos são elevados ao quadrado, erros grandes recebem peso muito maior na função objetivo e poucas fatias muito contaminadas podem deslocar a solução final, fazendo com que o cone ajustado represente melhor os pontos ruins do que a tendência geral da pilha (SCIPY COMMUNITY, 2026; HELENE, 2006).

Portanto, os mínimos quadrados são adequados quando o perfil da borda é consistente e possui poucos pontos espúrios. Em dados reais com ruído mais forte, sua utilização deve ser comparada com versões robustas ou com métodos capazes de separar inliers e outliers.

2.3.4 Mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1*

O método de mínimos quadrados robustos mantém a mesma ideia geral do método anterior, mas altera a forma como os resíduos são penalizados. Em vez de minimizar apenas a soma dos quadrados dos erros, utiliza-se uma função de perda robusta, cujo objetivo é reduzir a influência de resíduos muito grandes. Essa abordagem é baseada na teoria de estimação robusta, que busca obter modelos menos sensíveis a observações contaminadas (HUBER, 1964; RODRIGUES; ELIAN, 2024).

A formulação geral pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{k=1}^m \rho(e_k(\boldsymbol{\theta})^2), \quad (2.19)$$

em que ρ é a função de perda. Para a perda *soft-L1*, tem-se

$$\rho(s) = 2 \left(\sqrt{1+s} - 1 \right). \quad (2.20)$$

Com um fator de escala C , a penalização pode ser escrita como

$$C^2 2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{e_k}{C} \right)^2} - 1 \right). \quad (2.21)$$

O parâmetro C controla a transição entre resíduos considerados normais e resíduos tratados como grandes. Em implementações como a função `least_squares`, esse parâmetro aparece como `f_scale`, e a perda *soft-L1* é apresentada como uma aproximação suave da perda L_1 , adequada para reduzir a influência de outliers (SCIPY COMMUNITY, 2026).

Para resíduos pequenos, a perda *soft-L1* se comporta de maneira próxima à perda quadrática. Assim, pontos bem ajustados continuam contribuindo de forma semelhante ao

método de mínimos quadrados comum. Para resíduos grandes, o crescimento da função deixa de ser puramente quadrático e se torna mais suave. Dessa forma, pontos muito afastados ainda influenciam o ajuste, mas não dominam a solução.

No contexto da pilha granular, esse comportamento é importante porque a nuvem de pontos pode conter ruídos de escaneamento, pequenas falhas de leitura, buracos, regiões com sombra ou fatias em que a borda foi mal representada. O método robusto permite que o ajuste siga a tendência predominante do perfil sem ser excessivamente deslocado por poucas fatias problemáticas. A principal vantagem desse método é o equilíbrio entre precisão e robustez. Ele continua sendo um ajuste contínuo dos parâmetros do cone ou tronco de cone, mas se torna menos sensível a erros localizados. Por isso, tende a ser mais adequado para dados experimentais reais do que os mínimos quadrados puros. A principal limitação é que a robustez não corrige erros sistemáticos. Se grande parte da borda estiver enviesada, ou se o centro da pilha tiver sido mal estimado, o método robusto ainda ajustará um modelo baseado nesse perfil incorreto. Além disso, se o fator de escala for escolhido de forma inadequada, o método pode reduzir demais a influência de informações válidas ou, ao contrário, comportar-se quase como mínimos quadrados comuns (RODRIGUES; ELIAN, 2024; SEBER; LEE, 2003).

Assim, os mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1* são indicados quando a maior parte do perfil é confiável, mas existem regiões isoladas com ruído ou contaminação. Para nuvens reais obtidas por scanner 3D, esse método representa uma alternativa importante por combinar ajuste contínuo e resistência a outliers.

2.3.5 Random Sample Consensus (RANSAC)

O RANSAC, do inglês *Random Sample Consensus*, é um método clássico de ajuste de modelos na presença de outliers. Sua lógica é diferente dos mínimos quadrados: em vez de ajustar todos os pontos simultaneamente, o algoritmo sorteia pequenas amostras, ajusta modelos candidatos e verifica quantos pontos do conjunto total concordam com cada modelo dentro de um limiar de tolerância (FISCHLER; BOLLES, 1981).

No caso deste trabalho, o RANSAC é aplicado ao perfil (z_k, r_k) . Como a relação entre raio e altura é aproximadamente linear para um cone ou tronco de cone, o modelo candidato pode ser uma reta:

$$r(z) = az + b. \quad (2.22)$$

Uma reta pode ser definida por dois pontos. Assim, em cada tentativa, o algoritmo sorteia duas fatias, calcula a reta correspondente e mede a distância das demais fatias a essa reta:

$$d_k = |r_k - (az_k + b)|. \quad (2.23)$$

Uma fatia é considerada *inlier* quando

$$d_k \leq \tau, \quad (2.24)$$

em que τ é o limiar de aceitação.

Após a identificação do conjunto de *inliers*, o método realiza uma etapa de refino para melhorar a precisão do ajuste obtido. Nesse processo, a reta estimada pelo RANSAC é convertida em parâmetros iniciais do tronco de cone, e esses parâmetros são posteriormente refinados por mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1*, utilizando apenas as fatias classificadas como confiáveis. Essa combinação é adequada porque o RANSAC atua principalmente na separação entre dados consistentes e pontos contaminados, enquanto o refino robusto ajusta os parâmetros finais de forma mais precisa, reduzindo a influência de pequenos desvios ainda presentes entre os *inliers*.

Dessa forma, o RANSAC com refino é indicado quando há suspeita de fatias fortemente contaminadas, mas a maior parte do perfil ainda segue uma tendência cônica clara. Ele não substitui necessariamente os métodos de ajuste contínuo, mas funciona como uma etapa robusta de seleção de dados confiáveis.

A Figura 7 apresenta um exemplo de conjunto de dados contendo pontos que seguem aproximadamente uma tendência linear, juntamente com pontos discrepantes (*outliers*). A presença desses pontos pode influenciar significativamente métodos de ajuste convencionais, uma vez que todos os dados são considerados durante a estimação dos parâmetros do modelo. Além disso à direita apresenta uma representação do funcionamento do método RANSAC. À esquerda, observa-se o conjunto de dados original, contendo pontos que seguem uma tendência aproximadamente linear e pontos discrepantes (*outliers*). À direita, é apresentado o resultado do ajuste realizado pelo RANSAC, no qual os pontos considerados *inliers* são utilizados para estimar o modelo, enquanto os *outliers* são desconsiderados durante o ajuste.



Figura 7 – Representação do funcionamento do método RANSAC: conjunto de dados contendo *outliers* (à esquerda) e ajuste do modelo com identificação dos *inliers* e *outliers* (à direita).

Fonte: Forsyth e Ponce (2002).

2.3.6 Iterative closest point (ICP)

O ICP procura uma transformação rígida $\mathbf{T}$, composta por rotação e translação, que alinhe a nuvem artificial à superfície real. Na formulação ponto-a-ponto, o objetivo é minimizar:

$$E(\mathbf{T}) = \sum_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{K}} \|\mathbf{p} - \mathbf{T}\mathbf{q}\|^2, \quad (2.25)$$

em que $\mathcal{K}$ representa o conjunto de correspondências entre os pontos da nuvem artificial e os pontos da superfície real, $\mathbf{p}$ é um ponto pertencente ao cone artificial, $\mathbf{q}$ é o ponto correspondente na nuvem real da pilha. O algoritmo alterna entre encontrar os pontos correspondentes mais próximos e atualizar a transformação que minimiza o erro entre eles (BESL; MCKAY, 1992; OPEN3D TEAM, 2026). Variantes do ICP, como ponto-a-plano, também são comuns e podem apresentar convergência mais rápida em determinadas situações (RUSINKIEWICZ; LEVOY, 2001; OPEN3D TEAM, 2026).

A nuvem artificial é gerada a partir de uma estimativa inicial dos parâmetros (H, R_{base}, R_{topo}) , utilizando o mesmo modelo radial definido na Equação (2.7). Para diferentes alturas z e ângulos α , são gerados pontos sobre a superfície lateral do cone por meio de:

$$x = x_c + r(z) \cos(\alpha), \quad (2.26)$$

$$y = y_c + r(z) \sin(\alpha), \quad (2.27)$$

$$z = z. \quad (2.28)$$

Assim, obtém-se uma nuvem sintética que representa a superfície lateral do cone ou tronco de cone.

No contexto deste trabalho, o ICP não substitui o ajuste paramétrico do cone. Sua principal função é melhorar o alinhamento espacial entre o modelo artificial e a pilha real, especialmente no que se refere ao centro no plano XY . Após o alinhamento, o centro pode ser atualizado e o perfil (z, r) recalculado. Em seguida, aplica-se um refino final, geralmente por mínimos quadrados robustos, para estimar novamente H , R_{base} e R_{topo} (BESL; MCKAY, 1992; OPEN3D TEAM, 2026).

Essa distinção é importante: o ICP estima uma transformação rígida entre nuvens de pontos, não diretamente os parâmetros geométricos do tronco de cone. Portanto, o método é melhor entendido como uma etapa de realinhamento 3D seguida de um ajuste paramétrico final. A principal vantagem do ICP com cone artificial é o uso mais direto da geometria tridimensional. Enquanto os métodos anteriores dependem fortemente do perfil radial extraído, o ICP considera a distribuição espacial dos pontos da superfície. Isso pode ser útil quando o centro inicial da pilha está deslocado ou quando há informação tridimensional suficiente para melhorar o posicionamento do modelo. A principal limitação é o custo computacional e a dependência da inicialização. O ICP é um método iterativo local: se a nuvem artificial inicial estiver muito distante da superfície real, o algoritmo pode convergir para um alinhamento inadequado. As métricas internas do ICP, como *fitness* e *inlier RMSE*, ajudam a avaliar a qualidade do registro. O *fitness* indica a proporção de correspondências aceitas, enquanto o *inlier RMSE* mede o erro médio quadrático das correspondências consideradas válidas (OPEN3D TEAM, 2026). Entretanto, essas métricas não substituem as métricas finais do ajuste do cone, pois avaliam o alinhamento entre nuvens e não necessariamente a qualidade do modelo troncocônico final (BESL; MCKAY, 1992).

Assim, o ICP com cone artificial é indicado quando se deseja incorporar informação 3D ao processo de ajuste, principalmente para corrigir desalinhamentos do centro da pilha. Em contrapartida, é o método mais custoso e exige uma estimativa inicial razoável para produzir bons resultados (RUSINKIEWICZ; LEVOY, 2001).

A Figura 8 ilustra a representação do método ICP aplicado ao ajuste geométrico da nuvem de pontos, com o alinhamento entre o modelo geométrico inicial e a nuvem de pontos.

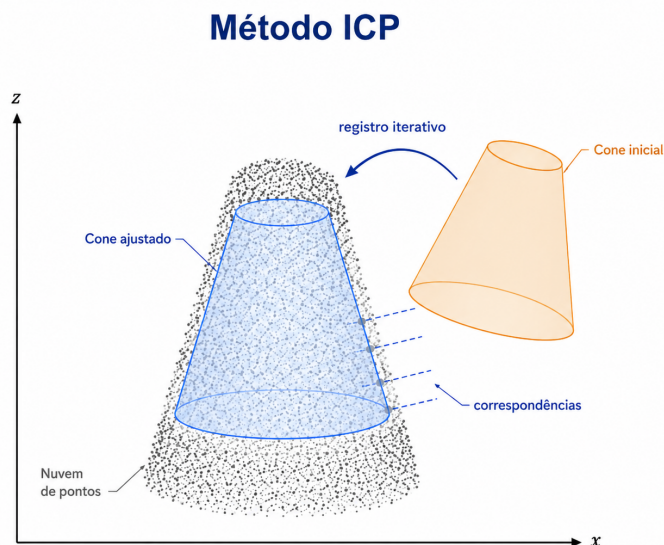


Figura 8 – Representação esquemática do funcionamento do método ICP aplicado ao ajuste geométrico da nuvem de pontos. O método realiza iterativamente o alinhamento entre o modelo geométrico inicial e a nuvem de pontos, buscando minimizar as distâncias entre os pontos correspondentes até a obtenção do modelo ajustado.

Fonte: Autoria própria.

2.4 Métodos de Validação e Avaliação Estatística

2.4.1 Coeficiente de determinação R^2

O coeficiente de determinação R^2 é uma medida eficaz utilizada para indicar a capacidade preditiva para calcular a relação entre duas variáveis aleatórias. Especificamente, o coeficiente de determinação pode ser definido como a máxima correlação ao quadrado entre Y e a melhor combinação linear de X . Num contexto de um modelo de regressão linear simples, em que a variável explanatória (ou preditora) é x e a variável resposta (ou a prever) é y , o coeficiente de determinação R^2 dá a percentagem de variabilidade dos y 's (variável a prever) que fica explicada em função da variabilidade dos x 's. Assim, um valor de $R^2 \approx 1$ significa que, em princípio, a nuvem de pontos apresentada no diagrama de dispersão está próxima da reta de regressão, considerada para o modelo de regressão. Quando $R^2 \approx 0$, já não se vislumbra uma estrutura linear. Então, o R-quadrado é uma medida estatística de quão próximos os dados estão da linha de regressão ajustada. Ele também é conhecido como o coeficiente de determinação ou o coeficiente de determinação múltipla para a regressão múltipla. A vantagem do uso do R-quadrado é a comparação de diferentes modelos para indicar uma métrica de fácil compreensão, com o fornecimento de uma medida intuitiva da proporção da variabilidade na variável dependente. A principal desvantagem é ser sensível a outliers. Um único ponto discrepante pode ter um impacto significativo na métrica. Um alto R^2 não implica causalidade. Mesmo que um modelo

explique bem os dados, isso não significa que uma variável seja a causa de outra. O R^2 sofre da limitação de ser dependente do contexto. Pode ser enganoso em casos onde a interpretação da variabilidade não é direta, como em modelos não lineares (CANDIDO, 2024; SIEGLE, s.d.).

O coeficiente de determinação R^2 , também denominado R-quadrado, é utilizado para avaliar o quanto o modelo ajustado representa a variabilidade dos dados observados. Seu cálculo é realizado computacionalmente, especialmente em razão da quantidade de pontos presentes nas nuvens analisadas, sendo definido pela Equação 2.29 (CANDIDO, 2024).

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.29)$$

em que n representa o número de observações, y_i corresponde aos valores observados, $\hat{y}_i$ aos valores estimados pelo modelo e $\bar{y}$ à média dos valores observados.

2.4.2 Qui-Quadrado (χ^2)

O teste Qui-Quadrado é um teste de hipóteses que se destina a encontrar um valor da dispersão para duas variáveis categóricas nominais e avaliar a associação existente entre variáveis qualitativas e não depende de parâmetros como a média e a variância. O princípio básico deste teste é comparar proporções, ou seja, possíveis divergências entre as frequências observadas e esperadas para um certo evento. O teste é utilizado para verificar se a frequência com que um determinado acontecimento observado em uma amostra se desvia significativamente ou não da frequência com que ele é esperado, comparar a distribuição de diversos acontecimentos em diferentes amostras, a fim de avaliar se as proporções observadas destes eventos mostram ou não diferenças significativas ou se as amostras diferem significativamente quanto às proporções desses acontecimentos. Os grupos a serem analisados devem ser independentes e selecionados aleatoriamente e as observações devem ser de frequências ou de contagens. Por ser um teste não-paramétrico, não assume normalidade dos dados nem variância homogênea entre as amostras, mas exige os seguintes pressupostos: Os dados são aleatórios e representativos da população, as variáveis analisadas são categóricas, todas as frequências esperadas são maiores ou iguais a 1 e cada observação pertence somente a uma categoria (SIEGLE, s.d.).

O cálculo do Qui-Quadrado é realizado conforme apresentado na Equação 2.30.

$$\chi_v^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \quad (2.30)$$

onde n é a quantidade de categorias na variável, O é o valor observado de uma determinada classe, E é o valor esperado desta classe e v é o grau de liberdade, número de determinações independentes menos o número de parâmetros estatísticos a serem avaliados (VENTURA, 2023).

3 Metodologia

Este capítulo apresenta os procedimentos experimentais e computacionais adotados para o processamento e análise das pilhas granulares utilizadas neste trabalho. A metodologia foi estruturada para permitir a análise entre o ângulo de repouso medido manualmente pelo goniômetro e os ângulos estimados por diferentes métodos de ajuste geométrico aplicados às nuvens de pontos obtidas por escaneamento 3D. De forma geral, o procedimento envolveu a preparação da areia em diferentes condições de umidade, a formação controlada das pilhas, a medição manual do ângulo de repouso, o escaneamento tridimensional, o tratamento da nuvem de pontos e a aplicação dos métodos de fitting.

3.1 Visão Geral da Metodologia

Inicialmente, realizou-se a preparação do material granular, com a definição das porcentagens de umidade e a homogeneização da areia. Em seguida, as pilhas foram formadas sobre uma superfície plana e nivelada, buscando manter um procedimento semelhante para todas as condições analisadas. Após a formação de cada pilha, realizou-se a medição manual do ângulo de repouso com o auxílio de um goniômetro. Posteriormente, a pilha foi escaneada por um *scanner* 3D, gerando uma nuvem de pontos representativa de sua geometria. Essa nuvem passou por etapas de pré-processamento, recorte da área e correção espacial, com o objetivo de isolar apenas a pilha e alinhar adequadamente sua base e seu eixo vertical.

Com a nuvem de pontos tratada, foram aplicados diferentes métodos de ajuste geométrico para estimar o cone ou tronco de cone que melhor representasse a pilha. Por fim, os ângulos estimados pelos métodos computacionais foram comparados com os valores obtidos manualmente, utilizando métricas de erro.

A Figura 9 apresenta o fluxograma da metodologia utilizada.

Etapas da metodologia experimental

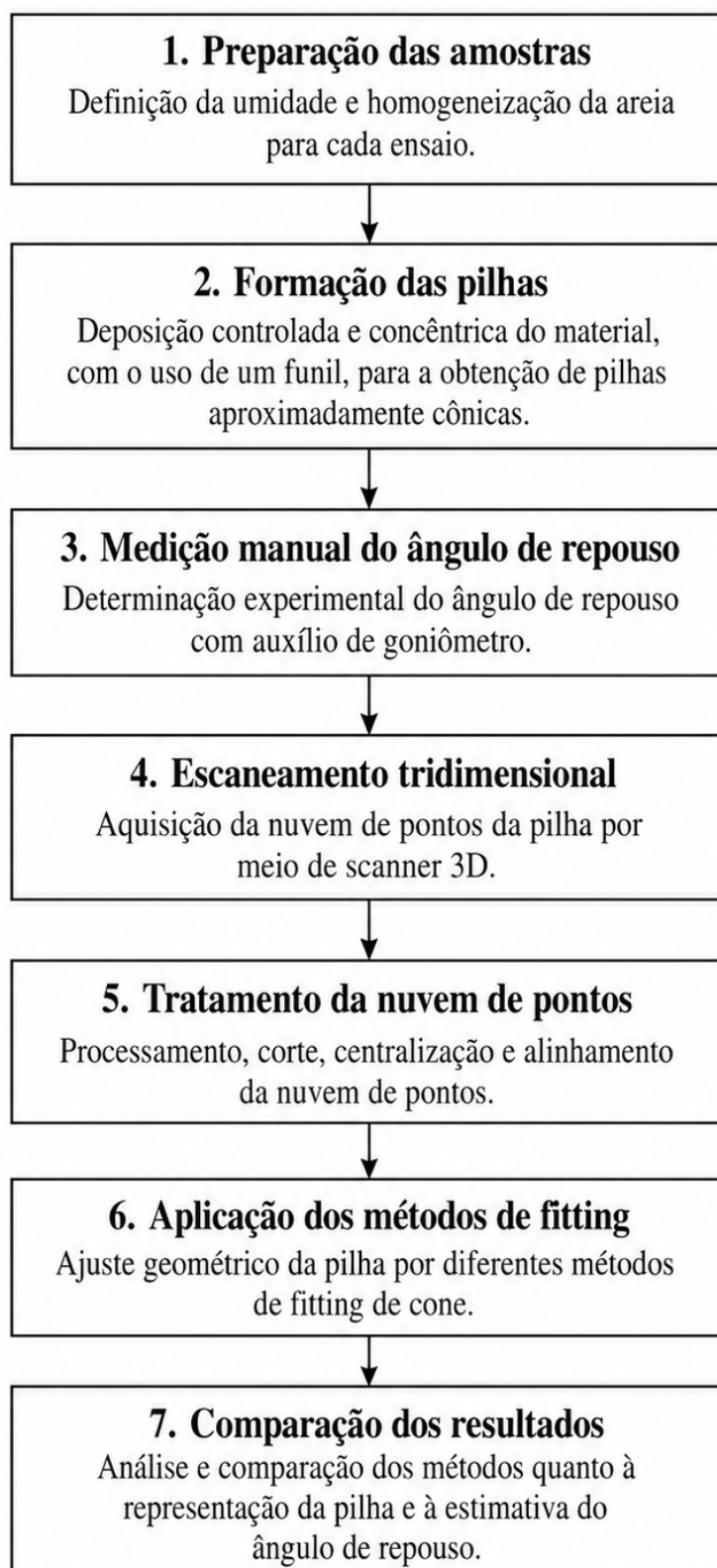


Figura 9 – Fluxograma geral da metodologia experimental e computacional adotada no trabalho.

Fonte: Elaboração própria.

3.2 Materiais utilizados

Para a realização dos experimentos, foram utilizados materiais e equipamentos necessários para a preparação física das pilhas e para a aquisição e processamento dos dados tridimensionais.

Os principais materiais e equipamentos utilizados foram:

- areia, utilizando-se aproximadamente 20 kg para a formação de cada pilha;
- água, adicionada conforme a porcentagem de umidade definida para cada ensaio;
- recipientes e baldes para armazenamento e transporte do material;
- balança com capacidade máxima de 50 kg, resolução ($d = 10$) g e verificação ($e = 10$) g, utilizada para a pesagem da massa de areia empregada em cada ensaio;
- balança com capacidade máxima de 6100 g, resolução ($d = 0,1$) g e verificação ($e = 1$) g, utilizada para a medição da massa de água adicionada à areia;
- funil para deposição controlada do material;
- goniômetro para medição manual do ângulo de repouso;
- *scanner 3D Creality Scan Raptor* para aquisição da geometria das pilhas;

Além dos equipamentos físicos, foram utilizados softwares específicos para a aquisição, o processamento, o tratamento e a análise dos dados. O software *Creality Scan* foi empregado no processamento inicial dos dados obtidos pelo *scanner 3D*. O software *CloudCompare* foi utilizado para o recorte manual, a visualização e o tratamento preliminar das nuvens de pontos. O software *Origin* foi utilizado para a organização dos resultados, a elaboração de gráficos e a análise matemática comparativa entre os métodos de determinação do ângulo de repouso.

3.3 Preparação das Amostras

Antes da realização dos ensaios, a areia foi submetida a um processo de secagem em estufa, à temperatura de 105 °C, durante 24 horas. Esse procedimento teve como objetivo remover a umidade inicialmente presente no material, estabelecendo uma condição seca de referência para a preparação das diferentes amostras. Após a secagem e o resfriamento do material, a areia foi pesada e separada nas quantidades necessárias para cada ensaio.

Cada pilha foi formada utilizando aproximadamente 20 kg de areia seca. As condições de umidade analisadas foram definidas em porcentagem relativa à massa seca de

areia utilizada no ensaio. Dessa forma, para cada condição experimental, a massa de água a ser acrescentada foi calculada proporcionalmente à massa de areia, conforme apresentado na Equação 3.1.

$$m_{agua} = \frac{U}{100} \cdot m_{areia} \quad (3.1)$$

em que m_{agua} representa a massa de água adicionada, U corresponde à umidade desejada, expressa em porcentagem, e m_{areia} representa a massa seca de areia utilizada no ensaio.

A partir da condição inicialmente seca, a umidade das amostras foi aumentada por meio da adição da quantidade de água correspondente à condição experimental desejada. Para uma amostra contendo 20 kg de areia, por exemplo, cada incremento de 1% de umidade correspondia à adição de 200 g de água. Nos ensaios realizados de forma sequencial, a água era adicionada em quantidade equivalente à diferença entre a umidade já presente na mistura e a nova condição de umidade estabelecida.

Para cada condição, a areia e a quantidade calculada de água foram colocadas em uma betoneira e misturadas durante aproximadamente cinco a dez minutos. Após esse período, o material era retirado e avaliado visualmente e manualmente quanto à homogeneidade da distribuição de umidade. Caso fossem identificadas regiões com aspecto mais seco, mais úmido ou com formação localizada de aglomerados, o material retornava à betoneira para uma nova etapa de mistura.

Esse procedimento foi adotado com o objetivo de reduzir variações locais de umidade no interior da amostra e garantir maior uniformidade entre os ensaios. Embora a verificação da homogeneidade tenha sido realizada de forma visual e manual, buscou-se manter o mesmo tempo de mistura e os mesmos critérios de avaliação em todas as condições experimentais.

3.4 Formação das Pilhas

Após a preparação da amostra, a deposição da areia foi realizada com o auxílio de um funil, posicionado de modo a direcionar o material para a região central da base experimental. Esse procedimento teve como objetivo favorecer a formação de uma pilha aproximadamente cônica e manter condições semelhantes de deposição para todas as porcentagens de umidade analisadas.

A areia foi adicionada ao funil de forma gradual, evitando o despejo de todo o material de uma única vez. Dessa forma, buscou-se reduzir variações bruscas na formação da pilha e manter maior controle sobre o processo experimental.

A Figura 10 apresenta a vista lateral da pilha de areia durante sua formação, juntamente com o funil utilizado para a deposição do material.



Figura 10 – Vista lateral da pilha de areia formada.

Fonte: Elaboração própria.

3.5 Medição Manual do Ângulo de Repouso

Após a formação de cada pilha, foi realizada a medição manual do ângulo de repouso com o auxílio de um goniômetro. A medição foi feita em quatro direções distintas, com o objetivo de manter um padrão de medição entre as diferentes pilhas.

Para cada pilha, foram obtidos quatro valores de ângulo:

$$\theta_N, \theta_S, \theta_L, \theta_O \quad (3.2)$$

em que θ_N , θ_S , θ_L e θ_O representam, respectivamente, os ângulos medidos nas direções norte, sul, leste e oeste.

O ângulo manual médio foi calculado pela média aritmética dessas quatro medições, conforme a Equação 3.3.

$$\theta_{manual} = \frac{\theta_N + \theta_S + \theta_L + \theta_O}{4} \quad (3.3)$$

Esse valor médio foi utilizado posteriormente como referência experimental para comparação com os ângulos estimados pelos métodos computacionais de fitting.

3.6 Aquisição e Tratamento da Nuvem de Pontos

A aquisição tridimensional foi realizada após as medições manuais das pilhas. O uso do escaneamento 3D permite representar a superfície da pilha por um conjunto discreto de pontos no espaço, conforme:

$$\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Essa representação fornece uma descrição mais completa da superfície quando comparada à medições lineares isoladas, uma vez que preserva informações relacionadas à geometria espacial da pilha, incluindo assimetrias, deformações locais, pequenas irregularidades e imperfeições de borda.

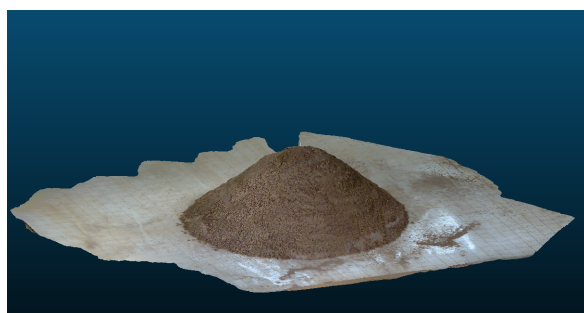
Após a aquisição, a nuvem de pontos foi submetida a diferentes etapas de processamento e tratamento, com o objetivo de isolar a geometria correspondente à pilha e padronizar sua posição e orientação antes da aplicação dos métodos de *fitting*. O tratamento realizado nessa etapa não tem como objetivo calcular diretamente o ângulo de repouso, mas preparar os dados de forma adequada para os procedimentos de ajuste geométrico apresentados posteriormente.

3.6.1 Escaneamento tridimensional e processamento inicial

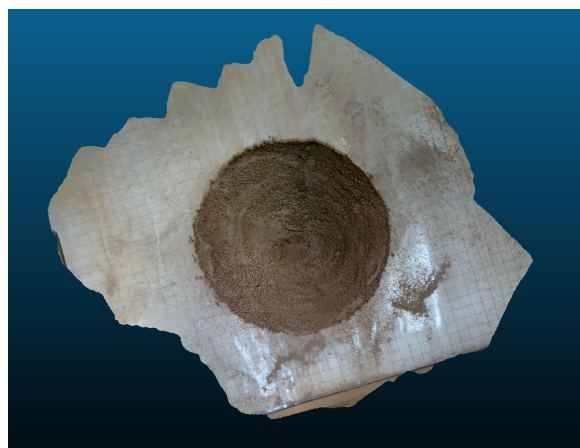
Cada pilha foi escaneada utilizando o *scanner 3D Creality Raptor*. Realizou-se um escaneamento para cada condição experimental, buscando garantir que toda a superfície visível da pilha fosse adequadamente capturada. Durante o processo de aquisição, utilizou-se o *software Creality Scan*, próprio do equipamento. O escaneamento era conduzido até que a superfície da pilha estivesse completamente registrada pelo *software*, de acordo com a indicação visual apresentada durante a aquisição. Esse procedimento buscou reduzir regiões sem informação e falhas na reconstrução da geometria, garantindo uma nuvem de pontos representativa da pilha formada.

Após a aquisição, foi realizado um processamento inicial no próprio *Creality Scan*, incluindo procedimentos automáticos de fusão, filtragem, suavização, remoção de ruídos e preenchimento de pequenas falhas na geometria. Ao final desse processamento, a nuvem de pontos foi exportada no formato *.ply*, utilizado posteriormente nas etapas de recorte, correção geométrica e *fitting*.

A Figura 11 apresenta uma das pilhas após o escaneamento e o processamento inicial realizado no *software Creality Scan*. São apresentadas duas visualizações da mesma nuvem de pontos, correspondentes às vistas frontal e superior.



(a) Vista frontal



(b) Vista superior

Figura 11 – Pilha escaneada e processada no software Crealty Scan em vista frontal e vista superior.

Fonte: Elaboração própria.

3.6.2 Recorte e preparação da nuvem de pontos

Após a exportação no formato `.ply`, foi realizado o tratamento inicial da nuvem de pontos com o objetivo de isolar somente a geometria correspondente à pilha. Para isso, utilizou-se o *software CloudCompare*, no qual foi efetuado o recorte manual da nuvem, removendo os pontos associados à mesa, ao ambiente e às demais regiões externas sem interesse para a análise. Dessa forma, foi preservada essencialmente a superfície correspondente ao material granular. Entretanto, mesmo após a remoção dos pontos externos, a posição e a orientação da nuvem ainda dependiam da posição da pilha durante o escaneamento e do sistema de coordenadas gerado durante a aquisição.

A Figura 12 apresenta a nuvem de pontos após o procedimento de recorte. Embora os elementos externos e as regiões indesejadas tenham sido removidos, observa-se que a pilha ainda se encontra descentralizada e com seus eixos desalinhados em relação ao sistema de coordenadas utilizado nas etapas posteriores.

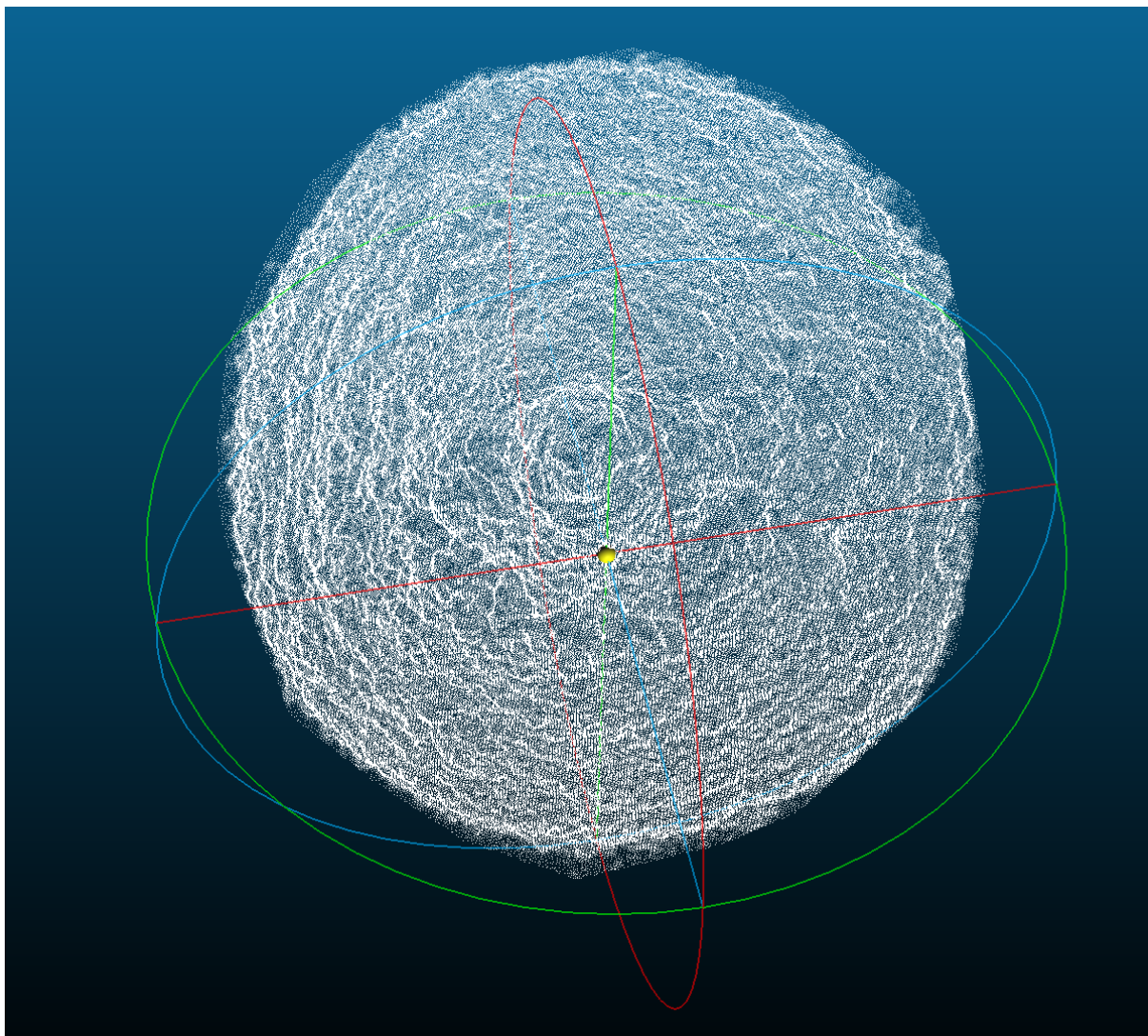


Figura 12 – Nuvem de pontos da pilha após o recorte, ainda descentralizada e desalinhada em relação ao sistema de coordenadas. Visualização realizada no software CloudCompare.

Fonte: Elaboração própria.

Após o recorte, a nuvem foi submetida a rotinas computacionais desenvolvidas em Python para corrigir sua posição e orientação espacial. Essa etapa é necessária porque a nuvem obtida pelo scanner pode apresentar inclinação, deslocamento em relação à origem, pequenas irregularidades na região da base e pontos externos residuais. Caso esses dados fossem utilizados diretamente, os métodos de *fitting* poderiam interpretar erros de aquisição ou desalinhamentos como características geométricas reais da pilha.

De forma geral, o objetivo desse tratamento é padronizar as diferentes nuvens de pontos de modo que a base da pilha fique aproximadamente paralela ao plano XY , a altura esteja orientada segundo o eixo Z , a base fique próxima de $z = 0$ e o centro da pilha permaneça próximo da origem. Dessa maneira, todos os métodos de ajuste passam a trabalhar sobre uma geometria organizada segundo um sistema de referência comum.

3.6.3 Tratamento geométrico e alinhamento da nuvem

A primeira etapa do tratamento geométrico consiste na determinação de uma orientação inicial da nuvem por meio da Análise de Componentes Principais (PCA). Essa técnica permite identificar as principais direções de variação dos pontos presentes na nuvem.

Considerando $\bar{\mathbf{p}}$ como a posição média dos pontos, tem-se:

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i. \quad (3.5)$$

A partir da média, os pontos são centralizados e organizados na matriz $\mathbf{X}$. A matriz de covariância correspondente pode ser expressa por:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}. \quad (3.6)$$

Por meio dos autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{C}$, são determinadas as principais direções da geometria. Neste procedimento, a direção associada ao menor autovalor é utilizada como uma aproximação inicial da normal da base da pilha, servindo como referência para orientar a nuvem em relação ao eixo vertical Z (JOLLIFFE; CADIMA, 2016).

Em seguida, é aplicada uma transformação rígida de rotação à nuvem de pontos, levando a direção inicialmente estimada para o eixo Z . Essa primeira transformação não corresponde necessariamente ao alinhamento definitivo da pilha, mas aproxima a nuvem da orientação desejada e facilita a identificação dos pontos pertencentes à região da base.

Após essa orientação inicial, são determinados os pontos candidatos à base da pilha. Para isso, a nuvem é analisada no plano XY , considerando a distância radial dos pontos em relação ao centro aproximado da geometria. O plano horizontal é dividido em diferentes setores angulares e, em cada setor, são selecionados pontos localizados simultaneamente em regiões mais externas e mais baixas da nuvem. Essa estratégia busca reduzir a possibilidade de pontos pertencentes à superfície lateral inclinada serem incorretamente classificados como parte da base.

Com os pontos candidatos definidos, é ajustado um plano representativo da superfície de apoio da pilha. Esse plano pode ser descrito pela expressão:

$$z = ax + by + c. \quad (3.7)$$

Após o ajuste, o erro de cada ponto em relação ao plano estimado é calculado por:

$$e_i = z_i - (ax_i + by_i + c). \quad (3.8)$$

Como parte dos pontos inicialmente selecionados pode não pertencer efetivamente à base, o ajuste é realizado de maneira iterativa. Inicialmente, o plano é estimado utilizando todos os pontos candidatos. Em seguida, são identificados os pontos que apresentam maior afastamento em relação ao plano obtido. Esses pontos são considerados discrepantes e removidos da próxima iteração. O procedimento é repetido até que o conjunto de pontos aceitos apresente estabilidade. Dessa forma, o plano final sofre maior influência dos pontos efetivamente associados à superfície de apoio e menor influência de pontos isolados, irregularidades ou elementos incorretamente classificados durante a seleção inicial.

A partir dos coeficientes a e b do plano ajustado, é calculado o vetor normal correspondente à base:

$$\mathbf{n}_{base} = \frac{(-a, -b, 1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}. \quad (3.9)$$

Esse vetor representa a orientação estimada da base após a primeira correção. A partir dele, é realizado um refinamento da rotação da nuvem, buscando tornar a base aproximadamente horizontal e, conseqüentemente, alinhada ao plano XY . Quando o ângulo entre a normal estimada da base e o eixo Z encontra-se dentro de um limite considerado aceitável pelo algoritmo, uma nova rotação é aplicada para realizar o alinhamento. Caso seja identificada uma diferença angular elevada, o refinamento é desconsiderado, evitando que uma possível detecção incorreta da base provoque uma transformação inadequada da nuvem.

Após a correção da orientação, realiza-se uma translação vertical para posicionar a base próxima de $z = 0$. Para isso, é determinada uma referência de altura a partir dos pontos identificados como pertencentes à base, sendo esse valor posteriormente subtraído das coordenadas z de todos os pontos. Na sequência, a nuvem é centralizada no plano XY . Para estimar o centro da pilha, utiliza-se a região superior da nuvem como referência, reduzindo a influência de irregularidades presentes nas extremidades da base. A partir dessa estimativa, são aplicadas translações nos eixos X e Y , posicionando o eixo aproximado da pilha próximo da origem do sistema de coordenadas.

Esse conjunto de transformações de translação e rotação permite corrigir diferenças decorrentes de pequenas inclinações da superfície de apoio, erros de posicionamento durante o escaneamento e variações na orientação inicial das nuvens de pontos. Assim, antes da aplicação dos métodos de *fitting*, todas as pilhas são organizadas segundo um sistema de referência equivalente.

3.6.4 Resultado do tratamento da nuvem

A padronização obtida nessa etapa reduz a influência de desalinhamentos e artefatos geométricos sobre os parâmetros estimados pelos métodos de ajuste, além de aumentar a

comparabilidade entre as diferentes pilhas analisadas. A partir dessa nuvem tratada, são aplicados os métodos de *fitting* utilizados para determinar os parâmetros geométricos e estimar o ângulo de repouso. Ao final do procedimento de tratamento geométrico, obtém-se uma nuvem de pontos mais padronizada, com a base aproximadamente paralela ao plano XY , a altura orientada segundo o eixo Z , a região inferior próxima de $z = 0$ e o centro da pilha localizado próximo da origem.

A Figura 13 apresenta o resultado obtido após os procedimentos de centralização e alinhamento. Essa correção permite que as etapas posteriores de análise geométrica e ajuste do cone ou tronco de cone sejam realizadas de maneira padronizada entre as diferentes condições experimentais.

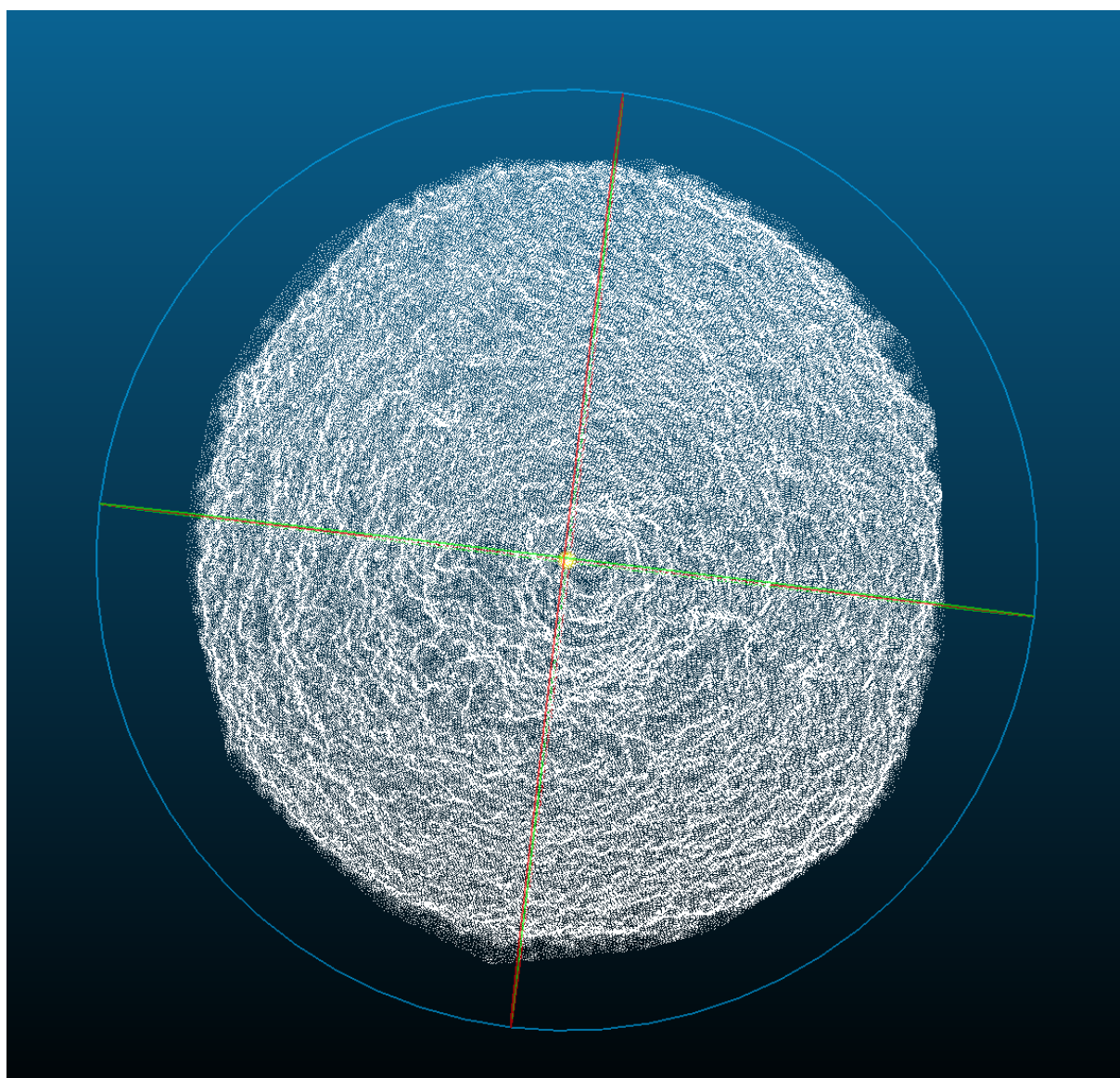


Figura 13 – Nuvem de pontos da pilha após a centralização e o alinhamento da base ao plano XY , com o eixo Z associado à altura. Visualização realizada no software CloudCompare.

Fonte: Elaboração própria.

3.7 Métodos de Ajuste do Tronco de Cone

3.7.1 Preparação Comum

A primeira etapa comum aos métodos, consiste em definir uma estimativa inicial para os parâmetros do cone ou tronco de cone. A altura inicial H_0 é tomada a partir da maior altura válida do perfil, com uma pequena margem para compensar eventuais irregularidades no topo. O raio inicial da base $R_{base,0}$ é obtido a partir das regiões inferiores do perfil, nas quais se espera encontrar os maiores valores de raio. Já o raio inicial do topo $R_{topo,0}$ é estimado a partir das regiões superiores, respeitando a condição física de que o topo deve ser menor que a base. Essa estimativa inicial fornece um ponto de partida coerente para os métodos iterativos e também uma referência para os métodos baseados em busca local.

Em seguida, são definidos os limites físicos dos parâmetros. Esses limites impedem que os algoritmos retornem soluções geometricamente inválidas, como troncos de cone com $R_{topo} \geq R_{base}$, alturas muito diferentes da altura observada da pilha ou ângulos incompatíveis com a geometria esperada. Assim, ainda que cada método explore o espaço de soluções de forma diferente, todos ficam sujeitos às mesmas restrições. Em termos gerais, impõe-se:

$$H_{min} \leq H \leq H_{max}, \quad (3.10)$$

$$0 \leq R_{topo} < R_{base}, \quad (3.11)$$

e uma faixa admissível para o ângulo de inclinação da pilha. Essas restrições funcionam como um controle de coerência física do ajuste.

Outra etapa comum é a definição da função de avaliação dos parâmetros. Para cada conjunto de parâmetros testado, calcula-se o raio previsto pelo modelo nas alturas do perfil e compara-se esse valor com o raio observado da borda. A partir dos resíduos, são calculadas métricas de erro, como erro médio absoluto, erro quadrático médio e erros percentuais. Além disso, pode-se penalizar soluções em que o modelo ultrapassa excessivamente a borda observada ou produz um topo desproporcionalmente grande. Dessa forma, a escolha do melhor candidato não depende apenas do menor erro numérico, mas também da coerência geométrica da solução.

Essa função de avaliação é essencial para permitir a comparação entre métodos diferentes. A busca em grade utiliza o score para escolher o melhor candidato dentro de uma vizinhança discreta. O método das fatias horizontais avalia diferentes conversões da reta ajustada para o modelo troncocônico. Os mínimos quadrados e os mínimos quadrados robustos utilizam os resíduos como base da otimização. O RANSAC emprega a avaliação para comparar modelos obtidos a partir de diferentes conjuntos de *inliers*. Já o ICP utiliza

a etapa comum para gerar o modelo inicial e, posteriormente, refinar os parâmetros após o alinhamento tridimensional.

Também é comum a todos os métodos a verificação final dos resultados. Após cada ajuste, os parâmetros estimados são convertidos em grandezas de interesse, como ângulo de inclinação, altura, raios da base e do topo e volume aproximado do tronco de cone. Esses valores permitem interpretar fisicamente o resultado, comparar diferentes métodos e verificar se a solução obtida é compatível com o comportamento esperado de uma pilha granular.

Por fim, todos os métodos são avaliados por meio das mesmas métricas e dos mesmos arquivos de saída, como registros numéricos dos parâmetros, histórico de tentativas, gráficos do perfil ajustado e visualizações tridimensionais. Essa padronização torna a comparação mais justa, pois a diferença entre os resultados passa a estar associada ao desempenho do método de ajuste, e não a diferenças na preparação dos dados ou na forma de avaliação.

3.8 Aplicação dos Métodos de Fitting

Com a nuvem de pontos tratada, foram aplicados diferentes métodos de ajuste geométrico para estimar a forma cônica ou troncocônica que melhor representasse a pilha. O objetivo desses métodos foi obter parâmetros geométricos da pilha, como altura, raio da base, raio do topo e ângulo de repouso estimado.

Os métodos de fitting aplicados foram:

- busca em grade;
- ajuste por fatias horizontais;
- mínimos quadrados não lineares;
- mínimos quadrados com função de perda Soft-L1;
- RANSAC;
- ICP.

Cada método foi executado 50 vezes para cada pilha. Essas execuções utilizaram inicializações diferentes, com o objetivo de reduzir a influência de uma única condição inicial sobre o resultado final. Dessa forma, buscou-se avaliar o comportamento geral de cada método, em vez de considerar apenas uma execução isolada. O resultado final de cada método, para cada condição de umidade, foi definido a partir da mediana dos ângulos obtidos nas 50 execuções. A escolha da mediana foi adotada por ser uma medida menos

sensível a valores extremos, permitindo representar melhor o comportamento típico do método quando ocorrem variações entre as execuções.

Além disso, foi utilizado um critério de paciência durante a execução dos algoritmos. Esse critério consiste em interromper o processo quando não há melhoria no resultado após um número definido de tentativas ou iterações consecutivas. Assim, evita-se que o algoritmo continue executando por muitas etapas sem apresentar melhoria significativa no ajuste. Esse critério foi importante para reduzir o tempo computacional e tornar a execução dos métodos mais eficiente, principalmente nas etapas em que o processo de ajuste não apresentava melhora relevante.

3.9 Ajuste da Relação entre Umidade e Ângulo de Repouso

Após a obtenção dos ângulos de repouso para as diferentes condições de umidade, foi realizado um ajuste matemático com o objetivo de representar a relação entre a umidade da areia e o ângulo de repouso das pilhas. Para essa etapa, os dados experimentais foram inseridos no *software Origin*, no qual foram testadas funções capazes de descrever o comportamento observado.

A função selecionada para representar os dados foi uma equação logarítmica, expressa por:

$$y = a + b \ln(x + c), \quad (3.12)$$

em que y representa o ângulo de repouso estimado, x corresponde à porcentagem de umidade da amostra, a e b são os parâmetros determinados durante o ajuste e c é uma constante definida como 1. Dessa forma, a equação utilizada pode ser escrita como:

$$y = a + b \ln(x + 1). \quad (3.13)$$

A adoção de $c = 1$ permite incluir no ajuste a condição de areia seca, correspondente a $x = 0$, evitando a indeterminação associada ao cálculo de $\ln(0)$. Nessa condição, o termo logarítmico é igual a zero e o parâmetro a representa o valor estimado do ângulo de repouso para a amostra sem adição de água. Os parâmetros a e b foram estimados pelo procedimento de regressão não linear disponível no Origin. A adequação do modelo foi analisada considerando a proximidade entre os valores experimentais e os valores calculados pela equação, o coeficiente de determinação e a distribuição dos resíduos do ajuste. Esse procedimento possibilitou obter uma expressão matemática representativa da variação do ângulo de repouso em função da umidade da areia.

4 Resultados

Este capítulo apresenta e discute os resultados obtidos por meio das medições manuais do ângulo de repouso com o goniômetro e da aplicação dos diferentes métodos de ajuste geométrico às nuvens de pontos das pilhas de areia. A análise contempla a variação do ângulo de repouso em função da umidade, as características dos resultados produzidos por cada procedimento e os ajustes matemáticos realizados no *software Origin*. Para representar matematicamente a relação entre a umidade e o ângulo de repouso, foi adotado um modelo logarítmico. A análise dos coeficientes obtidos permitiu identificar a tendência geral dos dados, avaliar a intensidade de crescimento do ângulo e verificar a proximidade entre os comportamentos apresentados pelos diferentes procedimentos de medição e ajuste.

4.1 Resultados das Medições com o Goniômetro

O ângulo de repouso foi medido manualmente em quatro regiões de cada pilha, correspondentes às direções norte, sul, leste e oeste. Esse procedimento permitiu considerar as variações de inclinação ao redor da amostra, uma vez que as pilhas experimentais não apresentaram simetria perfeitamente uniforme. Para cada condição de umidade, o ângulo manual médio foi calculado conforme a Equação 3.3.

Além da variação entre as quatro direções, foi considerado o erro de leitura do goniômetro, adotado como igual a 2° . Para incorporar as duas fontes de variação em um único valor, foi calculado um desvio-padrão combinado, dado por:

$$s_{\text{comb}} = \sqrt{s_{\text{dir}}^2 + e_{\text{gon}}^2}, \quad (4.1)$$

em que s_{comb} representa o desvio-padrão combinado, s_{dir} corresponde ao desvio-padrão das quatro medições direcionais e e_{gon} é o erro atribuído ao goniômetro, igual a 2° .

Dessa forma, o valor apresentado na última coluna da Tabela 1 considera simultaneamente a dispersão espacial da inclinação da pilha e a limitação de leitura do instrumento.

Tabela 1 – Ângulos de repouso medidos com o goniômetro e respectivos desvios-padrão combinados.

Umidade (%)	Norte (°)	Sul (°)	Leste (°)	Oeste (°)	Média (°)	DP combinado (°)
0	32,00	34,50	31,00	35,00	33,13	2,78
1	39,00	41,00	40,00	40,00	40,00	2,16
2	39,00	40,00	41,00	40,00	40,00	2,16
3	40,00	43,00	42,00	38,00	40,75	2,99
4	42,00	42,00	40,00	42,00	41,50	2,24
5	43,00	41,00	45,00	42,00	42,75	2,63
6	40,00	44,00	42,00	45,00	42,75	2,99
7	47,00	46,00	45,00	46,00	46,00	2,16
8	47,00	47,00	46,00	45,00	46,25	2,22
9	48,00	47,00	45,00	45,00	46,25	2,50
10	49,00	46,00	49,00	50,00	48,50	2,64
13	50,50	48,00	50,00	53,00	50,38	2,87
14	49,00	45,00	50,00	47,00	47,75	2,99
15	49,00	45,50	49,00	45,00	47,13	2,95
17	50,00	49,00	48,00	48,00	48,75	2,22
21	46,00	46,00	52,00	48,00	48,00	3,47
23	52,00	52,00	51,00	55,00	52,50	2,64

Os resultados indicam uma tendência geral de aumento do ângulo de repouso com a elevação da umidade. Na condição seca, correspondente a 0%, foi obtido um ângulo médio de 33,13°. Com a adição de 1% de umidade, o valor médio passou para 40,00°, evidenciando uma alteração expressiva já nas primeiras adições de água.

Nas condições seguintes, o crescimento ocorreu de maneira menos acentuada e acompanhado de oscilações locais. Foram obtidos valores médios de 46,00° em 7%, 48,50° em 10%, 50,38° em 13% e 52,50° em 23%. Esse comportamento sugere que o efeito da umidade é mais intenso nas primeiras adições de água e se torna progressivamente menos acentuado com o aumento do teor de umidade.

O crescimento do ângulo não ocorreu de maneira estritamente monotônica. Observaram-se reduções entre algumas condições consecutivas, especialmente entre 13% e 15%, bem como nas condições de 19% e 21%. Essas oscilações podem estar relacionadas à distribuição não uniforme da água, ao processo de deposição, à formação de irregularidades superficiais e às diferenças de inclinação ao redor de uma mesma pilha.

O desvio-padrão combinado médio foi de aproximadamente 2,59°. O menor valor foi observado na condição de 19%, com 2,06°, enquanto o maior foi obtido na condição de 21%, com 3,47°. A maior dispersão em 21% decorre principalmente da diferença entre as

quatro direções, cujas leituras variaram de $46,00^\circ$ a $52,00^\circ$.

A medição com o goniômetro apresenta como principais vantagens a simplicidade, a rapidez e a possibilidade de obtenção direta da inclinação em regiões específicas da pilha. O procedimento também permite identificar diferenças direcionais que não seriam observadas caso fosse adotada apenas uma medida global. Por outro lado, a leitura depende do posicionamento do instrumento e da escolha do trecho da superfície utilizado para o alinhamento, tornando-a sensível às irregularidades locais e à atuação do operador.

4.2 Resultados dos Métodos de Ajuste Geométrico

Os métodos de busca em grade, fatias horizontais, mínimos quadrados convencionais, mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1*, RANSAC e ICP foram aplicados às nuvens de pontos previamente tratadas. Os valores apresentados correspondem às médias dos ângulos obtidos nas execuções consideradas válidas para cada pilha.

A Figura 14 apresenta exemplos dos ajustes obtidos pelos métodos ICP e mínimos quadrados para a pilha com 10% de umidade. A sobreposição entre a superfície ajustada e a nuvem de pontos permite observar qualitativamente como o modelo geométrico acompanha a inclinação global da pilha.

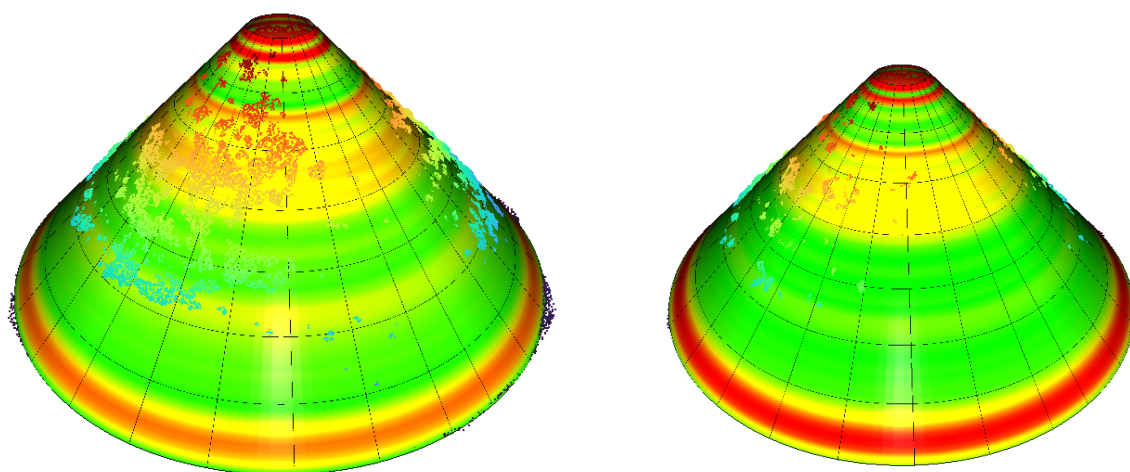


Figura 14 – Exemplos de ajuste geométrico para a pilha com 10% de umidade. À esquerda, apresenta-se o resultado obtido pelo método ICP e, à direita, o resultado obtido pelo método de mínimos quadrados. A variação das cores representa a diferença radial entre a superfície ajustada e a superfície escaneada.

Fonte: Elaboração própria.

A variação das cores representa o erro radial ao longo da altura, calculado a partir da diferença entre o raio previsto pelo modelo ajustado e o raio observado na superfície escaneada para diferentes valores de z . Dessa forma, regiões com diferentes cores indicam

variações na concordância entre o modelo troncocônico e a geometria real. A região próxima ao topo tende a apresentar maior dificuldade de representação. Essa parte da pilha possui menor raio, menor quantidade de pontos e maior influência de pequenas irregularidades locais. Consequentemente, pequenas diferenças de posição podem produzir variações proporcionalmente maiores no erro radial.

A Tabela 2 apresenta os ângulos médios estimados pelos seis métodos de ajuste geométrico.

Tabela 2 – Ângulos médios obtidos pelos métodos de ajuste geométrico das pilhas.

Umidade (%)	Busca em grade (°)	Fatias horizontais (°)	ICP (°)	Mínimos quadrados (°)	Mínimos quadrados robustos (°)	RANSAC (°)
0	33,36	33,57	32,52	33,19	33,19	33,63
1	39,34	40,13	38,39	38,42	38,43	38,43
2	37,40	37,87	39,14	37,11	37,11	37,11
3	43,10	43,20	39,19	43,00	43,00	43,00
4	41,38	42,18	43,97	41,16	41,16	41,16
5	45,18	45,40	44,51	45,42	45,42	45,42
6	45,78	45,83	45,45	45,91	45,91	45,90
7	44,44	45,10	45,38	44,22	44,22	44,22
8	45,04	46,21	45,17	44,68	44,68	44,68
9	48,42	47,85	47,19	48,26	48,26	47,69
10	45,68	46,75	46,14	45,63	45,63	45,62
13	47,86	47,59	47,93	48,13	48,12	48,12
14	48,13	48,89	47,10	47,77	47,77	47,77
15	47,70	48,34	46,31	47,11	47,11	47,09
17	50,29	50,25	49,54	49,91	49,91	49,91
21	51,14	49,66	49,85	51,10	51,10	51,10
23	53,35	49,58	52,11	53,49	53,49	53,57

De maneira geral, os resultados dos métodos de ajuste apresentaram crescimento do ângulo com a elevação da umidade. Na condição seca, os valores ficaram entre 32,52° e 33,63°. Nas maiores condições de umidade analisadas, foram obtidos valores próximos ou superiores a 50° para a maior parte dos métodos. Também foram observadas oscilações entre condições consecutivas. Esse comportamento mostra que os ajustes geométricos preservaram parte das variações existentes nas nuvens de pontos, em vez de produzir uma sequência artificialmente crescente. As variações podem decorrer de mudanças reais na forma das pilhas, assimetrias, irregularidades superficiais e diferenças na distribuição radial dos pontos. Os resultados dos mínimos quadrados convencionais, mínimos quadrados robustos e RANSAC foram bastante próximos em grande parte das condições. Essa proximidade indica que o tratamento prévio das nuvens reduziu a influência de pontos discrepantes e permitiu que diferentes estratégias de otimização convergissem para geometrias semelhantes.

A Figura 15 reúne, em uma única representação, a evolução dos ângulos obtidos pelos diferentes procedimentos em função da umidade. A apresentação conjunta facilita a visualização da tendência geral de crescimento e das oscilações observadas ao longo das condições experimentais.

A proximidade visual entre várias curvas indica que os procedimentos identificaram

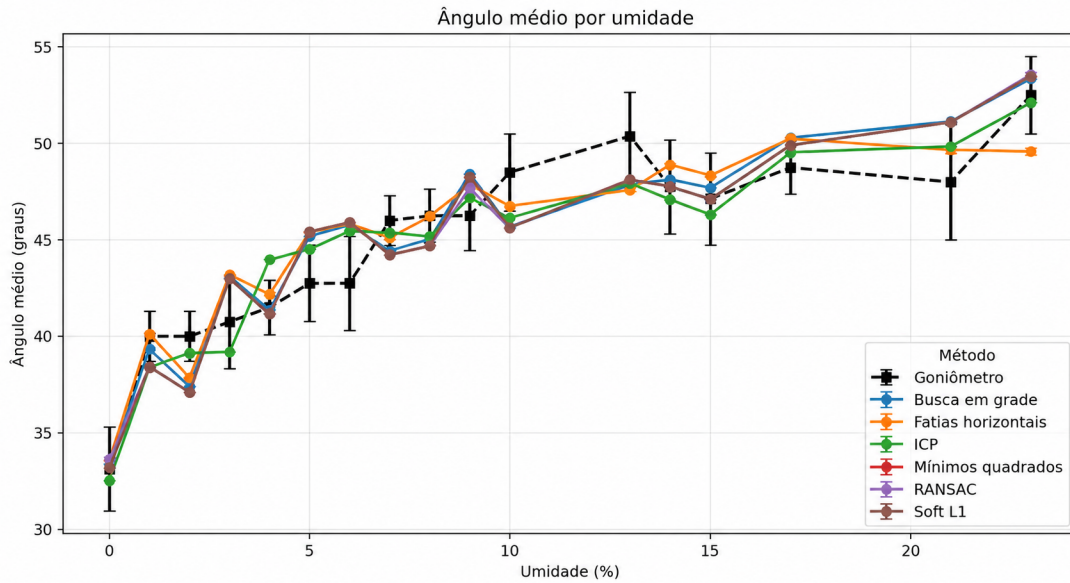


Figura 15 – Variação do ângulo de repouso em função da umidade, considerando as medições realizadas com o goniômetro e os resultados obtidos pelos diferentes métodos de ajuste geométrico.

Fonte: Elaboração própria.

uma tendência global semelhante. Entretanto, cada método responde de maneira particular às irregularidades da superfície e à forma como as informações tridimensionais são utilizadas. Essas diferenças justificam a análise individual das características e das vantagens de cada abordagem.

4.3 Análise Matemática e Estatística da Relação entre Umidade e Ângulo

A relação entre a umidade e o ângulo de repouso foi analisada no *software Origin* por meio de um modelo logarítmico. A equação utilizada foi

$$y = a + b \ln(x + 1), \quad (4.2)$$

em que x representa a umidade da amostra em porcentagem, y representa o ângulo de repouso em graus, a é o valor previsto para a condição seca e b controla a intensidade de crescimento da curva.

Quando $x = 0$, tem-se $\ln(1) = 0$. Portanto,

$$y(0) = a. \quad (4.3)$$

Assim, o parâmetro a pode ser interpretado como a estimativa do ângulo de repouso para a areia sem adição de água.

A primeira derivada do modelo é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{x+1}. \quad (4.4)$$

Como os valores obtidos para b são positivos, o modelo representa um aumento do ângulo com a umidade. Entretanto, o denominador $x+1$ aumenta progressivamente, fazendo com que a taxa de crescimento diminua à medida que a umidade se eleva.

A segunda derivada é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{(x+1)^2}. \quad (4.5)$$

Para $b > 0$, a segunda derivada é negativa, caracterizando uma curva crescente com concavidade voltada para baixo. Esse formato representa um crescimento mais intenso nas primeiras adições de água, seguido por aumentos progressivamente menores.

A Tabela 3 apresenta os parâmetros encontrados para cada conjunto de resultados, juntamente com as incertezas fornecidas pelo ajuste, a estatística χ^2 e o coeficiente de determinação R^2 .

Tabela 3 – Parâmetros dos ajustes logarítmicos da relação entre umidade e ângulo de repouso.

Procedimento	a	b	χ^2	R^2
Goniômetro	$34,53465 \pm 1,02767$	$4,99651 \pm 0,46399$	2,63352	0,88546
Busca em grade	$33,68715 \pm 0,91301$	$5,60380 \pm 0,41222$	2,07866	0,92492
Fatias horizontais	$34,91173 \pm 0,78591$	$5,02896 \pm 0,35484$	1,54018	0,93051
ICP	$33,59014 \pm 0,77597$	$5,42894 \pm 0,35035$	1,50149	0,94120
Mínimos quadrados	$33,31626 \pm 0,96647$	$5,69641 \pm 0,43636$	2,32920	0,91910
Mínimos quadrados robustos	$33,31978 \pm 0,96666$	$5,69475 \pm 0,43644$	2,33010	0,91903
RANSAC	$33,47876 \pm 0,94776$	$5,61486 \pm 0,42791$	2,23990	0,91986

Os valores encontrados para a permaneceram entre $33,31626^\circ$ e $34,91173^\circ$, resultando em uma amplitude inferior a $1,60^\circ$. Essa proximidade mostra que os diferentes procedimentos produziram estimativas semelhantes para o ângulo correspondente à condição seca.

Os valores do parâmetro b ficaram entre 4,99651 e 5,69641. A amplitude entre os extremos foi de aproximadamente 0,70, indicando que os diferentes conjuntos também apresentaram intensidades de crescimento semelhantes. Portanto, apesar das diferenças pontuais entre os ângulos obtidos em determinadas condições de umidade, os parâmetros matemáticos descrevem comportamentos globais próximos.

Os coeficientes de determinação variaram entre 0,88546 e 0,94120. Esses resultados mostram que o modelo logarítmico representou uma parcela elevada da variação dos ângulos observados. O maior coeficiente foi obtido para os resultados do ICP, com $R^2 = 0,94120$, acompanhado do menor valor de χ^2 , igual a 1,50149.

O método de fatias horizontais também apresentou elevada adequação ao modelo, com $R^2 = 0,93051$ e $\chi^2 = 1,54018$. Busca em grade, mínimos quadrados, mínimos quadrados robustos e RANSAC apresentaram coeficientes de determinação próximos, situados entre aproximadamente 0,919 e 0,925.

Os valores de χ^2 devem ser interpretados como indicadores da dispersão residual dos respectivos ajustes. Como a quantidade de pontos utilizada na série do goniômetro não é necessariamente igual à das séries computacionais, essa estatística foi utilizada principalmente como informação descritiva do ajuste, e não como critério isolado de classificação dos procedimentos.

As equações obtidas são modelos empíricos ajustados ao intervalo experimental considerado. Portanto, não devem ser extrapoladas para condições de umidade muito superiores às analisadas sem a realização de novos ensaios.

4.3.1 Ajuste logarítmico das leituras do goniômetro

Para as médias obtidas com o goniômetro, a equação ajustada foi

$$y = 34,5346 + 4,9965 \ln(x + 1). \quad (4.6)$$

O parâmetro $a = 34,5346$ representa o ângulo estimado pelo modelo para a condição seca. O parâmetro $b = 4,9965$ indica um crescimento acentuado nas primeiras adições de água, seguido por uma redução gradual da taxa de aumento.

O coeficiente $R^2 = 0,88546$ mostra que o modelo logarítmico descreve adequadamente a tendência geral das medições, embora as leituras apresentem oscilações locais. Essas oscilações são coerentes com a natureza da medição manual, que considera inclinações específicas da superfície e é influenciada pelas assimetrias formadas em cada pilha.

A principal vantagem do goniômetro é fornecer uma leitura direta e facilmente interpretável, sem necessidade de escaneamento ou processamento computacional. Além disso, a realização de medições em várias direções permite avaliar a assimetria da pilha. Sua principal limitação é a dependência do posicionamento manual e da região escolhida para a leitura.

4.3.2 Ajuste logarítmico da busca em grade

Para o método de busca em grade, a equação encontrada foi

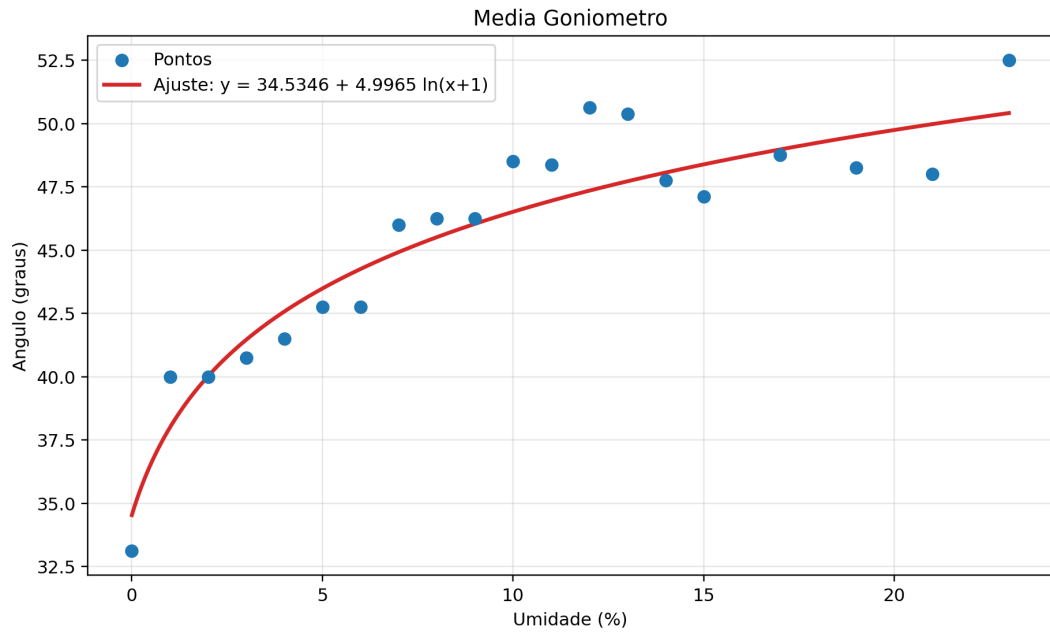


Figura 16 – Ajuste logarítmico aplicado às médias dos ângulos de repouso medidos com o goniômetro.

Fonte: Elaboração própria.

$$y = 33,6872 + 5,6038 \ln(x + 1). \quad (4.7)$$

O parâmetro $a = 33,6872$ representa a estimativa do ângulo na condição seca, enquanto $b = 5,6038$ caracteriza a intensidade de crescimento em função da umidade. O ajuste apresentou $R^2 = 0,92492$, indicando boa representação da tendência dos resultados.

A principal vantagem da busca em grade é a transparência do procedimento. O método testa explicitamente diferentes combinações de altura, raio da base e raio do topo, permitindo acompanhar a influência de cada parâmetro na solução. Além disso, não depende do cálculo de derivadas. Como limitação, o custo computacional aumenta com o refinamento da grade e com a ampliação do intervalo de busca.

4.3.3 Ajuste logarítmico das fatias horizontais

Para o método de fatias horizontais, a equação ajustada foi

$$y = 34,9117 + 5,0290 \ln(x + 1). \quad (4.8)$$

O método apresentou o maior valor de a , igual a 34,9117, e um parâmetro $b = 5,0290$. Esse resultado corresponde a uma curva com valor inicial relativamente elevado e crescimento mais gradual. O coeficiente de determinação foi $R^2 = 0,93051$.

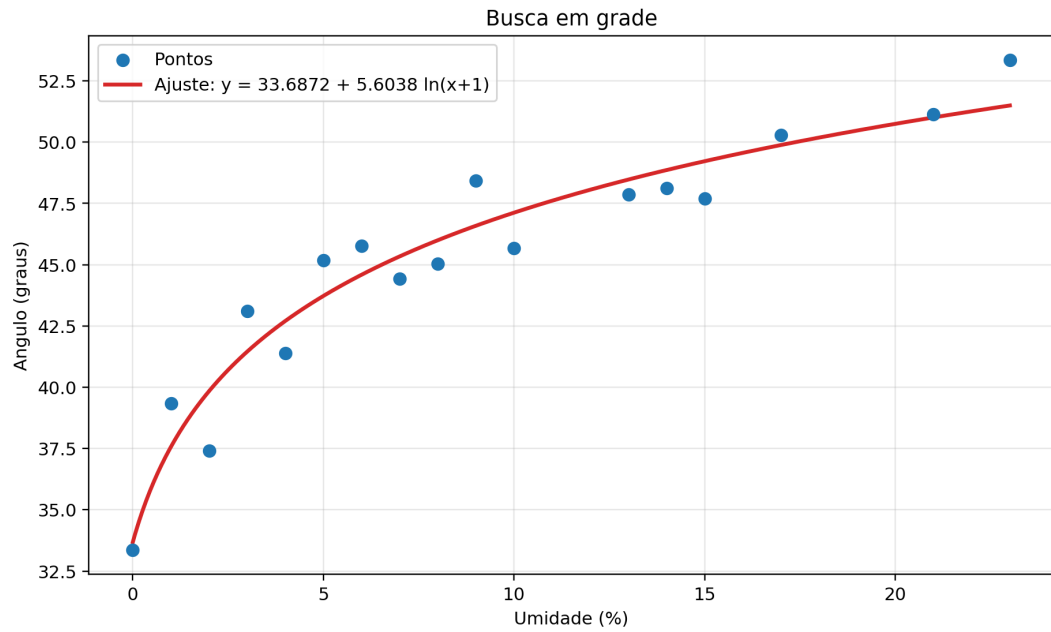


Figura 17 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de busca em grade.

Fonte: Elaboração própria.

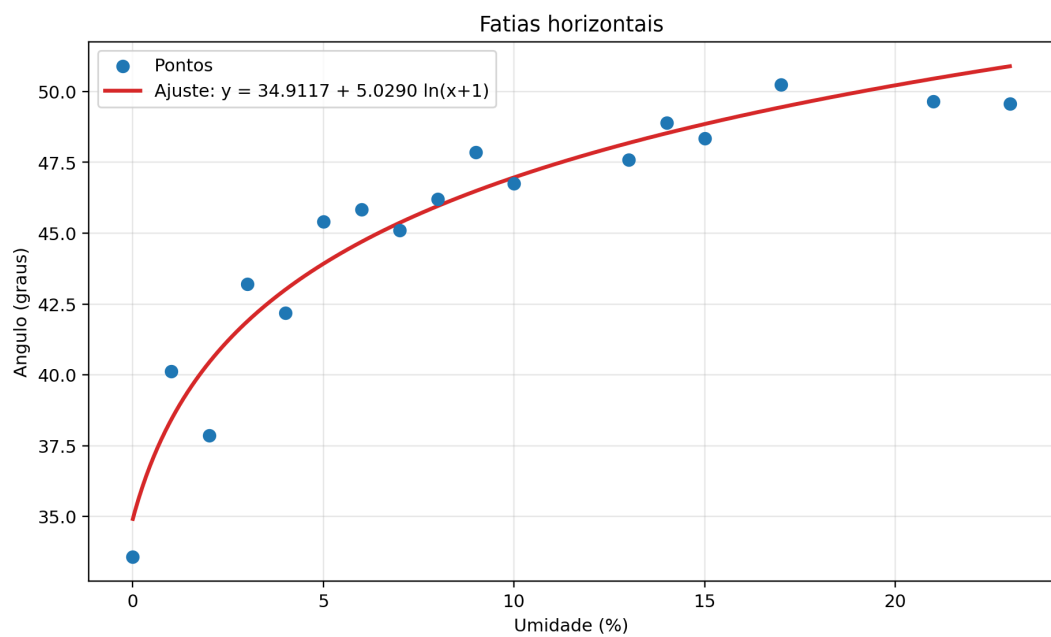


Figura 18 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de fatias horizontais.

Fonte: Elaboração própria.

A principal vantagem das fatias horizontais é a relação direta com a geometria do cone ou tronco de cone. O método analisa a variação do raio ao longo da altura e transforma o problema tridimensional em um ajuste do perfil radial. Isso proporciona rapidez, simplicidade matemática e interpretação geométrica clara. Entretanto, seu resultado depende da qualidade da extração da borda e da regularidade das seções horizontais.

4.3.4 Ajuste logarítmico do ICP

Para o método ICP, foi obtida a equação

$$y = 33,5901 + 5,4289 \ln(x + 1). \quad (4.9)$$

Os parâmetros $a = 33,5901$ e $b = 5,4289$ permaneceram próximos aos encontrados para os demais métodos. O ajuste apresentou $R^2 = 0,94120$ e $\chi^2 = 1,50149$, indicando baixa dispersão residual em torno da curva logarítmica.

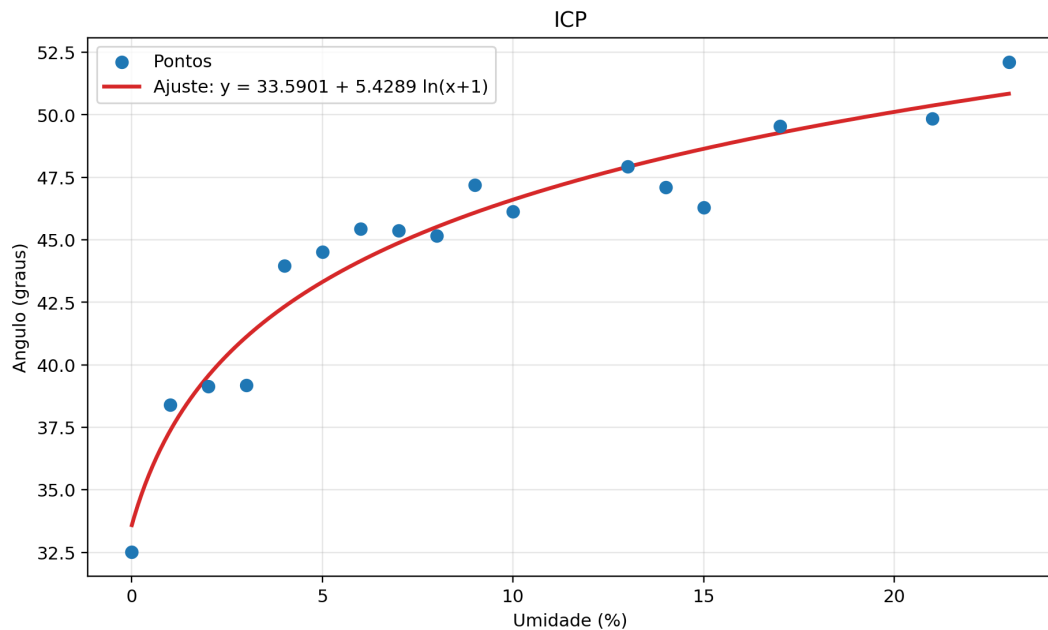


Figura 19 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método ICP.

Fonte: Elaboração própria.

A principal vantagem do ICP é a utilização direta da geometria tridimensional da pilha. O método procura alinhar espacialmente a superfície artificial e a nuvem de pontos, podendo compensar pequenos deslocamentos e diferenças de orientação. Essa característica favorece a utilização das informações distribuídas ao longo de toda a superfície. Como limitação, o resultado depende de uma inicialização suficientemente próxima e apresenta maior custo computacional.

4.3.5 Ajuste logarítmico dos mínimos quadrados

Para os mínimos quadrados convencionais, a equação encontrada foi

$$y = 33,3163 + 5,6964 \ln(x + 1). \quad (4.10)$$

Esse método apresentou o menor valor de a , igual a 33,3163, e o maior valor de b , igual a 5,6964. Dessa forma, a curva parte de um valor inicial ligeiramente menor e apresenta crescimento inicial mais intenso. O coeficiente de determinação foi $R^2 = 0,91910$.

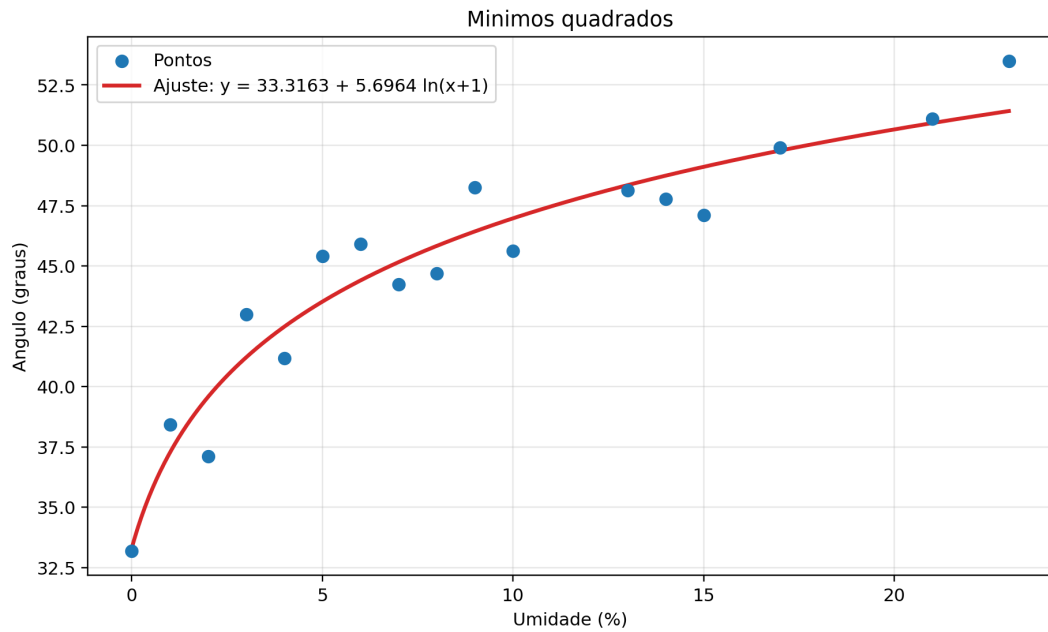


Figura 20 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de mínimos quadrados.

Fonte: Elaboração própria.

A principal vantagem dos mínimos quadrados é a obtenção direta e contínua dos parâmetros do modelo, sem a necessidade de discretizar o espaço de busca. O método possui implementação relativamente simples e comportamento determinístico. Sua principal limitação é a sensibilidade a resíduos elevados, uma vez que os erros são elevados ao quadrado durante a otimização.

4.3.6 Ajuste logarítmico dos mínimos quadrados robustos

Para os mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1*, a equação obtida foi

$$y = 33,3198 + 5,6947 \ln(x + 1). \quad (4.11)$$

Os parâmetros $a = 33,3198$ e $b = 5,6947$ foram muito próximos aos encontrados pelos mínimos quadrados convencionais. Os coeficientes de determinação também foram semelhantes, com $R^2 = 0,91903$.

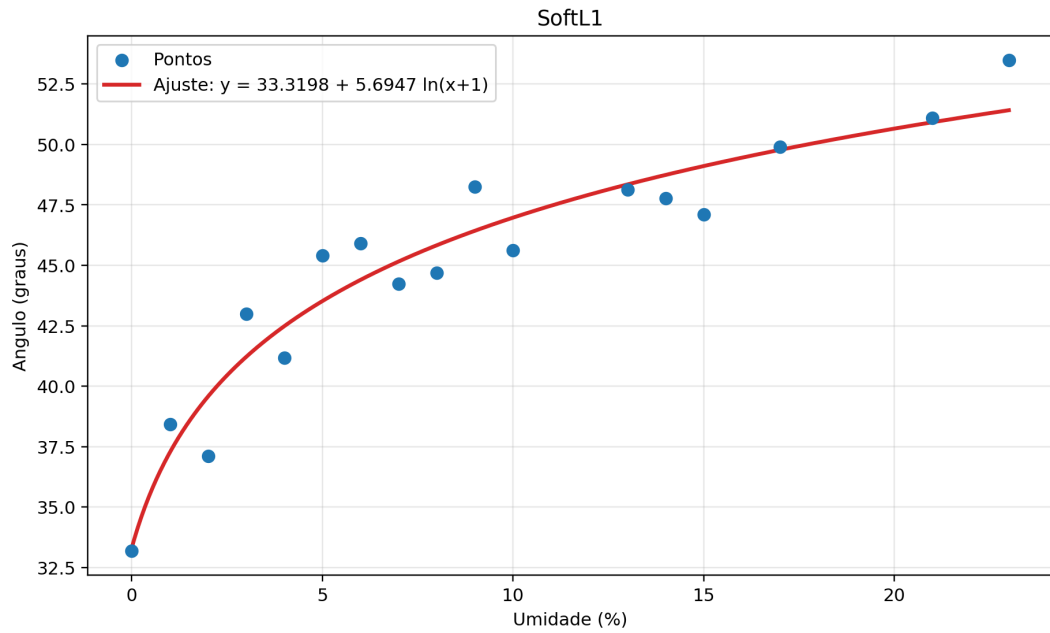


Figura 21 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método de mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1*.

Fonte: Elaboração própria.

A principal vantagem da perda *soft-L1* é reduzir a influência de resíduos elevados sem eliminar completamente os pontos correspondentes. Dessa forma, o método mantém a continuidade do ajuste e acrescenta resistência a irregularidades localizadas ou falhas de leitura. A proximidade em relação aos mínimos quadrados convencionais indica que os dados tratados não apresentaram uma quantidade suficientemente elevada de pontos discrepantes para provocar alterações expressivas nos parâmetros finais.

4.3.7 Ajuste logarítmico do RANSAC

Para o método RANSAC, foi obtida a equação

$$y = 33,4788 + 5,6149 \ln(x + 1). \quad (4.12)$$

Os parâmetros $a = 33,4788$ e $b = 5,6149$ também permaneceram próximos aos valores encontrados pelos mínimos quadrados. O ajuste apresentou $R^2 = 0,91986$ e $\chi^2 = 2,23990$.

A principal vantagem do RANSAC é a capacidade de identificar um conjunto de pontos compatíveis com a tendência predominante, reduzindo a influência de valores discrepantes antes do ajuste final. Essa característica é especialmente útil quando a nuvem apresenta regiões contaminadas ou perfis de borda inadequados. Em contrapartida, o método depende da definição do limiar de aceitação, da quantidade de iterações e das amostras aleatórias selecionadas.

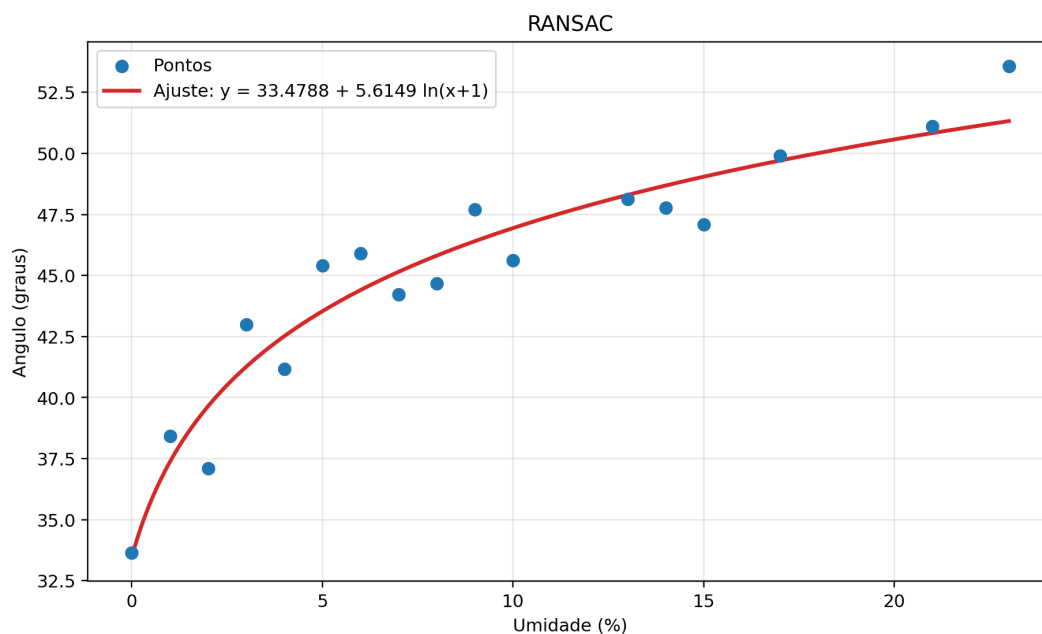


Figura 22 – Ajuste logarítmico dos ângulos obtidos pelo método RANSAC.

Fonte: Elaboração própria.

Em conjunto, os ajustes logarítmicos mostram que os diferentes procedimentos produziram parâmetros próximos e descreveram uma mesma tendência física geral. O ângulo de repouso apresentou crescimento acentuado nas primeiras adições de água, seguido por uma redução progressiva da taxa de aumento. As diferenças entre os métodos ocorreram principalmente em condições específicas, enquanto a forma global das curvas permaneceu semelhante.

5 Conclusão

Com o propósito de analisar diferentes procedimentos para a determinação do ângulo de repouso de pilhas granulares em distintas condições de umidade, foram consideradas as medições manuais realizadas com goniômetro e os métodos de ajuste geométrico aplicados às nuvens de pontos obtidas por escaneamento tridimensional. As pilhas de areia foram formadas em condições controladas, medidas, escaneadas e submetidas às etapas de recorte, centralização e alinhamento. Em seguida, foram aplicados os métodos de busca em grade, fatias horizontais, mínimos quadrados, mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1*, RANSAC e ICP.

A geometria global das pilhas foi representada por modelos cônicos ou troncocônicos, relacionando a altura e os raios da base e do topo ao ângulo de repouso. A influência da umidade também foi avaliada pelo modelo logarítmico $y = a + b \ln(x + 1)$, ajustado no software Origin, permitindo analisar a tendência geral dos resultados e o comportamento dos diferentes métodos.

As medições realizadas com o goniômetro indicaram uma tendência de aumento do ângulo de repouso com a elevação da umidade. Esse crescimento foi mais acentuado nas primeiras adições de água e tornou-se progressivamente menor nas condições seguintes. Apesar da tendência geral, foram observadas oscilações entre algumas umidades, demonstrando que o comportamento das pilhas não ocorreu de maneira estritamente monotônica.

Essas oscilações podem ser relacionadas à própria natureza do material granular e às limitações do procedimento experimental. Mesmo com a padronização da massa de areia, da deposição e da homogeneização, ocorreram pequenas diferenças na distribuição de umidade, compactação, assimetria, rugosidade e geometria das pilhas. Nas medições manuais, também houve influência da posição escolhida para o goniômetro e da variação da inclinação ao longo da superfície.

Os métodos computacionais reproduziram a mesma tendência observada nas medições manuais, apresentando ângulos maiores nas condições de maior umidade. Dessa forma, a geometria extraída das nuvens de pontos mostrou-se capaz de representar as alterações provocadas pela adição de água ao material e de fornecer uma descrição global da inclinação das pilhas.

De modo geral, os diferentes métodos apresentaram resultados bastante próximos. Essa semelhança ocorreu porque todos foram aplicados às mesmas nuvens de pontos e utilizaram, ainda que por procedimentos matemáticos distintos, representações cônicas ou troncocônicas. Além disso, o tratamento prévio reduziu a presença de pontos inadequados e corrigiu deslocamentos e desalinhamentos, fazendo com que os algoritmos recebessem

dados relativamente limpos e geometricamente organizados.

A eficiência desse tratamento também explica a proximidade entre os mínimos quadrados convencionais, os mínimos quadrados robustos com perda *soft-L1* e o RANSAC. Os métodos robustos são especialmente úteis quando existem muitos valores discrepantes, pois reduzem a influência dos maiores resíduos ou selecionam os pontos compatíveis com a tendência predominante. Entretanto, como grande parte dos pontos externos já havia sido removida, sua principal vantagem foi reduzida. Além disso, alguns resíduos elevados poderiam representar irregularidades reais da superfície, e não necessariamente erros de aquisição. Por esse motivo, a perda *soft-L1* apresentou desempenho marginalmente inferior ao dos mínimos quadrados convencionais, mostrando que um método mais robusto não produz necessariamente melhores resultados quando os dados já foram tratados de maneira eficiente.

Entre os ajustes analisados, o ICP apresentou a maior aderência à tendência logarítmica, enquanto o método de fatias horizontais também obteve bom desempenho, com menor complexidade e interpretação geométrica mais direta. Apesar disso, não foi possível definir um único método como superior em todos os aspectos. O ICP utiliza amplamente a geometria tridimensional, mas possui maior custo computacional e depende de uma inicialização adequada. As fatias horizontais são simples e rápidas, porém dependem da regularidade das seções. A busca em grade permite maior controle dos parâmetros, mas seu custo aumenta com o refinamento, enquanto os mínimos quadrados mostraram-se eficientes para nuvens previamente tratadas.

A pouca variação observada entre os parâmetros dos modelos logarítmicos reforçou que os diferentes procedimentos identificaram o mesmo comportamento físico predominante. Em todos os casos, verificou-se um crescimento mais intenso do ângulo nas primeiras adições de água, seguido por uma redução gradual da taxa de aumento. Assim, as diferenças entre os métodos estiveram mais relacionadas às características de cada algoritmo do que à tendência geral representada.

Diante das análises realizadas, considera-se que os objetivos estabelecidos foram alcançados. O escaneamento tridimensional, associado ao tratamento das nuvens de pontos e aos métodos de ajuste geométrico, mostrou-se adequado para a determinação do ângulo de repouso das pilhas estudadas. Essa abordagem possibilitou utilizar informações distribuídas por toda a superfície, reduzindo a dependência de uma única leitura manual e fornecendo uma representação mais abrangente da geometria da pilha.

As conclusões apresentadas estão limitadas às condições experimentais adotadas, uma vez que os ensaios foram realizados com areia, em escala de laboratório, por meio de uma deposição controlada e utilizando aproximações cônicas ou troncocônicas. Além disso, as equações logarítmicas obtidas possuem caráter empírico e são válidas para o material e para o intervalo de umidade analisado, não sendo recomendada sua extrapolação sem a

realização de novos ensaios.

5.1 Trabalhos Futuros

Como continuidade da pesquisa, recomenda-se aplicar os métodos de ajuste geométrico a outros materiais granulares, principalmente produtos utilizados na indústria mineral, como pelotas, *pellet feed*, *sinter feed* e minérios com diferentes distribuições granulométricas. Essa ampliação permitiria avaliar a influência do tamanho, do formato, da rugosidade e da capacidade de retenção de água das partículas. Também se recomenda ampliar a escala de aplicação por meio de nuvens de pontos de pilhas reais obtidas por drones, scanners LiDAR ou sistemas fotogramétricos, avaliando os métodos diante de superfícies extensas, regiões parcialmente ocultas, presença de equipamentos, irregularidades acentuadas e diferentes densidades de pontos. Os ajustes também podem ser adaptados para outras configurações, como pilhas Chevron, longitudinais, formadas em camadas, assimétricas ou parcialmente deformadas.

Por fim, pesquisas posteriores podem investigar técnicas de aprendizado de máquina para selecionar automaticamente o método de ajuste mais adequado às características de cada nuvem de pontos, identificar regiões anômalas e diferenciar irregularidades reais de erros de aquisição. A realização de um número maior de repetições experimentais, o controle mais rigoroso da distribuição de umidade e a comparação entre diferentes equipamentos de escaneamento também contribuiriam para avaliar a repetibilidade, a incerteza e a aplicabilidade industrial da metodologia proposta.

Referências

ANDREOTTI, Bruno; FORTERRE, Yoël; POULIQUEN, Olivier. *Granular media: between fluid and solid*. Cambridge University Press, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17, 20.

BAO, Yukun; LIU, Zhitao. A fast grid search method in support vector regression forecasting time series. In: SPRINGER. INTERNATIONAL Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning. 2006. p. 504–511. Citado 0 vez na página 25.

BESL, Paul J.; MCKAY, Neil D. A Method for Registration of 3-D Shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 14, n. 2, p. 239–256, 1992. DOI: [10.1109/34.121791](https://doi.org/10.1109/34.121791). Disponível em: <https://doi.org/10.1109/34.121791>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32.

BIRDAL, Tolga *et al.* Generic Primitive Detection in Point Clouds Using Novel Minimal Quadric Fits. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 42, n. 6, p. 1333–1345, 2020. DOI: [10.1109/TPAMI.2019.2895949](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2019.2895949). Citado 2 vezes nas páginas 25, 26.

BRANCH, Mary A.; COLEMAN, Thomas F.; LI, Yuying. A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 21, n. 1, p. 1–23, 1999. DOI: [10.1137/S1064827595289108](https://doi.org/10.1137/S1064827595289108). Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S1064827595289108>. Citado 2 vezes na página 27.

BUZZI, O.; FITYUS, S. Geomechanics of Waste and Product Piles in Mining. *Engineering Geology*, v. 303, p. 106679, 2022. Citado 1 vez na página 17.

CANDIDO, Gustavo. *R Quadrado: coeficiente de determinação*. Medium. Acesso em: 18 jul. 2026. Medium. Jan. 2024. Disponível em: <https://medium.com/@lg0702/r-quadrado-3318259ff2e2>. Citado 2 vezes na página 34.

CLOUDCOMPARE. *CloudCompare: 3D point cloud and mesh processing software*. Software. Disponível em: <https://www.cloudcompare.org/>. Nenhuma citação no texto.

COELHO, R. C.; SOUZA, J. A.; REZENDE, M. F. Avaliação da influência da umidade e do empilhamento na estabilidade de pilhas de produtos granulares de minério de ferro. *Revista Escola de Minas*, v. 74, n. 4, p. 455–464, 2021. Citado 1 vez na página 17.

FISCHLER, Martin A.; BOLLES, Robert C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. *Communications of the ACM*, v. 24, n. 6, p. 381–395, 1981. DOI: [10.1145/358669.358692](https://doi.org/10.1145/358669.358692). Citado 1 vez na página 29.

FORSYTH, David A; PONCE, Jean. *Computer vision: a modern approach*. prentice hall professional technical reference, 2002. Citado 0 vez na página 31.

GANS, A; ABRAMIAN, A *et al.* Collapse of a cohesive granular column. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 959, a41, 2023. Citado 1 vez na página 15.

GANS, Adrien; POULIQUEN, Olivier; NICOLAS, Maxime. Cohesion-controlled granular material. *Physical Review E*, APS, v. 101, n. 3, p. 032904, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 15, 22.

GEORGIEV, Kristiyan; AL-HAMI, Motaz; LAKAEMPER, Rolf. *Real-time 3D Scene Description Using Spheres, Cones and Cylinders*. 2016. arXiv: 1603.03856 [cs.CV]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1603.03856>. Citado 1 vez na página 19.

HELENE, Otaviano. *Metodos dos Minimios Quadrados*. Editora Livraria da Física, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 27, 28.

HOOKE, Robert; JEEVES, T. A. “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the ACM*, v. 8, n. 2, p. 212–229, 1961. DOI: 10.1145/321062.321069. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/321062.321069>. Citado 2 vezes nas páginas 23, 24.

HORNBAKER, Daniel J *et al.* What keeps sandcastles standing? *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 387, n. 6635, p. 765–765, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 18, 21.

HUBER, Peter J. Robust Estimation of a Location Parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 35, n. 1, p. 73–101, 1964. DOI: 10.1214/aoms/1177703732. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177703732>. Citado 1 vez na página 28.

INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. *Mínimos Quadrados*. s.d. Material didático do projeto FisComp. Acesso em: 18 jul. 2026. Disponível em: https://fiscomp.if.ufrgs.br/index.php/M%C3%ADnimos_Quadrados. Citado 0 vez na página 27.

JARRAY, Ahmed; MAGNANIMO, Vanessa; LUDING, Stefan. Wet granular flow control through liquid induced cohesion. *arXiv preprint arXiv:1801.02454*, 2018. Citado 1 vez na página 22.

JOLLIFFE, Ian T.; CADIMA, Jorge. Principal component analysis: a review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, v. 374, n. 2065, p. 20150202, 2016. DOI: 10.1098/rsta.2015.0202. Citado 1 vez na página 44.

JONES, R *et al.* Inter-particle forces in cohesive powders studied by AFM: effects of relative humidity, particle size and wall adhesion. *Powder Technology*, Elsevier, v. 132, n. 2-3, p. 196–210, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 14, 21.

JONES, Robert *et al.* Adhesion forces between glass and silicon surfaces in air studied by AFM: Effects of relative humidity, particle size, roughness, and surface treatment. *Langmuir*, ACS Publications, v. 18, n. 21, p. 8045–8055, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 14, 21.

KOLDA, Tamara G.; LEWIS, Robert Michael; TORCZON, Virginia. Optimization by Direct Search: New Perspectives on Some Classical and Modern Methods. *SIAM Review*, v. 45, n. 3, p. 385–482, 2003. DOI: [10.1137/S003614450242889](https://doi.org/10.1137/S003614450242889). Citado 2 vezes nas páginas 23, 24.

MATOSO, G. C. *et al.* Metodologia de previsão de alcance de rupturas em taludes de solo. Artigo submetido ao Congresso Brasileiro de Mina a Céu Aberto e Mina Subterrânea (CBMINA), 2025. Citado 0 vez na página 22.

OPEN3D TEAM. *ICP Registration*. 2026. Documentação oficial do Open3D. Acesso em: 5 jul. 2026. Disponível em: https://www.open3d.org/docs/latest/tutorial/pipelines/icp_registration.html. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32.

ORIGINLAB CORPORATION. *Origin: data analysis and graphing software*. Northampton, MA: OriginLab Corporation. Software. Disponível em: <https://www.originlab.com/>. Nenhuma citação no texto.

RADJAI, Farhang; RICHEFEU, Vincent. Bond anisotropy and cohesion of wet granular materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 367, n. 1909, p. 5123–5138, 2009. Citado 1 vez na página 21.

RICHEFEU, Vincent; EL YOUSOUFI, Moulay Said; RADJAI, Farhang. Shear strength properties of wet granular materials. *Physical Review E*, APS, v. 73, n. 5, p. 051304, 2006. Published 10 May 2006. Citado 1 vez na página 22.

RICHEFEU, Vincent; EL YOUSOUFI, Moulay Said; PEYROUX, Robert *et al.* A model of capillary cohesion for numerical simulations of 3D polydisperse granular media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley Online Library, v. 32, n. 11, p. 1365–1383, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 15, 18, 21.

RODRIGUES, Kévin Allan Sales; ELIAN, Silvia Nagib. *Análise do ajuste do modelo de regressão L1*. 2024. Diss. (Mestrado) – Universidade de São Paulo. DOI: [10.11606/T.45.2024.tde-10042024-202803](https://doi.org/10.11606/T.45.2024.tde-10042024-202803). Citado 2 vezes nas páginas 28, 29.

RUSINKIEWICZ, Szymon; LEVOY, Marc. Efficient Variants of the ICP Algorithm. In: PROCEEDINGS Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling. IEEE, 2001. p. 145–152. DOI: [10.1109/IM.2001.924423](https://doi.org/10.1109/IM.2001.924423). Disponível em: <https://doi.org/10.1109/IM.2001.924423>. Citado 2 vezes nas páginas 31, 32.

SCHOFIELD, Charles G. Review of Raw Material Stacking and Reclamation Methods. *bulk solids handling*, v. 1, n. 3, 1981. Citado 1 vez na página 17.

SCIPY COMMUNITY. *scipy.optimize.least_squares*. 2026. Documentação online do SciPy. Função para mínimos quadrados não lineares com perdas robustas, incluindo *softl1*; acesso em 02 jul. 2026. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28.

SEBER, George A. F.; LEE, Alan J. *Linear Regression Analysis*. 2. ed. Hoboken: Wiley, 2003. ISBN 9780471415405. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780471722190>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26, 29.

SHAMS, Mahmoud Y *et al.* Water quality prediction using machine learning models based on grid search method. *Multimedia Tools and Applications*, Springer, v. 83, n. 12, p. 35307–35334, 2024. Citado 0 vez na página 25.

SHENZHEN CREALITY 3D TECHNOLOGY CO., LTD. *CR-Scan Raptor 3D Scanner User Manual*. 2026. Disponível em: <https://cdn.creality.com/ow/official/9f08b8fd-e5da-485b-97ee-5b1a31db6416.pdf>. Nenhuma citação no texto.

SHENZHEN CREALITY 3D TECHNOLOGY CO., LTD. *Creality Scan*. Software. Disponível em: <https://www.creality.com/download/creality-cr-scan-raptor>. Nenhuma citação no texto.

SIEGLE, Del. *ANOVA, Regression, and Chi-Square (and Other Things That Go Bump in the Night)*. Educational Research Basics. Acesso em: 18 jul. 2026. Neag School of Education, University of Connecticut. s.d. Disponível em: https://researchbasics.education.uconn.edu/anova_regression_and_chi-square/. Acesso em: 18 jul. 2026. Citado 2 vezes na página 34.

SOUSA PINTO, Carlos de. *Curso básico de Mecânica dos Solos*. Oficina de Textos, 2016. Citado 1 vez na página 20.

VENTURA, Matheus. *Teste Qui-Quadrado: Uma Ferramenta Essencial para Análise de Dados Categóricos*. Exemplos e aplicações em Python. Acesso em: 18 jul. 2026. Medium. Out. 2023. Disponível em: <https://medium.com/@matheusventura/teste-qui-quadrado-a95cb5ba8c66>. Citado 1 vez na página 35.

WYSER, Emmanuel *et al.* Analytical and Numerical Solutions for Three-Dimensional Granular Collapses. *Geosciences*, MDPI, v. 13, n. 4, p. 119, 2023. Citado 1 vez na página 19.

APÊNDICE A – Funcionamento do Código de Correção da Pilha

O código `correcao_pilha.py` corrige a orientação das nuvens de pontos antes da aplicação dos métodos de ajuste geométrico. O objetivo é alinhar a altura da pilha ao eixo Z , tornar a base paralela ao plano XY , posicioná-la em $Z = 0$ e centralizar a nuvem nos eixos X e Y .

O procedimento foi desenvolvido de forma conservadora. Dessa maneira, o topo da pilha não é removido, a lateral não é recortada integralmente pelo raio e correções que exigem rotações elevadas são rejeitadas.

A.1 Fluxo Geral

O processamento da nuvem de pontos segue as etapas apresentadas a seguir:

1. localização dos arquivos no formato `.ply`;
2. leitura da nuvem de pontos com a biblioteca `Open3D`;
3. cálculo de uma direção inicial de altura por PCA;
4. alinhamento inicial da altura ao eixo (Z);
5. estimativa do centro da pilha no plano (XY);
6. identificação dos pontos candidatos à base;
7. ajuste robusto do plano da base;
8. validação e aplicação da rotação de refinamento;
9. posicionamento da base em ($Z=0$);
10. verificação do sentido positivo da altura;
11. centralização da pilha nos eixos (X) e (Y);
12. rotação das normais da nuvem;
13. remoção opcional da região externa inferior;
14. exportação da nuvem corrigida.

A.2 Etapas do Processamento e Funções Principais

As subseções seguintes apresentam as principais etapas do processamento juntamente com as funções responsáveis pelos cálculos. Funções utilizadas somente para conversão de objetos Open3D ou processamento em lote não são apresentadas.

A.2.1 Aquisição e leitura das nuvens

Os arquivos no formato `.ply` são localizados na pasta de entrada e carregados com a biblioteca Open3D. Durante a leitura, são preservados os pontos e, quando disponíveis, suas cores e normais.

A.2.2 Amostragem para o PCA

Para reduzir o custo computacional em nuvens muito grandes, uma amostra aleatória dos pontos é utilizada no cálculo do PCA. A semente fixa torna a seleção reprodutível.

```

1 def _amostra_indices(n, max_pontos=120000, seed=0):
2     if n <= max_pontos:
3         return np.arange(n)
4
5
6     rng = np.random.default_rng(seed)
7
8     return rng.choice(
9         n,
10        max_pontos,
11        replace=False
12    )

```

Código A.1 – Amostragem dos pontos utilizados no PCA

Quando a nuvem possui menos pontos que o limite definido, todos os pontos são utilizados.

A.2.3 Cálculo da direção inicial de altura

O PCA é utilizado para estimar uma direção inicial de altura. A matriz de covariância é calculada e o autovetor associado à menor variância é adotado como uma aproximação da normal da base.

O sentido do vetor é definido pela assimetria das projeções dos pontos. Caso a assimetria seja negativa, o vetor é invertido.

```

1 def _direcao_altura_pca(
2     pontos,
3     max_pontos=120000
4 ):

```

```

5  """
6  Encontra uma direcao inicial de altura usando PCA.
7
8
9  Para uma pilha, a menor variancia costuma
10 representar a direcao normal da base.
11 """
12
13 idx = _amostra_indices(
14     len(pontos),
15     max_pontos=max_pontos
16 )
17
18 pts = pontos[idx]
19
20 centro = np.median(
21     pts,
22     axis=0
23 )
24
25 X = pts - np.mean(
26     pts,
27     axis=0
28 )
29
30 cov = np.cov(X.T)
31
32 valores, vetores = np.linalg.eigh(cov)
33
34 normal = vetores[
35     :,
36     np.argmin(valores)
37 ]
38
39 normal = normal / np.linalg.norm(normal)
40
41 h = (pts - centro) @ normal
42
43 desvio = np.std(h) + 1e-12
44
45 assimetria = np.mean(
46     (
47         (h - np.mean(h))
48         / desvio
49     ) ** 3
50 )
51
52 if assimetria < 0:
53     normal *= -1.0
54
55 return normal

```

Código A.2 – Cálculo da direção inicial de altura por PCA

A.2.4 Cálculo da matriz de rotação

A função de rotação calcula a matriz necessária para alinhar um vetor de origem a um vetor de destino.

No processamento da pilha, ela é utilizada inicialmente para alinhar a direção obtida pelo PCA ao eixo (Z). Posteriormente, a mesma função é utilizada para nivelar a normal refinada da base.

```

1  def _rotacao_entre_vetores(v1, v2):
2  v1 = np.asarray(
3  v1,
4  dtype=float
5  )
6
7
8  v2 = np.asarray(
9      v2,
10     dtype=float
11 )
12
13 v1 = v1 / np.linalg.norm(v1)
14 v2 = v2 / np.linalg.norm(v2)
15
16 c = np.clip(
17     np.dot(v1, v2),
18     -1.0,
19     1.0
20 )
21
22 if c > 1.0 - 1e-12:
23     return np.eye(3)
24
25 if c < -1.0 + 1e-12:
26     eixo = np.cross(
27         v1,
28         np.array([1.0, 0.0, 0.0])
29     )
30
31     if np.linalg.norm(eixo) < 1e-9:
32         eixo = np.cross(
33             v1,
34             np.array([0.0, 1.0, 0.0])
35         )
36
37     eixo = eixo / np.linalg.norm(eixo)
38
39     K = np.array([
40         [0.0, -eixo[2], eixo[1]],
41         [eixo[2], 0.0, -eixo[0]],
42         [-eixo[1], eixo[0], 0.0],
43     ])
44
45     return np.eye(3) + 2.0 * (K @ K)
46

```

```

47 v = np.cross(v1, v2)
48 s = np.linalg.norm(v)
49
50 K = np.array([
51     [0.0, -v[2], v[1]],
52     [v[2], 0.0, -v[0]],
53     [-v[1], v[0], 0.0],
54 ])
55
56 return (
57     np.eye(3)
58     + K
59     + K @ K * ((1.0 - c) / (s ** 2))
60 )

```

Código A.3 – Cálculo da matriz de rotação entre dois vetores

Quando os vetores já estão alinhados, a função retorna a matriz identidade. Caso apresentem sentidos opostos, é calculada uma rotação de 180°.

A.2.5 Estimativa do centro no plano XY

O centro da pilha é calculado pela mediana das coordenadas (X) e (Y) dos pontos localizados na região superior.

Essa escolha reduz a influência de pontos externos próximos à base, como partes da superfície de apoio ou regiões excedentes do escaneamento.

```

1 def _centro_xy_pelo_topo(
2     pontos,
3     percentil_topo=80
4 ):
5     z = pontos[:, 2]
6
7     lim = np.percentile(
8         z,
9         percentil_topo
10    )
11
12    topo = pontos[z >= lim]
13
14    if len(topo) < 30:
15        return np.median(
16            pontos[:, :2],
17            axis=0
18        )
19
20    return np.median(
21        topo[:, :2],
22        axis=0
23    )

```

Código A.4 – Estimativa do centro da pilha pela região superior

Caso a região superior apresente menos de 30 pontos, a mediana de toda a nuvem é utilizada.

A.2.6 Detecção dos pontos da base

A detecção da base utiliza os pontos externos e mais baixos da nuvem. Para isso, a pilha é dividida em setores angulares ao redor do centro estimado.

Em cada setor, são selecionados inicialmente os pontos com maior raio. Dentro desse conjunto, são mantidos apenas os pontos de menor altura. Uma pequena faixa global inferior também é adicionada para complementar setores com poucos pontos.

```

1 def _detectar_base_extrema(
2     pontos_alinhados,
3     setores=96,
4     percentil_raio_externo=80,
5     quantil_z_borda=25,
6     percentil_z_global=6,
7     min_pontos_setor=20,
8 ):
9     """
10    Detecta a base sem utilizar toda
11    a lateral da pilha.
12    """
13
14
15    p = np.asarray(
16        pontos_alinhados,
17        dtype=float
18    )
19
20    z = p[:, 2]
21
22    centro_xy = _centro_xy_pelo_topo(
23        p,
24        percentil_topo=80
25    )
26
27    dx = p[:, 0] - centro_xy[0]
28    dy = p[:, 1] - centro_xy[1]
29
30    raio = np.sqrt(
31        dx ** 2 + dy ** 2
32    )
33
34    theta = np.arctan2(
35        dy,
36        dx
37    )
38
39    theta = (
40        theta + 2.0 * np.pi
41    ) % (2.0 * np.pi)
42

```

```

43 grupos = []
44
45 for i in range(setores):
46     t0 = 2.0 * np.pi * i / setores
47     t1 = 2.0 * np.pi * (i + 1) / setores
48
49     idx = np.where(
50         (theta >= t0)
51         & (theta < t1)
52     )[0]
53
54     if len(idx) < min_pontos_setor:
55         continue
56
57     r_lim = np.percentile(
58         raio[idx],
59         percentil_raio_externo
60     )
61
62     idx_ext = idx[
63         raio[idx] >= r_lim
64     ]
65
66     if len(idx_ext) < 5:
67         continue
68
69     z_lim = np.percentile(
70         z[idx_ext],
71         quantil_z_borda
72     )
73
74     idx_base = idx_ext[
75         z[idx_ext] <= z_lim
76     ]
77
78     if len(idx_base) > 0:
79         grupos.append(idx_base)
80
81 idx_global = np.where(
82     z <= np.percentile(
83         z,
84         percentil_z_global
85     )
86 )[0]
87
88 if len(grupos) > 0:
89     idx_base = np.unique(
90         np.concatenate(
91             grupos + [idx_global]
92         )
93     )
94 else:
95     idx_base = idx_global
96
97 if len(idx_base) < 50:
98     raise RuntimeError(
99         "Poucos pontos detectados para a base. "

```

```

100     "Aumente quantil_z_borda ou "
101     "percentil_z_global."
102 )
103
104 return p[idx_base], idx_base

```

Código A.5 – Detecção dos pontos candidatos à base

Essa estratégia evita que toda a lateral inclinada da pilha seja interpretada como parte do plano da base.

A.2.7 Ajuste robusto do plano da base

Após a seleção dos pontos candidatos, é ajustado um plano descrito por:

$$z = ax + by + c, \quad (\text{A.1})$$

em que (a), (b) e (c) são os coeficientes estimados pelo método dos mínimos quadrados.

Os pontos com resíduos elevados são removidos de forma iterativa. O limite de exclusão é calculado a partir do desvio absoluto mediano, denominado MAD.

```

1 def _ajustar_plano_z_robusto(
2     pontos_base,
3     max_iter=10,
4     fator_mad=3.0
5 ):
6     """
7     Ajusta o plano z = ax + by + c
8     de forma robusta.
9     """
10
11
12     base = np.asarray(
13         pontos_base,
14         dtype=float
15     )
16
17     X = np.column_stack([
18         base[:, 0],
19         base[:, 1],
20         np.ones(len(base))
21     ])
22
23     y = base[:, 2]
24
25     mask = np.ones(
26         len(base),
27         dtype=bool
28     )
29

```

```

30 for _ in range(max_iter):
31     coef = np.linalg.lstsq(
32         X[mask],
33         y[mask],
34         rcond=None
35     )[0]
36
37     residuo = y - X @ coef
38
39     med = np.median(
40         residuo[mask]
41     )
42
43     mad = np.median(
44         np.abs(
45             residuo[mask] - med
46         )
47     )
48
49     sigma = 1.4826 * mad + 1e-12
50
51     novo = (
52         np.abs(residuo - med)
53         <= fator_mad * sigma
54     )
55
56     if np.sum(novo) < 50:
57         break
58
59     if np.array_equal(novo, mask):
60         break
61
62     mask = novo
63
64     coef = np.linalg.lstsq(
65         X[mask],
66         y[mask],
67         rcond=None
68     )[0]
69
70     a, bcoef, c = coef
71
72     normal = np.array(
73         [-a, -bcoef, 1.0],
74         dtype=float
75     )
76
77     normal = normal / np.linalg.norm(normal)
78
79     usados = base[mask]
80
81     return normal, coef, usados

```

Código A.6 – Ajuste robusto do plano da base

A normal obtida é utilizada para calcular a rotação de refinamento necessária para

tornar a base paralela ao plano (XY).

A.2.8 Validação da rotação de refinamento

Antes da aplicação da segunda rotação, calcula-se o ângulo entre a normal estimada da base e o eixo (Z).

A correção é aplicada somente quando esse ângulo permanece dentro do limite de segurança definido no programa. Na configuração analisada, o limite utilizado é de 8°.

Quando o ângulo ultrapassa esse valor, a matriz identidade é adotada e a rotação de refinamento não é aplicada.

A.2.9 Posicionamento e centralização da pilha

Após as rotações, a altura correspondente à base é estimada pela mediana das coordenadas (Z) dos pontos utilizados no ajuste do plano.

Esse valor é subtraído de toda a nuvem, posicionando a base em (Z=0). Em seguida, o centro da região superior é novamente calculado e utilizado para centralizar a pilha nos eixos (X) e (Y).

A.2.10 Rotação das normais

Quando a nuvem possui vetores normais, eles são rotacionados pela mesma transformação aplicada aos pontos.

Após a rotação, os vetores são normalizados para manter módulo unitário.

A.2.11 Exportação da nuvem corrigida

Ao final do processamento, os pontos corrigidos são convertidos novamente em um objeto da classe `PointCloud` da biblioteca Open3D.

As cores e normais são mantidas quando disponíveis, e a nuvem resultante é salva em um novo arquivo no formato `.ply`.

A.3 Aplicação das Correções

O Código A.7 apresenta, de forma resumida, a sequência principal das transformações realizadas na função `corrigir_pilha`.

```
1
2 # Direcao inicial de altura
3
4 normal_pca = _direcao_altura_pca(pontos)
```

```

5
6 # Centro tridimensional da nuvem
7
8 centro_3d = np.median(
9 pontos,
10 axis=0
11 )
12
13 # Primeira rotacao: alinhamento com o eixo Z
14
15 R1 = _rotacao_entre_vetores(
16 normal_pca,
17 np.array([0.0, 0.0, 1.0])
18 )
19
20 pontos1 = (
21 pontos - centro_3d
22 ) @ R1.T
23
24 # Identificacao dos pontos candidatos a base
25
26 base_candidata, _ = _detectar_base_extrema(
27 pontos1
28 )
29
30 # Ajuste robusto do plano da base
31
32 normal_base, coef_plano, base_usada = (
33 _ajustar_plano_z_robusto(
34 base_candidata
35 )
36 )
37
38 # Angulo entre a normal da base e o eixo Z
39
40 eixo_z = np.array(
41 [0.0, 0.0, 1.0]
42 )
43
44 produto = np.clip(
45 np.dot(normal_base, eixo_z),
46 -1.0,
47 1.0
48 )
49
50 angulo_refino = np.degrees(
51 np.arccos(produto)
52 )
53
54 # Aplicacao protegida da rotacao fina
55
56 if angulo_refino <= limite_refino:
57 R2 = _rotacao_entre_vetores(
58 normal_base,
59 eixo_z
60 )
61 else:

```

```

62 R2 = np.eye(3)
63
64 pontos2 = pontos1 @ R2.T
65 base2 = base_usada @ R2.T
66
67 # Posicionamento da base em Z = 0
68
69 z_base = np.median(
70     base2[:, 2]
71 )
72
73 pontos2[:, 2] -= z_base
74
75 # Centralizacao no plano XY
76
77 centro_xy = _centro_xy_pelo_topo(
78     pontos2
79 )
80
81 pontos2[:, 0] -= centro_xy[0]
82 pontos2[:, 1] -= centro_xy[1]
83
84 # Rotacao das normais, quando disponiveis
85
86 R_total = R2 @ R1
87
88 if normais is not None:
89     normais2 = normais @ R_total.T
90
91
92 modulos = np.linalg.norm(
93     normais2,
94     axis=1,
95     keepdims=True
96 )
97
98 normais2 = normais2 / np.maximum(
99     modulos,
100     1e-12
101 )

```

Código A.7 – Sequência principal de correção da nuvem de pontos

Depois dessas operações, a variável `pontos2` contém a nuvem orientada, nivelada e centralizada. Os pontos são então inseridos em uma nova nuvem Open3D e gravados no arquivo `.ply` de saída.

APÊNDICE B – Funcionamento dos Códigos de Ajuste Geométrico

Os seis métodos de ajuste geométrico compartilham a mesma estrutura geral de processamento, incluindo as etapas de entrada, pré-processamento, extração do perfil radial, avaliação dos resultados e exportação dos arquivos. A principal diferença está na rotina utilizada para estimar os parâmetros do cone ou tronco de cone. Dessa forma, o fluxo de processamento permanece semelhante entre os métodos, enquanto a etapa específica de ajuste é modificada de acordo com a técnica selecionada.

B.1 Fluxo Geral

O processamento das nuvens de pontos segue as etapas apresentadas a seguir:

1. localização e ordenação dos arquivos de entrada;
2. leitura das nuvens de pontos com a biblioteca Open3D;
3. pré-processamento das coordenadas;
4. estimativa do centro da pilha;
5. extração do perfil radial em fatias horizontais;
6. aplicação do método de ajuste selecionado;
7. validação física dos parâmetros;
8. cálculo das métricas de erro;
9. realização das repetições com critério de paciência;
10. seleção do melhor resultado;
11. exportação das tabelas, dos parâmetros e das visualizações.

B.2 Etapas Comuns aos Seis Métodos

B.2.1 Aquisição e seleção dos arquivos

O programa recebe como entrada uma pasta contendo as nuvens de pontos previamente corrigidas, armazenadas no formato `.ply`. Os arquivos são ordenados de acordo com o valor de umidade identificado em seus nomes.

O processamento é realizado em lote, de modo que a mesma sequência de operações seja aplicada a todas as nuvens de pontos encontradas na pasta selecionada.

B.2.2 Leitura e pré-processamento da nuvem

A leitura das nuvens de pontos é realizada pela função `read_point_cloud`, pertencente à biblioteca Open3D. Durante essa etapa, são removidos os pontos que apresentam coordenadas indefinidas ou infinitas.

As três primeiras coordenadas de cada ponto são interpretadas como (X), (Y) e (Z), sendo (Z) o eixo correspondente à altura da pilha. Em seguida, o menor valor de (Z) é subtraído de toda a nuvem, fazendo com que a altura da superfície de apoio seja definida como (Z=0).

B.2.3 Estimativa do centro da pilha

O centro da pilha é estimado pela mediana das coordenadas X e Y . Como a nuvem de pontos já foi orientada e centralizada pelo código `correcao_pilha.py`, essa etapa atua como uma verificação adicional, compensando possíveis deslocamentos residuais.

Dessa forma, os raios utilizados no ajuste são calculados em relação a um centro coerente com a geometria previamente corrigida da pilha.

B.2.4 Extração do perfil radial

Para cada ponto da nuvem, calcula-se a distância radial em relação ao centro estimado:

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}, \quad (\text{B.1})$$

em que x_c e y_c representam as coordenadas estimadas do centro da pilha.

A extensão vertical da nuvem é dividida em fatias horizontais. Em cada fatia considerada válida, o raio da borda é representado pelo percentil 92 das distâncias radiais. Essa escolha reduz a influência de pontos internos sem considerar exclusivamente o ponto mais distante, que poderia corresponder a um ruído ou ponto discrepante.

O perfil radial também pode ser submetido a uma suavização por mediana móvel. Por padrão, é aplicada uma restrição de monotonicidade, de modo que o raio não aumente com a altura. Essa condição é coerente com a geometria esperada para uma pilha aproximadamente cônica.

O resultado dessa etapa é um conjunto bidimensional formado pelas alturas e pelos respectivos raios da borda:

$$(z_{\text{borda}}, r_{\text{borda}}), \quad (\text{B.2})$$

utilizado como entrada pelos seis métodos de ajuste geométrico.

B.2.5 Modelo geométrico

O sólido utilizado para representar a pilha é um cone ou tronco de cone vertical. O raio previsto pelo modelo em uma determinada altura (z) é calculado por:

$$r_{\text{modelo}}(z) = R_{\text{base}} + (R_{\text{topo}} - R_{\text{base}}) \frac{z}{H}, \quad (\text{B.3})$$

em que:

- H é a altura ajustada do modelo;
- R_{base} é o raio estimado na base;
- R_{topo} é o raio estimado no topo.

O ângulo da geratriz em relação ao plano horizontal é calculado por:

$$\theta = \text{atan2}(H, R_{\text{base}} - R_{\text{topo}}). \quad (\text{B.4})$$

A função atan2 é utilizada para preservar corretamente a relação entre a altura e a diferença entre os raios, evitando ambiguidades numéricas no cálculo do ângulo.

B.2.6 Validação dos candidatos

Antes de aceitar um resultado, o programa verifica se os parâmetros estimados são numericamente válidos e fisicamente coerentes. Para isso, são aplicadas as seguintes condições:

- H , R_{base} e R_{topo} devem apresentar valores finitos;
- H e R_{base} devem ser positivos;

- R_{topo} deve ser não negativo e menor que R_{base} ;
- H deve permanecer dentro dos limites definidos em relação à altura observada;
- o ângulo horizontal deve permanecer dentro do intervalo físico configurado.

Os candidatos que não atendem a essas condições são descartados antes da comparação dos resultados.

B.2.7 Avaliação do ajuste

Para cada fatia horizontal, o raio medido na nuvem de pontos é comparado ao raio previsto pelo modelo ajustado. Essa comparação permite avaliar o afastamento entre a superfície do cone ou tronco de cone e o contorno real da pilha ao longo de toda a sua altura.

O resíduo radial de cada fatia é definido por:

$$e_i = r_{\text{borda},i} - r_{\text{modelo},i}, \quad (\text{B.5})$$

em que $r_{\text{borda},i}$ é o raio medido e $r_{\text{modelo},i}$ é o raio previsto pelo modelo.

Valores positivos de e_i indicam que a borda medida está externamente ao modelo. Valores negativos indicam que o modelo ultrapassa o contorno observado.

A partir dos resíduos, são calculadas as seguintes métricas:

- **MAE**: média dos valores absolutos dos resíduos;
- **RMSE**: raiz quadrada da média dos resíduos elevados ao quadrado, atribuindo maior influência aos erros elevados;
- **SMAE**: erro absoluto médio simétrico, calculado considerando os módulos dos raios medidos e previstos;

O *score* reúne as principais métricas de erro em um único critério de seleção. Para isso, são combinados os valores de MAE, RMSE e SMAE, considerando os pesos previamente definidos no programa. Quanto menor o *score*, melhor é o ajuste do modelo à nuvem de pontos.

B.2.8 Repetições e critério de paciência

Cada pilha pode ser processada diversas vezes utilizando diferentes sementes aleatórias. Essa repetição permite avaliar diferentes inicializações e reduzir a possibilidade de seleção de uma solução desfavorável.

Após o número mínimo de repetições, a execução é interrompida quando a quantidade consecutiva de resultados sem melhoria atinge o valor definido para o critério de paciência.

Os métodos de busca em grade, fatias horizontais e RANSAC também possuem um critério interno de paciência, responsável por interromper suas rodadas após sucessivas tentativas sem melhoria no *score*.

O método dos mínimos quadrados e sua variação robusta utilizam os critérios de convergência da função `scipy.optimize.least_squares`. O ICP utiliza inicialmente o critério de convergência do Open3D e, posteriormente, realiza um refinamento robusto por mínimos quadrados.

O critério de paciência não determina um resultado teoricamente ideal. Sua função é interromper a busca quando novas tentativas deixam de produzir melhorias durante uma quantidade configurada de iterações ou repetições.

B.2.9 Exportação dos resultados

Para cada pilha processada, são exportados os seguintes arquivos:

- `melhor.json`: contém o melhor resultado encontrado e a configuração utilizada;
- `ajuste.png`: apresenta o gráfico do raio medido e do perfil cônico ajustado em função da altura;
- `3d.png`: apresenta a nuvem de pontos e o cone ou tronco de cone sobreposto, com coloração baseada no erro radial.

Os arquivos no formato `.json` armazenam, entre outras informações, as coordenadas do centro, a altura, o raio da base, o raio do topo, a razão entre os raios, os ângulos horizontal e vertical, o volume, as métricas de erro, o tempo de processamento e as informações relacionadas ao critério de parada.

B.3 Funções Específicas dos Métodos de Ajuste

Os códigos apresentados a seguir correspondem às funções específicas de cada método. As rotinas comuns de entrada, preparação dos dados, avaliação, repetição e exportação não são repetidas, pois apresentam funcionamento equivalente entre os métodos.

B.3.1 Busca em grade

O método parte de uma estimativa inicial para H , R_{base} e R_{topo} . Em cada rodada, são avaliadas 26 combinações localizadas em uma vizinhança discreta ao redor do melhor resultado atual.

Quando uma combinação produz melhoria no *score*, ela passa a ser utilizada como novo centro da busca. Os passos da grade são progressivamente reduzidos, permitindo um refinamento gradual dos parâmetros. A execução é encerrada quando o número máximo de rodadas é atingido ou quando o critério interno de paciência é satisfeito.

```

1 def metodo_busca_grade(data, args, rng, repeticao, seed):
2     z = data.z_borda
3     r = data.r_borda
4     H_min, H_max = limites_h(z, args)
5
6
7     H0, Rb0, Rt0 = estimativa_inicial(
8         z,
9         r,
10        args,
11        rng,
12        jitter=0.02 if repeticao > 1 else 0.0
13    )
14
15    melhor = avaliar_parametros(H0, Rb0, Rt0, z, r, args)
16
17    if melhor is None:
18        for frac in [0.30, 0.25, 0.20, 0.15, 0.10, 0.05, 0.0]:
19            melhor = avaliar_parametros(
20                H0,
21                Rb0,
22                frac * Rb0,
23                z,
24                r,
25                args
26            )
27
28            if melhor is not None:
29                Rt0 = frac * Rt0
30                break
31
32    if melhor is None:
33        raise RuntimeError(
34            "Nao foi possivel criar o candidato inicial "
35            "da busca em grade."
36        )
37
38    historico = []
39    tentativa = 1
40
41    historico.append(
42        registro_historico(
43            data,

```

```

44     "grid",
45     args,
46     repeticao,
47     seed,
48     tentativa,
49     0,
50     melhor,
51     True,
52     0,
53     "inicial"
54 )
55 )
56
57 contador = 0
58 dH = max(0.04 * H0, 1e-8)
59 dRb = max(0.05 * Rb0, 1e-8)
60 dRt = max(0.05 * Rb0, 1e-8)
61
62 dH_min = max(0.0008 * H0, 1e-10)
63 dRb_min = max(0.0008 * Rb0, 1e-10)
64 dRt_min = max(0.0008 * Rb0, 1e-10)
65
66 rodada_final = 0
67
68 for rodada in range(1, args.max_rodadas + 1):
69     rodada_final = rodada
70     melhor_rodada = None
71     melhor_tuple = None
72     candidatos = []
73
74     for fH in [-1.0, 0.0, 1.0]:
75         for fRb in [-1.0, 0.0, 1.0]:
76             for fRt in [-1.0, 0.0, 1.0]:
77                 if (
78                     fH == 0.0
79                     and fRb == 0.0
80                     and fRt == 0.0
81                 ):
82                     continue
83
84                 H = float(
85                     np.clip(
86                         melhor["H"] + fH * dH,
87                         H_min,
88                         H_max
89                     )
90                 )
91
92                 Rb = float(
93                     max(
94                         melhor["R_base"] + fRb * dRb,
95                         1e-9
96                     )
97                 )
98
99                 Rt = float(
100                     np.clip(

```

```

101         melhor["R_topo"] + fRt * dRt,
102         0.0,
103         min(
104             args.rtopo_max_frac * Rb,
105             Rb - 1e-9
106         )
107     )
108 )
109
110     cand = avaliar_parametros(
111         H,
112         Rb,
113         Rt,
114         z,
115         r,
116         args
117     )
118
119     candidatos.append((H, Rb, Rt), cand))
120
121     if eh_melhor(melhor_rodada, cand):
122         melhor_rodada = cand
123         melhor_tuple = (H, Rb, Rt)
124
125     melhorou = (
126         melhor_rodada is not None
127         and eh_melhor(melhor, melhor_rodada)
128     )
129
130     if melhorou:
131         melhor = melhor_rodada
132         contador = 0
133         dH = max(dH * 0.85, dH_min)
134         dRb = max(dRb * 0.85, dRb_min)
135         dRt = max(dRt * 0.85, dRt_min)
136     else:
137         contador += 1
138         dH = max(dH * 0.55, dH_min)
139         dRb = max(dRb * 0.55, dRb_min)
140         dRt = max(dRt * 0.55, dRt_min)
141
142     for cand_tuple, cand in candidatos:
143         tentativa += 1
144         salvou = bool(
145             melhorou
146             and cand_tuple == melhor_tuple
147         )
148
149     historico.append(
150         registro_historico(
151             data,
152             "grid",
153             args,
154             repeticao,
155             seed,
156             tentativa,
157             rodada,

```

```

158         cand,
159         salvou,
160         contador
161     )
162 )
163
164 if contador >= args.paciencia_iter:
165     break
166
167 resultado = montar_resultado(
168     data,
169     melhor["H"],
170     melhor["R_base"],
171     melhor["R_topo"],
172     args,
173     extras={
174         "tentativas": tentativa,
175         "rodadas": rodada_final,
176         "early_stop": contador >= args.paciencia_iter,
177         "stop_reason": (
178             "paciencia_iter"
179             if contador >= args.paciencia_iter
180             else "max_rodadas"
181         ),
182     },
183 )
184
185 return resultado, historico

```

Código B.1 – Função correspondente ao método de busca em grade

B.3.2 Fatias horizontais

O método ajusta uma reta ao perfil formado pelas alturas e pelos raios, ponderando cada fatia de acordo com sua quantidade de pontos.

Nas rodadas posteriores, são produzidas amostras *bootstrap* das fatias. A inclinação e o intercepto da reta são utilizados para calcular os parâmetros do cone ou tronco de cone. Diferentes valores admissíveis de altura são avaliados até que seja encontrada uma solução fisicamente válida.

```

1 def metodo_fatias_horizontais(
2     data,
3     args,
4     rng,
5     repeticao,
6     seed
7 ):
8     z = data.z_borda
9     r = data.r_borda
10
11
12     pesos_base = np.maximum(

```

```

13     data.n_pts_bin.astype(float),
14     1.0
15 )
16
17 n = len(z)
18 melhor = None
19 historico = []
20 contador = 0
21 tentativa = 0
22 rodada_final = 0
23
24 for rodada in range(1, args.max_rodadas + 1):
25     rodada_final = rodada
26
27     if rodada == 1 and repeticao == 1:
28         idx = np.arange(n)
29     else:
30         frac = rng.uniform(
31             args.bootstrap_min_frac,
32             1.0
33         )
34
35         tamanho = max(
36             4,
37             int(round(frac * n))
38         )
39
40         idx = np.sort(
41             rng.choice(
42                 n,
43                 size=tamanho,
44                 replace=True
45             )
46         )
47
48         slope, intercept = ajustar_linha(
49             z[idx],
50             r[idx],
51             pesos_base[idx]
52         )
53
54         params, cand = melhor_candidato_de_linha(
55             slope,
56             intercept,
57             z,
58             r,
59             args
60         )
61
62         tentativa += 1
63         melhorou = eh_melhor(melhor, cand)
64
65         if melhorou:
66             melhor = cand
67             contador = 0
68         else:
69             contador += 1

```

```

70
71     historico.append(
72         registro_historico(
73             data,
74             "slices",
75             args,
76             repeticao,
77             seed,
78             tentativa,
79             rodada,
80             cand,
81             melhorou,
82             contador
83         )
84     )
85
86     if contador >= args.paciencia_iter:
87         break
88
89     if melhor is None:
90         raise RuntimeError(
91             "Fatias horizontais nao encontraram "
92             "um cone valido."
93         )
94
95     resultado = montar_resultado(
96         data,
97         melhor["H"],
98         melhor["R_base"],
99         melhor["R_topo"],
100        args,
101        extras={
102            "tentativas": tentativa,
103            "rodadas": rodada_final,
104            "early_stop": contador >= args.paciencia_iter,
105            "stop_reason": (
106                "paciencia_iter"
107                if contador >= args.paciencia_iter
108                else "max_rodadas"
109            ),
110        },
111    )
112
113     return resultado, historico

```

Código B.2 – Função correspondente ao método das fatias horizontais

B.3.3 Mínimos quadrados e Soft-L1

Os métodos dos mínimos quadrados convencionais e Soft-L1 utilizam a função `scipy.optimize.least_squares` para minimizar os resíduos radiais relativos. Os parâmetros são limitados por intervalos físicos definidos no programa.

Quando o argumento `robust` recebe o valor `False`, é utilizada a função de

perda linear, correspondente ao método convencional dos mínimos quadrados. Quando `robust=True`, é utilizada a função de perda robusta configurada no programa, cujo valor padrão é `soft_l1`.

A perda Soft-L1 reduz a influência dos resíduos elevados durante a otimização, tornando o ajuste menos sensível à presença de pontos discrepantes.

```

1  def ajustar_least_squares_arrays(
2  z,
3  r,
4  args,
5  rng,
6  robust=False,
7  repeticao=1
8  ):
9  from scipy.optimize import least_squares
10
11
12  H_min, H_max = limites_h(z, args)
13
14  H0, Rb0, Rt0 = estimativa_inicial(
15      z,
16      r,
17      args,
18      rng,
19      jitter=0.08 if repeticao > 1 else 0.0
20  )
21
22  frac0 = float(
23      np.clip(
24          Rt0 / max(Rb0, 1e-12),
25          0.0,
26          args.rtopo_max_frac
27      )
28  )
29
30  r_max = max(float(np.max(r)), 1e-9)
31
32  x0 = np.array(
33      [H0, Rb0, frac0],
34      dtype=float
35  )
36
37  lower = np.array(
38      [H_min, 0.2 * r_max, 0.0],
39      dtype=float
40  )
41
42  upper = np.array(
43      [
44          H_max,
45          2.0 * r_max,
46          args.rtopo_max_frac
47      ],
48      dtype=float

```

```

49 )
50
51 x0 = np.minimum(
52     np.maximum(
53         x0,
54         lower + 1e-12
55     ),
56     upper - 1e-12
57 )
58
59 eps = max(0.02 * r_max, 1e-12)
60
61 def residual(params):
62     H, Rb, frac = params
63     Rt = frac * Rb
64
65     pred = modelo_frustum(
66         z,
67         H,
68         Rb,
69         Rt
70     )
71
72     denom = np.maximum(
73         np.abs(r),
74         eps
75     )
76
77     return (r - pred) / denom
78
79 loss = (
80     args.loss_robusta
81     if robust
82     else "linear"
83 )
84
85 f_scale = args.robust_f_scale
86
87 if f_scale <= 0:
88     f_scale = 1.0
89
90 sol = least_squares(
91     residual,
92     x0,
93     bounds=(lower, upper),
94     loss=loss,
95     f_scale=f_scale,
96     max_nfev=args.max_avaliacoes,
97     xtol=args.tolerancia,
98     ftol=args.tolerancia,
99     gtol=args.tolerancia,
100 )
101
102 H, Rb, frac = sol.x
103 Rt = float(frac * Rb)
104
105 return float(H), float(Rb), Rt, sol

```

Código B.3 – Função comum aos ajustes por mínimos quadrados e Soft-L1

A função específica dos mínimos quadrados convencionais chama a rotina anterior com o argumento `robust=False`.

```
1 def metodo_minimos_quadrados(  
2     data,  
3     args,  
4     rng,  
5     repeticao,  
6     seed  
7 ):  
8     H, Rb, Rt, sol = ajustar_least_squares_arrays(  
9         data.z_borda,  
10        data.r_borda,  
11        args,  
12        rng,  
13        robust=False,  
14        repeticao=repeticao  
15    )  
16  
17  
18    resultado = montar_resultado(  
19        data,  
20        H,  
21        Rb,  
22        Rt,  
23        args,  
24        extras={  
25            "tentativas": int(sol.nfev),  
26            "rodadas": int(sol.nfev),  
27            "early_stop": bool(sol.status > 0),  
28            "stop_reason": str(sol.message),  
29        },  
30    )  
31  
32    historico = [  
33        registro_historico(  
34            data,  
35            "least_squares",  
36            args,  
37            repeticao,  
38            seed,  
39            int(sol.nfev),  
40            int(sol.nfev),  
41            resultado,  
42            True,  
43            0,  
44            "resultado_scipy"  
45        )  
46    ]  
47  
48    return resultado, historico
```

Código B.4 – Aplicação do método dos mínimos quadrados convencionais

A função correspondente ao método Soft-L1 utiliza a mesma estrutura, alterando o argumento para `robust=True`.

```
1 def metodo_robusto(  
2     data,  
3     args,  
4     rng,  
5     repeticao,  
6     seed  
7 ):  
8     H, Rb, Rt, sol = ajustar_least_squares_arrays(  
9         data.z_borda,  
10        data.r_borda,  
11        args,  
12        rng,  
13        robust=True,  
14        repeticao=repeticao  
15    )  
16  
17  
18    resultado = montar_resultado(  
19        data,  
20        H,  
21        Rb,  
22        Rt,  
23        args,  
24        extras={  
25            "tentativas": int(sol.nfev),  
26            "rodadas": int(sol.nfev),  
27            "early_stop": bool(sol.status > 0),  
28            "stop_reason": (  
29                f"{args.loss_robusta}:"  
30                f"{sol.message}"  
31            ),  
32        },  
33    )  
34  
35    historico = [  
36        registro_historico(  
37            data,  
38            "robust",  
39            args,  
40            repeticao,  
41            seed,  
42            int(sol.nfev),  
43            int(sol.nfev),  
44            resultado,  
45            True,  
46            0,  
47            "resultado_scipy_robusto"  
48        )  
49    ]
```

```

50
51 return resultado, historico

```

Código B.5 – Aplicação do método robusto com perda Soft-L1

A seleção da função de perda ocorre na seguinte instrução do Código B.3:

```

1 loss = args.loss_robusta if robust else "linear"

```

Código B.6 – Seleção da função de perda utilizada na otimização

Quando `robust=False`, é selecionada a perda linear. Quando `robust=True`, o programa utiliza a perda armazenada em `args.loss_robusta`, definida por padrão como `soft_l1`.

B.3.4 RANSAC

Em cada rodada do RANSAC, dois pontos do perfil radial são selecionados aleatoriamente para gerar uma reta candidata. Os pontos cuja distância em relação a essa reta permanece abaixo do limiar configurado são classificados como *inliers*.

Quando a quantidade de *inliers* é suficiente, uma nova reta é ajustada utilizando apenas esses pontos. Nesse refinamento, cada fatia é ponderada de acordo com sua quantidade de pontos.

O *score* recebe uma penalização quando a proporção de *inliers* é baixa. Ao final do processamento, o melhor conjunto de *inliers* pode ser submetido a um refinamento adicional por mínimos quadrados robustos.

```

1 def metodo_ransac(data, args, rng, repeticao, seed):
2     z = data.z_borda
3     r = data.r_borda
4     n = len(z)
5
6
7     if n < 4:
8         raise RuntimeError(
9             "RANSAC precisa de pelo menos "
10            "quatro fatias validas."
11        )
12
13     dif = r - np.median(r)
14     mad = np.median(np.abs(dif)) * 1.4826
15
16     limiar = args.ransac_limiar
17
18     if limiar <= 0:
19         limiar = max(
20             0.03 * float(np.max(r)),
21             1.5 * float(mad),

```

```

22         1e-9
23     )
24
25     melhor = None
26     melhor_inliers = None
27     melhor_inlier_ratio = 0.0
28     historico = []
29     contador = 0
30     tentativa = 0
31     rodada_final = 0
32
33     for rodada in range(1, args.max_rodadas + 1):
34         rodada_final = rodada
35
36         i1, i2 = rng.choice(
37             n,
38             size=2,
39             replace=False
40         )
41
42         if abs(z[i2] - z[i1]) < 1e-12:
43             continue
44
45         slope = float(
46             (r[i2] - r[i1])
47             / (z[i2] - z[i1])
48         )
49
50         intercept = float(
51             r[i1] - slope * z[i1]
52         )
53
54         pred = slope * z + intercept
55
56         inliers = (
57             np.abs(r - pred)
58             <= limiar
59         )
60
61         minimo_inliers = max(
62             4,
63             int(
64                 args.ransac_min_inliers_frac
65                 * n
66             )
67         )
68
69         if np.count_nonzero(inliers) >= minimo_inliers:
70             slope_ref, intercept_ref = ajustar_linha(
71                 z[inliers],
72                 r[inliers],
73                 data.n_pts_bin[inliers]
74             )
75
76             params, cand = melhor_candidato_de_linha(
77                 slope_ref,
78                 intercept_ref,

```

```

79         z,
80         r,
81         args
82     )
83
84     inlier_ratio = float(
85         np.count_nonzero(inliers) / n
86     )
87
88     if cand is not None:
89         cand = dict(cand)
90
91         cand["score"] = (
92             cand["score"]
93             * (
94                 1.0
95                 + max(
96                     0.0,
97                     0.75 - inlier_ratio
98                 )
99             )
100         )
101
102         cand["inlier_ratio"] = inlier_ratio
103         cand["n_inliers"] = int(
104             np.count_nonzero(inliers)
105         )
106     else:
107         cand = None
108         inlier_ratio = 0.0
109
110     tentativa += 1
111     melhorou = eh_melhor(melhor, cand)
112
113     if melhorou:
114         melhor = cand
115         melhor_inliers = inliers.copy()
116         melhor_inlier_ratio = inlier_ratio
117         contador = 0
118     else:
119         contador += 1
120
121     historico.append(
122         registro_historico(
123             data,
124             "ransac",
125             args,
126             repeticao,
127             seed,
128             tentativa,
129             rodada,
130             cand,
131             melhorou,
132             contador
133         )
134     )
135

```

```

136     if contador >= args.paciencia_iter:
137         break
138
139     if melhor is None:
140         raise RuntimeError(
141             "RANSAC nao encontrou "
142             "inliers suficientes."
143         )
144
145     if (
146         melhor_inliers is not None
147         and np.count_nonzero(melhor_inliers) >= 4
148     ):
149         H, Rb, Rt, sol = ajustar_least_squares_arrays(
150             z[melhor_inliers],
151             r[melhor_inliers],
152             args,
153             rng,
154             robust=True,
155             repeticao=repeticao,
156         )
157
158         try:
159             refinado = montar_resultado(
160                 data,
161                 H,
162                 Rb,
163                 Rt,
164                 args,
165                 extras={
166                     "inlier_ratio":
167                         melhor_inlier_ratio,
168                     "n_inliers": int(
169                         np.count_nonzero(
170                             melhor_inliers
171                         )
172                     ),
173                 },
174             )
175
176             if eh_melhor(melhor, refinado):
177                 melhor = refinado
178
179         except RuntimeError:
180             pass
181
182     resultado = montar_resultado(
183         data,
184         melhor["H"],
185         melhor["R_base"],
186         melhor["R_topo"],
187         args,
188         extras={
189             "tentativas": tentativa,
190             "rodadas": rodada_final,
191             "early_stop":
192                 contador >= args.paciencia_iter,

```

```

193     "stop_reason": (
194         "paciencia_iter"
195         if contador >= args.paciencia_iter
196         else "max_rodadas"
197     ),
198     "inlier_ratio": melhor.get(
199         "inlier_ratio",
200         melhor_inlier_ratio
201     ),
202     "n_inliers": melhor.get(
203         "n_inliers",
204         0
205     ),
206 },
207 )
208
209 return resultado, historico

```

Código B.7 – Função correspondente ao método RANSAC

B.3.5 ICP

Inicialmente, é extraída uma amostra dos pontos externos da pilha. Em seguida, um cone artificial é gerado a partir de uma estimativa inicial dos parâmetros geométricos.

O algoritmo ICP ponto a ponto da biblioteca Open3D registra o cone artificial sobre a superfície medida. A transformação obtida pelo registro é utilizada para estimar um novo centro no plano (X)-(Y).

Com o centro atualizado, o perfil radial é recalculado. Posteriormente, os parâmetros H , R_{base} e R_{topo} são refinados utilizando mínimos quadrados robustos.

```

1 def pontos_superficie_para_icp(data, args, rng):
2     r = np.sqrt(
3         (data.x - data.x_c0) ** 2
4         + (data.y - data.y_c0) ** 2
5     )
6
7
8     edges = np.linspace(
9         float(data.z.min()),
10        float(data.z.max()),
11        args.n_bins_altura + 1
12    )
13
14    idx = np.digitize(data.z, edges) - 1
15    escolhidos = []
16
17    for k in range(args.n_bins_altura):
18        m = idx == k
19
20        if np.count_nonzero(m) < args.min_pts_bin:
21            continue

```

```

22
23     lim = np.percentile(
24         r[m],
25         args.q_borda
26     )
27
28     inds = np.where(m)[0]
29     inds = inds[r[m] >= lim]
30
31     if len(inds):
32         escolhidos.append(inds)
33
34 if not escolhidos:
35     raise RuntimeError(
36         "Nao foi possivel extrair pontos "
37         "de superficie para ICP."
38     )
39
40 idx_final = np.concatenate(escolhidos)
41
42 if len(idx_final) > args.max_pontos_superficie:
43     idx_final = rng.choice(
44         idx_final,
45         size=args.max_pontos_superficie,
46         replace=False
47     )
48
49 return data.pontos[idx_final]

```

Código B.8 – Extração dos pontos externos utilizados pelo ICP

```

1 def gerar_cone_artificial(
2     x_c,
3     y_c,
4     H,
5     Rb,
6     Rt,
7     n_z=70,
8     n_theta=160
9 ):
10     zs = np.linspace(
11         0.0,
12         H,
13         n_z
14     )
15
16
17     theta = np.linspace(
18         0.0,
19         2.0 * np.pi,
20         n_theta,
21         endpoint=False
22     )
23
24     pontos = []
25

```

```

26 for z in zs:
27     raio = modelo_frustum(
28         z,
29         H,
30         Rb,
31         Rt
32     )
33
34     xs = x_c + raio * np.cos(theta)
35     ys = y_c + raio * np.sin(theta)
36
37     pontos.append(
38         np.column_stack(
39             [
40                 xs,
41                 ys,
42                 np.full_like(xs, z)
43             ]
44         )
45     )
46
47 return np.vstack(pontos)

```

Código B.9 – Geração do cone artificial utilizado como fonte no ICP

```

1 def metodo_icp(data, args, rng, repeticao, seed):
2     o3d = importar_open3d()
3
4
5     slope, intercept = ajustar_linha(
6         data.z_borda,
7         data.r_borda,
8         data.n_pts_bin
9     )
10
11     params, inicial = melhor_candidato_de_linha(
12         slope,
13         intercept,
14         data.z_borda,
15         data.r_borda,
16         args
17     )
18
19     if inicial is None:
20         H0, Rb0, Rt0 = estimativa_inicial(
21             data.z_borda,
22             data.r_borda,
23             args,
24             rng,
25             jitter=0.03
26         )
27     else:
28         H0, Rb0, Rt0 = params
29
30     alvo = pontos_superficie_para_icp(
31         data,

```

```

32     args,
33     rng
34 )
35
36 fonte = gerar_cone_artificial(
37     data.x_c0,
38     data.y_c0,
39     H0,
40     Rb0,
41     Rt0
42 )
43
44 pcd_fonte = o3d.geometry.PointCloud()
45 pcd_fonte.points = (
46     o3d.utility.Vector3dVector(fonte)
47 )
48
49 pcd_alvo = o3d.geometry.PointCloud()
50 pcd_alvo.points = (
51     o3d.utility.Vector3dVector(alvo)
52 )
53
54 threshold = args.icp_threshold
55
56 if threshold <= 0:
57     threshold = max(
58         0.08 * Rb0,
59         1e-9
60     )
61
62 reg = (
63     o3d.pipelines.registration
64     .registration_icp(
65         pcd_fonte,
66         pcd_alvo,
67         threshold,
68         np.eye(4),
69         o3d.pipelines.registration
70         .TransformationEstimationPointToPoint(),
71         o3d.pipelines.registration
72         .ICPConvergenceCriteria(
73             max_iteration=args.icp_iteracoes
74         ),
75     )
76 )
77
78 T = np.asarray(
79     reg.transformation,
80     dtype=float
81 )
82
83 centro_base = np.array(
84     [
85         data.x_c0,
86         data.y_c0,
87         0.0,
88         1.0

```

```

89     ]
90 )
91
92 centro_transformado = T @ centro_base
93
94 x_c = float(centro_transformado[0])
95 y_c = float(centro_transformado[1])
96
97 z_b, r_b, _ = extrair_perfil_borda(
98     data.x,
99     data.y,
100     data.z,
101     x_c,
102     y_c,
103     args
104 )
105
106 H, Rb, Rt, sol = ajustar_least_squares_arrays(
107     z_b,
108     r_b,
109     args,
110     rng,
111     robust=True,
112     repeticao=repeticao
113 )
114
115 resultado = montar_resultado(
116     data,
117     H,
118     Rb,
119     Rt,
120     args,
121     x_c=x_c,
122     y_c=y_c,
123     extras={
124         "tentativas": int(
125             args.icp_iteracoes + sol.nfev
126         ),
127         "rodadas": int(
128             args.icp_iteracoes
129         ),
130         "early_stop": True,
131         "stop_reason": (
132             f"icp_fitness="
133             f"{float(reg.fitness):.6g}; "
134             f"inlier_rmse="
135             f"{float(reg.inlier_rmse):.6g}"
136         ),
137         "inlier_ratio": float(
138             reg.fitness
139         ),
140     },
141     recomputar_perfil=True,
142 )
143
144 historico = [
145     registro_historico(

```

```
146     data,  
147     "icp",  
148     args,  
149     repeticao,  
150     seed,  
151     int(args.icp_iteracoes),  
152     int(args.icp_iteracoes),  
153     resultado,  
154     True,  
155     0,  
156     "icp_open3d"  
157 )  
158 ]  
159  
160 return resultado, historico
```

Código B.10 – Função correspondente ao ajuste pelo método ICP

APÊNDICE C – Declaração de uso de ferramentas de inteligência artificial

Eu, **João Vítor Fagundes**, declaro que utilizei ferramentas de Inteligência Artificial (IA) durante o processo de elaboração deste trabalho, conforme descrito a seguir.

1. Ferramenta utilizada

Foi utilizada a ferramenta **OpenAI Codex**.

2. Etapas em que a ferramenta foi utilizada

A ferramenta foi empregada como auxílio no desenvolvimento, na revisão e na organização dos códigos computacionais escritos em Python utilizados neste trabalho.

Também foi utilizada para a geração de imagens conceituais que serviram como referência visual para a elaboração da Figura 5, referente ao método das fatias horizontais, e da Figura 8, referente ao método ICP.

3. Seções do trabalho em que foi utilizada

A ferramenta foi utilizada na elaboração dos códigos computacionais relacionados aos métodos de ajuste apresentados na Seção 2.3.

As imagens geradas com auxílio da ferramenta também foram utilizadas nessa mesma seção, exclusivamente como referência para a elaboração das representações esquemáticas dos métodos das fatias horizontais e ICP. Essas representações tiveram como finalidade facilitar a explicação e a compreensão do funcionamento dos métodos de *fitting* empregados no trabalho.

4. Limites de uso

A ferramenta de Inteligência Artificial foi utilizada exclusivamente como recurso de apoio à programação e à criação de referências visuais. Todos os códigos sugeridos foram revisados, adaptados, testados e validados pelo autor antes de sua utilização.

As imagens geradas foram utilizadas apenas como base para a elaboração das figuras finais, que foram revisadas e adaptadas de acordo com os métodos empregados neste trabalho.

A ferramenta não foi utilizada para produzir ou interpretar os resultados experimentais de forma autônoma, nem para substituir a análise crítica, as decisões metodológicas ou a redação científica de responsabilidade do autor.

Declaro, ainda, que assumo total responsabilidade pelo conteúdo apresentado neste trabalho, incluindo sua originalidade, precisão, validade e integridade ética. Todos os resultados, análises, conclusões, códigos e representações gráficas foram avaliados e validados pelo autor.

João Vítor Fagundes