



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MINAS



ARJÚNIOR ARLINDO SOUZA DE PAULA

**KRIGMINE2D: DESENVOLVIMENTO DE UM *SOFTWARE* DIDÁTICO E
INTERATIVO PARA O ENSINO DOS MÉTODOS DE KRIGAGEM EM
GEOESTATÍSTICA**

Ouro Preto - MG

Junho de 2026

ARJÚNIOR ARLINDO SOUZA DE PAULA

KRIGMINE2D: DESENVOLVIMENTO DE UM *SOFTWARE* DIDÁTICO E INTERATIVO
PARA O ENSINO DOS MÉTODOS DE KRIGAGEM EM GEOESTATÍSTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Engenharia de Minas da Universidade
Federal de Ouro Preto, para a obtenção do título de
Bacharel em Engenharia de Minas.

Área de concentração: Engenharia de Minas;
Geoestatística.

Orientador: Prof. Dr. Ivo Eyer Cabral.

Ouro Preto - MG

Junho de 2026



FOLHA DE APROVAÇÃO

Arjúnior Arlindo Souza de Paula

KrigMine2D: desenvolvimento de um *software* didático e interativo para o ensino dos métodos de krigagem em geoestatística

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Minas

Aprovada em 04 de junho de 2026

Membros da banca

Doutor Ivo Eyer Cabral - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Doutor Carlos Enrique Arroyo Ortiz - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Doutor Elton Destro - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Ivo Eyer Cabral, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 08/06/2026



Documento assinado eletronicamente por **Ivo Eyer Cabral, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/06/2026, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1120318** e o código CRC **8F2F7AF4**.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à minha mãe, Eliane, e à minha avó, Maria, pelo apoio incondicional ao longo de toda a minha trajetória. A presença e o incentivo constantes de ambas foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Ao meu orientador, Ivo, expressei minha sincera gratidão pela orientação, pela disponibilidade e, sobretudo, pela paciência demonstrada ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação foi essencial para a conclusão desta etapa.

Agradeço também aos amigos e colegas da Engenharia de Minas pelo companheirismo e a todos os professores e técnicos do curso, que contribuíram, cada um a seu modo, para um ensino de excelência.

Por fim, agradeço à Fundação Gorceix, pelo apoio financeiro e educacional fornecido ao longo do curso, e à Escola de Minas e à Universidade Federal de Ouro Preto, pela formação de qualidade que tive o privilégio de receber.

RESUMO

Krigagem é um termo genérico para diferentes métodos de estimativas não tendenciosos e de variância de erro mínima empregados na geoestatística que são amplamente utilizados na avaliação de recursos minerais. As estimativas produzidas por krigagem dependem de diversos fatores, como o suporte a estimar, a disposição espacial das amostras entre si e em relação ao que se quer estimar, os modelos teóricos de variograma escolhidos, os parâmetros do variograma e a presença de anisotropia. Os *softwares* geoestatísticos disponíveis no mercado, sejam comerciais ou gratuitos, operam predominantemente como "caixas-pretas", executando os procedimentos de cálculo sem permitir o acompanhamento das etapas intermediárias, o que limita seu valor como ferramenta de ensino, pois admitem que o usuário já tenha conhecimento de como as técnicas funcionam e de como a escolha dos fatores mencionados afetam os resultados. Neste contexto, o presente trabalho teve como objetivo desenvolver um *software* didático em linguagem Python para a estimação geoestatística por krigagem, contemplando as variantes simples, ordinária e da média, com suporte de estimativa pontual e em blocos. A implementação foi conduzida com auxílio das bibliotecas NumPy, Pandas, Matplotlib e CustomTkinter, contemplando os modelos teóricos de variograma esférico, exponencial e gaussiano, além do efeito pepita, com possibilidade de composição de modelos aninhados e tratamento de anisotropia geométrica. A validação foi realizada pela comparação dos resultados produzidos pelo *software* com exemplos resolvidos da literatura, observando-se equivalência numérica entre os valores estimados e as variâncias do erro em todas as variantes implementadas. O *software* resultante, denominado KrigMine2D, disponibiliza ao usuário uma interface gráfica interativa que permite acompanhar visualmente cada etapa do processo de krigagem, incluindo a visualização das matrizes intermediárias e a comparação simultânea entre as variantes implementadas. Estudos de caso conduzidos com dados da literatura geoestatística confirmaram a aderência da ferramenta aos resultados de referência e às relações teóricas previstas e várias possibilidades de uso didático do *software* foram apresentadas. O *software* foi compilado em formato executável independente, viabilizando sua utilização em ambientes de ensino sem a necessidade de instalação prévia de bibliotecas ou ambientes de programação.

Palavras-chave: Geoestatística; Krigagem; Desenvolvimento de *Software*; Python; Engenharia de Minas.

ABSTRACT

Kriging is a generic term for different unbiased and minimum error variance estimation methods employed in geostatistics that are widely used in mineral resource evaluation. The estimates produced by kriging depend on several factors, such as the support to be estimated, the spatial arrangement of the samples relative to each other and to what is to be estimated, the chosen theoretical variogram models, the variogram parameters, and the presence of anisotropy. The geostatistical software available on the market, whether commercial or free, operate predominantly as "black boxes," executing calculation procedures without allowing the user to monitor intermediate steps. This limits their value as a teaching tool, as they assume the user already knows how the techniques work and how the choice of the aforementioned factors affects the results. In this context, the present work aimed to develop an educational software in Python for geostatistical estimation by kriging, covering the simple, ordinary, and mean variants, with both point and block estimation support. The implementation was carried out with the help of the NumPy, Pandas, Matplotlib, and CustomTkinter libraries, encompassing the spherical, exponential, and Gaussian theoretical variogram models, in addition to the nugget effect, with the possibility of composing nested models and treating geometric anisotropy. Validation was performed by comparing the results produced by the software with solved examples from the literature, observing numerical equivalence between the estimated values and the error variances in all implemented variants. The resulting software, named KrigMine2D, provides the user with an interactive graphical interface that allows them to visually follow each step of the kriging process, including the visualization of intermediate matrices and the simultaneous comparison between the implemented variants. Case studies conducted with data from the geostatistical literature confirmed the tool's adherence to reference results and expected theoretical relationships, and several possibilities for the educational use of the software were presented. The software was compiled into a standalone executable format, making its use viable in teaching environments without the need for prior installation of libraries or programming environments.

Keywords: Geostatistics; Kriging; Software Development; Python; Mining Engineering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Relação entre a função variograma e covariância.	20
Figura 2 - Diagrama de malha amostral em grade regular (6x6) com direções preferenciais de amostragem orientadas a 45° e 315° em relação ao Norte.	21
Figura 3 - Parâmetros adicionais necessários para o cálculo do variograma experimental para dados dispostos em uma malha irregular.....	22
Figura 4 - Modelo de variograma com indicação do seu patamar e alcance.....	24
Figura 5 - Os quatro tipos de comportamentos do variograma próximos a origem.	25
Figura 6 - Tipos de anisotropia presentes em um fenômeno espacial: (a) geométrica, (b) zonal e (c) mista.	28
Figura 7 - Fluxograma representando a sequência do processamento de dados realizado pelo <i>software</i>	39
Figura 8 - Exemplo de arquivo .txt aceito pelo software.....	40
Figura 9 - Bloco discretizado em: (a) malha 1×1; (b) malha 2×2 e (c) malha 10×10.	41
Figura 10 - Fluxograma representando a sequência de operações para o cálculo das estimativas finais.	44
Figura 11 - Elipse utilizada para representar graficamente a anisotropia geométrica.....	46
Figura 12 - Tela principal do KrigMine2D.	60
Figura 13 - Janela de inserção e importação de dados.	61
Figura 14 - Visualização de dados importados no KrigMine2D.	62
Figura 15 - Visualização gráfica do conjunto amostral no KrigMine2D.	62
Figura 16 - Visualização do ponto a ser estimado no KrigMine2D.	63
Figura 17 - Interface para configuração dos parâmetros do bloco no KrigMine2D.	64
Figura 18 - Visualização do bloco e respectivos nós de discretização no KrigMine2D.	64
Figura 19 - Opções de configuração da média na krigagem simples KrigMine2D.	65
Figura 20 - Aba de modelagem do variograma no KrigMine2D.	66

Figura 21 - Janela de configuração de uma estrutura variográfica no KrigMine2D.	66
Figura 22 - Visualização das estruturas variográficas adicionadas ao modelo global no KrigMine2D.	67
Figura 23 - Variogramas exibidos pelo KrigMine2D: (a) variograma global; (b) efeito pepita; (c) estrutura com anisotropia em X; (d) estrutura com anisotropia em Y.	68
Figura 24 - Leitura interativa dos valores do variograma no KrigMine2D.	69
Figura 25 - Painéis de pesos das amostras e estimativa final no KrigMine2D.	70
Figura 26 - Janela de visualização das matrizes intermediárias no KrigMine2D, da aba "Distâncias".	71
Figura 27 - Aba "Variogramas e Covariâncias" da janela de visualização de matrizes no <i>software</i> KrigMine2D.	72
Figura 28 - Aba "Sistema" da janela de visualização das matrizes no KrigMine2D, exibindo a matriz K e a resolução do sistema linear na forma $[K^{-1}] \cdot [C] = [\lambda]$	72
Figura 29 - Janela de comparação entre as variantes de krigagem no KrigMine2D.	73
Figura 30 - Comparação entre as estimativas da krigagem ordinária e da krigagem simples com média obtida pela krigagem da média no KrigMine2D.	76
Figura 31 - Estimativa da média obtida pela krigagem da média no KrigMine2D.	76
Figura 32 - Configuração espacial das sete amostras e do ponto a estimar (65; 137) utilizadas no estudo de caso, conforme exibida no <i>software</i> KrigMine2D.	78
Figura 33 - Variogramas obtidos para o modelo exponencial e gaussiano, ambos com alcance de 10 m e patamar de 10 ppm ²	79
Figura 34 - Efeito da forma do variograma sobre os pesos atribuídos às amostras, obtidos no KrigMine2D: (a) modelo exponencial; (b) modelo gaussiano.	80
Figura 35 - Variogramas obtidos no KrigMine2D para modelos exponenciais com mesmo alcance e patamar total, diferindo apenas no efeito pepita: (a) ausência de efeito pepita ($C_0 = 0$); (b) efeito pepita correspondente a 50% do patamar ($C_0 = 5$).	81

Figura 36 - Variogramas, pesos das amostras, estimativa e variância de krigagem obtidos no KrigMine2D para modelos exponenciais com mesmo patamar e efeito pepita nulo, diferindo apenas no alcance: (a) $a = 10$ m; (b) $a = 20$ m..... 82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estruturas variográficas disponíveis no <i>software</i> desenvolvido.....	49
Tabela 2 - Conjunto amostral utilizado no Exercício 2.1 disponível em Olea (1999).	56
Tabela 3 - Resultados comparativos entre Olea (1999) e o <i>software</i> desenvolvido.....	57
Tabela 4 - Conjunto amostral utilizado para validação da krigagem ordinária.....	57
Tabela 5 - Resultados obtidos para a krigagem pontual realizada no E{Z}-Kriging e no <i>software</i> desenvolvido.	58
Tabela 6 - Resultados obtidos para a krigagem ordinária realizada em um bloco no E{Z}-Kriging e no <i>software</i> desenvolvido.	58
Tabela 7 - Conjunto amostral utilizado para a validação da krigagem da média.	59
Tabela 8 - Resultados obtidos para a krigagem da média por Yamamoto e Landim (2013) e pelo <i>software</i> desenvolvido.	59
Tabela 9 - Conjunto amostral utilizado na verificação da equivalência entre a krigagem ordinária e a krigagem simples com média obtida pela krigagem da média.	75
Tabela 10 - Conjunto amostral utilizado no estudo de caso, extraído de Isaaks e Srivastava (1989).	78

Sumário

1. INTRODUÇÃO	13
2. OBJETIVOS	15
2.1. Objetivo geral	15
2.2. Objetivos específicos	15
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3.1. A Teoria das Variáveis Regionalizadas	16
3.2. Hipótese de estacionariedade e intrínseca	18
3.3. Variograma experimental	20
3.3.1. Cálculo para amostras dispostas em uma malha regular	21
3.3.2. Cálculo para amostras dispostas em uma malha irregular	22
3.4. Modelos teóricos de variograma.....	23
3.4.1. Parâmetros de um variograma teórico.....	23
3.4.2. Comportamento de um variograma próximo a origem	24
3.4.3. Alguns modelos teóricos de variograma e covariâncias	25
3.5. Anisotropia	27
3.6. Métodos de estimativa – média, inverso da distância e krigagem.....	28
3.6.1. Média, inverso da distância e krigagem	28
3.6.2. Krigagem simples.....	31
3.6.3. Krigagem ordinária	33
3.6.4. Krigagem da média	34
3.6.5. Krigagem de um bloco	37
4. METODOLOGIA	38
4.1. Ambiente de desenvolvimento	38

4.2.	Fluxo de processamento de dados	38
4.3.	Entrada de dados.....	39
4.4.	Configuração da krigagem	40
4.4.1.	Definição do suporte de estimativa	40
4.4.2.	Parâmetros para a krigagem de um bloco	40
4.4.3.	Discretização do bloco	41
4.4.4.	Estruturas de variograma.....	42
4.4.5.	Cálculo das estimativas finais	43
4.4.6.	Cálculo das distâncias – Estruturas isotrópicas.....	44
4.4.7.	Cálculo das distâncias – Estruturas anisotrópicas	45
4.4.8.	Cálculo do variograma	48
4.4.9.	Montagem do sistema de krigagem.....	51
4.4.10.	Resolução do sistema de krigagem e cálculo das estimativas.....	55
4.5.	Validação dos resultados	56
4.5.1.	Krigagem simples.....	56
4.5.2.	Krigagem ordinária	57
4.5.3.	Krigagem da média	58
5.	RESULTADOS E DISCUSSÃO	60
5.1.	Apresentação do software.....	60
5.2.	Exemplos de possíveis aplicações didáticas.....	74
5.2.1.	A relação entre krigagem ordinária, simples e da média	74
5.2.2.	Exploração interativa do efeito dos parâmetros do variograma.....	77
5.2.3.	Outros possíveis usos didáticos.....	82
6.	CONCLUSÃO	84

7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
APÊNDICE A – EXEMPLO - KRIGAGEM ORDINÁRIA	89
APÊNDICE B – EXEMPLO - KRIGAGEM ORDINÁRIA COM ANISOTROPIA	94

1. INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios da indústria mineral é determinar se um determinado local constitui uma reserva viável para a exploração, o que envolve normalmente a estimativa de um ou mais teores e da tonelagem do minério presente. Esse processo de estimativa, contudo, não se encerra na fase inicial de avaliação do depósito. Mesmo durante a operação de uma mina, as estimativas precisam ser continuamente atualizadas à medida que novas amostras se tornam disponíveis, de modo a subsidiar o planejamento de curto prazo e o controle de lavra.

Diversos métodos de estimativa foram desenvolvidos e aplicados ao longo das últimas décadas, entre os quais a média aritmética, o método do inverso da distância, o método das seções transversais e o método dos polígonos de influência. Embora simples e ainda utilizados em contextos específicos, esses métodos não consideram adequadamente a estrutura espacial dos dados, característica essencial em variáveis como os teores de minério. Esse limite motivou o desenvolvimento dos métodos geoestatísticos, dos quais a krigagem é o representante mais consolidado.

Formulada por Georges Matheron, com base na Teoria das Variáveis Regionalizadas, a krigagem designa um conjunto de estimadores fundamentados na combinação linear de amostras ponderadas e com variância do erro mínima. Embora sua execução prática se restrinja, em essência, a operações com matrizes, a compreensão dos efeitos de seus parâmetros (como a configuração amostral, a geometria do elemento de estimativa, a forma e os parâmetros do modelo variográfico, entre outros) depende da análise comparativa de múltiplos cenários. Quando essa análise é realizada manualmente ou apoiada exclusivamente por livros didáticos, o processo torna-se repetitivo e demorado, o que dificulta a construção, por parte dos estudantes iniciantes, de uma intuição sólida acerca do funcionamento do método.

Diante dessa dificuldade, a utilização de *softwares* geoestatísticos surge como uma alternativa natural à resolução manual. Contudo, as soluções atualmente disponíveis no mercado apresentam limitações importantes do ponto de vista didático. Entre os *softwares* comerciais, destacam-se o Isatis, o Datamine e o Leapfrog Geo, que oferecem ferramentas robustas para análises avançadas, mas dependem de licenças que restringem seu acesso em ambiente acadêmico. Alternativas gratuitas, como o GSLIB e o SGeMS, são amplamente empregadas em pesquisa, embora também sejam concebidas para usuários com conhecimento geoestatístico consolidado. Em ambos os casos, esses *softwares* operam, do ponto de vista do

usuário, como "caixas-pretas": executam o procedimento sem permitir o acompanhamento das etapas intermediárias do cálculo, o que limita seu valor como ferramenta de aprendizado.

Algumas iniciativas voltadas ao ensino da krigagem já foram propostas, entre as quais se destaca o *software* E{Z}-Kriging, desenvolvido por Dennis Walvoort. A ferramenta apresenta funcionalidades didáticas interessantes, como a definição interativa de modelos variográficos (patamares e alcances), a alteração do tipo de suporte da estimativa e, no caso de blocos, de suas dimensões, todas modificáveis dinamicamente na interface, com retorno em tempo real da estimativa atualizada. Apesar dessas qualidades, o E{Z}-Kriging apresenta limitações relevantes: contempla apenas a krigagem ordinária; o conjunto de amostras é restrito a, no máximo, sete pontos; não permite a combinação de múltiplas estruturas variográficas no modelo, nem a incorporação de anisotropia; e apresenta o sistema de krigagem exclusivamente em termos de covariância, sem detalhar as etapas intermediárias do cálculo.

Neste contexto, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de um *software* didático-pedagógico para a estimação por krigagem, voltado prioritariamente a estudantes de engenharia de minas, mas aplicável a outras áreas que recorrem a métodos geoestatísticos, como engenharia ambiental, hidrogeologia e agricultura de precisão. Desenvolvido em linguagem Python, o *software* contempla as krigagens simples, ordinária e da média, e foi concebido com o propósito de tornar visíveis ao usuário as etapas intermediárias do procedimento de cálculo, desde a construção das matrizes de distâncias e de variograma até a montagem dos sistemas lineares correspondentes a cada variante. Adicionalmente, busca-se superar limitações observadas em ferramentas didáticas existentes, oferecendo suporte a conjuntos amostrais de tamanho arbitrário, modelos variográficos compostos por múltiplas estruturas aninhadas e a incorporação de anisotropia geométrica nas estruturas.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo geral

Desenvolver um *software* didático em linguagem Python para a estimação geoestatística por krigagem voltado ao ensino e à aprendizagem dos fundamentos do método.

2.2. Objetivos específicos

- Implementar as três variantes de krigagem (simples, ordinária e da média) em suporte pontual e em bloco, contemplando diferentes estruturas variográficas e o tratamento de anisotropia geométrica;
- Desenvolver uma interface gráfica interativa que permita ao usuário acompanhar visualmente cada etapa do processo de krigagem, da inserção dos dados à apresentação dos resultados;
- Validar os resultados obtidos, utilizando exemplos da literatura;
- Disponibilizar o *software* em formato executável independente, viabilizando seu uso em ambientes de ensino.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1. A Teoria das Variáveis Regionalizadas

A origem da geoestatística está diretamente associada a problemas práticos de estimativas enfrentados pela indústria mineral, especialmente no contexto da exploração de depósitos auríferos na África do Sul ao longo do século XX. Nessas operações, uma das principais dificuldades consistia na seleção de blocos de lavra economicamente viáveis a partir de um número limitado de amostras, o que frequentemente levava a decisões baseadas em informações incompletas e potencialmente enviesadas.

Conforme descrito por Rivoirard (2005), na mina de Witwatersrand, a seleção de painéis de lavra de ouro evidenciava a ocorrência de um problema conhecido como viés condicional. Observava-se que blocos classificados como ricos com base nas amostras apresentavam, na realidade, teores inferiores aos estimados, enquanto blocos considerados pobres tendiam a apresentar teores superiores aos indicados pelas amostras. Esse comportamento estava associado ao efeito de mudança de suporte, uma vez que as variabilidades dos teores dependiam da escala ou do volume considerado na estimativa.

Diante dessas limitações, os trabalhos pioneiros de Daniel Krige representaram um avanço importante na estimativa de teores em depósitos auríferos, ao propor abordagens mais consistentes para o tratamento dos dados amostrais. Em seu estudo, Krige (1951) observou que a distribuição dos teores de ouro nesse depósito poderia ser descrita por uma distribuição log-normal. No entanto, os métodos de estimativa utilizados à época baseavam-se predominantemente em médias aritméticas simples e em fórmulas empíricas fundamentadas na experiência prática, sem uma consideração estatística mais rigorosa, o que tornava as estimativas suscetíveis à influência de valores extremos, podendo resultar em erros significativos, da ordem de até 40% em relação ao valor real dos blocos.

Como forma de contornar essas limitações, Krige propôs a utilização da média geométrica associada a um fator estatístico corretivo, determinado em função do número de amostras disponíveis e da variabilidade dos teores no interior do bloco mineralizado.

Apesar dos avanços introduzidos, essas abordagens ainda se baseavam exclusivamente nas propriedades estatísticas das amostras, sem considerar explicitamente sua disposição no espaço. Nesse contexto, Georges Matheron, considerado o pai da geoestatística, formulou a Teoria das Variáveis Regionalizadas. Segundo Matheron (1963), os métodos estatísticos

clássicos eram incapazes de fornecer estimativas adequadas, uma vez que ignoravam a natureza espacial de fenômenos como o teor de um depósito mineral, cuja variabilidade no espaço constitui sua característica fundamental.

Além disso, tais métodos baseavam-se no tratamento de variáveis aleatórias clássicas, cujos modelos pressupõem a repetição do processo gerador dos dados e a independência entre as observações. No entanto, essas condições não são atendidas no caso de variáveis associadas a fenômenos espacialmente distribuídos. Conforme destacado pelo autor, o teor de um minério não satisfaz tais pressupostos, uma vez que uma amostra não pode ser retirada mais de uma vez no mesmo ponto do espaço. Ademais, as observações não são independentes, pois amostras espacialmente próximas tendem a apresentar valores semelhantes, evidenciando a existência de dependência espacial.

Sendo assim, o autor propôs que variáveis associadas a fenômenos espacialmente distribuídos fossem tratadas como variáveis regionalizadas, que apresentariam dois aspectos aparentemente contraditórios: um componente aleatório, responsável pelas irregularidades locais, e um componente estruturado, que reflete tendências em maior escala.

Também apresentariam características fundamentais que as distinguiam das variáveis aleatórias clássicas. Em primeiro lugar, são localizadas, isto é, seus valores dependem do suporte de estimativa, envolvendo tanto a posição quanto o tamanho e a forma da amostra. Em segundo lugar, apresentam continuidade espacial, de modo que pontos próximos tendem a assumir valores semelhantes, ainda que não idênticos. Por fim, podem apresentar comportamento anisotrópico, no qual a variabilidade da variável depende da direção considerada.

Conforme afirmam Journel e Huijbregts (1978), o problema central da geoestatística pode ser formulado da seguinte forma: sendo $z(x)$ o valor de uma variável em um ponto x do espaço, como representar a variabilidade dessa função no espaço, isto é, como descrever seu comportamento à medida que x varia?

Segundo os autores, a abordagem geoestatística consiste em interpretar cada valor observado $z(x_i)$ como uma realização particular de uma variável aleatória $Z(x)$. O conjunto dessas variáveis aleatórias define uma função aleatória, de modo que o problema passa a ser compreender a estrutura de correlação existente entre elas.

Entretanto, como discutido por Armstrong (1998) e Sironvalle (2007), a análise direta dessa função aleatória é inviável sem a adoção de hipóteses simplificadoras que permitam seu tratamento probabilístico. Essas hipóteses são conhecidas como hipóteses de estacionariedade e hipótese intrínseca, fundamentais para o desenvolvimento dos métodos geoestatísticos.

3.2. Hipótese de estacionariedade e intrínseca

A modelagem de fenômenos espacialmente distribuídos por meio de funções aleatórias é complexa, o que torna inviável sua análise direta. Por esse motivo, para que seja possível realizar inferências probabilísticas sobre essas funções, a geoestatística admite a adoção de hipóteses de estacionariedade, simplificadoras, que tornam a análise mais viável.

Segundo Armstrong (1998), uma variável é considerada estacionária quando sua distribuição é invariante sob translação, ou seja, seu comportamento estatístico não se altera em função da posição no espaço. Ainda segundo a autora, a estacionariedade, em seu sentido mais estrito, exige que todos os momentos da variável sejam invariantes sob translação.

Na estatística, os momentos de uma variável aleatória são medidas numéricas utilizadas para descrever características fundamentais de sua distribuição, como o valor esperado (média), a variância, a assimetria, a curtose, entre outras. Na prática, a geoestatística trabalha apenas com o momento de primeira ordem (valor esperado ou esperança matemática) e três momentos de segunda ordem (variância *a priori*, covariância e variograma), e para inferência destes momentos a partir dos dados disponíveis é assumido que eles sejam estacionários ou constantes. Essa condição é conhecida como estacionariedade fraca, ou estacionariedade de segunda ordem. Matematicamente, essa condição exige que o valor esperado da variável regionalizada, $E[Z(x)]$, seja igual a uma média m em todo o domínio estudado:

$$E[Z(x)] = m \quad (1)$$

E que a covariância, $C(h)$, entre dois pontos quaisquer x e $x+h$, dependa apenas do vetor de separação h , e não de sua posição absoluta no espaço:

$$E[(Z(x) \cdot Z(x+h)) - m^2] = C(h) \quad (2)$$

Contudo, conforme Oliver e Webster (2015), na prática ocorrem situações em que não é possível assumir que a média seja constante no espaço. Por esse motivo, Matheron propôs a hipótese intrínseca, uma alternativa menos restritiva à estacionariedade de segunda ordem. Essa hipótese estabelece que os incrementos da variável, $Z(x+h) - Z(x)$, possuem média nula e

variância finita, dependendo apenas do vetor de separação “h” entre os pontos, e não de sua posição no espaço.

Matematicamente, essa condição pode ser expressa por:

$$E[Z(x+h) - Z(x)] = 0 \quad (3)$$

$$Var[Z(x+h) - Z(x)] = 2\gamma(h) \quad (4)$$

Entretanto, como afirmado por Armstrong (1998), para uma variável estacionária e intrínseca, a média dos incrementos $Z(x+h) - Z(x)$ é zero. Portanto a equação (4) pode ser reescrita como:

$$E[Z(x+h) - Z(x)]^2 = 2\gamma(h) \quad (5)$$

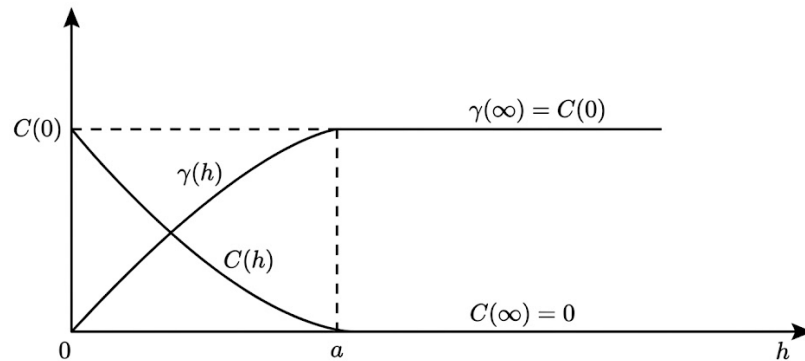
A função $2\gamma(h)$ é conhecida como variograma, uma ferramenta essencial para a interpretação da correlação espacial e para o cálculo de estimativas na geoestatística.

De acordo com Journel e Huijbregts (1978), sob a hipótese de estacionariedade de segunda ordem, o variograma e a covariância constituem ferramentas equivalentes para a análise da autocorrelação espacial entre valores da variável em diferentes posições no espaço. A relação entre essas funções pode ser expressa por:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (6)$$

Graficamente, essa relação pode ser interpretada da seguinte forma: o variograma assume valores mínimos quando a covariância é máxima. À medida que a distância aumenta, o variograma cresce até atingir um patamar, que, sob a hipótese de estacionariedade de segunda ordem, corresponde a $C(0)$ (a variância *a priori*), enquanto a covariância decresce tendendo a zero. Esse comportamento pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 - Relação entre a função variograma e covariância.



Fonte: adaptado de Journel e Huijbregts (1978).

Ainda segundo Oliver e Webster (2015), um fenômeno que aparenta ser estacionário em determinada escala pode apresentar comportamento tendencioso quando analisado em outra. Nesses casos, adota-se a hipótese de quase estacionariedade, segundo a qual o fenômeno é considerado estacionário apenas até um determinado limite ou distância.

3.3. Variograma experimental

Na prática, a função variograma teórica é desconhecida, uma vez que dispomos apenas de um conjunto limitado de dados amostrais. Dessa forma, torna-se necessário o cálculo do variograma experimental (ou empírico), que pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^n [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2 \quad (7)$$

Onde:

- x_i e $x_i + h$ representam as localizações das amostras separadas por um vetor de distância “h”;
- $Z(x_i)$ e $Z(x_i+h)$ são os valores da variável (ex.: teor de minério) em suas respectivas localizações;
- $N(h)$ é o número de pares de pontos identificados para cada incremento de distância “h”.

É importante ressaltar que a estratégia para a identificação dos pares de pontos separados pelo vetor h varia conforme a configuração geométrica dos dados. A complexidade do cálculo e a necessidade de critérios de agrupamento dependem diretamente da disposição das amostras

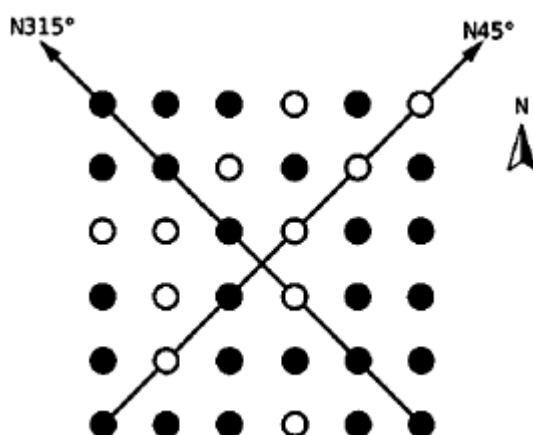
no espaço, sendo necessário distinguir os procedimentos adotados para malhas de amostragem regulares daqueles aplicados a malhas irregulares.

3.3.1. Cálculo para amostras dispostas em uma malha regular

Conforme descrito por Yamamoto e Landim (2013), para dados dispostos em malhas regulares, o variograma experimental pode ser obtido diretamente a partir das amostras disponíveis. Ou seja, para uma determinada distância “h”, ao longo de uma direção, formam-se pares de pontos, cujas diferenças ao quadrado são calculadas e posteriormente utilizadas para a obtenção de uma média.

Na Figura 2, é possível observar pontos amostrais dispostos em uma malha regular, na qual os pontos pretos indicam locais com dados disponíveis e os pontos brancos representam locais onde não foi possível obtê-los. As setas exibidas no esquema indicam, de forma ilustrativa, duas direções nas quais o variograma experimental pode ser calculado.

Figura 2 - Diagrama de malha amostral em grade regular (6x6) com direções preferenciais de amostragem orientadas a 45° e 315° em relação ao Norte.



Fonte: Yamamoto e Landim (2013).

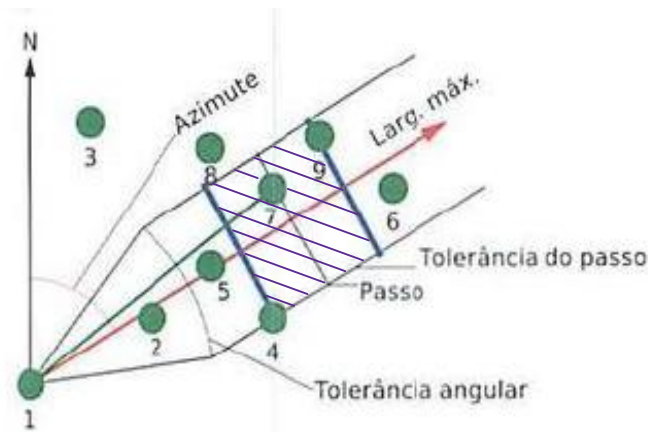
O resultado final é um conjunto de variogramas para diferentes direções. A realização do cálculo em orientações distintas é fundamental para a identificação de anisotropias, uma vez que o comportamento de uma variável regionalizada pode variar conforme a direção analisada. Essa identificação é muito importante para o ajuste posterior do variograma experimental a um modelo teórico de variograma.

3.3.2. Cálculo para amostras dispostas em uma malha irregular

Yamamoto e Landim (2013) destacam que, quando os dados estão distribuídos em uma malha irregular, o cálculo do variograma experimental exige a definição de parâmetros além da distância “h” e da direção.

Para lidar com essa irregularidade, os autores mencionam ser necessária a utilização de uma janela de busca ao redor de cada ponto amostral. Essa janela é caracterizada por uma direção principal, uma tolerância angular, uma largura máxima e um incremento de distância “h” com sua respectiva tolerância. Juntos, esses parâmetros permitem agrupar os pares de pontos de forma controlada, viabilizando o cálculo do variograma mesmo em configurações amostrais não regulares. A Figura 3 ilustra esquematicamente esses parâmetros mostrando a janela de busca hachurada.

Figura 3 - Parâmetros adicionais necessários para o cálculo do variograma experimental para dados dispostos em uma malha irregular.



Fonte: adaptado de Yamamoto e Landim (2013).

Essa janela é centrada em cada um dos pontos que compõem a malha amostral. A diferença ao quadrado é, então, calculada entre o ponto de origem e os demais pontos que possam existir dentro da janela definida. Mantendo-se a mesma direção, o processo é repetido para todos os incrementos “h” estabelecidos.

3.4. Modelos teóricos de variograma

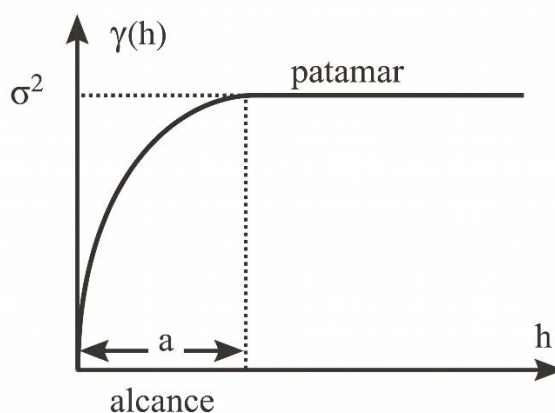
3.4.1. Parâmetros de um variograma teórico

Embora o variograma experimental sirva como uma primeira aproximação para descrever a correlação espacial entre amostras, é necessário ajustar a ele modelos teóricos de variograma, uma vez que o variograma experimental fornece valores apenas para um determinado conjunto de distâncias “h”, correspondentes àquelas efetivamente utilizadas em seu cálculo. Como a aplicação da krigagem exige a avaliação do variograma em distâncias arbitrárias, em particular, entre os pontos amostrais e o elemento de estimativa, que raramente coincidem com as distâncias amostradas, recorre-se a modelos teóricos, expressos por funções matemáticas contínuas, capazes de fornecer valores de $\gamma(h)$ para qualquer valor de “h”. Esses modelos descrevem a estrutura de dependência espacial por meio de parâmetros como alcance e patamar, sendo fundamentais para a aplicação de métodos de estimativa, como a krigagem.

Em termos de correlação espacial, espera-se que pontos próximos apresentem valores semelhantes, enquanto pontos mais distantes tendem a apresentar valores distintos. Conseqüentemente, os valores do variograma, isto é, a semivariância, tendem a aumentar com o incremento da distância “h”. Entretanto, conforme Samson e Deutsch (2021), esse aumento não ocorre indefinidamente, pois o variograma tende a se estabilizar a partir de uma certa distância, atingindo um valor limite conhecido como patamar (*sill*).

A distância na qual o patamar é atingido é conhecida como alcance ou amplitude (*range*). A partir dessa distância, segundo Matheron (1971), os dados deixam de apresentar correlação espacial, ou apresentam uma correlação que pode ser considerada desprezível. A Figura 4 ilustra um modelo teórico de variograma, com a indicação do patamar e do alcance.

Figura 4 - Modelo de variograma com indicação do seu patamar e alcance.



Fonte: adaptado de Armstrong (1998).

3.4.2. Comportamento de um variograma próximo a origem

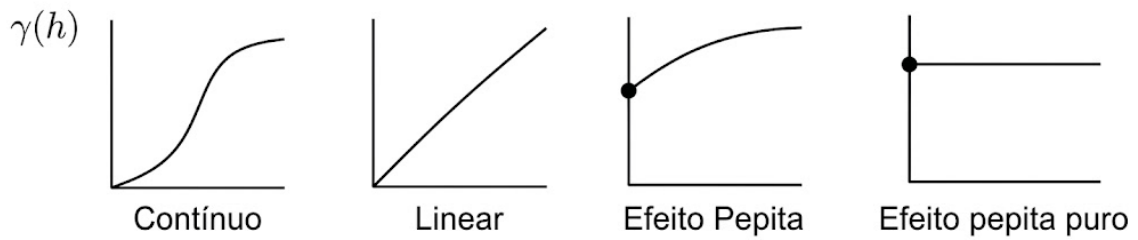
Antes de apresentar alguns modelos teóricos, é importante destacar o comportamento do variograma nas proximidades da origem. Matheron (1963), ao fundamentar a Teoria das Variáveis Regionalizadas, descreveu quatro tipos principais de comportamento: contínuo (ou parabólico), linear, efeito pepita e comportamento aleatório (ou efeito pepita puro).

O comportamento parabólico está associado a uma variabilidade espacial altamente regular e contínua, como, por exemplo, a espessura de uma camada sub-horizontal. Já o comportamento linear, de acordo com Matheron, indica uma continuidade "em média" ou moderada, sendo o mais comum em depósitos minerais.

O efeito pepita manifesta-se como uma descontinuidade na origem do variograma. Por definição, espera-se que $\gamma(0) = 0$, uma vez que um ponto ou amostra não apresenta variabilidade em relação a si mesmo. Entretanto, na prática, observa-se um salto inicial na curva do variograma. De acordo com Matheron, esse comportamento está geralmente associado a erros de amostragem e à variabilidade em pequena escala.

Por fim, tem-se o efeito pepita puro, caracterizado por um comportamento completamente aleatório. Nesse caso, $\gamma(0) = 0$, enquanto $\gamma(h)$ assume um valor constante igual ao patamar C_0 para qualquer $h > 0$. Esse comportamento evidencia, conforme Journel e Huijbregts (1978), a ausência total de autocorrelação espacial, independentemente da proximidade entre os pontos. A Figura 5 ilustra os quatro tipos de comportamento.

Figura 5 - Os quatro tipos de comportamentos do variograma próximos a origem.



Fonte: adaptado de Matheron (1963).

Conforme Armstrong (1998), a caracterização do comportamento do variograma próximo à origem é essencial, pois exerce grande influência nos resultados da krigagem.

3.4.3. Alguns modelos teóricos de variograma e covariâncias

Diversos modelos teóricos podem ser utilizados para representar o variograma. Esses modelos diferem entre si, principalmente, quanto ao comportamento próximo à origem e à forma como atingem o patamar, refletindo diferentes padrões de continuidade espacial. Dentre os mais empregados, destacam-se:

- a. Efeito pepita (Nugget effect)

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & \text{se } h = 0 \\ C, & \text{se } h > 0 \end{cases} \quad (8)$$

- b. Modelo esférico

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{se } h < a \\ C, & \text{se } h \geq a \end{cases} \quad (9)$$

- c. Modelo exponencial

$$\gamma(h) = C \left[1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right] \quad (10)$$

d. Modelo gaussiano

$$\gamma(h) = C \left[1 - e^{-3\left(\frac{h}{a}\right)^2} \right] \quad (11)$$

Esses modelos também admitem representação em termos da função covariância. Aplicando-se a relação (6), obtêm-se as seguintes expressões:

e. Efeito pepita (Nugget effect)

$$C(h) = \begin{cases} C, & \text{se } h = 0 \\ 0, & \text{se } h > 0 \end{cases} \quad (12)$$

f. Modelo esférico

$$C(h) = \begin{cases} C - C \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \right], & \text{se } h < a \\ 0, & \text{se } h \geq a \end{cases} \quad (13)$$

g. Modelo exponencial

$$C(h) = C - C \left[1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right] \quad (14)$$

h. Modelo gaussiano

$$C(h) = C - C \left[1 - e^{-3\left(\frac{h}{a}\right)^2} \right] \quad (15)$$

Nesses modelos, “C” representa o patamar, “a” o alcance e “h” a distância de separação utilizada no cálculo do variograma.

Existem outros modelos de variograma, como, por exemplo, os modelos cúbico e pentaesférico, e ainda modelos sem patamar, como os modelos de potência. Neste trabalho, optou-se por abordar apenas os modelos mais tradicionais, uma vez que são amplamente utilizados na prática geoestatística e apresentam bom desempenho na modelagem da continuidade espacial.

3.5. Anisotropia

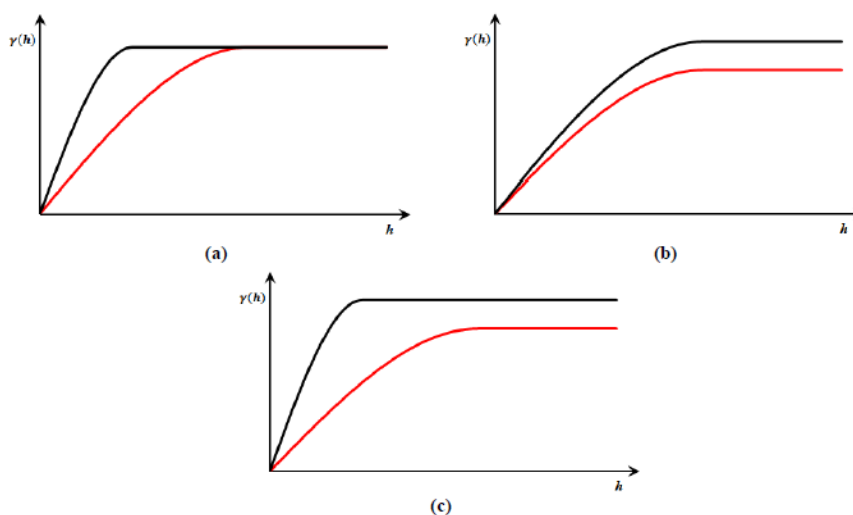
Ao calcular o variograma para um determinado conjunto de dados, busca-se compreender o comportamento da variável em relação aos valores observados em diferentes posições no espaço. Dessa forma, o variograma é definido em função do vetor de separação h entre dois pontos, x e $x+h$. Entretanto, a direção entre esses pontos também deve ser considerada, uma vez que o fenômeno espacial pode apresentar comportamentos distintos de acordo com a direção analisada.

Quando o variograma apresenta o mesmo comportamento em todas as direções, isto é, com valores semelhantes de patamar e alcance, o fenômeno espacial é considerado isotrópico. Entretanto, na maioria dos casos, esse comportamento não se verifica, sendo observadas diferenças nos valores de patamar e/ou alcance segundo a direção analisada, caracterizando o fenômeno conhecido como anisotropia. Conforme destacado por Sinclair e Blackwell (2004), distinguem-se dois tipos principais de anisotropia: geométrica e zonal.

Segundo os autores, na anisotropia geométrica, o patamar e o efeito pepita permanecem constantes, enquanto o alcance varia conforme a direção analisada. Por outro lado, na anisotropia zonal, o patamar varia, ao passo que o alcance permanece constante. Alguns autores como Goovaerts (1997) e Allard *et al.* (2015) consideram, para casos de modelagem, a anisotropia zonal como um caso limite da anisotropia geométrica. Conforme Souza (2016), há situações em que esses dois tipos de anisotropia coexistem, caracterizando a chamada

anisotropia mista. A Figura 6 ilustra como esses três tipos de anisotropia podem se apresentar em um variograma.

Figura 6 - Tipos de anisotropia presentes em um fenômeno espacial: (a) geométrica, (b) zonal e (c) mista.



Fonte: Souza (2016)

3.6. Métodos de estimativa – média, inverso da distância e krigagem

3.6.1. Média, inverso da distância e krigagem

Uma vez caracterizada a estrutura de dependência espacial de um fenômeno por meio do variograma, torna-se possível avançar para a estimativa de valores em locais não amostrados, um dos principais objetivos da geoestatística.

De acordo com Clark e Harper (2007), a questão fundamental consiste em estimar o valor de uma variável em um local não amostrado com base em valores medidos em amostras vizinhas. Segundo os autores, para que essa questão possa ser respondida, é necessário assumir algumas hipóteses. Em primeiro lugar, os valores amostrados devem ter sido obtidos com exatidão e precisão, garantindo sua reprodutibilidade e representatividade em relação ao valor real no local amostrado.

Além disso, o local onde a estimativa é realizada deve fazer parte de um domínio razoavelmente homogêneo. Por fim, os valores nesses locais estão relacionados entre si, sendo essa relação dependente da distância e, eventualmente, da direção entre suas posições, condição que fundamenta a Teoria das Variáveis Regionalizadas.

Essas hipóteses, segundo os autores, conduzem à formulação de um estimador em que o valor estimado Z^* , em um ponto não amostrado, é obtido por meio de uma combinação linear ponderada dos valores amostrados z_i , associados a pesos w_i . Sob a hipótese de estacionariedade, para garantir uma estimativa não enviesada, a soma dos pesos deve ser igual a 1. Matematicamente, tem-se:

$$Z^* = \sum_{i=1}^n z_i w_i \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (17)$$

Diferentes métodos de estimativa têm sido utilizados ao longo do tempo. A principal diferença entre eles, conforme Isaaks e Srivastava (1989), está na forma como os pesos são determinados. A média aritmética, por exemplo, atribui o mesmo peso a todas as amostras utilizadas na estimativa, independentemente da distância ou da direção em relação ao ponto a ser estimado, ignorando, assim, a correlação espacial entre os dados.

Métodos que consideram a distância entre os pontos também foram propostos, destacando-se aqueles conhecidos como métodos do inverso da distância. Nesses métodos, os pesos atribuídos a cada amostra são calculados em função da distância ao ponto a ser estimado, conforme:

$$w_i = \frac{1}{d_i^p} \quad (18)$$

em que d_i é a distância entre o ponto amostral e o ponto a ser estimado, e “p” é um expoente positivo (geralmente assumindo valores como 1, 2, entre outros). Em particular, quando $p = 2$, o método é conhecido como inverso do quadrado da distância (IQD).

Entretanto, apesar de considerar a distância no cálculo dos pesos, esse método apresenta limitações importantes. De acordo com Babak e Deutsch (2008), ele é altamente sensível aos parâmetros adotados, especialmente ao número de amostras vizinhas utilizadas e ao valor do expoente “p”. Por exemplo, para valores baixos de “p”, como $p = 1$, amostras mais distantes ainda exercerão influência significativa na estimativa. Por outro lado, para valores mais elevados, como $p = 4$ ou $p = 5$, as amostras mais próximas tenderão a dominar o resultado.

Conforme os autores, esse problema é agravado pela ausência de um consenso na literatura quanto à escolha dos parâmetros mais adequados, o que pode levar a estimativas inconsistentes.

Os autores ainda destacam que esse método é essencialmente determinístico, não incorporando adequadamente aspectos como a anisotropia, uma vez que amostras equidistantes do ponto a ser estimado, ainda que em direções distintas, tendem a receber o mesmo peso. Além disso, o método não fornece uma medida de incerteza associada às estimativas, o que impede a avaliação da confiabilidade dos resultados.

Nesse contexto, surgem os métodos de interpolação baseados na Teoria das Variáveis Regionalizadas, entre os quais se destacam os métodos de krigagem. Conforme Sinclair e Blackwell (2004), o termo krigagem abrange diferentes métodos, como a krigagem simples, a krigagem ordinária, a krigagem indicadora, a krigagem universal, a krigagem de probabilidade e a krigagem por múltiplos indicadores, entre outros.

Segundo Oliver e Webster (1990), a krigagem pode ser entendida como um método de estimativa por média ponderada local, no qual se considera uma área reduzida, geralmente com poucas amostras disponíveis, ao contrário da estimativa global, que é realizada em uma área mais extensa e com maior número de dados (Isaaks e Srivastava, 1989).

A principal vantagem da krigagem em relação aos métodos tradicionais de estimativa está na forma como os pesos são determinados. Diferentemente de outras abordagens, a krigagem utiliza o variograma para calcular esses pesos, incorporando a correlação espacial entre os dados e permitindo considerar variações no comportamento da variável conforme a direção analisada. Além disso, o método fornece uma medida de incerteza associada às estimativas, conhecida como variância de krigagem, o que possibilita avaliar a confiabilidade dos resultados (Bostan, 2017).

De acordo com Goovaerts (1997), os diferentes métodos de krigagem, como a krigagem simples, ordinária e universal, baseiam-se em um mesmo estimador linear de regressão, $Z^*(u)$, que pode ser expresso matematicamente por:

$$Z^*(u) - m(u) = \sum_{\alpha=1}^{n(u)} \lambda_{\alpha}(u) [Z(u_{\alpha}) - m(u_{\alpha})] \quad (19)$$

onde $\lambda_{\alpha}(u)$ é o peso atribuído a amostra α , e $m(u)$ e $m(u_{\alpha})$ correspondem aos valores esperados (média) das variáveis aleatórias $Z(u)$ e $Z(u_{\alpha})$, respectivamente. As variantes da krigagem

diferenciam-se, principalmente, pela forma como a média $m(u_\alpha)$ é tratada: se conhecida ou desconhecida, constante ou variável ao longo do domínio.

Goovaerts destaca que todos os métodos de krigagem têm como objetivo minimizar a variância do erro de estimativa, $\sigma_E^2(u)$, sobre a condição de que a esperança do erro seja zero, ou seja, que o estimador seja não enviesado. Matematicamente, essas condições podem ser expressas por:

$$\sigma_E^2(u) = Var[Z^*(u) - Z(u)] \quad (20)$$

$$E[Z^*(u) - Z(u)] = 0 \quad (21)$$

3.6.2. Krigagem simples

Dentre os diferentes métodos de krigagem, destaca-se a krigagem simples (KS), que se baseia na hipótese de que a média da variável é conhecida e constante em toda a área de estudo, ou seja, que se tenha uma média estacionária global conhecida. Nesse caso, conforme Goovaerts (1997), o estimador $Z^*(u)$ pode ser expresso por:

$$Z_{KS}^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KS} Z(u_{\alpha}) + \left[1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KS} \right] m \quad (22)$$

O termo entre colchetes é conhecido como peso da média, representando a contribuição da média global “m” à estimativa. Por essa razão, a aplicação da krigagem simples exige o conhecimento prévio do valor desta média “m”.

A equação (22) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Z_{KS}^*(u) = m + \left[\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KS} [Z(u_{\alpha}) - m] \right] \quad (23)$$

A variância do erro, para a krigagem simples, pode ser escrita em função das covariâncias, conforme apresentado por Goovaerts (1997):

$$\sigma_{KS}^2 = C(0) + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha}^{KS} \lambda_{\beta}^{KS} C(u_{\alpha} - u_{\beta}) - 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KS} C(u_{\alpha} - u_0) \quad (24)$$

em que λ_α^{KS} e λ_β^{KS} são os pesos atribuídos às amostras, $C(u_\alpha - u_0)$ representa o valor da covariância entre cada amostra e o ponto a ser estimado, $C(u_\alpha - u_\beta)$ corresponde ao valor da covariância entre os pares de amostras e $C(0)$ representa a covariância entre o ponto a ser estimado e ele mesmo, ou seja, o valor da covariância para uma distância igual a zero.

O sistema de equações da krigagem simples é obtido pela minimização da variância do erro de estimativa. Igualando-se a zero as derivadas parciais da equação (24) em relação a cada peso, obtém-se o seguinte sistema:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta^{KS} C(u_\alpha - u_\beta) = C(u_\alpha - u_0), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

A variância mínima do erro de estimação, denominada variância de krigagem simples, é dada por:

$$\sigma_{KS}^2 = C(0) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{KS} C(u_\alpha - u_0) \quad (26)$$

Matricialmente, o sistema da krigagem simples pode ser escrito como sendo:

$$[K_{KS}] [\lambda_{KS}] = [C_{KS}] \quad (27)$$

em que K_{KS} é a matriz de covariâncias entre os pontos amostrais (u_α), λ_{KS} a matriz de pesos e C_{KS} é a matriz de covariâncias entre os pontos amostrais e o ponto a ser estimado (u_0). Explicitamente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} C(u_1 - u_1) & \cdots & C(u_1 - u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(u_n - u_1) & \cdots & C(u_n - u_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KS} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_0) \\ \vdots \\ C(u_n - u_0) \end{bmatrix} \quad (28)$$

O interesse reside na determinação dos pesos λ_α^{KS} atribuídos a cada amostra. Nesse sentido, esses pesos podem ser obtidos pela solução do sistema linear, que em termos matriciais, pode ser expresso por:

$$[\lambda_{KS}] = [K_{KS}]^{-1} [C_{KS}] \quad (29)$$

Por fim, a variância do erro de estimativa pode ser expressa em termos matriciais por:

$$\sigma_{KS}^2 = C(0) - [\lambda_{KS}]^T [C_{KS}] \quad (30)$$

em que $[\lambda_{KS}]^T$ representa a transposta da matriz dos pesos de krigagem simples.

3.6.3. Krigagem ordinária

Diferentemente da krigagem simples, na qual a média é considerada conhecida, na krigagem ordinária (KO) a média da variável é tratada como desconhecida, porém constante na vizinhança de estimativa, ou seja, na área que contém as amostras a serem utilizadas especificamente na estimativa a ser realizada, o que constitui uma hipótese mais realista para a maioria dos fenômenos naturais.

Conforme Olea (1999), o estimador linear da KO mantém a mesma forma da krigagem simples. Entretanto, impõe-se a restrição de que a soma dos pesos atribuídos às amostras seja igual a um (condição de não tendenciosidade).

$$Z_{KO}^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} Z(u_{\alpha}) \quad (31)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} = 1 \quad (32)$$

Já a variância do erro de estimativa pode ser expressa por:

$$\sigma_{KO}^2 = C(0) + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} \lambda_{\beta}^{KO} C(u_{\alpha} - u_{\beta}) - 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} C(u_{\alpha} - u_0) \quad (33)$$

em que λ_{α}^{KO} e λ_{β}^{KO} são os pesos atribuídos às amostras, $C(u_{\alpha} - u_0)$ representa o valor da covariância entre cada amostra e o ponto a ser estimado e $C(u_{\alpha} - u_{\beta})$ corresponde ao valor da covariância entre os pares de amostras.

Para a determinação dos pesos ótimos, busca-se minimizar a variância do erro de estimativa σ_{KO}^2 , sujeita à restrição de não tendenciosidade (equação (32)). Essa minimização é realizada por meio do método do Multiplicador de Lagrange (μ). Ao anular as derivadas parciais da função Lagrangiana em relação aos pesos e ao multiplicador, obtém-se o sistema de equações da krigagem ordinária, dado por:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KO} C(u_{\alpha} - u_{\beta}) - \mu_{KO} = C(u_{\alpha} - u_0) \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KO} = 1 \end{cases} \quad (34)$$

Matricialmente, esse sistema pode ser representado como:

$$[K_{KO}] \begin{bmatrix} \lambda_{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = [C_{KO}] \quad (35)$$

Em decorrência da imposição da restrição de não tendenciosidade, o sistema de equações da krigagem ordinária apresenta uma estrutura matricial distinta daquela da krigagem simples. Nesse sentido, pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} C(u_1 - u_1) & \cdots & C(u_1 - u_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(u_n - u_1) & \cdots & C(u_n - u_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_0) \\ \vdots \\ C(u_n - u_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

A determinação dos pesos é obtida pela resolução do sistema linear associado, que pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = [K_{KO}]^{-1} [C_{KO}] \quad (37)$$

Por fim, a variância do erro de estimativa pode ser calculada por meio da seguinte expressão:

$$\sigma_{KO}^2 = C(0) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} C(u_{\alpha} - u_0) - \mu_{KO} \quad (38)$$

Essa expressão pode ser resolvida pela multiplicação de matrizes dada por:

$$\sigma_{KO}^2 = C(0) - [C_{KO}]^T \begin{bmatrix} \lambda_{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} \quad (39)$$

3.6.4. Krigagem da média

Na formulação da krigagem simples, a média é considerada conhecida e constante em toda a área de estudo. Já na krigagem ordinária, essa média é tratada como desconhecida, porém

ainda assumida como constante na vizinhança de estimação. Nesse contexto, surge a seguinte questão: como estimar o valor médio de uma variável a partir de um conjunto de amostras espacialmente distribuídas?

Em um primeiro momento, pode-se considerar o uso da média aritmética. No entanto, como discutido anteriormente, variáveis associadas a fenômenos espaciais apresentam correlação espacial, isto é, seus valores dependem da posição que ocupam no espaço. O cálculo da média aritmética não incorpora essa dependência, o que pode comprometer sua eficiência como estimador nessas situações.

Nesse contexto, a estimação da média M^* pode ser realizada por meio de uma krigagem ordinária dos valores amostrais $Z(u_\alpha)$ com os pesos λ_α^{KM} atribuídos a estas amostras. Conforme apresentado por Wackernagel (1995), essa abordagem pode ser expressa por:

$$M^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{KM} Z(u_\alpha) \quad (40)$$

Novamente, o problema consiste na determinação dos pesos ótimos, os quais devem minimizar a variância do erro de estimativa σ_{KM}^2 , sob a restrição de não tendenciosidade, expressa pela condição de que a soma dos pesos seja igual a um. Segundo Wackernagel (1995), a variância do erro pode ser escrita como:

$$\sigma_{KM}^2 = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_\alpha^{KM} \lambda_\beta^{KM} C(u_\alpha - u_\beta) \quad (41)$$

Assim como na krigagem ordinária, a minimização de σ_{KM}^2 é realizada por meio da anulação das derivadas parciais da função objetivo em relação aos pesos e ao Multiplicador de Lagrange para a krigagem da média μ_{KM} . Essa abordagem conduz ao sistema da krigagem da média, dado por:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta^{KM} C(u_\alpha - u_\beta) - \mu_{KM} = 0 & \forall \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta^{KM} = 1 \end{cases} \quad (42)$$

Matricialmente, pode ser expresso como:

$$[K_{KM}] \begin{bmatrix} \lambda_{KM} \\ -\mu_{KM} \end{bmatrix} = [C_{KM}] \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} C(u_1 - u_1) & \cdots & C(u_1 - u_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(u_n - u_1) & \cdots & C(u_n - u_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KM} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KM} \\ -\mu_{KM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

A determinação dos pesos é obtida pela resolução do sistema linear associado, que pode ser encontrado pela multiplicação da inversa da matriz K_{KM} pela matriz C_{KM} :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{KM} \\ -\mu_{KM} \end{bmatrix} = [K_{KM}]^{-1} [C_{KM}] \quad (45)$$

O cálculo de σ_{KM}^2 torna-se mais simples do que aquelas apresentadas para a krigagem simples e ordinária. Conforme demonstrado por Wackernagel (1995), a variância do erro pode ser expressa por:

$$\sigma_{KM}^2 = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KM} \mu_{KM} \quad (46)$$

Entretanto, como a soma dos pesos λ_{α}^{KM} deve ser igual a um, a variância do erro de estimativa torna-se equivalente ao próprio multiplicador de Lagrange, isto é:

$$\sigma_{KM}^2 = \mu_{KM} \quad (47)$$

Uma relação interessante pode ser obtida entre krigagem simples, krigagem ordinária e krigagem da média. De acordo com Wackernagel (1995), a partir da estimativa da média obtida pela krigagem da média, é possível incorporá-la ao estimador da krigagem simples, substituindo a média presente no estimador pela média estimada pela krigagem da média. O estimador para a krigagem simples pode ser escrito então como:

$$Z_{KSM}^* = \sum_{\alpha=1}^n \left[\lambda_{\alpha}^{KS} + \lambda_{\alpha}^{KM} \left(1 - \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KS} \right) \right] Z(u_{\alpha}) \quad (48)$$

onde o termo $(1 - \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KS})$ é conhecido como peso da média (Wackernagel, 1995).

Essa substituição leva a uma nova combinação linear dos dados, cujos pesos satisfazem a condição de soma unitária e resultam em um sistema equivalente ao da krigagem ordinária.

Dessa forma, a krigagem ordinária pode ser interpretada como uma extensão da krigagem simples, mas com o cálculo local da média.

Uma relação análoga pode ser obtida para as variâncias do erro de estimativa. A variância da krigagem ordinária pode ser escrita como:

$$\sigma_{KO}^2 = \sigma_{KS}^2 + \left(1 - \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KS}\right)^2 \sigma_{KM}^2 \quad (49)$$

evidenciando que a variância da krigagem ordinária é sempre maior ou igual à da krigagem simples, sendo o termo adicional associado à incerteza decorrente da estimativa local da média.

3.6.5. Krigagem de um bloco

As formulações apresentadas anteriormente consideram a estimação pontual da variável. No entanto, em diversas aplicações práticas, particularmente na mineração, o interesse está voltado à estimativa do valor médio em blocos. Dessa forma, torna-se necessário adaptar o sistema de krigagem para contemplar esse tipo de suporte.

Para isso, o bloco é discretizado em sub-blocos, distribuídos em seu interior, de modo que cada sub-bloco seja representado por um ponto (“nó”) em seu centro. A partir dessa discretização, o sistema de krigagem pode ser formulado de maneira análoga aos apresentados para a krigagem simples (equação (28)) e para a krigagem ordinária (equação (36)). A principal diferença reside na construção da matriz C, cujos elementos passam a corresponder ao valor médio das covariâncias entre os pontos amostrais e os centros dos sub-blocos considerados, e na expressão da variância de krigagem, na qual o termo $C(0)$ é substituído por $\bar{C}(V, V)$, correspondente à covariância média entre todos os pontos resultantes da discretização do bloco V.

4. METODOLOGIA

A presente seção descreve os procedimentos adotados para o desenvolvimento do *software* geostatístico proposto, bem como as etapas utilizadas para sua validação. O sistema foi concebido com finalidade didática, permitindo a estimação de um ponto ou bloco por meio dos métodos de krigagem simples, ordinária e da média. Para isso, foram implementados diferentes modelos teóricos de variograma, incluindo os modelos esférico, exponencial e gaussiano, além da consideração do efeito pepita. A seguir, são detalhadas as etapas de implementação, desde a estruturação dos dados de entrada até os procedimentos de validação dos resultados obtidos.

4.1. Ambiente de desenvolvimento

O desenvolvimento do *software* foi realizado em um computador com sistema operacional Windows 11 Home, equipado com 16 GB de memória RAM e processador Intel® Core™ i7-13620H de 13ª geração.

A implementação foi conduzida utilizando a linguagem de programação Python 3.14, amplamente empregada em aplicações científicas e análise numérica. Para o desenvolvimento dos algoritmos e manipulação dos dados, foram utilizadas bibliotecas especializadas, incluindo NumPy para operações matriciais e computação numérica, Pandas para manipulação e organização de dados, Matplotlib para visualização gráfica, e CustomTkinter para a construção da interface gráfica do usuário.

Além disso, foi utilizada a ferramenta PyInstaller para a geração de executáveis, permitindo a distribuição do *software* de forma independente do ambiente de desenvolvimento.

O código foi desenvolvido no ambiente integrado de desenvolvimento (IDE) PyCharm, versão 2025.3.1.1, que proporcionou suporte à organização do projeto, depuração e gerenciamento eficiente do código-fonte.

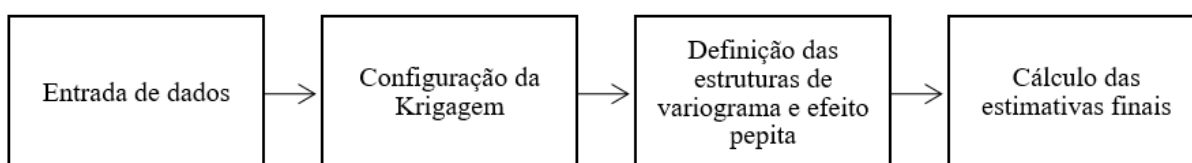
4.2. Fluxo de processamento de dados

De forma geral, o *software* segue uma sequência estruturada no processamento dos dados. Inicialmente, os dados são inseridos pelo usuário, seja por meio de digitação direta no sistema ou pela importação de arquivos externos. Em seguida, são definidos os parâmetros da krigagem, incluindo o tipo de estimativa a ser realizado (simples, ordinária ou da média) e o tipo de suporte, podendo ser pontual ou por blocos.

Posteriormente, são especificados os parâmetros do modelo variográfico, como a presença de efeito pepita e a definição das estruturas de variograma, incluindo alcance e patamar, bem como a consideração de anisotropia geométrica, quando aplicável.

Por fim, o sistema realiza o cálculo das estimativas, fornecendo como resultados o valor estimado da variável e a variância do erro associada e um histograma dos ponderadores de cada amostra. O fluxo completo desse processo é apresentado no fluxograma da Figura 7.

Figura 7 - Fluxograma representando a sequência do processamento de dados realizado pelo *software*.



Fonte: autor (2026).

4.3. Entrada de dados

A entrada de dados pode ser realizada por meio da inserção manual diretamente no *software* ou pela importação de arquivos externos nos formatos .txt e .csv. Esses arquivos devem seguir uma estrutura tabular específica, podendo os dados estar separados por vírgula (“,”), ponto e vírgula (“;”) ou tabulação. Os valores podem adotar a convenção de separação decimal por ponto (por exemplo, 123.3) ou por vírgula (123,3); neste último caso, recomenda-se que os dados sejam separados por ponto e vírgula ou tabulação, a fim de evitar ambiguidades na leitura do arquivo.

Na primeira linha, deve estar presente o cabeçalho, contendo três colunas. As duas primeiras colunas correspondem às coordenadas espaciais, sendo a primeira referente à coordenada X e a segunda à coordenada Y. A terceira coluna deve conter os valores da variável de interesse a ser estimada por krigagem.

Ressalta-se que as colunas dos arquivos importados não precisam, necessariamente, possuir essa nomenclatura, uma vez que o *software* interpreta automaticamente a primeira coluna como coordenada X, a segunda como coordenada Y e a terceira como o valor da variável amostrada.

A Figura 8 apresenta um exemplo de arquivo no formato .txt aceito pelo sistema.

Figura 8 - Exemplo de arquivo .txt aceito pelo *software*.

```
X,Y,Teor_%  
374.54,969.58,0.254  
950.71,775.13,3.218  
731.99,939.5,1.64  
598.66,894.83,2.592  
156.02,597.9,4.547  
155.99,921.87,1.322  
58.08,88.49,2.111  
866.18,195.98,3.802  
601.12,45.23,1.221  
708.07,325.33,0.477  
20.58,388.68,1.52  
969.91,271.35,0.89  
832.44,828.74,4.656  
212.34,356.75,4.06  
181.82,280.93,3.204  
183.4,542.7,4.37  
304.24,140.92,4.038  
524.76,802.2,1.014
```

Fonte: autor (2026).

Após a importação, os dados são armazenados internamente no programa em uma estrutura do tipo *DataFrame*, da biblioteca Pandas. Considerado a principal estrutura dessa biblioteca, o *DataFrame* consiste em um arranjo tabular bidimensional que permite a organização de diferentes tipos de dados em suas colunas. Sua arquitetura baseia-se no uso de rótulos para linhas e colunas, possibilitando o alinhamento automático em operações matemáticas e facilitando a manipulação e análise dos dados.

4.4. Configuração da krigagem

4.4.1. Definição do suporte de estimativa

Após a inserção dos dados, procede-se à etapa de configuração da krigagem. Inicialmente, é escolhido o tipo de krigagem a ser utilizado (simples, ordinária ou da média). Em seguida, especifica-se o suporte da estimativa, podendo esta ser realizada em um ponto (u_0) ou em um bloco (B).

No caso da estimação pontual, é necessário informar apenas as coordenadas X e Y do ponto de interesse. Já para a estimação em blocos, devem ser definidos, além das suas coordenadas centrais X_c e Y_c , parâmetros adicionais, relacionados a geometria do bloco.

4.4.2. Parâmetros para a krigagem de um bloco

Para a estimação em blocos, devem ser definidas as dimensões do bloco nas direções X (D_x) e Y (D_y). O bloco pode possuir dimensões mínimas de 1 m \times 1 m e máximas de 250 m \times 250 m.

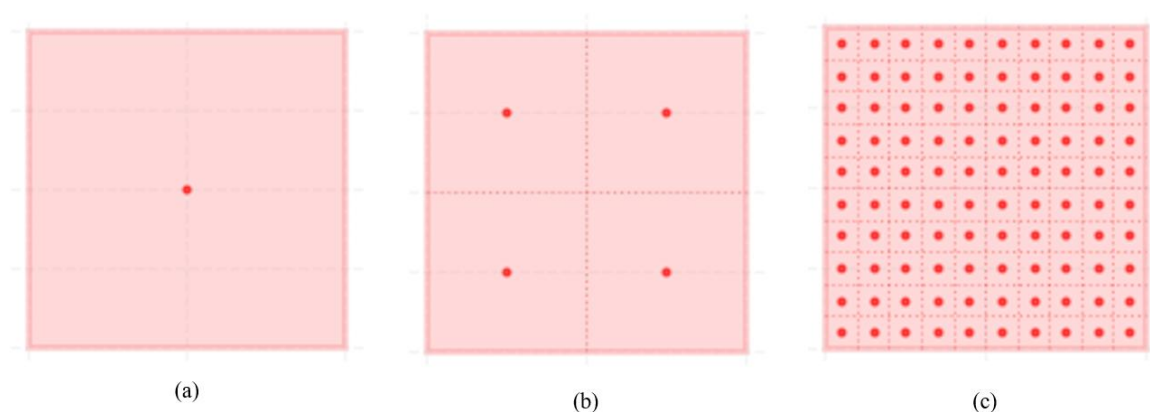
O limite superior foi estabelecido com o objetivo de equilibrar a representação da variabilidade espacial e o custo computacional do processo de estimação. Blocos maiores exigem discretizações mais refinadas, aumentando o tempo de processamento, além de promover maior suavização das estimativas. Assim, o valor adotado busca garantir desempenho adequado do *software* sem comprometer a qualidade dos resultados.

Adicionalmente, deve-se definir o nível de discretização do bloco, por meio do número de subdivisões na direção X (n_x) e na direção Y (n_y), que determinam o tamanho da malha utilizada no processo de discretização.

4.4.3. Discretização do bloco

A discretização do bloco foi definida variando de um mínimo de 1 nó (malha 1×1) até um máximo de 100 nós (malha 10×10). Esse intervalo foi adotado de modo a permitir diferentes níveis de detalhamento na representação da variabilidade interna do bloco, ao mesmo tempo em que se mantém o controle sobre o custo computacional do processo de estimação. Além disso, conforme Journel e Huijbregts (1978), para aplicações práticas em mineração, recomenda-se o uso de malhas de discretização com até 6×6 nós, sendo adotado o limite superior de 10×10 visando maior flexibilidade na análise, especialmente em estudos didáticos. Na Figura 9 pode ser observado um bloco discretizado em malhas de 1×1 nó, 2×2 nós e 10×10 nós.

Figura 9 - Bloco discretizado em: (a) malha 1×1 ; (b) malha 2×2 e (c) malha 10×10 .



Fonte: autor (2026).

As posições de cada nó foram definidas de acordo com o seguinte processo. Para um bloco de dimensões $D_x \times D_y$, subdividido em uma malha $n_x \times n_y$, cujo canto inferior esquerdo

encontra-se na posição (x_0, y_0) , as coordenadas (x_i, y_j) do nó central de cada sub-bloco (i, j) podem ser calculadas pelas equações (50) e (51).

$$x_i = x_0 + \left(\frac{D_x}{n_x}\right) \times \left(i - \frac{1}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (50)$$

$$y_j = y_0 + \left(\frac{D_y}{n_y}\right) \times \left(j - \frac{1}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n_y \quad (51)$$

onde x_0 e y_0 são obtidos a partir das coordenadas do centro do bloco (X_c, Y_c) :

$$x_0 = X_c - \frac{D_x}{2} \quad (52)$$

$$y_0 = Y_c - \frac{D_y}{2} \quad (53)$$

Dessa forma, cada nó é posicionado no centro geométrico de sua respectiva célula, garantindo uma discretização uniforme do bloco. No *software* desenvolvido, o resultado é organizado em uma matriz com $n_x \times n_y$ linhas e duas colunas, em que cada linha corresponde a um nó da malha de discretização, armazenando suas coordenadas (x_{N_j}, y_{N_j}) . Essa estrutura pode ser representada pela matriz a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_{N_1} & y_{N_1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{N_j} & y_{N_j} \end{bmatrix} \quad (54)$$

4.4.4. Estruturas de variograma

Após o processo de configuração da krigagem, procede-se à definição das estruturas do variograma. O *software* disponibiliza quatro tipos de estruturas: efeito pepita (C_0), esférica, exponencial e gaussiana.

É possível combinar múltiplas estruturas variográficas em um mesmo modelo, sendo necessário definir, para cada uma delas, os parâmetros que servirão de base para o cálculo da krigagem, tais como o alcance e o patamar. No caso do efeito pepita, define-se apenas o patamar associado.

No final, o modelo global de variograma (γ_G), que servirá como base para a montagem da matriz K e da matriz C do sistema de krigagem será representado pela soma de todas as estruturas escolhidas, conforme a equação (55):

$$\gamma_G(h) = C_0 + \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \dots + \gamma_k(h) \quad (55)$$

onde C_0 representa o efeito pepita e $\gamma_1(h)$, $\gamma_2(h)$ e $\gamma_k(h)$ representam as demais estruturas.

Adicionalmente, pode-se considerar a presença de anisotropia nos modelos variográficos. Quando aplicável, devem ser informados os alcances nas direções principais X e Y, assumidas como coincidentes com os eixos coordenados, o que simplifica a incorporação da anisotropia no modelo. O tratamento dessa condição será discutido com maior detalhamento na seção [4.4.7](#).

4.4.5. Cálculo das estimativas finais

Para o cálculo da estimativa final, isto é, o valor estimado da variável, é necessário determinar previamente alguns elementos. Inicialmente, calculam-se as distâncias “h” entre todos os pares de pontos amostrais, bem como entre os pontos amostrais e o elemento de estimativa. No caso da krigagem em blocos, também são determinadas as distâncias entre os pontos amostrais e os nós da malha de discretização, além das distâncias entre os próprios nós.

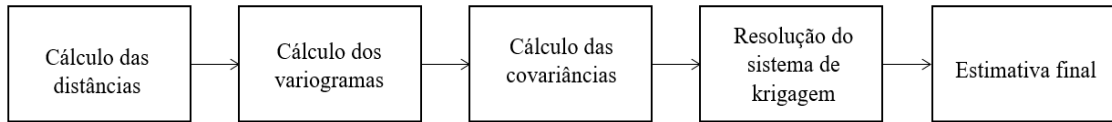
Em situações em que há anisotropia, essas distâncias são ajustadas de acordo com as amplitudes definidas para o modelo variográfico anisotrópico.

Em seguida, são calculados os valores do variograma entre os pares de pontos amostrais e entre os pontos amostrais e o elemento a ser estimado. Para a estimação em blocos, calculam-se ainda os variogramas entre os nós da discretização, de modo a obter o variograma médio do bloco.

Após o cálculo dos variogramas, são determinadas as funções de covariância correspondentes, por meio da relação apresentada na equação (6). Essa conversão decorre da opção, adotada no *software*, por resolver o sistema de krigagem em termos da função covariância, escolha motivada pelo menor custo computacional associado à inversão das matrizes envolvidas, conforme observado por Journel e Huijbregts (1978), que destacam que a formulação do sistema em termos de covariância é preferida por razões de eficiência de programação.

Esse processo pode ser representado pelo fluxograma apresentado na Figura 10.

Figura 10 - Fluxograma representando a sequência de operações para o cálculo das estimativas finais.



Fonte: autor (2026).

4.4.6. Cálculo das distâncias – Estruturas isotrópicas

O cálculo da krigagem, seja ela simples, ordinária ou da média, conforme implementado no *software*, segue, de modo geral, um mesmo procedimento. Inicialmente, calcula-se a distância “h” entre todos os pares de pontos amostrais (α, β). Em seguida, determina-se também a distância entre os pontos amostrais e o elemento a ser estimado.

No caso onde o elemento de estimativa é um ponto, calcula-se a distância entre os pontos amostrais e o ponto de interesse. Já no caso onde o elemento de estimativa é um bloco, as distâncias são obtidas entre os pontos amostrais e os nós da malha de discretização do bloco e entre os nós da malha de discretização.

Podem ser distinguidos dois casos para o cálculo das distâncias. No primeiro, considerando estruturas isotrópicas, a distância entre dois pontos é determinada pela distância euclidiana. Nesse caso, a distância “h” entre dois pontos i e j pode ser expressa pela equação (56):

$$h_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (56)$$

Para um conjunto de n amostras, o resultado do cálculo das distâncias entre todos os pares de pontos amostrais é representado pela matriz quadrada de dimensão $u_n \times u_n$, cujos elementos h_{u_α, u_β} correspondem às distâncias entre as amostras u_α e u_β , podendo ser expressa pela matriz (57):

$$\begin{bmatrix} h_{u_1, u_1} & \dots & h_{u_1, u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{u_n, u_1} & \dots & h_{u_n, u_n} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Para o caso de uma estimativa pontual, as distâncias entre os pontos amostrais α e o ponto de estimativa u_0 , podem ser representadas por uma matriz coluna dada por:

$$\begin{bmatrix} h_{u_1, u_0} \\ \vdots \\ h_{u_n, u_0} \end{bmatrix} \quad (58)$$

onde h_{u_α, u_0} representa a distância do ponto amostral u_α em relação ao ponto de estimativa u_0 .

Quando o elemento a ser estimado corresponde a um bloco, a matriz de distâncias é formada pelas distâncias entre os u_α pontos amostrais e os N_j nós da malha de discretização do bloco, cujas coordenadas foram definidas na matriz (54). Nesse caso, a matriz de distâncias pode ser expressa por:

$$\begin{bmatrix} h_{u_1, N_1} & \cdots & h_{u_1, N_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{u_n, N_1} & \cdots & h_{u_n, N_j} \end{bmatrix} \quad (59)$$

em que h_{u_α, N_j} corresponde à distância da amostra u_α até o nó de discretização N_j .

Além disso, para o caso da estimativa de um bloco, a matriz de distâncias entre cada nó da malha de discretização pode ser expressa por:

$$\begin{bmatrix} h_{N_1, N_1} & \cdots & h_{N_1, N_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_i, N_1} & \cdots & h_{N_i, N_j} \end{bmatrix} \quad (60)$$

4.4.7. Cálculo das distâncias – Estruturas anisotrópicas

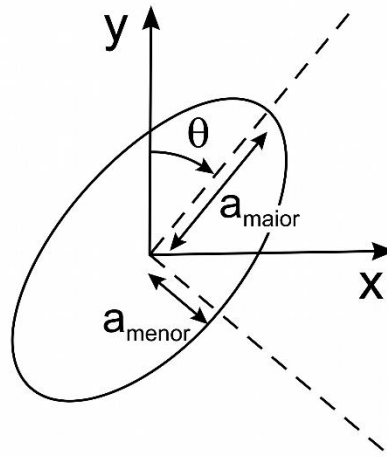
Quando a estrutura variográfica apresenta anisotropia (seja geométrica ou zonal), a distância “h” utilizada no cálculo do variograma não pode ser aquela obtida pela equação (56). Nesses casos, torna-se necessário aplicar uma correção nessas distâncias antes do cálculo do modelo variográfico.

A obtenção do variograma para uma estrutura que apresenta anisotropia geométrica consiste em aplicar uma distância corrigida “h” a um modelo isotrópico γ_0 , ou seja:

$$\gamma(h) = \gamma_0(h'') \quad (61)$$

A anisotropia geométrica pode ser representada por uma elipse, na qual o eixo maior indica a direção de maior continuidade espacial, associada ao maior alcance do variograma. O eixo menor, por sua vez, corresponde à direção de menor continuidade, apresentando menor alcance. A direção de maior continuidade forma um ângulo θ com o eixo Y (Norte), sendo esse azimute medido no sentido horário a partir desse eixo. A Figura 11 ilustra essa representação.

Figura 11 - Elipse utilizada para representar graficamente a anisotropia geométrica.



Fonte: autor (2026).

Conforme Goovaerts (1997), a correção da anisotropia geométrica é realizada por meio de uma transformação de coordenadas aplicada ao vetor de separação h , de componentes (h_x, h_y) , levando-o a um novo vetor h' , de componentes (h_x', h_y') , em um sistema isotrópico equivalente. Essas novas coordenadas são obtidas pela seguinte multiplicação de matrizes:

$$h' = \begin{bmatrix} h_x' \\ h_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \quad (62)$$

A elipse é então redimensionada, passando a corresponder a um círculo, sendo obtida então a nova distância corrigida h'' :

$$h'' = \begin{bmatrix} h_x'' \\ h_y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_x' \\ h_y' \end{bmatrix} \quad (63)$$

onde λ é o fator de anisotropia.

Para o cálculo do fator de anisotropia pode ser adotada duas convenções. A primeira é a apresentada por Goovaerts (1997), onde λ pode ser calculado por:

$$\lambda = \frac{a_{menor}}{a_{maior}} \quad (64)$$

em que a_{maior} e a_{menor} correspondem aos alcances nas direções de maior e menor continuidade, respectivamente.

Como $\lambda < 1$, essa formulação comprime o eixo de maior continuidade até o tamanho do eixo de menor continuidade, de modo que a circunferência resultante apresenta raio igual ao alcance na direção de menor continuidade. O fator λ é aplicado à componente do vetor h' alinhada com a direção de maior continuidade.

A segunda convenção, proposta por Armstrong (1998), utiliza o inverso do parâmetro λ :

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{a_{maior}}{a_{menor}} \quad (65)$$

Como $k > 1$, essa formulação estica o eixo de menor continuidade até o tamanho do eixo de maior continuidade, e a circunferência resultante apresenta raio igual ao alcance na direção de maior continuidade. O fator “k” é aplicado à componente do vetor h' alinhada com a direção de menor continuidade.

No *software* desenvolvido optou-se pela convenção de Goovaerts (1997). Considerou-se ainda o caso particular em que os eixos principais da elipse de anisotropia coincidem com os eixos coordenados ($\theta = 0$), situação que dispensa a rotação prévia do vetor h e simplifica significativamente o cálculo. Nesse caso, a distância corrigida h'' é obtida diretamente pela equação (66):

$$h'' = \sqrt{h_1^2 + \lambda^2 h_2^2} \quad (66)$$

em que h_1 e h_2 são as componentes do vetor h alinhadas com as direções de menor e maior continuidade, respectivamente.

O resultado final é semelhante ao obtido para o caso isotrópico, com a diferença de que as matrizes apresentadas em (57), (58), (59) e (60) passam a ser compostas pelas distâncias

corrigidas pela anisotropia, conforme equação (66). As matrizes correspondentes assumem então a seguinte forma:

Distâncias entre amostras:

$$\begin{bmatrix} h''_{u_1, u_1} & \dots & h''_{u_1, u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h''_{u_n, u_1} & \dots & h''_{u_n, u_n} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Distância entre amostras e ponto a estimar:

$$\begin{bmatrix} h''_{u_1, u_0} \\ \vdots \\ h''_{u_n, u_0} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Distância entre amostras e nós da malha de discretização:

$$\begin{bmatrix} h''_{u_1, N_1} & \dots & h''_{u_1, N_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h''_{u_n, N_1} & \dots & h''_{u_n, N_j} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Distância entre os pares de nós (N_i, N_j) da malha de discretização:

$$\begin{bmatrix} h''_{N_1, N_1} & \dots & h''_{N_1, N_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h''_{N_i, N_1} & \dots & h''_{N_i, N_j} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Essas distâncias corrigidas são então utilizadas no cálculo do variograma, incorporando os efeitos da anisotropia no processo de estimação.

4.4.8. Cálculo do variograma

A partir das distâncias calculadas entre os diferentes elementos (amostras, ponto de estimativa ou nós da discretização), procede-se ao cálculo dos valores do variograma. Para cada vetor de separação “h”, o valor do variograma $\gamma(h)$ é obtido a partir do modelo teórico previamente definido, o qual pode ser composto por uma ou mais estruturas variográficas, como definido na equação (55).

No *software*, há a presença de quatro modelos de variograma, conforme pode ser visualizado na Tabela 1:

Tabela 1 - Estruturas variográficas disponíveis no *software* desenvolvido.

Modelo	Equação
Efeito pepita – C_0	$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & \text{se } h = 0 \\ C, & \text{se } h > 0 \end{cases}$
Esférico	$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{se } h < a \\ C, & \text{se } h \geq a \end{cases}$
Exponencial	$\gamma(h) = C \left[1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right]$
Gaussiano	$\gamma(h) = C \left[1 - e^{-3 \left(\frac{h}{a} \right)^2} \right]$

Fonte: autor (2026).

Cabe destacar que, nas formulações dos modelos exponencial e gaussiano apresentadas na Tabela 1, o parâmetro “a” corresponde ao alcance prático, definido como a distância em que o variograma atinge aproximadamente 95% do patamar (Deutsch e Journel, 1997). Tal definição se faz necessária porque, na teoria, esses modelos atingem o patamar apenas assintoticamente, à medida que “h” tende ao infinito.

A escolha pelo alcance prático foi adotada por manter coerência com a interpretação do alcance no modelo esférico, no qual representa, por definição, a distância em que o patamar é efetivamente atingido. Dessa forma, o valor de “a” informado pelo usuário possui o mesmo significado em todos os modelos disponíveis no *software*, dispensando-o de realizar conversões entre alcance teórico e prático ao alternar entre as diferentes estruturas variográficas.

Os valores do variograma são calculados a partir das matrizes de distâncias previamente determinadas, individualmente para cada estrutura definida pelo usuário. Para estruturas isotrópicas, são utilizadas as distâncias euclidianas obtidas conforme a equação (56), ao passo que, para estruturas com anisotropia geométrica, empregam-se as distâncias corrigidas, calculadas pela equação (66). De forma geral, para uma estrutura genérica, as matrizes de variograma assumem a seguinte forma. Entre os pares de pontos amostrais:

$$\begin{bmatrix} \gamma_i(h_{u_1, u_1}) & \cdots & \gamma_i(h_{u_1, u_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_i(h_{u_n, u_1}) & \cdots & \gamma_i(h_{u_n, u_n}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (71)$$

Entre as amostras e o ponto a estimar:

$$\begin{bmatrix} \gamma_i(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ \gamma_i(h_{u_n, u_0}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (72)$$

Quando a estimativa for realizada em relação a um bloco, calculam-se primeiramente os variogramas entre os pontos amostrais e os nós da malha de discretização do bloco:

$$\begin{bmatrix} \gamma_i(h_{u_1, N_1}) & \cdots & \gamma_i(h_{u_1, N_j}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_i(h_{u_n, N_1}) & \cdots & \gamma_i(h_{u_n, N_j}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (73)$$

Em seguida, obtém-se o variograma médio entre cada amostra u_α e o bloco B a ser estimado, dado pela média aritmética dos variogramas calculados em relação aos N nós da discretização, obtidos em (73), conforme:

$$\bar{\gamma}(u_\alpha, B) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(h_{u_\alpha, N_j}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (74)$$

Ao final, o resultado será uma matriz coluna, contendo os valores dos variogramas médios entre a amostra u_α e o bloco B:

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}(u_1, B) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(u_n, B) \end{bmatrix} \quad (75)$$

Como a verificação da anisotropia é realizada individualmente para cada estrutura do modelo aninhado, é possível que, em um mesmo modelo, distintas estruturas utilizem matrizes de distâncias diferentes, algumas euclidianas, outras corrigidas pela anisotropia

Para a obtenção das matrizes globais de variograma, somam-se as contribuições de cada estrutura, tanto para a matriz entre os pares de pontos amostrais quanto para a matriz entre as amostras e o elemento de estimativa. A matriz global M_{A-A} , entre os pares de pontos amostrais,

é então obtida pela soma das “k” matrizes que contêm os variogramas entre os pares de amostras para cada k estrutura:

$$M_{A-A} = \begin{bmatrix} \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \gamma_1(h_{u_1, u_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1(h_{u_n, u_1}) & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \gamma_k(h_{u_1, u_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_k(h_{u_n, u_1}) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

A matriz global M_{A-P} , entre as amostras e o ponto a estimar, é obtida de forma análoga, somando-se as contribuições de cada estrutura:

$$M_{A-P} = \begin{bmatrix} \gamma_{AP}(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ \gamma_{AP}(h_{u_n, u_0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ \gamma_1(h_{u_n, u_0}) \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \gamma_k(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ \gamma_k(h_{u_n, u_0}) \end{bmatrix} \quad (77)$$

No caso da estimação em blocos, a matriz coluna correspondente é o de variogramas médios entre as n amostras e o bloco B, denotado por $\bar{\gamma}_{AB}$. Cada elemento dessa matriz é, por sua vez, a média aritmética dos variogramas calculados entre a respectiva amostra α e os N nós da malha de discretização. A soma das contribuições de cada estrutura resulta na matriz M_{A-B} :

$$M_{A-B} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{AB}(u_1, B) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}_{AB}(u_n, B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(u_1, B) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}_1(u_n, B) \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_k(u_1, B) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}_k(u_n, B) \end{bmatrix} \quad (78)$$

em que $\bar{\gamma}_{AB}(u_n, B)$ representa o variograma médio entre a amostra α e o bloco B, calculado a partir da k-ésima estrutura do modelo.

4.4.9. Montagem do sistema de krigagem

Obtidas as matrizes globais de variograma M_{A-A} e M_{A-P} (ou M_{A-B} , no caso da estimativa para um bloco), procede-se à montagem do sistema matricial de krigagem, do qual serão obtidos os pesos λ_α associados a cada amostra u_α . De forma geral, o sistema pode ser representado como $[K][\lambda] = [C]$, em que K é a matriz de coeficientes formada a partir das relações entre os pares de pontos amostrais, e C é a matriz independente, que reflete a relação entre as amostras e o elemento a ser estimado. A estrutura específica de K e C varia conforme a variante de krigagem adotada, krigagem simples, ordinária ou da média, em virtude das particularidades de cada formulação, conforme detalhado a seguir.

Cabe destacar que, embora os sistemas das krigagens simples, ordinária e da média tenham sido apresentados anteriormente em função da covariância, no *software* optou-se por formular as etapas intermediárias do cálculo em termos do variograma. Essa escolha foi

motivada pelo caráter didático: a apresentação das matrizes intermediárias diretamente em termos do variograma permite ao usuário acompanhar visualmente, e de forma mais intuitiva, a relação entre os parâmetros do modelo variográfico (alcance, patamar e efeito pepita) e as matrizes envolvidas no sistema de krigagem.

Adicionalmente, a conversão das matrizes para a função covariância somente se justifica na etapa final, em que ocorre a inversão da matriz K para a resolução do sistema linear. Realizá-la nas etapas anteriores implicaria a aplicação da relação (6) a cada elemento de cada matriz intermediária, aumentando o número de operações sem benefício computacional, uma vez que tais valores não são utilizados em qualquer inversão matricial nessas etapas. A resolução final do sistema, por sua vez, é conduzida em termos da função covariância, em razão do menor custo computacional associado, conforme detalhado posteriormente.

Krigagem simples

Para a obtenção da matriz K do sistema apresentado em (28), aplica-se a relação (6) a cada elemento da matriz M_{A-A} (76), convertendo os valores de variograma $\gamma(u_\alpha - u_\beta)$ em covariâncias $C(u_\alpha - u_\beta)$. A matriz K assume então a forma:

$$K = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_1) & \cdots & C(u_1 - u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(u_n - u_1) & \cdots & C(u_n - u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) \end{bmatrix} \quad (79)$$

em que $C(0)$ é o patamar total, correspondente à soma dos patamares de todas as estruturas variográficas definidas em (55).

A matriz C é obtida de forma análoga. No caso de uma estimativa pontual, a aplicação da relação (6) a cada elemento da matriz M_{A-P} resulta em:

$$C = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_0) \\ \vdots \\ C(u_n - u_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_n, u_0}) \end{bmatrix} \quad (80)$$

No caso da estimativa de um bloco, a matriz C é obtida pela aplicação da relação (6) a cada elemento da matriz M_{A-B} , resultando em:

$$C = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_0) \\ \vdots \\ C(u_n - u_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_1, B) \\ \vdots \\ C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_n, B) \end{bmatrix} \quad (81)$$

Dessa forma, o sistema apresentado em (28) pode ser expandido, no caso de uma estimativa pontual, para:

$$\begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KS} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_n, u_0}) \end{bmatrix} \quad (82)$$

Para a estimativa de um bloco, o sistema apresentado em (28) torna-se:

$$\begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KS} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_1, B) \\ \vdots \\ C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_n, B) \end{bmatrix} \quad (83)$$

A solução do sistema segue o apresentado na equação (29), fornecendo os pesos λ_a^{KS} , posteriormente utilizados no cálculo da estimativa do valor da variável regionalizada (equação (23)) e da variância do erro associadas ao ponto ou bloco a ser estimado (equação (26)).

O estimador da krigagem simples incorpora explicitamente a média m dos dados amostrais. No *software* desenvolvido, essa média pode ser fornecida sob três formas: como a média aritmética simples dos dados amostrais, como a estimativa obtida pela krigagem da média, e por uma média inserida manualmente pelo próprio usuário. A escolha entre as três opções fica a critério do usuário e é definida na configuração da krigagem.

Krigagem ordinária

Para o sistema da krigagem ordinária, apresentado em (36), a matriz K em termos de covariâncias é obtida de forma análoga à da krigagem simples, acrescentando-se uma linha e uma coluna adicionais associadas à condição de não-tendenciosidade. A matriz assume a seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_1) & \cdots & C(u_1 - u_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(u_n - u_1) & \cdots & C(u_n - u_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

A matriz C é obtida de forma semelhante à da krigagem simples, com o acréscimo de um termo unitário associado à condição de não-tendenciosidade. Para a estimativa pontual, a matriz C assume a seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_0) \\ \vdots \\ C(u_n - u_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_n, u_0}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Para a estimativa em blocos, a matriz C assume a forma:

$$C = \begin{bmatrix} C(u_1 - u_0) \\ \vdots \\ C(u_n - u_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_1, B) \\ \vdots \\ C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_n, B) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

No caso de uma estimativa pontual, o sistema da krigagem ordinária pode ser expandido para:

$$\begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_1, u_0}) \\ \vdots \\ C(0) - \gamma_{AP}(h_{u_n, u_0}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Quando a estimativa for realizada para um bloco, o sistema matricial torna-se:

$$\begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_1, B) \\ \vdots \\ C(0) - \bar{\gamma}_{AB}(u_n, B) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (88)$$

A solução de ambos segue a forma apresentada em (37).

Krigagem da média

Diferentemente das demais variantes implementadas, essa modalidade não requer a definição de um suporte específico de estimativa (ponto ou bloco), uma vez que a estimativa ocorre em relação a um conjunto de amostras. Por essa razão, na etapa de cálculo das distâncias são determinadas apenas aquelas relativas aos pares de pontos amostrais, conforme as matrizes apresentadas em (57) e (67), para os casos isotrópico e anisotrópico, respectivamente. De forma análoga, no cálculo dos variogramas obtém-se somente a matriz M_{A-A} , dispensando-se as matrizes M_{A-P} e M_{A-B} .

A montagem da matriz K do sistema da krigagem da média segue de maneira idêntica àquela apresentada para a krigagem ordinária. A diferença reside na matriz C: como a krigagem da média não está vinculada a um elemento de estimativa específico, seus elementos não

carregam informação geométrica, sendo compostos exclusivamente por zeros associados aos pontos amostrais e pelo termo unitário associado à condição de não-tendenciosidade:

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

O sistema final assume então a forma:

$$\begin{bmatrix} C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_1, u_n}) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_1}) & \cdots & C(0) - \gamma_{AA}(h_{u_n, u_n}) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KM} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KM} \\ -\mu_{KM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

A solução segue a apresentada em (45).

4.4.10. Resolução do sistema de krigagem e cálculo das estimativas

Após a montagem do sistema matricial $[K][\lambda] = [C]$, procede-se à sua resolução, da qual são obtidos os pesos λ_α associados a cada amostra u_α e, quando aplicável, o multiplicador de Lagrange μ_{KM} . No *software* desenvolvido, a solução do sistema é obtida pela função “*numpy.linalg.solve*” da biblioteca NumPy. Optou-se por essa abordagem em detrimento da inversão direta da matriz K, por apresentar maior estabilidade numérica e menor custo computacional.

A solução do sistema fornece a matriz de pesos de acordo com cada tipo de krigagem. Para a krigagem simples, é retornado uma matriz apenas com os valores dos pesos λ_α^{KS} . Para a krigagem ordinária e da média, a matriz é retornada com os valores dos respectivos λ_α e os respectivos valores do multiplicador de Lagrange, μ .

A partir dos pesos obtidos, calcula-se a estimativa final, do valor ou da média da variável de interesse, cuja expressão depende da variante adotada. Para a krigagem simples, a estimativa é dada pela equação (23), incorporando explicitamente a média m fornecida pelo usuário. Para a krigagem ordinária, a estimativa é obtida pela equação (31), enquanto para a krigagem da média a estimativa é calculada conforme a equação (40).

De forma análoga, a variância do erro de estimativa também é obtida a partir dos pesos calculados, sendo sua expressão dependente da variante adotada: para a krigagem simples,

utiliza-se a equação (30); para a krigagem ordinária, a equação (39); e para a krigagem da média, a variância corresponde diretamente ao valor do multiplicador de Lagrange μ .

4.5. Validação dos resultados

4.5.1. Krigagem simples

A etapa de validação tem por objetivo verificar se as estimativas e variâncias produzidas pelo *software* desenvolvido reproduzem corretamente os resultados esperados pela formulação teórica da krigagem, atestando assim a confiabilidade da implementação. Para tanto, adotou-se uma estratégia de validação baseada na comparação dos resultados obtidos pelo *software* com os resultados obtidos pela resolução de alguns exercícios disponíveis na literatura.

Para a krigagem simples, adotou-se o Exercício 2.1 de Olea (1999), dada sua ampla referência didática e o fato de o autor disponibilizar a solução analítica completa. O exercício considera quatro amostras com as seguintes coordenadas e valores de uma variável:

Tabela 2 - Conjunto amostral utilizado no Exercício 2.1 disponível em Olea (1999).

Amostra	X (m)	Y (m)	Valor
1	10	20	40
2	30	280	130
3	250	130	90
4	360	120	160

Fonte: Olea (1999).

A estimativa é feita no ponto $x_0 = (180, 120)$, com média $m = 110$. Olea descreve a estrutura espacial pela função covariância $C(h) = 2000e^{-h/250}$, que corresponderia a um variograma exponencial de patamar igual a 2000 e alcance igual a 250.

Para reproduzir o exemplo, foi necessário converter o alcance teórico em alcance prático, parâmetro adotado na formulação do modelo exponencial implementada no *software*, multiplicando-se o alcance original por três. Dessa forma, a estrutura variográfica equivalente foi descrita por um modelo exponencial de patamar 2000 e alcance 750, com média populacional igual a 110.

Os resultados obtidos podem ser visualizados na Tabela 3.

Tabela 3 - Resultados comparativos entre Olea (1999) e o *software* desenvolvido.

Parâmetro	Olea (1999)	<i>Software</i>	Desvio relativo
<i>Teor estimado</i>	86,7	86,7	0%
σ_{KS}^2	752,9	752,9	0%

Fonte: autor (2026).

Os valores obtidos pelo *software* coincidem com os reportados por Olea (1999). A consistência observada valida a implementação tanto do sistema de krigagem em formulação variográfica quanto do estimador e da variância do erro.

4.5.2. Krigagem ordinária

Para a validação da krigagem ordinária, foi utilizado o *software* E{Z}-Kriging como referência. O conjunto amostral é composto por sete pontos (Tabela 4), e a estimativa é realizada na posição $x_0 = (149, 149)$. A estrutura espacial foi modelada por um variograma esférico de patamar igual a 100 e alcance igual a 100, sem efeito pepita.

Tabela 4 - Conjunto amostral utilizado para validação da krigagem ordinária.

Amostra	X (m)	Y (m)	Valor
1	87	71	0
2	171	52	3
3	239	106	86
4	239	192	20
5	171	246	27
6	87	227	67
7	49	149	31

Fonte: Walvoort (2002).

A validação foi conduzida em duas etapas: estimativa pontual e estimativa por bloco. Para a estimativa pontual, os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados obtidos para a krigagem pontual realizada no E{Z}-Kriging e no *software* desenvolvido.

Parâmetro	<i>E{Z} – Kriging</i>	<i>Software</i>	Desvio relativo
<i>Teor estimado</i>	33,4	33,4	0%
σ_{KS}^2	115,0	115,0	0%

Fonte: autor (2026).

Para a estimativa por bloco, considerou-se um bloco centrado em (149, 149), com dimensões de 100×100 m. O E{Z}-Kriging não permite ao usuário configurar a discretização do bloco, mas a equivalência completa com seus resultados foi obtida no *software* desenvolvido adotando-se uma discretização de 5×5 nós. Os resultados obtidos podem ser visualizados na Tabela 6.

Tabela 6 - Resultados obtidos para a krigagem ordinária realizada em um bloco no E{Z}-Kriging e no *software* desenvolvido.

Parâmetro	<i>E{Z} – Kriging</i>	<i>Software</i>	Desvio relativo
<i>Teor estimado</i>	33,5	33,5	0%
σ_{KS}^2	41,4	41,4	0%

Fonte: autor (2026).

Em ambas as configurações, os resultados obtidos pelo *software* coincidem integralmente com os fornecidos pelo E{Z}-Kriging, considerando que este último apresenta os valores com apenas uma casa decimal de precisão. A correspondência exata, tanto na estimativa pontual quanto na estimativa por bloco, corrobora a correta implementação do sistema de krigagem ordinária no *software*, incluindo o procedimento de discretização aplicado ao cálculo dos variogramas médios amostras-bloco e bloco-bloco.

4.5.3. Krigagem da média

Para a validação da krigagem da média, foi utilizado o exemplo apresentado por Yamamoto e Landim (2013). O conjunto amostral é composto por quatro pontos, conforme apresentado na Tabela 7.

Tabela 7 - Conjunto amostral utilizado para a validação da krigagem da média.

Amostra	X	Y	Valor
1	26,50	36,5	21,807
2	20,50	33,50	18,697
3	13,50	29,50	19,320
4	24,50	27,50	18,627

Fonte: Yamamoto e Landim (2013).

A estrutura espacial foi modelada por um variograma esférico de patamar igual a 19,8 e alcance igual a 14,16, sem efeito pepita. O ponto estimado está localizado em (23,75; 31,25). Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 8.

Tabela 8 - Resultados obtidos para a krigagem da média por Yamamoto e Landim (2013) e pelo *software* desenvolvido.

Parâmetro	<i>Yamamoto e Landim (2013)</i>	<i>Software</i>	Desvio relativo
<i>Média estimada</i>	19,782	19,782	0%
σ_{KS}^2	7,353	7,353	0%

Fonte: autor (2026).

Os resultados obtidos coincidem integralmente com os reportados por Yamamoto e Landim (2013). A correspondência exata corrobora a correta implementação do sistema de krigagem da média.

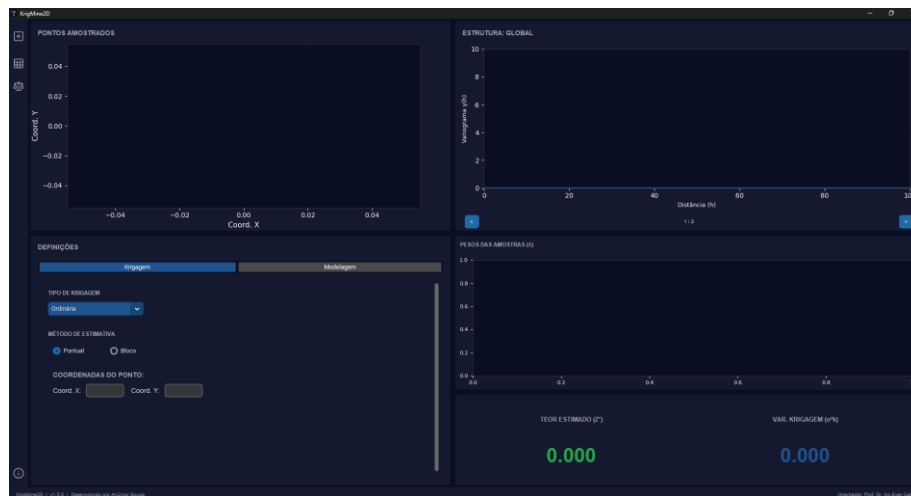
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1. Apresentação do software

O *software* desenvolvido, denominado KrigMine2D, foi concebido como uma ferramenta didática para a aplicação dos métodos de krigagem simples, ordinária e da média, com suporte de estimativa pontual ou em bloco. Sua interface gráfica foi construída de modo a guiar o usuário pelas etapas necessárias à realização de uma estimativa, desde a inserção dos dados amostrais até a apresentação dos valores estimados e da variância do erro.

A organização da interface segue a sequência lógica do processo de krigagem descrita na metodologia (Figura 7), de modo que cada etapa é acessível em uma região específica da janela principal, conforme apresentado na Figura 12. Essa estrutura permite que o usuário acompanhe visualmente o avanço da configuração, identificando com clareza os parâmetros já definidos e aqueles que ainda precisam ser informados.

Figura 12 - Tela principal do KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

A inserção dos dados amostrais é realizada por meio do botão "Inserir/Importar Dados", localizado na tela principal do *software*. Ao ser acionado, é exibida uma janela específica para essa finalidade, na qual o usuário pode optar entre duas formas de entrada: a digitação manual dos valores ou a importação a partir de um arquivo externo, conforme apresentado na Figura 13.

Figura 13 - Janela de inserção e importação de dados.

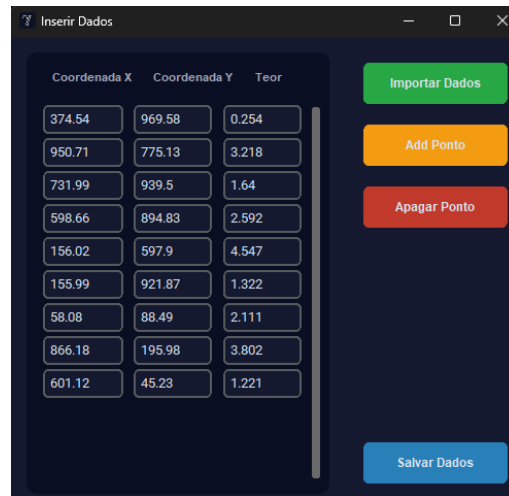


Fonte: autor (2026).

Na digitação manual, o usuário informa diretamente, em campos da própria interface, as coordenadas X e Y de cada ponto amostral, bem como o respectivo valor da variável de interesse. Essa modalidade é particularmente útil para conjuntos de dados de pequena dimensão ou para fins didáticos, em que se deseja explorar manualmente o efeito de diferentes configurações amostrais sobre as estimativas.

A importação a partir de arquivos externos é destinada a conjuntos de dados de maior dimensão, sendo aceitos arquivos nos formatos .txt e .csv, conforme detalhado na seção 4.3. Após a importação, os dados são exibidos na interface em formato tabular, permitindo ao usuário verificar a correta leitura dos dados, além de editá-los na própria interface, excluindo ou adicionando pontos ao conjunto, antes de prosseguir para as etapas seguintes da krigagem, conforme pode ser visualizado na Figura 14.

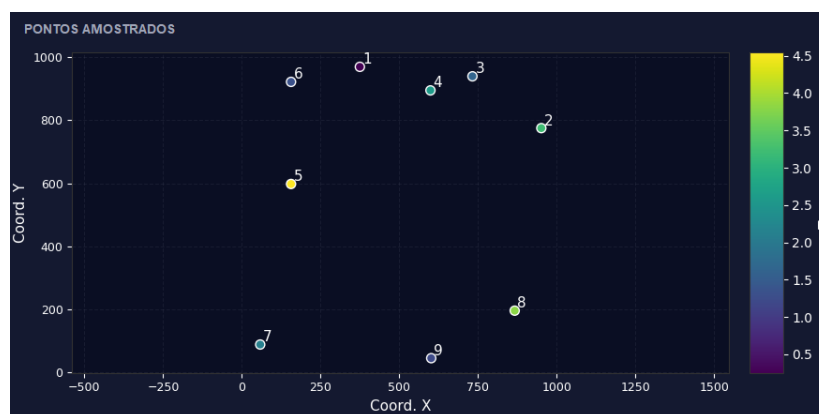
Figura 14 - Visualização de dados importados no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Após a inserção dos dados, sejam eles digitados manualmente ou importados de um arquivo externo, o conjunto amostral é automaticamente representado em um gráfico bidimensional na interface principal do *software*, conforme apresentado na Figura 15. Nesse gráfico, cada ponto é posicionado de acordo com suas coordenadas X e Y, sendo identificado por um índice numérico e colorido segundo o respectivo valor da variável de interesse, por meio de uma escala de cores acompanhada de barra de referência. Essa representação permite ao usuário visualizar de imediato a distribuição espacial das amostras e a variabilidade dos valores ao longo do domínio.

Figura 15 - Visualização gráfica do conjunto amostral no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

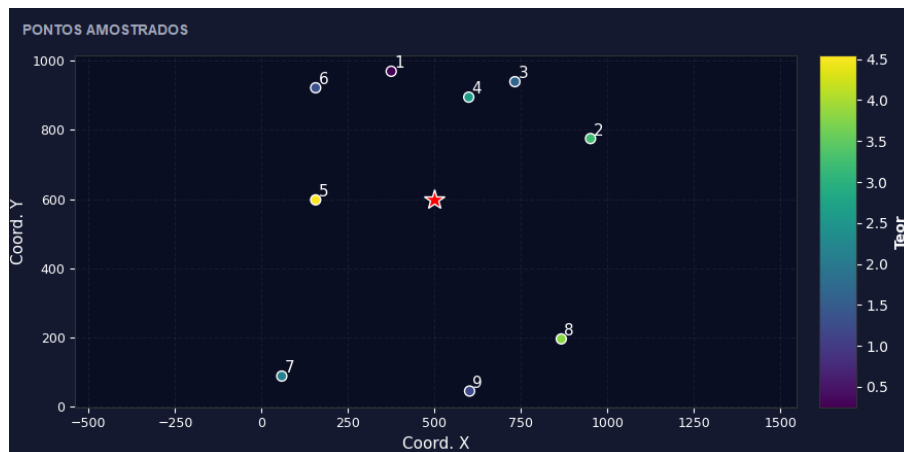
Adicionalmente, o gráfico oferece uma funcionalidade de edição interativa: o usuário pode alterar a posição de qualquer ponto amostral arrastando-o diretamente para a nova

localização desejada, sem a necessidade de retornar à janela de inserção de dados ou de editar o arquivo de origem. Essa funcionalidade torna o *software* particularmente adequado a finalidades didáticas, uma vez que possibilita a exploração dinâmica do efeito da configuração amostral sobre as estimativas, permitindo ao usuário avaliar de forma imediata como pequenas alterações na geometria de amostragem influenciam o resultado da krigagem. Ressalta-se que a edição direta pela janela de inserção de dados, descrita anteriormente, permanece disponível, ficando a critério do usuário a escolha do método mais conveniente.

Após a inserção dos dados amostrais, o usuário avança para a etapa de configuração da krigagem. Nessa etapa, define-se inicialmente a variante de krigagem a ser empregada (simples, ordinária ou da média) e, em seguida, o suporte de estimativa adotado, podendo este ser pontual ou em blocos. A definição dos parâmetros associados a cada suporte é realizada de forma específica, conforme detalhado a seguir.

No caso da estimativa pontual, o usuário informa as coordenadas X e Y do ponto a ser estimado. Após a inserção desses valores, o ponto é automaticamente representado no gráfico do conjunto amostral no formato de uma estrela, permitindo ao usuário visualizar sua localização em relação às amostras disponíveis, conforme apresentado na Figura 16.

Figura 16 - Visualização do ponto a ser estimado no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Para a estimativa em blocos, além das coordenadas do centro do bloco (X_c , Y_c), o usuário deve informar as dimensões nas direções X e Y, bem como o nível de discretização adotado, definido pelo número de subdivisões em cada direção. Esses parâmetros podem ser ajustados de duas formas: pela digitação direta dos valores nos respectivos campos ou pelo uso de *sliders* interativos, conforme apresentado na Figura 17. O uso de *sliders* facilita a exploração

de diferentes configurações de blocos, permitindo ao usuário avaliar de forma imediata o efeito das dimensões e da discretização sobre a representação visual do bloco.

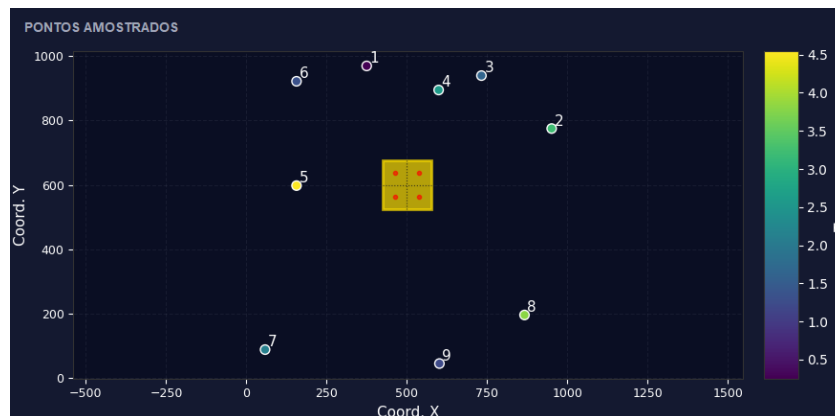
Figura 17 - Interface para configuração dos parâmetros do bloco no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Definidos os parâmetros, o bloco é representado no gráfico do conjunto amostral, juntamente com seus nós de discretização, permitindo ao usuário visualizar sua geometria e nível de detalhamento em relação às amostras, conforme apresentado na Figura 18. Os valores das dimensões e da discretização podem ser atualizados a qualquer momento, sendo as alterações refletidas automaticamente na representação gráfica do bloco. Essa atualização imediata permite ao usuário avaliar visualmente o efeito das modificações sobre a geometria e o nível de detalhamento adotados, facilitando a exploração de diferentes cenários de estimativa.

Figura 18 - Visualização do bloco e respectivos nós de discretização no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Por fim, cabe destacar que as opções de configuração disponíveis na interface variam conforme a variante de krigagem selecionada. Para a krigagem simples, além dos parâmetros

do suporte de estimativa, o usuário deve definir o tipo de média a ser utilizada no estimador, podendo optar entre três alternativas: a média aritmética dos dados amostrais, a estimativa obtida pela krigagem da média ou um valor personalizado, informado diretamente pelo próprio usuário, conforme apresentado na Figura 19. Essa flexibilidade permite ao usuário avaliar o efeito da escolha da média sobre a estimativa final, contribuindo para fins didáticos. Já para a krigagem da média, em razão da natureza dessa variante, as opções relativas ao suporte de estimativa são automaticamente desabilitadas na interface, uma vez que essa modalidade não requer a definição de um ponto ou bloco específico.

Figura 19 - Opções de configuração da média na krigagem simples KrigMine2D.

TIPO DE KRIGAGEM
Simples

MÉTODO DE ESTIMATIVA
 Pontual Bloco

COORDENADAS DO PONTO:
Coord. X: 500 Coord. Y: 600

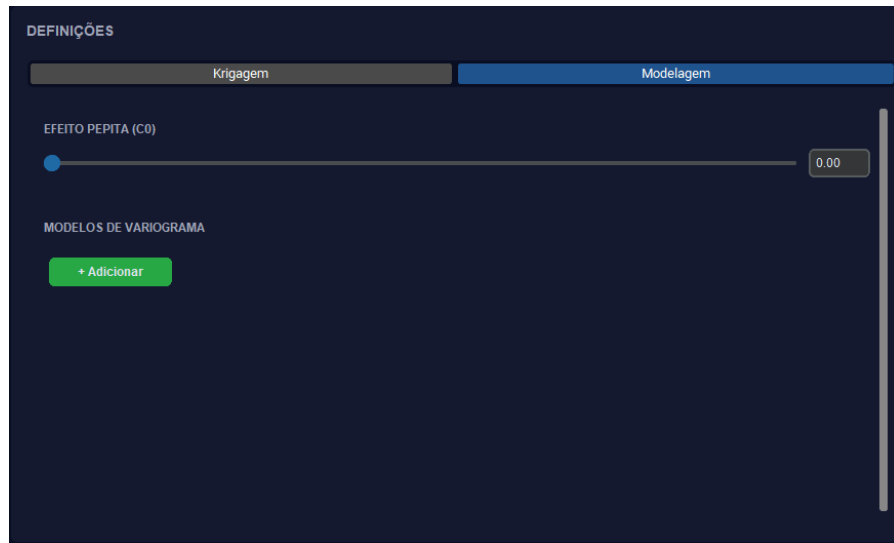
TIPO DE MÉDIA:
 Aritmética Krigagem da Média Personalizada

Valor da média: 0.00

Fonte: autor (2026).

Concluída a configuração da krigagem, o usuário avança para a definição das estruturas do modelo variográfico, etapa realizada na aba "Modelagem" do *software*. Nessa aba, o usuário define inicialmente o valor do efeito pepita, podendo informá-lo pela digitação direta no respectivo campo ou pelo ajuste do *slider* correspondente. Para a inclusão das demais estruturas variográficas, o usuário aciona o botão "+ Adicionar", conforme apresentado na Figura 20.

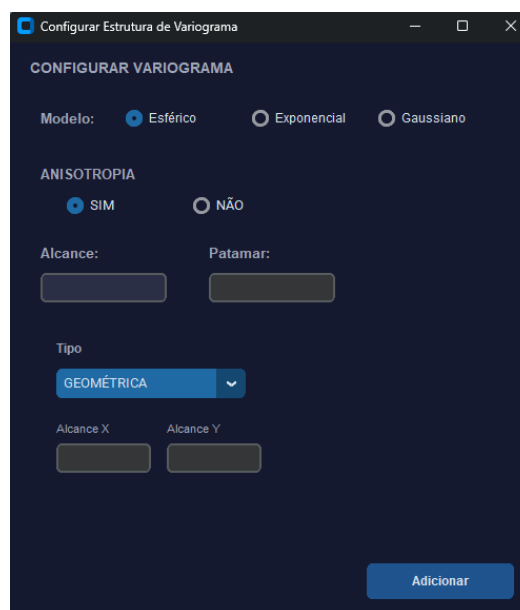
Figura 20 - Aba de modelagem do variograma no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Ao acionar o botão "+ Adicionar", uma nova janela é exibida, permitindo a configuração de uma nova estrutura variográfica, conforme apresentado na Figura 21. Nessa janela, o usuário escolhe o modelo teórico a ser adotado (esférico, exponencial ou gaussiano) e define os parâmetros associados, isto é, o alcance e o patamar. Adicionalmente, o usuário pode indicar se a estrutura apresenta anisotropia geométrica. Em caso afirmativo, o campo único de alcance é substituído por dois campos distintos, correspondentes aos alcances nas direções X e Y.

Figura 21 - Janela de configuração de uma estrutura variográfica no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Após a inserção dos parâmetros e o acionamento do botão "Adicionar", a estrutura passa a integrar o modelo global de variograma, ficando disponível para visualização e edição na aba "Modelagem". Esse processo pode ser repetido sucessivamente, permitindo a composição de modelos aninhados com múltiplas estruturas, conforme descrito na metodologia.

À medida que novas estruturas são adicionadas ao modelo, elas são listadas na aba "Modelagem", identificadas sequencialmente como "Estrutura 1", "Estrutura 2" e assim por diante, conforme apresentado na Figura 22. Para cada estrutura, são exibidos o tipo de modelo adotado e os respectivos parâmetros (alcance e patamar), que permanecem editáveis pela digitação direta ou pelo ajuste dos *sliders*. No caso de estruturas com anisotropia geométrica, são apresentados dois campos de alcance, correspondentes às direções X e Y. O tipo de modelo de cada estrutura pode ainda ser alterado por meio de um menu suspenso, sem a necessidade de removê-la e adicioná-la novamente. Caso o usuário deseje excluir uma estrutura, basta acionar o botão de remoção, identificado pelo ícone "X" no canto superior direito de cada estrutura.

Figura 22 - Visualização das estruturas variográficas adicionadas ao modelo global no KrigMine2D.



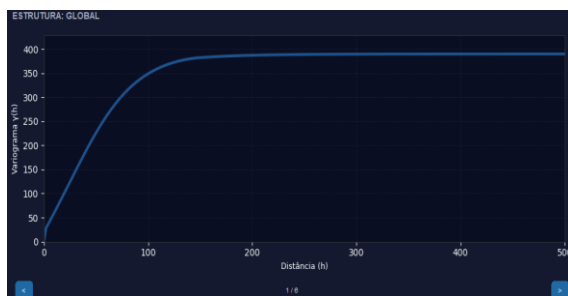
Fonte: autor (2026).

Após a definição das estruturas, o *software* apresenta automaticamente os gráficos dos variogramas correspondentes na aba "Modelagem". São exibidos o variograma global (Figura 23-a), o variograma do efeito pepita (Figura 23-b) e os variogramas individuais de cada estrutura adicionada. No caso de estruturas com anisotropia geométrica, são apresentados dois gráficos distintos, correspondentes aos variogramas calculados nas direções X (Figura 23-c) e

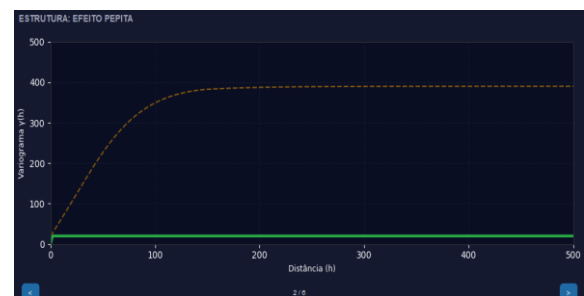
Y (Figura 23-d), permitindo ao usuário visualizar separadamente o comportamento da continuidade espacial em cada direção principal.

Os gráficos são exibidos individualmente, um por vez, sendo a navegação entre eles realizada por meio dos botões "<" e ">", localizados nas extremidades inferiores da área de visualização. A identificação do gráfico atual é apresentada no canto superior esquerdo, indicando a estrutura à qual o variograma se refere, e a posição relativa na sequência total é exibida ao centro, no formato "n/N", onde n corresponde ao gráfico atualmente visualizado e N ao número total de gráficos disponíveis. Em todos os gráficos é também apresentado, em traço tracejado, o variograma global como referência, permitindo ao usuário comparar a contribuição individual de cada estrutura em relação ao modelo completo.

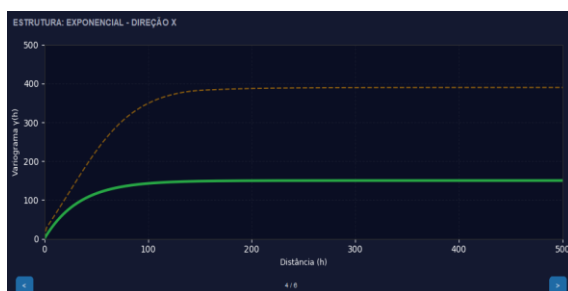
Figura 23 - Variogramas exibidos pelo KrigMine2D: (a) variograma global; (b) efeito pepita; (c) estrutura com anisotropia em X; (d) estrutura com anisotropia em Y.



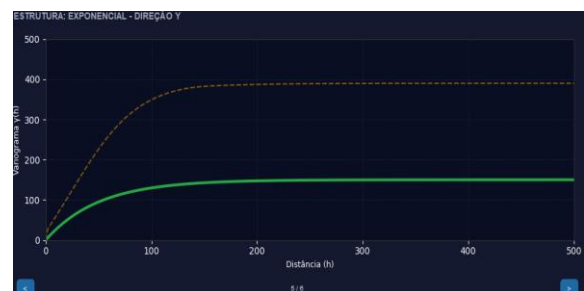
(a)



(b)



(c)



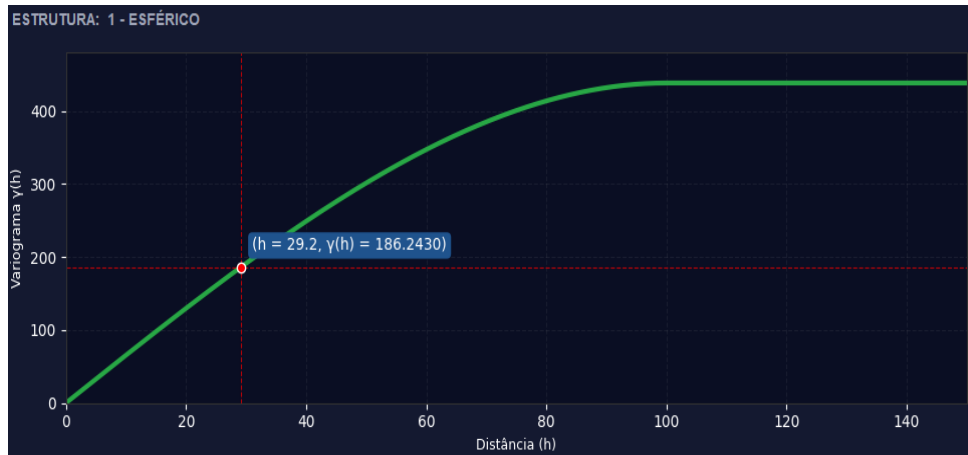
(d)

Fonte: autor (2026).

Como funcionalidade adicional, o *software* permite a leitura interativa dos valores do variograma diretamente sobre a curva. Ao posicionar o cursor do *mouse* sobre o gráfico, são exibidos automaticamente o valor da distância “h” e o respectivo valor do variograma $\gamma(h)$, conforme apresentado na Figura 24. Essa funcionalidade facilita a inspeção visual do

comportamento de cada estrutura, permitindo ao usuário identificar de forma rápida os valores assumidos pelo variograma em distâncias específicas, sem a necessidade de cálculos auxiliares.

Figura 24 - Leitura interativa dos valores do variograma no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Cabe destacar ainda que as alterações realizadas nos parâmetros das estruturas pela aba "Modelagem" (Figura 22), seja por digitação direta ou pelo ajuste dos *sliders*, são refletidas em instantaneamente nos gráficos dos variogramas. Dessa forma, ao modificar o alcance ou o patamar de uma estrutura, ou ao alterar o tipo de modelo adotado, o usuário visualiza imediatamente o impacto da alteração sobre a curva variográfica correspondente, bem como sobre o variograma global do modelo, e sobre os resultados das estimativas. Essa atualização contínua reforça o caráter didático do *software*, permitindo a exploração interativa do comportamento das diferentes estruturas e a compreensão visual de como cada parâmetro influencia a forma do variograma.

Após a definição dos parâmetros da krigagem e do modelo variográfico, o *software* executa o cálculo das estimativas e apresenta os resultados na interface principal. A exibição é organizada em dois painéis: o painel de pesos das amostras e o painel da estimativa final, conforme apresentado na Figura 25.

Figura 25 - Painéis de pesos das amostras e estimativa final no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

O painel de pesos das amostras apresenta, em formato de gráfico de barras, os valores dos pesos λ_α obtidos pela resolução do sistema de krigagem, associados a cada amostra do conjunto. As amostras são identificadas no eixo horizontal pelos mesmos índices numéricos utilizados na visualização do conjunto amostral, permitindo associar visualmente cada peso ao seu respectivo ponto no domínio. O valor numérico de cada peso pode ser consultado individualmente ao posicionar o cursor sobre a barra correspondente. Essa representação permite ao usuário identificar de forma imediata quais amostras exerceram maior influência na estimativa, evidenciando o efeito da configuração espacial e do modelo variográfico adotado sobre a distribuição dos pesos.

O painel da estimativa final apresenta os dois principais resultados produzidos pelo *software*: o valor estimado da variável de interesse (que pode corresponder a um teor, espessura, porosidade, permeabilidade ou qualquer outra variável regionalizada) e a respectiva variância do erro de estimativa.

O valor estimado depende da variante de krigagem adotada: nas krigagens simples e ordinária corresponde ao valor da variável estimada no ponto (ou bloco); já na krigagem da média, corresponde à estimativa local da média da variável no domínio definido pelo conjunto amostral utilizado, sem associação a um ponto ou bloco específico. Os rótulos do painel são atualizados dinamicamente conforme a variante de krigagem selecionada, indicando, por exemplo, "Valor estimado por KS" ou "Média estimada por KM", de modo a deixar explícito ao usuário qual variante originou o resultado apresentado. Os valores são exibidos em destaque, facilitando sua leitura.

Além dos resultados finais apresentados na interface principal, o *software* disponibiliza uma janela específica para a visualização das matrizes utilizadas ao longo do processo de krigagem. Essa funcionalidade é acessada a partir da tela principal e tem como objetivo proporcionar ao usuário um acompanhamento detalhado de cada etapa do cálculo, em consonância com o caráter didático do *software*.

A janela é organizada em três abas, correspondentes às principais etapas do cálculo da krigagem: "Distâncias", "Variogramas" e "Sistema". Na aba "Distâncias" (Figura 26), são exibidas as matrizes de distâncias euclidianas calculadas entre os pares de pontos amostrais e entre as amostras e o elemento de estimativa (ponto ou nós da malha de discretização do bloco). Quando o modelo variográfico contém ao menos uma estrutura com anisotropia geométrica, são exibidas adicionalmente as matrizes de distâncias corrigidas, calculadas conforme a equação (66), permitindo ao usuário comparar diretamente os efeitos da anisotropia sobre as distâncias envolvidas no cálculo.

Figura 26 - Janela de visualização das matrizes intermediárias no KrigMine2D, da aba "Distâncias".

DISTÂNCIAS EUCLIDIANAS									
AMOSTRAS — AMOSTRAS									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.0000	608.0976	358.7134	236.2569	431.1578	223.6970	936.1979	916.6062	951.7150
2	608.0976	0.0000	273.5981	371.8431	814.2129	808.1538	1126.1717	585.2863	809.3004
3	358.7134	273.5981	0.0000	140.6140	669.6507	576.2697	1085.5288	755.5322	903.7952
4	236.2569	371.8431	140.6140	0.0000	533.0081	443.4951	970.7785	748.3036	849.6036
5	431.1578	814.2129	669.6507	533.0081	0.0000	323.9700	518.7396	816.0067	709.6183
6	223.6970	808.1538	576.2697	443.4951	323.9700	0.0000	839.1118	1015.5226	983.1777
7	936.1979	1126.1717	1085.5288	970.7785	518.7396	839.1118	0.0000	815.2176	544.7604
8	916.6062	585.2863	755.5322	748.3036	816.0067	1015.5226	815.2176	0.0000	304.9301
9	951.7150	809.3004	903.7952	849.6036	709.6183	983.1777	544.7604	304.9301	0.0000

DISTÂNCIAS CORRIGIDAS (ANISOTROPIA)									
AMOSTRAS — PONTO									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	390.2942	483.5391	411.1929	310.8995	343.9864	471.1885	675.9702	545.2705	563.9105

DIST. CORRIGIDA A.A. — Estrutura 2 — Exponencial									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.0000	885.8598	537.0181	344.3901	495.5661	331.2785	1000.8248	1068.7863	984.8525

Fonte: autor (2026).

Na aba "Variogramas e Covariâncias", são exibidos os variogramas e covariâncias calculados para cada estrutura adotada no modelo, como pode ser visualizado na Figura 27. Para cada estrutura, são apresentadas as matrizes entre os pares de pontos amostrais, e as matrizes entre as amostras e o elemento de estimativa (ponto ou bloco), permitindo ao usuário visualizar a contribuição de cada componente do modelo separadamente.

Figura 27 - Aba "Variogramas e Covariâncias" da janela de visualização de matrizes no *software* KrigMine2D.

The screenshot shows the 'Variogramas e Covariâncias' tab with four matrix visualizations:

- Modelo: Efeito Ponto**
 - $\gamma(A, A)$ — Efeito Ponto (4x4 matrix with values: 0.0000, 10.0000, 10.0000, 10.0000; 10.0000, 0.0000, 10.0000, 10.0000; 10.0000, 10.0000, 0.0000, 10.0000; 10.0000, 10.0000, 10.0000, 0.0000)
 - $C(A, A)$ — Efeito Ponto (4x4 matrix with values: 10.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000; 0.0000, 10.0000, 0.0000, 0.0000; 0.0000, 0.0000, 10.0000, 0.0000; 0.0000, 0.0000, 0.0000, 10.0000)
- Modelo: Exponencial_1**
 - $\gamma(A, A)$ — Exponencial_1 (4x4 matrix with values: 0.0000, 1295.2592, 1304.3323, 1533.6761; 1295.2592, 0.0000, 1310.6009, 1538.7534; 1304.3323, 1310.6009, 0.0000, 714.2622; 1533.6761, 1538.7534, 714.2622, 0.0000)
 - $C(A, A)$ — Exponencial_1 (4x4 matrix with values: 2000.0000, 704.7408, 695.6677, 466.3239; 704.7408, 2000.0000, 689.3991, 461.2466; 695.6677, 689.3991, 2000.0000, 1285.7378; 466.3239, 461.2466, 1285.7378, 2000.0000)

Fonte: autor (2026).

Por fim, na aba "Sistema", é exibida inicialmente a matriz K do sistema linear da krigagem. Em seguida, é apresentada a resolução do sistema, com a inversa da matriz K, a matriz C e o vetor de pesos λ exibidos lado a lado, permitindo ao usuário acompanhar visualmente o processo de obtenção dos pesos pela multiplicação das matrizes envolvidas, conforme a Figura 28.

Figura 28 - Aba "Sistema" da janela de visualização das matrizes no KrigMine2D, exibindo a matriz K e a resolução do sistema linear na forma $[K^{-1}] \cdot [C] = [\lambda]$.

The screenshot shows the 'Sistema' tab with the following matrices and vectors:

- MATRIZ K — C(A, A) + Restrição de Lagrange** (5x5 matrix):

	1	2	3	4	5
1	120.0000	113.3405	113.7090	114.1586	1.0000
2	113.3405	120.0000	115.8688	112.9430	1.0000
3	113.7090	115.8688	120.0000	116.6948	1.0000
4	114.1586	112.9430	116.6948	120.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
- SISTEMA RESOLVIDO: $K^{-1} \cdot C = \lambda$**
 - K^{-1} (5x5 matrix):

	1	2	3	4	5
1	0.1121	-0.0482	-0.0029	-0.0609	0.3045
2	-0.0482	0.1421	-0.1131	0.0192	0.3472
3	-0.0029	-0.1131	0.2592	-0.1431	0.0412
4	-0.0609	0.0192	-0.1431	0.1848	0.3071
5	0.3045	0.3472	0.0412	0.3071	-115.6348
 - C (5x1 matrix):

	1
1	116.7732
2	116.4701
3	116.2818
4	115.0258
5	1.0000
 - λ (5x1 vector):

	1
1	0.4270
2	0.3261
3	0.1982
4	0.0487
5	0.4763

Fonte: autor (2026).

A disponibilização dessas informações permite ao usuário verificar individualmente cada elemento envolvido no cálculo, facilitando a compreensão do processo de krigagem como um todo. Além disso, essa funcionalidade pode ser utilizada como recurso para o ensino,

possibilitando a comparação dos valores intermediários com resoluções manuais e a identificação visual do efeito da configuração amostral e do modelo variográfico adotado sobre cada matriz.

Como funcionalidade adicional, o *software* disponibiliza uma janela dedicada à comparação simultânea entre as variantes de krigagem implementadas, denominada "Comparação de Estimativas", apresentada na Figura 29. Essa funcionalidade permite ao usuário visualizar, para uma mesma configuração de dados amostrais, suporte de estimativa e modelo variográfico, os resultados produzidos por cada uma das variantes em uma única tela, facilitando a análise comparativa do comportamento dos diferentes estimadores.

Figura 29 - Janela de comparação entre as variantes de krigagem no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

A janela é composta por duas regiões principais. À esquerda, é apresentado o mapa de pontos amostrais juntamente com o elemento de estimativa, identificado por um marcador distinto. Assim como na tela principal, o gráfico apresentado nessa janela mantém as funcionalidades interativas de edição: o usuário pode alterar a posição de qualquer ponto amostral ou do elemento a estimar arrastando-o diretamente para a nova localização. As alterações realizadas, contudo, ficam restritas a essa janela, não afetando a configuração definida na tela principal do *software*. Dessa forma, o usuário pode explorar livremente diferentes hipóteses de configuração sem comprometer o cenário estabelecido para o cálculo principal.

À direita, são exibidos os resultados de cada variante, organizados em painéis individuais. Para cada variante, são apresentados o valor estimado (Z^* ou M^*), a respectiva variância de krigagem (σ_K^2) e o gráfico de pesos atribuídos a cada amostra. No caso da krigagem

simples, é exibido um único painel, que permite ao usuário alternar entre as três formas de obtenção da média implementadas no *software*: a média aritmética dos dados amostrais, a média obtida pela krigagem da média e a média personalizada, cujo valor é definido diretamente pelo usuário. O respectivo valor de “m” é apresentado abaixo do título do painel e atualizado conforme a opção selecionada.

A apresentação conjunta dos resultados permite ao usuário identificar visualmente diferenças e semelhanças entre as variantes, observando, por exemplo, como a inclusão da condição de não-tendenciosidade na krigagem ordinária influencia a distribuição dos pesos em relação à krigagem simples, ou como a escolha da média afeta a estimativa final na krigagem simples. Essa visualização integrada constitui um recurso didático relevante, contribuindo para a compreensão das particularidades de cada formulação implementada no *software*.

O *software* KrigMine2D reúne, em uma única plataforma, os recursos necessários à aplicação prática dos métodos de krigagem simples, ordinária e da média, integrando funcionalidades de entrada de dados, configuração da krigagem, modelagem variográfica, apresentação dos resultados, visualização das matrizes intermediárias e comparação entre as variantes implementadas. Os recursos interativos disponibilizados ao longo da interface, aliados à atualização em tempo real dos elementos gráficos e numéricos, evidenciam o caráter didático que orientou o desenvolvimento da ferramenta.

Por meio da ferramenta PyInstaller, o *software* foi compilado em formato executável independente, viabilizando sua distribuição e uso sem a necessidade de instalação prévia do ambiente Python ou de bibliotecas auxiliares.

5.2. Exemplos de possíveis aplicações didáticas

5.2.1. A relação entre krigagem ordinária, simples e da média

A escolha dessa relação como caso de aplicação não se deu de forma arbitrária. Diferentemente de exercícios voltados apenas à execução isolada de uma das variantes, a verificação dessa equivalência exige a utilização simultânea das três modalidades de krigagem implementadas no *software*, bem como a confrontação dos respectivos resultados. Dessa forma, a aplicação proposta constitui, ao mesmo tempo, uma demonstração do potencial didático da ferramenta e uma verificação adicional de sua implementação, complementando a etapa de validação apresentada na seção 4.5, uma vez que a coincidência entre os valores esperados pela

formulação teórica e aqueles produzidos pelo *software* depende da correção simultânea das três variantes.

A equivalência entre a krigagem ordinária e a krigagem simples com média obtida pela krigagem da média, demonstrada na seção 3.6.4 pela equação (48), pode ser verificada de forma direta no *software* KrigMine2D. Diferentemente da resolução manual em planilhas eletrônicas, na qual a verificação dessa propriedade exigiria a montagem e resolução sequencial dos sistemas de cada variante, no *software* a equivalência pode ser observada simultaneamente na janela de comparação entre variantes, evidenciando a aplicabilidade didática da ferramenta. Para tal verificação, utilizou-se o conjunto amostral disponível em Yamamoto e Landim (2013), apresentado na Tabela 9, adotando-se como ponto a estimar as coordenadas (28,75; 21,25). O modelo variográfico considerado é composto por uma estrutura esférica isotrópica, com alcance de 14,16 m e patamar de 19,8 %².

Tabela 9 - Conjunto amostral utilizado na verificação da equivalência entre a krigagem ordinária e a krigagem simples com média obtida pela krigagem da média.

Amostra	X (m)	Y (m)	Teor (%)
1	35,5	24,5	11,095
2	24,5	27,5	18,627
3	25,5	20,5	11,834
4	29,5	16,5	7,381

Fonte: Yamamoto e Landim (2013).

Inseridos os dados e a estrutura variográfica no KrigMine2D, foram obtidas as estimativas para a krigagem ordinária e para a krigagem simples com média dada pela krigagem da média, conforme apresentado na Figura 30.

Figura 30 - Comparação entre as estimativas da krigagem ordinária e da krigagem simples com média obtida pela krigagem da média no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Na Figura 31 é apresentada a estimativa obtida para a krigagem da média.

Figura 31 - Estimativa da média obtida pela krigagem da média no KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Os valores estimados foram coincidentes nas duas variantes, iguais a 11,1309 %, confirmando a equivalência matemática prevista pela formulação apresentada na seção 3.6.4. Observa-se ainda que a variância de krigagem associada à krigagem ordinária (9,0843%) é superior àquela obtida pela krigagem simples (9,0514 %²), comportamento coerente com a decomposição apresentada na equação (49), na qual a variância da krigagem ordinária corresponde à soma da variância da krigagem simples e da contribuição associada à incerteza na estimativa da média. A seguir, verifica-se essa relação numericamente, comparando-se o

valor da variância da krigagem ordinária produzido pelo *software* com o obtido diretamente pela aplicação da equação (49).

Substituindo na equação (49) o valor da variância de krigagem associada à krigagem simples (9,0514 %²), o peso da média da média associado a essa estimativa (-0,067501, valor também obtido pelo KrigMine2D) e a variância de krigagem associada à krigagem da média (7,21 %²), obtém-se:

$$\sigma_{KO}^2 = 9,0514 + (1 - 1,067501)^2 \cdot 7,21$$

$$\sigma_{KO}^2 = 9,0514 + 0,03285$$

$$\sigma_{KO}^2 = 9,0843 \%^2$$

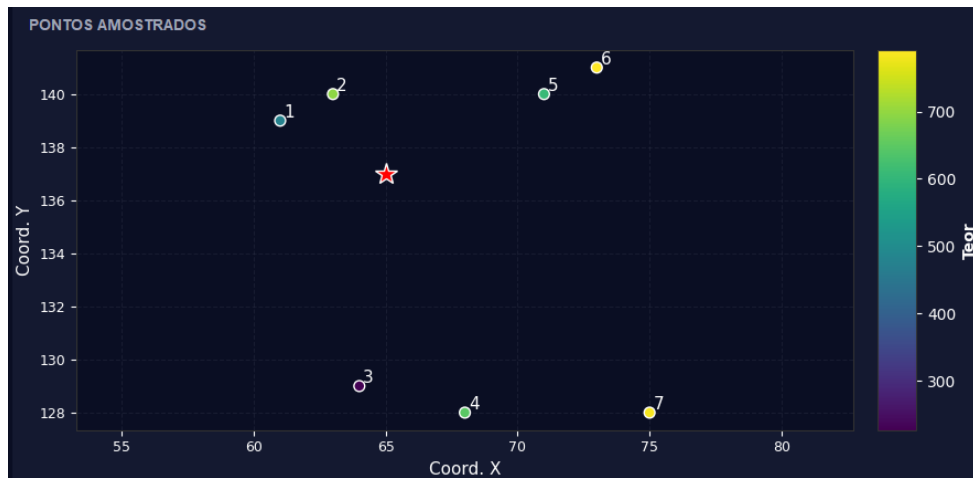
O valor obtido pela aplicação direta da equação (49) coincide com aquele produzido pelo *software* para a krigagem ordinária (9,0843%²), confirmando numericamente a equivalência prevista pela decomposição de Wackernagel (1995) e ilustrando a aderência do KrigMine2D às relações teóricas entre os tipos de krigagem implementados.

5.2.2. Exploração interativa do efeito dos parâmetros do variograma

O segundo estudo de caso apresentado tem por objetivo demonstrar a aplicação do KrigMine2D na exploração do efeito de diferentes parâmetros do modelo variográfico sobre os resultados da krigagem. A escolha desse caso fundamenta-se no exemplo apresentado por Isaaks e Srivastava (1989), no qual os autores investigam, em uma mesma configuração amostral, como variações de escala, forma, efeito pepita e alcance do variograma influenciam os pesos atribuídos às amostras, a estimativa final e a variância do erro associada. Nesta seção busca-se reproduzir os resultados obtidos pelos autores e destacar o potencial didático do *software*, evidenciado pela possibilidade de modificar interativamente os parâmetros do modelo variográfico e observar, em tempo real, o impacto dessas alterações sobre os resultados.

Para todos os cenários explorados nesta seção, utilizou-se o conjunto amostral apresentado pelos autores, composto por sete amostras com coordenadas e valores reproduzidos na Tabela 10. O ponto a estimar localiza-se nas coordenadas (65; 137), e a variante de krigagem adotada é a ordinária. Na Figura 32 pode ser visualizada a disposição dos pontos amostrais em relação ao ponto a estimar, gerada pelo KrigMine2D.

Figura 32 - Configuração espacial das sete amostras e do ponto a estimar (65; 137) utilizadas no estudo de caso, conforme exibida no *software* KrigMine2D.



Fonte: autor (2026).

Tabela 10 - Conjunto amostral utilizado no estudo de caso, extraído de Isaaks e Srivastava (1989).

Amostra	X (m)	Y (m)	Valor (ppm)
1	61	139	477
2	63	140	696
3	64	129	227
4	68	128	646
5	71	140	606
6	73	141	791
7	75	128	783

Fonte: Isaaks e Srivastava (1989).

O primeiro efeito investigado refere-se à escala do variograma, isto é, à magnitude do patamar. Foram comparados dois modelos exponenciais com mesmo alcance, porém com patamares de 10 e 20. Para o primeiro modelo ($C = 10$), obteve-se um teor estimado de 592,73 ppm e variância de krigagem de 8,96 ppm². Já para o segundo modelo ($C = 20$), o teor estimado

manteve-se inalterado (592,73 ppm), enquanto a variância de krigagem dobrou, atingindo 17,91 ppm².

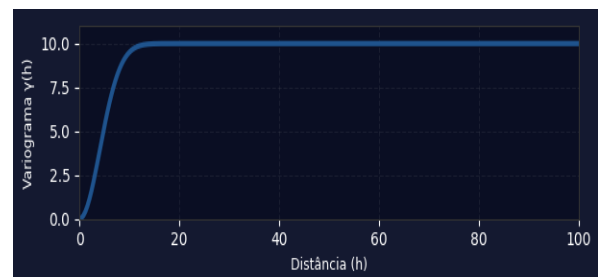
Observa-se que, embora a alteração da escala tenha modificado o valor do patamar, os pesos atribuídos a cada amostra e o valor estimado permaneceram inalterados. A única grandeza afetada foi a variância de krigagem, que se apresentou proporcional à escala adotada, conforme previsto por Isaaks e Srivastava (1989). Essa propriedade pode ser verificada de forma direta no *software* pela manipulação do *slider* de patamar, evidenciando, em tempo real, a igualdade dos pesos obtidos e da estimativa em relação à escala do modelo.

A seguir, investigou-se o efeito da forma do variograma próximo à origem, comparando-se um modelo exponencial, caracterizado por um comportamento linear, e um modelo gaussiano, caracterizado por um comportamento parabólico. Ambos os modelos foram configurados com mesmo patamar (10 ppm²) e mesmo alcance prático (10 m), conforme pode ser observado na Figura 33-a e 33-b, respectivamente.

Figura 33 - Variogramas obtidos para o modelo exponencial e gaussiano, ambos com alcance de 10 m e patamar de 10 ppm².



(a)



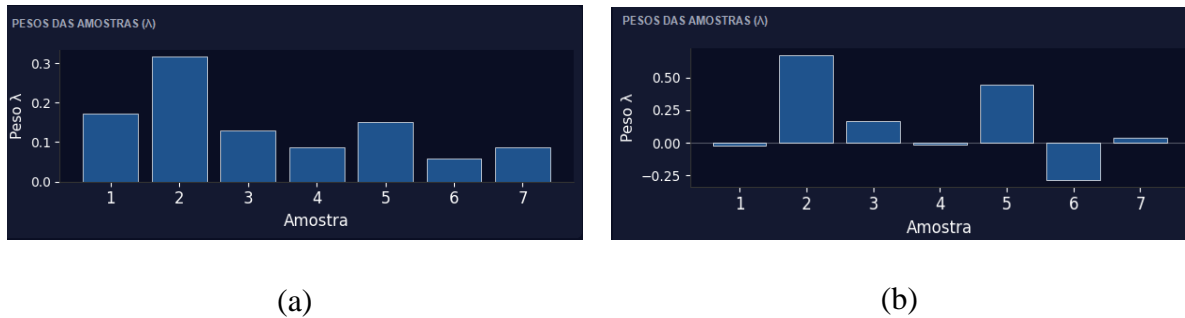
(b)

Fonte: autor (2026).

A alteração da forma do variograma produziu efeitos pronunciados sobre os pesos atribuídos às amostras, conforme se observa nas Figuras 34-a (modelo exponencial) e 34-b (modelo gaussiano). Com o modelo gaussiano, verifica-se a concentração de peso nas amostras mais próximas ao ponto a estimar, acompanhada do surgimento de pesos negativos para amostras mais distantes e parcialmente "ocultadas" por outras amostras intermediárias, fenômeno conhecido na literatura como *screen effect*. Esse comportamento, descrito por Isaaks e Srivastava (1989), é reproduzido pelo *software*, permitindo ao usuário visualizar de forma direta como a hipótese de maior continuidade espacial, assumida pelo modelo gaussiano, afeta

a distribuição dos pesos. Se uma amostra com valor alto de teor recebe um peso negativo elevado, pode ocorrer que o valor do teor estimado seja muito reduzido podendo assumir inclusive um valor negativo.

Figura 34 - Efeito da forma do variograma sobre os pesos atribuídos às amostras, obtidos no KrigMine2D: (a) modelo exponencial; (b) modelo gaussiano.

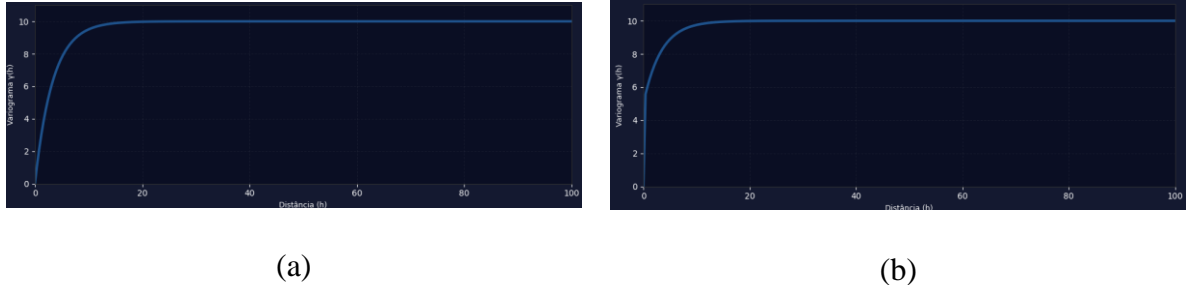


Fonte: autor (2026).

A escolha do modelo também influenciou os valores finais da estimação. Para o modelo exponencial, obteve-se um teor estimado de 592,729 ppm e variância de krigagem de 8,956 ppm². Para o modelo gaussiano, ambas as grandezas apresentaram variações: o teor estimado diminuiu para 559,37 ppm, enquanto a variância de krigagem reduziu-se para 4,781 ppm². A redução da variância no modelo gaussiano é coerente com a maior continuidade espacial assumida por essa formulação que confere maior peso às amostras próximas ao ponto a estimar quando comparado com um modelo de variograma que apresenta uma menor continuidade perto da origem.

O terceiro efeito investigado refere-se à magnitude do efeito pepita. Foram comparados dois modelos exponenciais com mesmo alcance e mesmo patamar total (10), variando-se a parcela atribuída ao efeito pepita: ausência de pepita ($C_0 = 0$) (Figura 35-a) e pepita correspondente a 50% do patamar ($C_0 = 5$) (Figura 35-b).

Figura 35 - Variogramas obtidos no KrigMine2D para modelos exponenciais com mesmo alcance e patamar total, diferindo apenas no efeito pepita: (a) ausência de efeito pepita ($C_0 = 0$); (b) efeito pepita correspondente a 50% do patamar ($C_0 = 5$).



Fonte: autor (2026).

O aumento do efeito pepita promoveu uma redistribuição mais homogênea dos pesos entre as amostras, aproximando o estimador de uma média aritmética simples. Esse comportamento decorre da perda de estrutura espacial associada ao efeito pepita: quanto maior sua contribuição relativa, menor a distinção, em termos de distância estatística, entre amostras próximas e distantes do ponto a estimar. A variância de krigagem, por sua vez, aumentou (8,956 ppm² para 10,306 ppm²), refletindo a maior incerteza decorrente do componente não estruturado do modelo.

O efeito da variação do alcance foi avaliado pela comparação de dois modelos exponenciais com mesmo patamar (10) e mesmo efeito pepita (nulo), porém com alcances de 10 m e 20 m. Os resultados obtidos para os pesos, estimativa e variância de krigagem em cada cenário são apresentados nas Figuras 36-a ($a = 10$ m) e 36-b ($a = 20$ m).

Figura 36 - Variogramas, pesos das amostras, estimativa e variância de krigagem obtidos no KrigMine2D para modelos exponenciais com mesmo patamar e efeito pepita nulo, diferindo apenas no alcance: (a) $a = 10$ m; (b) $a = 20$ m.



(a)

(b)

Fonte: autor (2026).

Conforme se observa, a duplicação do alcance produziu alterações relativamente modestas nos pesos atribuídos a cada amostra. Esse comportamento é coerente com o descrito por Isaaks e Srivastava (1989): ampliar o alcance equivale a diminuir a "distância estatística" abrangida pelo modelo, o que faz com que as amostras pareçam, comparativamente, mais próximas entre si e do ponto a estimar. Apesar das pequenas variações nos pesos, o teor estimado apresentou alteração notável entre os dois cenários, passando de 592,729 ppm ($a = 10$ m) para 572,390 ppm ($a = 20$ m). A variância de krigagem, por sua vez, foi inferior à do modelo com alcance menor, refletindo a maior continuidade espacial assumida pelo modelo de maior alcance. Cabe mencionar que a variância do erro de estimativa não mede a incerteza da estimativa já que não depende dos valores das amostras, e sim, o quanto um cenário (tamanho do suporte a estimar, disposição das amostras em si e entre o que se quer estimar, modelo estrutural e método de estimativa) é mais ou menos favorável para a estimativa.

5.2.3. Outros possíveis usos didáticos

Podem ser citados, ainda, algumas outras utilidades com fins didáticos, tais como:

- a. Influência do tamanho da discretização nos resultados;

- b. Influência do tamanho do suporte no cálculo da variância do erro de krigagem;
- c. Influência do peso da média na krigagem simples de acordo com a disposição geométrica das informações em relação à localização do local a ser estimado;
- d. Comportamento dos ponderadores e conseqüentemente da variância de krigagem diante da presença de anisotropias;
- e. Influência da quantidade de amostras a serem utilizadas nas estimativas para se obter uma variância do erro de krigagem ordinária mais próxima da krigagem simples;

O conhecimento de como estes diferentes fatores podem afetar os resultados das estimativas permite ao usuário de *softwares* comerciais tomar decisões mais adequadas na fase de modelagem do variograma e da escolha da vizinhança de estimativa visando a obtenção de estimativas mais confiáveis.

Rivoirard (1984) em sua tese de doutorado realizou um estudo sobre o comportamento dos ponderadores de krigagem, onde ele demonstrou através de uma série de exemplos como diferentes fatores relacionados ao modelo variográfico, à vizinhança de estimativa e suporte a estimar influenciam nos pesos atribuídos às amostras, e conseqüentemente nos valores estimados e de variância do erro. Todos os exemplos utilizados em seu estudo podem ser reproduzidos pelo *software* desenvolvido neste trabalho.

6. CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um *software* didático em linguagem Python para a estimação geoestatística por krigagem, contemplando as variantes simples, ordinária e da média, com suporte pontual e em bloco. A implementação resultou no *software* KrigMine2D, no qual foram disponibilizados os principais recursos previstos: a inserção de dados amostrais por digitação direta ou importação de arquivos externos, a configuração dos parâmetros de krigagem, a definição de modelos variográficos aninhados e tratamento de anisotropia geométrica, e a apresentação das estimativas e variâncias do erro, acompanhadas dos valores intermediários do processo de cálculo.

A validação do KrigMine2D, conduzida em duas frentes complementares (a resolução de exemplos extraídos da literatura geoestatística e a comparação com os resultados produzidos pelo *software* E{Z}-Kriging), demonstrou equivalência entre os valores produzidos pelo KrigMine2D e os de referência, para todas as variantes e suportes implementados, atestando a correta implementação dos algoritmos desenvolvidos.

Os exemplos didáticos reproduzidos pelo *software*, por sua vez, incluindo a verificação numérica da equivalência entre a krigagem ordinária e a krigagem simples com média obtida pela krigagem da média, evidenciaram seu potencial como recurso didático para o ensino e a compreensão dos métodos de krigagem.

Sob a perspectiva didática, a interface gráfica desenvolvida buscou favorecer não apenas a execução do cálculo, mas também a compreensão das etapas envolvidas no processo de krigagem. Recursos como a edição interativa dos pontos amostrais e do elemento de estimativa diretamente sobre o gráfico, a atualização em tempo real dos variogramas e das estimativas, a visualização das matrizes intermediárias e a comparação simultânea entre as variantes implementadas constituem diferenciais relevantes em relação a *softwares* geoestatísticos voltados a aplicações operacionais, nos quais essas etapas costumam permanecer pouco acessíveis ao usuário. A distribuição em formato executável independente, por sua vez, dispensa a instalação prévia de bibliotecas ou ambientes de programação, viabilizando o uso da ferramenta em laboratórios de ensino e estudos individuais.

Cabe destacar, contudo, algumas limitações do *software* desenvolvido. As estimativas são restritas ao domínio bidimensional e empregam vizinhança global, considerando o conjunto integral de amostras em cada estimativa. O tratamento da anisotropia geométrica está restrito a casos em que os eixos principais coincidem com os eixos coordenados, não sendo realizadas

cálculos de rotações do sistema de coordenadas. Da mesma forma, os modelos variográficos implementados se limitam às estruturas esférica, exponencial e gaussiana, com efeito pepita, não contemplando, por exemplo, modelo cúbico ou potência.

De forma geral, considera-se que os objetivos propostos foram atendidos. O *software* desenvolvido reúne, em uma única ferramenta de uso livre, recursos didáticos voltados à aprendizagem dos fundamentos da krigagem, podendo ser utilizado tanto em contextos de ensino quanto como apoio à compreensão prática dos conceitos teóricos discutidos ao longo deste trabalho.

7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões de trabalhos futuros, destacam-se a extensão do *software* para o domínio tridimensional, a implementação da anisotropia geométrica com rotação arbitrária dos eixos principais, a incorporação dos demais tipos de anisotropia, zonal e mista (que se aproxima de situações mais realistas frequentemente observadas em depósitos minerais) e a implementação da busca da vizinhança de estimativa.

Outras possibilidades incluem ainda a incorporação de novos modelos variográficos, a implementação de variantes adicionais, como a cokrigagem e a krigagem indicadora.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLARD, D.; SENOUSI, R.; PORCU, E. **Anisotropy models for spatial data**. *Mathematical Geosciences*, v. 48, n. 3, 24 p., 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11004-015-9594-x>. Acesso em: 30 abr. 2026.

ARMSTRONG, M. **Basic linear geostatistics**. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 153 p.

BABAK, O.; DEUTSCH, C. V. **Statistical approach to inverse distance interpolation**. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, v. 23, p. 543–553, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00477-008-0226-6>. Acesso em: 16 abr. 2026.

BOSTAN, P. **Basic kriging methods in geostatistics**. *Yuzuncu Yıl University Journal of Agricultural Sciences*, v. 27, n. 1, p. 10–20, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.29133/yyutbd.305093>. Acesso em: 14 abr. 2026.

CLARK, I.; HARPER, W. V. **Practical geostatistics 2000**. Columbus: Ecosse North America, 2000. 430 p.

DEUTSCH, C. V.; JOURNEL, A. G. **GSLIB geostatistical software library and user's guide**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 1997. 369 p.

GOOVAERTS, P. **Geostatistics for natural resources evaluation**. New York: Oxford University Press, 1997. 483 p.

ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M. **Applied geostatistics**. Nova York: Oxford University Press, 1989. 561 p.

JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, C. J. **Mining geostatistics**. London: Academic Press, 1978.

KRIGE, D. G. **A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand**. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, v. 52, n. 6, p. 119–139, 1951. Disponível em: https://hdl.handle.net/10520/AJA0038223X_4792. Acesso em: 25 mar. 2026.

MATHERON, G. **The theory of regionalized variables and its applications**. Fontainebleau: École des Mines de Paris, 1971. 211 p. Disponível em: https://cg.minesparis.psl.eu/bibliotheque/public/MATHERON_Ouvrage_00167.pdf. Acesso em: 03 abr. 2026.

MATHERON, G. **Principles of geostatistics**. *Economic Geology*, v. 58, p. 1246–1266, 1963. Disponível em: https://cg.minesparis.psl.eu/bibliotheque/public/MATHERON_Publication_02396.pdf. Acesso em: 14 mar. 2026.

OLEA, R. A. **Geostatistics for engineers and earth scientists**. New York: Springer Science+Business Media, 1999. 303 p.

OLIVER, M. A.; WEBSTER, R. **Basic steps in geostatistics: the variogram and kriging**. Springer, 2015. 100 p.

OLIVER, M. A.; WEBSTER, R. **Kriging: a method of interpolation for geographical information systems**. *International Journal of Geographical Information Systems*, v. 4, n. 3, p. 313–332, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/02693799008941549>. Acesso em: 11 fev. 2026.

RIVOIRARD, J. **Le comportement des poids de krigeage**, Dr-Ing thesis: Centre de Gdostatistique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, France, 1984. 79 p.

RIVOIRARD, J. **Concepts and methods of geostatistics**. In: BILODEAU, M.; MEYER, F.; SCHMITT, M. (org.). *Space, structure and randomness*. New York: Springer, 2005. p. 17–37. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/0-387-29115-6_2. Acesso em: 25 mar. 2026.

SAMSON, M.; DEUTSCH, C. V. **The sill of the variogram**. In: DEUTSCH, J. L. (ed.). *Geostatistics lessons*. 2021. Disponível em: <https://geostatisticslessons.com/pdfs/sillofvariogram.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2026.

SINCLAIR, A. J.; BLACKWELL, G. H. **Applied mineral inventory estimation**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 381 p.

SIRONVALLE, M. A. A. **Estimación de recursos mineros**. Paris: École des Mines de Paris, 2007. Disponível em: https://cg.minesparis.psl.eu/bibliotheque/public/ALFARO_Cours_00606.pdf. Acesso em: 15 mar. 2026.

SOUZA, R. A. de. **Análise da influência da incerteza geológica no planejamento de lavra**. 2016. 95 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mineral) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/7265>. Acesso em: 15 abr. 2026.

WACKERNAGEL, H. **Multivariate geostatistics: an introduction with applications**. 3. ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. 387 p.

WALVOORT, D. J. J. **E{Z}-kriging: exploring the world of ordinary kriging**. Wageningen: Wageningen University & Research, 2026. Disponível em: <https://doi.org/10.4121/8f7c64de-8fed-4d27-ba91-f0cc1509529d>. Acesso em: 30 abr. 2026.

YAMAMOTO, J. K.; LANDIM, P. M. B. **Geoestatística: conceitos e aplicações**. São Paulo: Oficina de Textos, 2013. 215 p.

APÊNDICE A – EXEMPLO - KRIGAGEM ORDINÁRIA

Apresenta-se, neste apêndice, a resolução detalhada de um exemplo de estimativa pontual por krigagem ordinária. O exemplo abrange a totalidade das etapas do processo de cálculo, desde a determinação das distâncias entre os pontos amostrais até a obtenção da estimativa final e da variância do erro, e tem por finalidade servir de referência prática ao leitor interessado em reproduzir ou compreender em detalhes o procedimento adotado.

E1 – Dados de entrada

Para a estimativa, utilizou-se o conjunto amostral descrito na Seção [4.5.1](#) (Tabela 2), composto por 4 amostras. O modelo variográfico considerado é o mesmo apresentado na Seção [4.5.1](#), dado por uma estrutura exponencial, de alcance prático (a) igual a 750 e patamar (C) igual a 2000. A estimativa foi realizada no ponto de coordenadas $(X_0, Y_0) = (180; 120)$.

E2 – Cálculo das distâncias

As distâncias entre amostras ($u_\alpha ; u_\beta$) e entre amostras e ponto a estimar ($u_\alpha ; u_0$) pode ser calculada pela [\(equação \(56\)\)](#).

A título de exemplo, a distância entre Amostra 1 (u_1) e Amostra 2 (u_2) pode ser calculada como:

$$h_{i,j} = h_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(10 - 30)^2 + (20 - 280)^2} = 260,768 \text{ m}$$

A [matriz \(57\)](#), das distâncias entre os pares de pontos amostrais, pode ser visualizada na Tabela A1.

Tabela A1 – Distâncias entre os pares de pontos amostrais.

<i>Distâncias entre amostras</i>				
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	0	260,768	264,008	364,005
<i>2</i>	260,768	0	266,271	366,742
<i>3</i>	264,008	266,271	0	110,454
<i>4</i>	364,005	366,742	110,454	0

Fonte: autor (2026).

Como exemplo, a distância entre Amostra 1 (u_1) e ponto a estimar pode ser obtida por:

$$h_{i,j} = h_{1,u_0} = \sqrt{(x_1 - x_{u_0})^2 + (y_1 - y_{u_0})^2} = \sqrt{(10 - 180)^2 + (20 - 120)^2} = 197,231 \text{ m}$$

A [matriz \(58\)](#), das distâncias entre amostras e ponto a estimar pode ser observada na Tabela A2.

Tabela A2 – Distâncias entre os pares de pontos amostrais.

<i>Distâncias amostras - u_0</i>	
	<i>u_0</i>
1	197,231
2	219,317
3	70,711
4	180,000

Fonte: autor (2026).

E3 – Cálculo dos variogramas

Os valores dos variogramas entre amostras e entre amostras e ponto a estimar podem ser obtidos pela [equação \(10\)](#).

Como exemplo, podemos calcular o valor de $\gamma(h)$ entre a amostra 1 e 2. Sendo $a = 750$, $C = 2000$ e $h = 260,768$, $\gamma(260,768)$ será:

$$\gamma(h) = \gamma(260,768) = C \left[1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right] = 2000 \left[1 - e^{-\frac{3 \cdot 260,768}{750}} \right] = 1295,259$$

A [matriz \(71\)](#), dos variogramas entre os pares de pontos amostras pode ser vista na Tabela A3.

Tabela A3 – Variogramas entre os pares de pontos amostrais.

<i>Variogramas amostras - amostras</i>				
	1	2	3	4
1	0	1295,259	1304,332	1533,676
2	1295,259	0	1310,601	1538,753
3	1304,332	1310,601	0	714,262
4	1533,676	1538,753	714,262	0

Fonte: autor (2026).

O cálculo de $\gamma(h)$ entre os pares de pontos amostrais e o ponto a estimar pode ser exemplificado utilizando a Amostra 1 e o ponto a estimar:

$$\gamma(h) = \gamma(197.231) = C \left[1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right] = 2000 \left[1 - e^{-\frac{3 \cdot 197.231}{750}} \right] =$$

A [matriz \(72\)](#), dos variogramas entre os pontos amostrais e o ponto a estimar pode ser vista na Tabela A4.

Tabela A4 – Variogramas entre os pares de pontos amostrais.

<i>Variogramas amostras - u_0</i>	
	<i>u_0</i>
1	1091,333
2	1168,165
3	492,723
4	1026,495

Fonte: autor (2026).

E4 – Montagem do sistema de krigagem e cálculo final

A montagem da matriz K e da matriz C para o sistema final da krigagem ordinária poderia ser feita utilizando exclusivamente os valores dos variogramas obtidos na Tabela A3 e A4. Entretanto, para manter a coerência com o mostrado ao longo do trabalho, a montagem destas matrizes será realizada utilizando as covariâncias, obtidas por meio da [relação 6](#).

A matriz K [\(84\)](#) pode ser observada na Tabela A5.

Tabela A5 – Matriz K utilizado na montagem do sistema da krigagem ordinária.

<i>Matriz K</i>					
	1	2	3	4	
1	2000,000	704,741	695,668	466,324	1
2	704,741	2000,000	689,399	461,247	1
3	695,668	689,399	2000,000	1285,738	1
4	466,324	461,247	1285,738	2000,000	1
	1	1	1	1	0

Fonte: o autor (2026).

A matriz C [\(85\)](#) pode ser visualizada na Tabela A6.

Tabela A6 – Matriz C utilizado na montagem do sistema da krigagem ordinária.

<i>Matriz C</i>	
	u_0
1	908,667
2	831,835
3	1507,277
4	973,505
	1

Fonte: autor (2026)

O sistema final da krigagem ordinária (36) será:

$$\begin{bmatrix} 2000 & 704,741 & 695,668 & 466,324 & 1 \\ 704,741 & 2000 & 689,399 & 461,247 & 1 \\ 695,668 & 689,399 & 2000 & 1285,738 & 1 \\ 466,324 & 461,247 & 1285,738 & 2000 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \lambda_2^{KO} \\ \lambda_3^{KO} \\ \lambda_4^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 908,667 \\ 831,835 \\ 1507,277 \\ 973,505 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos os pesos λ_{α}^{KO} , basta resolver o sistema por meio de (37), ou seja multiplicar a inversa da matriz K pela matriz C:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \lambda_2^{KO} \\ \lambda_3^{KO} \\ \lambda_4^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & 704,741 & 695,668 & 466,324 & 1 \\ 704,741 & 2000 & 689,399 & 461,247 & 1 \\ 695,668 & 689,399 & 2000 & 1285,738 & 1 \\ 466,324 & 461,247 & 1285,738 & 2000 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 908,667 \\ 831,835 \\ 1507,277 \\ 973,505 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \lambda_2^{KO} \\ \lambda_3^{KO} \\ \lambda_4^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1971 \\ 0.1410 \\ 0.6505 \\ 0.0115 \\ -42.7138 \end{bmatrix}$$

O valor estimado no ponto (180; 120) pode ser calculado pela equação (31):

$$Z_{KO}^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} Z(u_{\alpha}) = 0,1971 \times 40 + 0,1410 \times 130 + 0,6505 \times 90 + 0,0115 \times 160 \cong 86,6$$

A variância do erro pode ser obtida resolvendo o sistema dado em (39):

$$2000 - [908,667 \quad 831,835 \quad 1507,277 \quad 973,505 \quad 1] \begin{bmatrix} 0,1971 \\ 0,1410 \\ 0,6505 \\ 0,0115 \\ -42,7138 \end{bmatrix} = 754,753$$

Para demais exemplos, pode ser consultado exemplos da literatura como Olea (1999, p.18) para krigagem simples e Yamamoto e Landim (2013, p.69) para krigagem ordinária (pontual e em bloco) e krigagem da média.

APÊNDICE B – EXEMPLO - KRIGAGEM ORDINÁRIA COM ANISOTROPIA

Complementarmente ao Apêndice A, este apêndice apresenta a resolução detalhada de uma estimativa pontual por krigagem ordinária adotando-se, no modelo variográfico, uma estrutura com anisotropia geométrica. O exemplo tem por finalidade ilustrar o tratamento da anisotropia no procedimento de cálculo implementado no KrigMine2D, em particular na etapa de correção das distâncias utilizada na avaliação dos variogramas.

E1 – Dados de entrada

Considerou-se o mesmo conjunto amostral utilizado no Apêndice A, com o ponto a estimar mantido na localização (180; 120). O modelo variográfico adotado é do tipo exponencial, com alcance de 750 m na direção X e 200 m na direção Y (tomada como alcance base), e patamar igual a 2000.

E2 – Cálculo das distâncias corrigidas

Primeiro, calculamos o fator de anisotropia (λ), pela [equação \(64\)](#):

$$\lambda = \frac{a_{menor}}{a_{maior}} = \frac{200}{750} = 0,267$$

Em seguida, calculamos as distâncias corrigidas, por meio da [equação \(66\)](#), para obtermos a matriz de distâncias corrigidas [\(67\)](#). Como exemplo, vamos calcular a distância corrigida entre a Amostra 1 e Amostra 2.

Como a direção Y, de menor continuidade (menor alcance), foi escolhida como base, na equação (66) o fator λ multiplica a componente do vetor “h” alinhada com a direção de maior continuidade, ou seja, a direção X:

$$h'' = \sqrt{\lambda^2 h_x^2 + h_y^2} = \sqrt{(0,267 \times (10 - 30))^2 + (20 - 280)^2} = 260,055 \text{ m}$$

A matriz de distâncias corrigidas entre amostras pode ser visualizada na Tabela B1.

Tabela B1 – Distâncias corrigidas entre os pares de pontos amostrais.

<i>Distancias corrigidas amostras - amostras</i>				
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	0	260,055	127,264	136,789
<i>2</i>	260,055	0	161,065	182,6034
<i>3</i>	127,264	161,065	0	30,991
<i>4</i>	136,789	182,603	30,991	0

Fonte: autor (2026).

Em seguida, obtemos as distâncias corrigidas entre amostras e o ponto a estimar. Como exemplo, a distância entre Amostra 1 (u_1) e ponto a estimar pode ser obtida por:

$$h'' = \sqrt{\lambda^2 h_x^2 + h_y^2} = \sqrt{(0,267 \times (10 - 180))^2 + (20 - 120)^2} = 109,796 \text{ m}$$

A matriz completa de distâncias corrigidas entre amostras e ponto a estimar pode ser vista na Tabela B2.

Tabela B2 – Distâncias entre os pares de pontos amostrais.

<i>Distâncias corrigidas amostras - u_0</i>	
	<i>u_0</i>
<i>1</i>	109,796
<i>2</i>	164,924
<i>3</i>	21,177
<i>4</i>	48,000

Fonte: autor (2026).

E3 – Cálculo dos variogramas

Os valores dos variogramas entre amostras e entre amostras e ponto a estimar podem ser obtidos pela equação (10).

Como exemplo, podemos calcular o valor de $\gamma(h)$ entre a amostra 1 e 2. O alcance utilizado deverá ser aquele tomado como base no cálculo do fator de anisotropia. Neste caso, como a direção base adotada foi a de menor alcance, a amplitude utilizada será $a = 200$. O patamar continua o mesmo, $C = 2000$, e “h” será a distância corrigida entre 1 e 2, ou seja, 260,055 m. $\gamma(260,055)$ será:

$$\gamma(h) = \gamma(260,055) = C \left[1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right] = 2000 \left[1 - e^{-\frac{3 \cdot 260,055}{200}} \right] = 1959,549$$

A [matriz \(71\)](#), dos variogramas entre os pares de pontos amostras pode ser vista na Tabela B3.

Tabela B3 – Variogramas entre os pares de pontos amostrais.

<i>Variogramas amostras - amostras</i>				
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	0	1959,549	1703,529	1743,001
<i>2</i>	1959,549	0	1821,438	1870,738
<i>3</i>	1703,529	1821,438	0	743,561
<i>4</i>	1743,001	1870,738	743,561	0

Fonte: autor (2026).

O cálculo de $\gamma(h)$ entre os pares de pontos amostrais e o ponto a estimar pode ser exemplificado utilizando a Amostra 1 e o ponto a estimar:

$$\gamma(h) = \gamma(109,796) = C \left[1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right] = 2000 \left[1 - e^{-\frac{3 \cdot 109,796}{200}} \right] = 1614,722$$

A [matriz \(72\)](#), dos variogramas entre os pontos amostrais e o ponto a estimar pode ser vista na Tabela B4.

Tabela B4 – Variogramas entre os pares de pontos amostrais.

<i>Variogramas amostras - u₀</i>	
	<i>u₀</i>
<i>1</i>	1614,722
<i>2</i>	1831,483
<i>3</i>	544,282
<i>4</i>	1026,496

Fonte: autor (2026).

E4 – Montagem do sistema de krigagem e cálculo final

Assim como no exemplo anterior, a montagem do sistema será dada em termos de covariância, apesar de que poderia ser dada também exclusivamente em termos de variograma. A matriz K [\(84\)](#) pode ser observada na Tabela B5.

Tabela B5 – Matriz K utilizado na montagem do sistema da krigagem ordinária.

<i>Matriz K</i>					
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	
<i>1</i>	2000.000	40,451	296,471	256,999	1
<i>2</i>	40,451	2000	178,562	129,263	1
<i>3</i>	296,471	178,562	2000	1256,439	1
<i>4</i>	256,999	129,263	1256,439	2000	1
	1	1	1	1	0

Fonte: o autor (2026).

A matriz C (85) pode ser visualizada na Tabela B6.

Tabela B6 – Matriz C utilizado na montagem do sistema da krigagem ordinária.

<i>Matriz C</i>	
	u_0
<i>1</i>	385,278
<i>2</i>	168,517
<i>3</i>	1455,719
<i>4</i>	973,505
	1

Fonte: autor (2026)

O sistema final da krigagem ordinária (36) será:

$$\begin{bmatrix} 2000 & 40,451 & 296,471 & 256,999 & 1 \\ 40,451 & 2000 & 178,562 & 129,263 & 1 \\ 296,471 & 178,562 & 2000 & 1256,439 & 1 \\ 256,999 & 129,263 & 1256,439 & 2000 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \lambda_2^{KO} \\ \lambda_3^{KO} \\ \lambda_4^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 385,278 \\ 168,517 \\ 1455,719 \\ 973,505 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos os pesos λ_{α}^{KO} , basta resolver o sistema por meio de (37), ou seja, multiplicar a inversa da matriz K pela matriz C:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \lambda_2^{KO} \\ \lambda_3^{KO} \\ \lambda_4^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & 40,451 & 296,471 & 256,999 & 1 \\ 40,451 & 2000 & 178,562 & 129,263 & 1 \\ 296,471 & 178,562 & 2000 & 1256,439 & 1 \\ 256,999 & 129,263 & 1256,439 & 2000 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 385,278 \\ 168,517 \\ 1455,719 \\ 973,505 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \lambda_2^{KO} \\ \lambda_3^{KO} \\ \lambda_4^{KO} \\ -\mu_{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1361 \\ 0.0735 \\ 0.7134 \\ 0.0770 \\ -121,2778 \end{bmatrix}$$

O valor estimado no ponto (180; 120) pode ser calculado pela [equação \(31\)](#):

$$Z_{KO}^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} Z(u_{\alpha}) = 0,1361 \times 40 + 0,0735 \times 130 + 0,7134 \times 90 + 0,0770 \times 160 \cong 91,52$$

A variância do erro pode ser obtida resolvendo o sistema dado em [\(39\)](#):

$$2000 - [385,278 \quad 168,517 \quad 1455,719 \quad 973,505 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.1361 \\ 0.0735 \\ 0.7134 \\ 0.0770 \\ -121,2778 \end{bmatrix} = 942,99$$