Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Departamento de Matemática

Fellipe Alves de Morais

Reflexões sobre a verdade das afirmações matemáticas

Ouro Preto

2025

Fellipe Alves de Morais

Reflexões sobre a verdade das afirmações matemáticas

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Sávio Ribas.

Ouro Preto

2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Fellipe Alves de Morais

Reflexões sobre a verdade das afirmações matemáticas

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em 28 de agosto de 2025

Membros da banca

Dr. Sávio Ribas - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Frederico da Silva Reis - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Josué Geraldo Damasceno - Universidade Federal de Ouro Preto

Sávio Ribas, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 02/06/2026.

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

"Alegações extraordinárias exigem evidências extraordinárias."

Carl Sagan

"Uma marca infalível de amor à verdade é não considerar nenhuma proposição com uma convicção maior do que a autorizada pelas provas em que se fundamenta."

John Locke

Resumo

Este trabalho procura explicar, de forma acessível, o que são as demonstrações matemáticas e busca compreender o que proporciona o alto grau de confiabilidade nas afirmações que são justificadas por elas. Para isso, mostra como elas se apoiam na lógica para garantir que as conclusões realmente decorram das premissas. O texto está organizado em três partes: noções sobre lógica verofuncional, argumentos e validade e, por fim, demonstrações matemáticas.

Palavras-chave: demonstração matemática. lógica clássica. validade. verdade matemática. prova. argumentação. teorema. demonstração direta.

Abstract

This work seeks to explain, in an accessible way, what mathematical proofs are and seeks to understand what generates the high degree of reliability in the statements they justify. To this end, it shows how they rely on logic to ensure that conclusions truly follow from the premises. The text is organized into three parts: notions of truth-functional logic, notions of argumentation, and, finally, mathematical proofs.

Keywords: mathematical proof. classical logic. validity. mathematical truth. proof. argumentation. theorem. direct proof.

Sumário

Introdução

O termo *teorema* foi introduzido por Euclides, em *Os Elementos*, para significar "afirmação que pode ser provada". Em grego, originalmente significava "espetáculo" ou "festa" [1, p. 38].

A demonstração (ou prova) de um teorema é a justificativa do porquê a afirmação em questão é tida como verdadeira pela comunidade matemática.

Os teoremas matemáticos gozam de um grande prestígio no mundo do conhecimento devido à sua incrível capacidade de resistir às tentativas de falsificação ao longo do tempo. Essa capacidade reside na força de sua justificativa e se deve, sobretudo, à maneira como a demonstração matemática é estruturada do ponto de vista lógico.

Mas o que há de especial nas demonstrações matemáticas que geram esse elevado grau de confiabilidade nas afirmações por elas justificadas?

Este trabalho tem como objetivo investigar a estrutura das demonstrações matemáticas do ponto de vista lógico e esclarecer o que de fato é uma demonstração matemática e o que sustenta a confiabilidade das afirmações provadas à maneira matemática.

Para isso, o texto é dividido em três partes: noções de lógica verofuncional, noções de argumentação e demonstrações matemáticas. Essa abordagem se faz necessária porque as demonstrações matemáticas se valem de tipos especiais de argumentos, que, por sua vez, são formados de proposições, e cuja validade é consequência imediata das tabelas-verdade.

Capítulo 1

Noções sobre lógica verofuncional

1.1 Proposições

Em Matemática, assim como em outras áreas científicas, estamos interessados em saber se determinadas afirmações são verdadeiras ou não. Na Lógica Clássica, essas afirmações são chamadas de *proposições*, *sentenças* ou *asserções*. Neste texto usaremos a palavra "proposições" para nos referirmos a essas afirmações.

NOTA: A palavra "verdade" neste trabalho não se refere a uma verdade absoluta e universal, mas sim a uma verdade à luz da teoria vigente, uma verdade dentro do paradigma. Como Stuart Mill apontou brilhantemente em seu pequeno ensaio *Sobre a Liberdade* [9]:

> "As crenças a favor das quais nós temos mais garantias não têm nenhuma salvaguarda em que se apoiar, a não ser o convite permanente ao mundo inteiro para provar que são infundadas."

Uma proposição é uma frase declarativa que expressa um pensamento de sentido completo cujo conteúdo possui valor lógico verdadeiro ou falso. Em outras palavras, podemos dizer que é um conjunto de palavras ou símbolos que expressam um pensamento de sentido completo que pode ser tomado como verdadeiro ou falso. Assim, as proposições são expressões a respeito das quais tem sentido dizer que são verdadeiras ou falsas. A grosso modo, podemos dizer que uma proposição é uma frase que possui valor de verdade, ou seja, que pode ser verdadeira ou falsa.

Exemplo 1.1. São exemplos de proposições:

1. A lua é feita de queijo.

2. A neve é branca.
3. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.
4. $\operatorname{sen}(90°) = -1$.
5. $30 + 10 = 42$.
6. $\sqrt{2}$ não é um número racional.
7. Existem extraterrestres.

As proposições 2., 3. e 6. são verdadeiras, enquanto as proposições 1., 4. e 5. são falsas.

Apesar de muitas pessoas acreditarem que existem extraterrestres e de outras pessoas acreditarem que eles não existem, a verdade é que nós, seres humanos, não sabemos se de fato eles existem ou não, ou seja, não sabemos se a afirmação 7. é verdadeira ou falsa.

Os seres humanos não sabem qual é o valor de verdade de muitas frases, mas isso não significa que essas frases não têm valor de verdade. Não é preciso saber qual é o valor de verdade de uma frase para saber se ela é uma proposição, basta saber se ela tem valor de verdade. A afirmação 7. tem valor de verdade, nós só não sabemos qual é. Os valores de verdade independem das convicções humanas, porque os seres humanos não são oniscientes.

Cabe ainda observar que uma proposição é necessariamente dada por uma sentença afirmativa, pois não faz sentido questionar se sentenças exclamativas ou interrogativas são verdadeiras ou falsas.

Exemplo 1.2. Não são proposições as sentenças a seguir:

1. Não entre em pânico!
2. Quantas horas são agora?
3. Você vai à festa?
4. Que dia lindo!

1.2 Valor lógico

Dizemos que o valor lógico de uma proposição é a *Verdade* (e representamos por V) se a proposição for verdadeira e que o valor lógico de uma proposição a é *Falsidade* (e representamos por F) se a proposição for falsa.

Desse modo, a valor lógico da proposição 1. é F e o valor lógico da proposição 2. é V, por exemplo.

A lógica clássica se baseia em duas leis do pensamento que funcionam como princípios à partir dos quais a teoria é desenvolvida. São eles:

Príncípio da não-contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Príncípio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa. Ocorre sempre uma dessas possibilidades e nunca uma terceira.

1.3 Proposições simples e compostas

As proposições podem ser classificadas em duas categorias: *simples* e *compostas*. As **proposições simples** são aquelas que não contém outra proposição como parte integrantes de si mesma. Elas são geralmente representadas por letras latinas minúsculas (p, q, r, s, ...).

Exemplo 1.3. São exemplos de proposições simples:

p : Sócrates nasceu em Atenas.

q : O número 23 é múltiplo de 3.

r : $\text{sen}(180°) = 0$.

As **proposições compostas** são aquelas formadas pela combinação de duas ou mais proposições. Elas são geralmente representadas por letras latinas maiúsculas (P, Q, R, S, ...).

Exemplo 1.4. São exemplos de proposições compostas:

P : O número 7 é primo **e** a Lua é quadrada.

Q : Roma é a capital da França **ou** $5 > 2$.

R : **Se** 4 é um número par, **então** Marte é um planeta.

S : O Sol é verde **se e somente se** o Brasil é um país.

Cabe observar também que as proposições que formam uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas.

1.4 Operadores lógicos

Note que cada uma das proposições compostas citadas no Exemplo 1.4 foram formadas à partir da conexão de duas proposições simples. As palavras que foram utilizadas para conectar essas duas proposições simples "e", "ou", "se ..., então ...", "... se e somente se..." e formar a proposição composta são chamadas de *Operadores Lógicos* ou *Conectivos*.

Podemos dizer então que os Operadores Lógicos são palavras, ou conjunto de palavras, que são utilizadas para formar novas proposições a partir de outras. Os operadores usuais em lógica verofuncional e seus respectivos nomes e símbolos são apresentados na tabela abaixo.

Operador	**Forma lógica**	**Notação**
Negação	Não-p	$\sim p$
Conjunção	p e q	$p \wedge q$
Disjunção	p ou q	$p \vee q$
Condicional	Se p, então q	$p \to q$
Bicondicional	p se, e somente se, q	$p \leftrightarrow q$

O único operador que se aplica a uma única proposição é o operador de **negação** e, por isso, ele é chamado de operador unitário. Os outros operadores, que se aplicam a duas proposições, são chamados de binários.

Esses cinco operadores mencionados acima não se limitam a gerar proposições novas à partir de outras proposições. Além de criar proposições a partir de proposições, o valor lógico das proposições formadas com qualquer um desses operadores é inteiramente determinado pelo valor lógico das proposições constituintes. Estes operadores são funções de verdade, ou seja, são funções nas quais os valores de entrada e de saída são valores de verdade, por isso o nome *lógica verofuncional*.

A seguir serão definidas cada uma destas cinco operações e explicitadas como o valor lógico das proposições componentes determinam o valor lógico das proposições formadas com estes operadores.

1.4.1 Negação

A *negação* de uma proposição p é uma proposição (denotada por $\sim p$) cujo valor lógico é a Verdade (V) quando p é falsa e a Falsidade (F) quando p é verdadeira.

Exemplo 1.5. A negação da proposição:

p: Hoje é domingo.

é a proposição:

$\sim p$: Hoje não é domingo.

Observe que a proposição "Hoje não é domingo" é verdadeira se a proposição "Hoje é domingo" for falsa, e falsa se a proposição "Hoje é domingo" for verdadeira.

Então, se uma proposição p for verdadeira, a sua negação ($\sim p$) será falsa, e se a proposição p for falsa, a sua negação será verdadeira. A tabela-verdade abaixo exprime esse fato.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Observe que o valor lógico da proposição $\sim p$ é inteiramente determinado pelo valor lógico da proposição p, ou seja, o valor lógico de $\sim p$ depende do valor lógico de p. O operador Negação inverte o valor lógico da proposição.

Na linguagem cotidiana a negação geralmente é feita inserindo a palavra "não" antes do verbo da proposição que queremos negar.

Exemplo 1.6. A negação da proposição:

$$p : \text{Júpiter é um planeta.}$$

é

$$\sim p : \text{Júpiter não é um planeta.}$$

Uma outra maneira de efetuar a negação de uma proposição é inserir expressões como "é falso que" e "não é verdade que" antes da proposição.

Exemplo 1.7. A negação da proposição:

$$q : \text{Isaac Newton era inglês.}$$

é

$$\sim q : \text{É falso que Isaac Newton era inglês.}$$

ou

$$\sim q : \text{Não é verdade que Isaac Newton era inglês.}$$

1.4.2 Conjunção

A *conjunção* de duas proposições p e q é a proposição composta "p e q" (representada por $p \wedge q$), cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos outros casos.

Portando, o valor lógico da conjunção de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo 1.8. O número 7 é primo **e** a Lua é quadrada.
Observe que o valor lógico desta conjunção é F, pois a Lua não é quadrada.

É bastante natural aceitar a tabela-verdade da conjunção. Veja:

A proposição composta "Hoje é sexta-feira e é um dia ímpar" é verdadeira somente quando ambas as partes "Hoje é sexta-feira" e "Hoje é um dia é um dia ímpar" são verdadeiras. Quando uma delas (ou as duas) são falsas, a proposição conjunção é obviamente falsa.

1.4.3 Disjunção

Chamamos de *disjunção* de duas proposições p e q a proposição composta "p ou q" (representada por $p \vee q$), cujo valor lógico é a verdade (V) quando pelo menos uma das proposições simples p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas.

Portanto, o valor lógico da conjunção de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 1.9. Roma é a capital da França **ou** $1 + 2 = 5$.
Observe que o valor lógico desta disjunção é F, pois as duas proposições componentes são falsas.

1.4.4 Condicional

As proposições condicionais são de particular interesse porque geralmente elas são utilizadas para enunciar os teoremas matemáticos. Os teoremas são proposições condicionais reconhecidas como verdadeiras pela comunidade matemática. A demonstração de um teorema nada mais é, como veremos no Capítulo 3, do que a justificativa do porquê essa proposição condicional é verdadeira.

Chamamos de *proposição condicional* uma proposição composta "Se p, então q" (representada por $p \to q$), na qual o valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade (V) nos demais casos.

Portanto, o valor lógico da condicional de duas proposições é definido pela seguinte tabela verdade:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe que a condicional é falsa somente em um único caso: quando p é verdadeira e q é falsa.

Na proposição condicional "$p \to q$", p é chamada de *antecedente* e q é chamada de *consequente*.

Exemplo 1.10. **Se** 7 é par, **então** Marte é um planeta.
Observe que o valor lógico desta condicional é V, pois o antecedente é falso e o consequente é verdadeiro.

É bastante natural aceitar as duas primeiras linhas da tabela verdade da condicional, já a terceira e quarta linhas costumam gerar um certo desconforto. Analisemos então um exemplo de como os valores lógicos das proposições p e q determinam o valor lógico da proposição condicional "$p \to q$", linha por linha.

Exemplo 1.11. Considere a proposição condicional:

Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney.

Para esta análise, observe que a proposição acima será falsa apenas no caso de quem a proferir estiver mentindo.

1ª Linha: Eu recebi um aumento (p é verdadeira) e viajei para a Disney (q é verdadeira). Cumpri o que prometi, portanto disse a verdade. Assim, a proposição "Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney" é verdadeira ($p \to q$ é verdadeira).

2ª Linha: Eu recebi um aumento (p é verdadeira), mas não viajei para a Disney (q é falsa), significa que eu menti, pois eu não cumpri o prometido. Sendo assim, a proposição "Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney" é falsa ($p \to q$ é falsa).

Examinemos agora, com bastante cuidado, o caso em que eu não recebi um aumento, ou seja, o caso em que p é falsa:

3ª Linha: Mesmo sem receber um aumento (p é falsa), se eu viajar para a Disney (q é verdadeira), não se pode falar que menti ao afirmar que "Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney". Observe que eu disse o que aconteceria se eu recebesse um aumento e não o que aconteceria se eu não recebesse um aumento. Assim, na situação em que eu não recebi um aumento (p é falsa), mas viajei para a Disney (q é verdadeira), eu não menti ao afirmar que "Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney", portanto $p \to q$ é verdadeira.

4ª Linha: Da mesma forma, caso eu não tenha recebido um aumento (p é falsa) e não tenha viajado para a Disney (q é falsa), ninguém pode falar que eu menti, pois eu não falei o que ocorreria se eu não recebesse um aumento. Dessa maneira, na situação em que eu não recebi um aumento (p é falsa) e não viajei para a Disney (q é falsa), eu não menti ao afirmar que "Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney", portanto $p \to q$ é verdadeira.

Observação 1.1. A condicional $p \to q$ não afirma que a proposição consequente q se deduz ou é consequência da proposição antecedente p. Assim, a título de exemplo, as proposicões condicionais:

"Se 4 é um número par, então Marte é um planeta."

"Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney."

não afirmam que o fato de Marte ser um planeta se deduz (ou é consequência) do fato de 4 ser um número par. O mesmo vale para a proposição "Se eu receber um aumento, então vou viajar para a Disney" e para todas as proposições condicionais. O que uma proposição condicional faz é somente expressar uma relação entre os valores lógicos do antecente e do consequente conforme descrito na tabela verdade.

As palavras "dedução" e "consequência" dizem respeito a argumentos, e não a proposições. Os argumentos, como veremos no Capítulo 2, são encadeamentos especiais de proposições.

1.4.5 Bicondicional

Chamamos de proposição *bicondicional* uma proposição composta "p se, e somente se, q" (representada por $p \to q$) cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q tem o mesmo valor lógico (p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas) e a falsidade (F) nos demais casos (quando p e q tem valores lógicos diferentes).

O valor lógico da bicondicional é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo 1.12. Atenas é uma cidade **se, e somente se,** $2 > 5$.
Observe que o valor lógico desta condicional é F, pois é verdadeiro que "Atenas é uma cidade" e falso que "$2 > 5$".

Note que a proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando as duas condicionais "$p \to q$" e "$q \to p$" são simultaneamente verdadeiras. Afirmar "p se, e somente se, q" é o mesmo que fazer as duas afirmações ao mesmo tempo: "Se p, então q" e "Se q, então p".

1.5 Tabelas-verdade de proposições compostas

Dadas várias proposições simples p, q, r, s..., podemos utilizar os operadores lógicos para construir proposições compostas, tais como:

- $p \wedge (p \to q) \to q$.
- $(p \vee q) \to (p \wedge q)$.
- $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$.

O valor lógico destas proposições compostas fica inteiramente determinado pelos valores lógicos das proposições componentes. Para saber como o valor lógico de uma proposição composta é dado em função dos valores lógicos das proposições componentes, pode-se construir uma tabela-verdade para esta proposição através do emprego das tabelas-verdade das operações definidas na seção anterior. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 1.13. Construção da tabela-verdade da proposição: $p \wedge (p \to q) \to q$:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Exemplo 1.14. Construção da tabela-verdade da proposição: $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Exemplo 1.15. Construção da tabela-verdade da proposição: $(p \vee q) \to (p \wedge q)$:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

1.6 Tautologia, contradição e contingência

Observe que todos os valores lógicos da última coluna da proposição do Exemplo 1.13 são V (verdade). Quando isso ocorre, dizemos que a proposição é uma **tautologia**.

Definição 1.6.1. Uma *tautologia* é uma proposição composta cujo o valor lógico é sempre a verdade (V) independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem [2, p. 45].

Observe também que todos os valores lógicos da última coluna da proposição do Exemplo 1.14 são F (falsidade). Quando isso ocorre, dizemos que a proposição é uma **contradição**.

Definição 1.6.2. Uma *contradição* é uma proposição composta cujo o valor lógico é sempre a falsidade (F) independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem [2, p. 45].

Quando figuram os valores lógicos V e F na útima coluna, como no Exemplo 1.15, dizemos que a proposição é uma **contingência**.

Definição 1.6.3. Uma *contingência* é uma proposição composta na qual ocorrem os valores lógicos V (verdade) e F (falsidade) na última coluna da sua tabela verdade [2, p. 49].

1.7 Implicação lógica

Definição 1.7.1. Uma proposição $P(p, q, r, ...)$ *implica* (ou implica logicamente) uma proposição $Q(p, q, r, ...)$ se $Q(p, q, r, ...)$ é verdadeira (V) todas as vezes que $P(p, q, r, ...)$ é verdadeira (V) [3, p. 49].

Em outras palavras, uma proposição $P(p, q, r, ...)$ implica uma proposição $Q(p, q, r, ...)$ quando nas respectivas tabelas verdade dessas duas proposições não aparece V na coluna de $P(p, q, r, ...)$ e F coluna de $Q(p, q, r, ...)$ em uma mesma linha.

A notação utilizada pra indicar que P implica Q é:

$$P \Rightarrow Q$$

Exemplo 1.16. Observe abaixo as tabelas verdade das proposições $p \wedge q$ e $p \vee q$:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

A partir da análise desta tabela podemos afirmar que $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$, pois a proposição "$p \wedge q$" só é verdadeira na primeira linha e, nesta linha, a proposição "$p \vee q$" também é verdadeira.

1.8 Tautologia e implicação lógica

Vimos os conceitos de tautologia e de implicação nas duas últimas seções. O resultado abaixo afirma que a toda **implicação** corresponde uma **condicional tautológica** e vice-versa.

Teorema 1.8.1. A proposição $P(p, q, r, ...)$ **implica** a proposição $Q(p, q, r, ...)$, isto é:

$$P \Rightarrow Q$$

se, e somente se, a condicional:

$$P \rightarrow Q$$

é **tautológica** [3, p. 52].

Observação 1.2. Embora os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ sejam parecidos, eles têm significados diferentes. O primeiro representa uma operação entre proposições dando origem a uma nova proposição, enquanto o segundo é de relação: estabelece que a condicional $P \rightarrow Q$ é tautológica.

Exemplo 1.17. Observe a tabela verdade da proposição "$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$":

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Como a condicional "$p \wedge (p \to q) \to q$" é tautológica, podemos então escrever que $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$.

NOTA: Convém ressaltar o fato de que toda **implicação** corresponde a uma **condicional tautológica**, pois veremos no Capítulo 2 que todo argumento tem uma proposição condicional associada a ele, e que, se o argumento for válido, a condicional associada é uma tautologia e, portanto, uma implicação. Evidenciando assim que uma implicação reflete a validade lógica.

Capítulo 2

Argumentos e validade

"A partir de uma gota d'água, um pensador lógico poderia inferir a possibilidade de um Atlântico ou de um Niágara, sem jamais ter visto um e outro ou ouvido falar deles."
Arthur Conan Doyle (Sherlock Holmes; A Ciência da Dedução)

2.1 Argumentos

Em matemática, frequentemente estamos interessados em descobrir se determinadas proposições são verdadeiras ou não. Mas como descobrir isto, já que nós seres humanos não temos um acesso místico ou especial ao que não conseguimos saber diretamente? Através de *argumentos*. Mas o que é um argumento, afinal de contas? Podemos começar dizendo que um argumento é um conjunto de *proposições*. Mas, apesar desta ser uma característica comum a todos os argumentos, ela não os descreve precisamente, pois nem todo conjunto de proposições é um argumento. A lista de proposições abaixo, por exemplo, claramente não é um argumento, é apenas um conjunto de proposições que não têm relação entre si.

A neve é branca.
$\sqrt{2}$ é um número racional.
A Lua tem luz própria.

A alegação de que um argumento é um conjunto de proposições, apesar de incompleta, já nos traz algumas informações. Quando fazemos tal alegação, estamos dizendo que os argumentos são formados somente por proposições, ou seja, elementos da linguagem tais como perguntas, ordens e promessas, por exemplo, não fazem parte da constituição dos argumentos.

Para que um conjunto de proposições seja um argumento é necessário que uma, e apenas uma, destas proposições (chamada *conclusão*) seja sustentada, apoiada ou justificada pelas outras proposições, que são chamadas de *premissas*. A conclusão é a proposição que queremos estabelecer, é aquela acerca da qual pretendemos determinar sua veracidade. Vale notar que todo argumento é formado por pelo menos duas proposições.

Vamos então à definição de argumento:

Definição 2.1.1. Um *argumento* é um conjunto de proposições, uma das quais se chama *conclusão* e cuja verdade procura-se estabelecer; as outras proposições chamam-se *premissas*, e estas proposições pretendem conduzir à conclusão (ou apoiá-la, ou persuadir-nos da sua verdade) [4, p. 8].

Os argumentos só provam uma proposição caso sejam bons. Um dos objetivos aos quais a lógica se propõe é ajudar a determinar se são bons ou não.

2.2 Bons argumentos e validade

Para que um argumento seja considerado bom, ele tem que satisfazer três condições [5, p. 24]:

1) As premissas devem ser plausíveis. Deve haver boas razões para acreditarmos que são verdadeiras.

2) A verdade das premissas deve conduzir à verdade da conclusão.

3) As premissas devem ser mais plausíveis do que a conclusão.

O objetivo de um argumento, o que queremos quando apresentamos um argumento, é mostrar que uma determinada proposição (a conclusão) é verdadeira. E não apenas isso, queremos mostrar que a conclusão é verdadeira porque as premissas são verdadeiras. Se as premissas não forem plausíveis, ou seja, se as premissas puderem já ser rejeitadas desde o princípio, então o nosso objetivo vai falhar. Podemos ilustrar isso com um exemplo.

Exemplo 2.1. Considere o seguinte argumento:

Todas as pessoas gostam de matemática.
Sophia é uma pessoa.
Portanto, Sophia gosta de matemática.

Observe que a primeira premissa do argumento é implausível. Não há boas razões para acreditar que todas as pessoas gostam de matemática. Isso já nos permite desde o princípio rejeitar o argumento.

Para que um argumento seja bom, é necessário (mas não suficiente) que todas as suas premissas sejam plausíveis, conforme a condição 1). Uma única premissa implausível já impede que ele seja um bom argumento.

Então, o primeiro cuidado que devemos ter ao avaliar um argumento é checar se as premissas são plausíveis. Se as premissas não forem plausíveis, o argumento é ruim. Se elas forem plausíveis, ainda teremos que verificar as outras duas condições para concluir que se trata de um bom argumento.

A condição 2) nos diz que a verdade das premissas deve conduzir a verdade da conclusão. Para um argumento ser bom, não basta que as premissas sejam todas verdadeiras. É muito fácil pensar em um exemplo de um argumento que não é bom, mas que possui premissa verdadeira. Veja:

$2 + 2 = 4$
Portanto, a Lua não é um planeta.

Note que tanto a premissa quanto a conclusão desse argumento são verdadeiras. Mas há um problema: a verdade da premissa não conduz à verdade da conclusão. Na verdade, essas duas proposições são totalmente independentes, elas não têm qualquer conexão entre si. É verdade que "$2 + 2 = 4$", mas daí não se segue que "A Lua não é um planeta". Nós podemos até acreditar que a Lua não é um planeta, mas obviamente não vamos fazer isso em virtude de aceitar que $2 + 2 = 4$.

Então, para um argumento ser bom, é preciso também que a verdade das premissas conduzam à verdade da conclusão. Mas o que exatamente significa a verdade das premissas conduzir a verdade da conclusão? Quando é que a verdade das premissas de um argumento conduzem a verdade da conclusão?

A verdade das premissas conduzem a verdade da conclusão quando o argumento é **válido**.

Definição 2.2.1. Um argumento é *válido* se for impossível que as premissas sejam todas verdadeiras e a conclusão falsa (ao mesmo tempo). Dizemos que um argumento é *inválido* se não for válido [4, p. 40].

Perceba então que um argumento válido garante que se as premissas forem todas verdadeiras, a conclusão também será verdadeira. Ele garante que é impossível que a conclusão seja falsa, caso todas as premissas sejam verdadeiras.

Observação 2.1. A validade não é uma questão de se, ou não, as premissas e a conclusão são verdadeiras. É uma questão do que aconteceria se as premissas fossem verdadeiras. A suposição de que as premissas são verdadeiras basta para concluir que a conclusão tem de ser verdadeira também? Se basta, o argumento é válido. Se não basta - se, por exemplo, carece ainda de outras hipóteses para garantir a conclusão -, o argumento é inválido. Perceba que é perfeitamente possível um argumento ser válido e ter premissa falsa. É justamente isso que ocorre no Exemplo 2.2.

Observação 2.2. O conceito de validade aplica-se exclusivamente aos argumentos e o conceito de verdade aplica-se exclusivamente às proposições. Só os argumentos são válidos ou inválidos, assim como só as proposições são verdadeiras ou falsas. Dizer que um argumento é verdadeiro ou que uma proposição é válida, é não compreender bem estes conceitos.

Exemplo 2.2. Considere o seguinte argumento:

> Todos os peixes voam.
> O salmão é um peixe.
> Portanto, o salmão voa.

Este é um argumento válido, pois a verdade das premissas **garante** a verdade da conclusão. É impossível que a conclusão seja falsa caso todas as premissas sejam verdadeiras. Para confirmar isso, basta pensar em termos de conjuntos:

"Todos os peixes voam": equivale a afirmar que o conjunto dos peixes está inteiramente contido no conjunto das coisas que voam.

"O salmão é um peixe": equivale a afirmar que o salmão está contido no conjunto dos peixes.

Desta forma, é impossível que o salmão não esteja dentro do conjunto dos que voam, pois o salmão está dentro do conjunto dos peixes, que, por sua vez, está inteiramente contido no conjunto dos que voam. Portanto a conclusão "O salmão voa." é obrigatoriamente verdadeira se considerarmos que as premissas são ambas verdadeiras.

Exemplo 2.3. Vamos verificar se o argumento abaixo é válido ou inválido.

> Se chove, a rua fica molhada.
> A rua está molhada.
> Portanto, choveu.

Observe que podemos imaginar um cenário no qual todas as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Considere, por exemplo, um cenário em que:

- É verdade que se chover, a rua fica molhada **(primeira premissa verdadeira)**
- É verdade que a rua está molhada **(segunda premissa verdadeira)**
- A rua está molhada porque alguém a lavou ou porque estourou um cano, etc...

Esse cenário possível é o que chamamos de *contraexemplo*. Quando apresentamos um contraexemplo, estamos exibindo uma situação na qual as premissas são todas verdadeiras e, ao mesmo tempo, mostrando que a conclusão do argumento pode ser falsa. Dessa forma fica claro que a conclusão não segue necessariamente das premissas, pois poderíamos ter outra conclusão mesmo considerando ambas premissas verdadeiras.

Note que o procedimento que utilizamos para avaliar a validade destes argumentos foi um tanto trabalhoso. Na próxima seção veremos um método prático para avaliar a validade de argumentos.

2.3 Forma lógica e tabelas de validade

Considere os seguintes argumentos:

(A)

> Se um polígono é um quadrado, então ele tem quatro lados.
> Este polígono não tem quatro lados.
> Logo, este polígono não é um quadrado.

(B)

Se Carl Sagan está em Atenas, então está na Grécia.
Mas ele não está na Grécia.
Portanto, não está em Atenas.

Observe que estes dois argumentos tratam de assuntos completamente diferentes. No entanto, note que apesar desta diferença, ambos têm a mesma estrutura:

Se p, então q.
Não q.
Logo, não p.

Simbolicamente,

$$p \to q$$
$$\sim q$$
$$\therefore \sim p$$

Dizemos que os dois argumentos têm a mesma forma lógica. A esta forma lógica específica, que é comum a ambos argumentos, chamamos *Modus Tollens* (do latim: modo que nega por negação).

Existem inúmeros argumentos que possuem esta mesma forma lógica, e todos eles são válidos. Uma forma de verificar este fato é utilizando uma sequência de tabelas-verdade que chamamos de **tabela de validade**.

Para construí-la, fazemos uma tabela-verdade para cada uma das premissas do argumento e outra para a conclusão:

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Esta tabela mostra como as premissas e a conclusão estão articuladas na forma *Modus Tollens*. Observando-a, vemos que os argumentos com esta forma lógica são válidos, pois, na ocasião na qual as premissas são todas verdadeiras (linha 4), a conclusão também é verdadeira.

Com esse exemplo fica fácil visualizar que a validade não depende do valor lógico das premissas e da conclusão (pois p e q representam proposições quaisquer), e sim da maneira como essas proposições estão articuladas no argumento.

O fato do *Modus Tollens* ser um argumento válido não prova que a conclusão dos argumentos **(A)** e **(B)** são verdadeiras, mas prova que se as premissas forem todas verdadeiras, a conclusão também será. Mas como as premissas dos argumentos **(A)** e **(B)** são de fato verdadeiras, fica então provado que a conclusão também é verdadeira.

Poderíamos ter verificado a validade deste argumento de outra maneira também:

$$p \to q\ ,\ \sim q\ \therefore\ \sim p$$

Lembre-se que um argumento é válido se for impossível que a conclusão seja falsa, caso as premissas sejam todas verdadeiras. Vamos supor então que as duas premissas são verdadeiras e tentar concluir que, neste caso, é impossível que a conclusão seja falsa. Supondo então que a premissa $\sim q$ é verdadeira, temos que a proposição q é falsa. Olhando agora para a outra premissa "$p \to q$", percebemos que a única possibilidade possível para p é a falsidade, pois se p fosse verdadeira, a premissa "$p \to q$" seria falsa, já que q é falsa. Como p é falsa, então a conclusão $\sim p$ é obrigatoriamente verdadeira. Portanto, o argumento é válido.

Outra maneira de verificar a validade deste argumento seria começar supondo que a conclusão é falsa e, à partir disso, concluir que é impossível que as premissas sejam ambas verdadeiras.

2.4 Derivações

Embora as tabelas de validade tenham grande importância para a verificação da validade e para a compreensão dos conceitos e validade e forma lógica, o processo de construção se torna cada vez mais trabalhoso à medida em que a quantidade de proposições simples e de premissas do argumento em análise aumentam. Mas a sua maior deficiência, no entanto, é não propiciar um meio para se chegar validamente a conclusão à partir das premissas, que é o que realmente importa na argumentação.

Estas limitações, no entanto, são sanadas por um eficiente método que permite chegar validamente a conclusão à partir das premissas, utilizando apenas argumentos elementares cuja validade já se sabe de antemão. Esse método é chamado de **Derivação**, **Prova Formal** ou **Demonstração**.

Os argumentos elementares, cujas validades já são conhecidas, são chamados de *Regras de Inferência* ou *Argumentos Válidos Fundamentais*. Apesar de existir várias regras de inferência, neste texto será apresentado apenas três:

- Modus Ponens: $p \to q\ , p\ \therefore\ q$
- Modus Tollens: $p \to q\ , \sim q\ \therefore\ \sim p$
- Silogismo Hipotético: $p \to q\ , q \to r\ \therefore\ p \to r$

O nome *Modus Ponens* vem do latim e significa "A maneira que afirma afirmando". Ele é um dos pilares das provas matemáticas, pois permite deduzir uma proposição q à partir de duas premissas: $p \to q$ e p. A *prova matemática direta* é a interpretação do argumento válido fundamental *Modus Ponens* [6, p. 1].

Vejamos agora um exemplo de derivação:

Exemplo 2.4. Vamos verificar a validade do argumento a seguir:

$$\begin{aligned} &p \to q \\ &q \to r \\ &\sim r \\ &\therefore\ \sim p \end{aligned}$$

Utilizando o processo de derivação:

Linha	Proposição	Justificativa
1.	$p \to q$	Premissa
2.	$q \to r$	Premissa
3.	$\sim r$	Premissa
4.	$p \to r$	1, 2, Silogismo Hipotético
5.	$\sim p$	3, 4, Modus Tollens

As derivações têm três colunas. A primeira coluna enumera os passos da derivação. É na segunda coluna que escrevemos o argumento propriamento dito: primeiro colocamos as premissas e depois as conclusões intermediárias, até que se chegue à conclusão do argumento, na última linha. A terceira coluna é o lugar no qual se informa quais são as premissas do argumento e qual é a justificativa de cada passo, ou seja, é nela que se informa qual regra de inferência foi utilizada em cada passo.

As três primeiras proposições deste argumento são premissas. A quarta proposição é uma conclusão intermediária obtida através de um argumento do tipo Silogismo Hipotético, que utilizou as proposições das linhas 1 e 2 como premissas. A quinta proposição é a conclusão do argumento, obtida através da aplicação do Modus Tollens que utilizou as proposições das linhas 3 e 4 como premissas.

Nós não sabemos se as premissas "$p \to q$" e "$q \to r$" são verdadeiras, mas sabemos que, se elas forem verdadeiras, a proposição "$p \to r$" também o será, pois foi obtida através do argumento válido Silogismo Hipotético. Da mesma maneira, não sabemos se a premissa "$\sim r$" e a proposição "$p \to r$" são verdadeiras (como vimos, "$p \to r$" será verdadeira se as premissas "$p \to q$" e "$q \to r$" também forem), mas sabemos que, se elas forem verdadeiras, a conclusão "$\sim p$" também será, pois foi obtida através do argumento válido Modus Tollens. Dessa maneira, conclui-se que o argumento é válido, pois caso as premissas sejam todas verdadeiras, a conclusão também o será. O processo de derivação garante a verdade da conclusão caso todas as premissas sejam verdadeiras [5, p. 28]; [7, p. 73]. "A argumentação válida preserva a verdade" [5, p. 28]. "Como se vê, a validade é o que permite descobrir o que antes não se sabia com base no que se sabia" [5, p. 15, 26, 53].

Capítulo 3

Demonstrações matemáticas

3.1 Demonstração direta

Vimos na Seção 1.1 que as proposições são afirmações que possuem valor de verdade e que para saber se determinada sentença é uma proposição, não é preciso conhecer seu valor de verdade, mas apenas se ela possui valor de verdade.

Na matemática, assim como em outras áreas do conhecimento científico, estamos interessados em descobrir se determinadas proposições são verdadeiras ou não. O meio que se utiliza para descobrir se uma proposição matemática é verdadeira é chamado de *demonstração matemática* ou *prova*.

Uma demonstração matemática é a justificativa, através de argumentos, do porquê a proposição avaliada é verdadeira. A proposição a qual se quer averiguar a veracidade geralmente é uma condicional, na qual o antecedente chamamos **hipótese** e o consequente, **tese**. Após demonstrada como verdadeira, a proposição passa ser chamada de **teorema**.

Para ilustrar, veremos agora um exemplo bem simples de uma demonstração tal como é encontrada nos textos de matemática.

Exemplo 3.1. Prove que:

Se um número é par, então o seu quadrado também é par.

Demonstração:

Seja n um número natural par, ou seja, $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Temos assim que:

$$n = 2k \quad \Rightarrow \quad n^2 = (2k)^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2^2k^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2 \cdot 2k^2 \quad \textbf{\textit{c.q.d}}$$

Observe que a igualdade $n^2 = 2 \cdot 2k^2$ nos diz que n^2 é par, pois fazendo $2k^2 = m$, temos que $n^2 = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), que é exatamente a definição de um número par.

Este é um exemplo bem simples, porém didático, de uma **demonstração matemática direta**. Note que partimos da hipótese (n é um número natural par) e, após uma sequência de passos, chegamos a tese (n^2 é um número par). Observe que a demonstração consistiu em reeescrever a hipótese em linguagem matemática ($n = 2k$ com $k \in \mathbb{N}$) e, partindo da hipótese, chegar à tese à partir de uma sequência de aplicações de propriedades algébricas já conhecidas.

A partir da segunda, cada uma das igualdades separadas pelo símbolo "$\Rightarrow$" foi obtida através da aplicação de uma propriedade algébrica à igualdade anterior.

Então, partimos da hipótese e, por meio de uma sequência de aplicações de propriedades algébricas, chegamos à tese. Mas o que isso tem a ver com a veracidade da proposição condicional **"Se um número é par, então o seu quadrado também é par"**?

A impressão que temos inicialmente é de que foi demonstrado apenas que é possível chegar à tese partindo-se da hipótese. Aparententemente esse procedimento não tem relação com a veracidade da proposição condicional **"Se um número é par, então o seu quadrado também é par"**. Mas só aparentemente. Acontece que, de fato, esse procedimento nos permite concluir que a proposição condicional em questão é verdadeira, mas, como vemos, essa visualização não é imediata. Por que partir da hipótese e chegar à tese por meio de uma sequência de aplicações de propriedades algébricas já conhecidas demonstra a veracidade da prosição condicional objeto da apreciação? A seguir tentaremos visualizar o que fundamenta essa conclusão do ponto de vista lógico.

3.2 Lógica da demonstração direta

Lembremos que o nosso objetivo é mostrar, através de argumentos, que uma dada proposição condicional "$p \to q$" é verdadeira.

Como vimos na Subseção 1.4.4, a tabela verdade da condicional nos diz que uma proposição condicional só é falsa no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso e é verdadeira nos demais casos.

Nós já sabemos de antemão que a proposição p é verdadeira, porque ela é a nossa hipótese, é de onde partimos. Nós a admitimos como verdadeira. Supomos a sua ocorrência [8, p. 77, 86, 87].

Como já sabemos que p é verdadeira, então basta mostrar que q também é verdadeira para concluirmos que a proposição condicional "$p \to q$" é verdadeira. Mas como mostramos que q é verdadeira? Por derivação.

Nesse momento entra cena quatro outros elementos: regras de inferência, axiomas, teoremas já demonstrados e definições. Todos esses elementos também são considerados como premissas no processo de demonstração.

Conforme já vimos, as Regras de Inferência são argumentos que nos garantem que, caso as premissas sejam todas verdadeiras, a conclusão também será obrigatoriamente verdadeira. Em um argumento válido é impossível que a conclusão seja falsa caso todas as premissas sejam verdadeiras.

O processo de demonstração direta consiste então em utilizar axiomas, teoremas já demonstrados, definições, conclusões intermediárias e a hipótese p como premissas nas regras de inferência até que se chegue na conclusão desejada q. A conclusão q será obrigatoriamente verdadeira, pois se trata da conclusão da aplicação de um argumento válido. Como a hipótese p e a proposição q são verdadeiras, então podemos afirmar, via tabela-verdade da condicional, que a proposição condicional "$p \to q$" também é verdadeira, conforme queríamos demonstrar.

A proposição "$p \to q$" agora passa a ser chamada de Teorema, pois foi demonstrada como verdadeira.

Vale a pena salientar também que, após demonstrada, a proposição condicional "$p \to q$" se torna a implicação "$p \Rightarrow q$", pois foi provado que q é verdadeira quando p é verdadeira, ou seja, a condicional "$p \to q$" é tautológica (ver Seção 1.8).

Como os axiomas e teoremas matemáticos são geralmente proposições condicionais e a hipótese p é uma proposição simples (ou uma conjunção de proposições simples), a regra de inferência mais utilizada nas demonstrações matemáticas é o Modus Ponens.

Para exemplificar, veja o esquema abaixo de uma demonstração matemática direta por derivação.

Exemplo 3.2. Proposição a ser demonstrada:

Se p, então q.

Linha	Proposição	Justificativa
1.	p	Premissa (hipótese)
2.	$p \to r$	Premissa (teorema)
3.	$r \to s$	Premissa (axioma)
4.	$s \to q$	Premissa (teorema)
5.	r	1, 2, Modus Ponens
6.	s	3, 5, Modus Ponens
7.	q	4, 6, Modus Ponens

As afirmações elencadas nas linhas $1, 2, 3$ e 4 são as premissas da demonstração. Trata-se de proposições já conhecidas como verdadeiras dentro da teoria (a hipótese p é assumida como verdadeira). Observe que a proposição intermediária r é uma proposição verdadeira, porque ela foi obtida como conclusão da aplicação do *Modus Ponens* nas linhas 1 e 2. Como ela é verdadeira, então ela também pode ser utilizada como premissa na aplicação de um novo argumento, que foi o que ocorreu na linha 6. O mesmo pode ser dito em relação a proposição intermediária s na linha 6, que foi obtida como conclusão da aplicação do *Modus Ponens* nas linhas 3 e 5 e depois foi utilizada como premissa na aplicação de um novo argumento para se concluir a verdade de q. Como as proposições p e q são verdadeiras, concluímos então (via tabela verdade da condicional) que a proposição "$p \to q$" também é verdadeira, como queríamos demonstrar.

Vejamos agora como seria a demonstração da proposição do Exemplo 3.1 utilizando a derivação:

Exemplo 3.3. Proposição a ser demonstrada:

Se um número é par, então o seu quadrado também é par.

Linha	Proposição	Justificativa
1.	$n = 2k$	Premissa (hipótese)
2.	Se $x = y$ com $x, y \in \mathbb{R}$, então $x^2 = y^2$.	Premissa (teorema)
3.	Se $x = (ab)^2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $x = a^2b^2$.	Premissa (teorema)
4.	$a^2 = a \cdot a$	Premissa (definição)
5.	$n^2 = (2k)^2$	1, 2, Modus Ponens
6.	$n^2 = 2^2k^2$	3, 5, Modus Ponens
7.	$n^2 = 2 \cdot 2k^2$	4, 6, Definição

O leitor poderia questionar a aplicação da Regra *Modus Ponens* na linha 5, pois o antecedente da proposição condicional da linha 2 não é exatamente idêntico à proposição da linha 1. No entanto, esse incômodo pode ser sanado se considerarmos do fato de que "se tudo tem uma dada propriedade, um dado particular também a tem" [5, p. 129]. A aplicação do *Modus Ponens* nas proposições das linhas 3 e 5 para se obter a proposição da linha 6 segue o mesmo raciocínio.

As proposições das linhas $1, 2, 3$ e 4 são as premissas da demonstração. Trata-se de afirmações já conhecidas como verdadeiras na teoria. Observe que a proposição intermediária da linha 5 é uma proposição verdadeira, pois ela foi obtida como conclusão da aplicação do *Modus Ponens* nas linhas 1 e 2. Como ela é verdadeira, então pode também ser utilizada como premissa na aplicação de um novo argumento válido, que foi o que ocorreu na linha 6. Com isso concluímos que a linha 7 também é verdadeira, pois trata-se apenas aplicação da definição na proposição da linha 6.

Assim, como o antecedente e o consequente da proposição "**Se um número é par, então o seu quadrado também é par**" são ambos verdadeiros, então podemos afirmar que a condicional também é verdadeira, conforme queríamos demonstrar.

Comparando esta demonstração com a demonstração tal como é encontrada geralmente nos textos de matemática (Exemplo 3.1), percebemos que a segunda é uma forma resumida da primeira, na qual é evidenciado a hipótese, as conclusões intermediárias e a tese, ao passo que os outros elementos aparecem de maneira subentendida.

Considere novamente a demonstração do Exemplo 3.1:

$$n = 2k \quad \Rightarrow \quad n^2 = (2k)^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2^2k^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2 \cdot 2k^2$$

Quando escrevemos o símbolo de implicação "$\Rightarrow$" após a hipótese $n = 2k$, por exemplo, estamos na verdade dizendo que a proposição $n^2 = (2k)^2$ é verdadeira, pois uma implicação é uma condicional tautológica e, como a proposição $n = 2k$ é verdeira por hipótese, essa condicional ($n = 2k \ \rightarrow \ n^2 = (2k)^2$) só é tautológica se a proposição $n^2 = (2k)^2$ for verdadeira. Sabemos que $n^2 = (2k)^2$ é verdadeira porque, conforme informado na linha 5, ela é a conclusão de um argumento válido. O mesmo raciocínio vale sempre que se utiliza o símbolo de implicação em uma demonstração ou na resolução de uma equação.

Vejamos agora um exemplo retirado de [7, p. 58]:

Exemplo 3.4. Proposição a ser demonstrada:

Se x é par e maior do que 2, então x não é primo.

Linha	Proposição	Justificativa
1.	x é par.	Premissa (hipótese)
2.	x é maior que 2.	Premissa (hipótese)
3.	Se x é par, x é divisível por 2.	Premissa (teorema)
4.	Se x é maior do que 2, então se x é primo, x não é divisível por 2.	Premissa (teorema)
5.	x é divisível por 2.	1, 3, Modus Ponens
6.	Se x é primo, então x não é divisível por 2.	2, 4, Modus Ponens
7.	x não é primo.	5, 6, Modus Tollens

Assim, como as proposições "x **é par e maior do que** 2" e "x **não é primo.**" são ambas verdadeiras, então podemos concluir pela tabela-verdade da condicional que a proposição "**Se** x **é par e maior do que** 2**, então** x **não é primo.**" também é verdadeira, como queríamos demonstrar.

Considerações finais

Neste trabalho nós procuramos investigar a estrutura lógica da demonstração matemática direta, com vistas a esclarecer o que de fato é uma demonstração matemática e a entender os fatores que concedem o alto grau de confiabilidade na veracidade das afirmações justificadas à essa maneira.

Existem várias técnicas de demonstração na matemática, e a demonstração direta é apenas uma delas; contudo todas elas são baseadas no processo de derivação (ou dedução) que foi apresentado neste texto. Na técnica de demonstração por *Redução ao Absurdo*, por exemplo, nós supomos inicialmente que a proposição a qual queremos demonstrar sua veracidade é falsa e, à partir disso, *deduzimos* uma afirmação que é reconhecidamente falsa (uma contradição). Como no processo de dedução não é possível derivar afirmações falsas, pois são utilizados somente argumentos válidos, fica evidenciado então que o erro foi a suposição inicial de que a afirmação que queremos provar é falsa, concluindo, portanto, pelo príncipio da não-contradição e pelo princípio do terceiro excluído, que ela só pode ser verdadeira.

Vale a pena ressaltar também que, apesar das demonstrações serem a única maneira aceita pela comunidade matemática de se provar a veracidade das afirmações matemáticas, devido à sua força no que diz respeito a justificação do conhecimento e ao seu rigor, existem também outras maneiras menos formais e rigorosas de se justificar o conhecimento matemático, como por exemplo com o uso de *softwares de geometria dinâmica* tal como o *Geogebra*. O uso desse tipo de ferramenta pode ser um grande aliado no processo de justificação do conhecimento matemático, pois em alguns casos as demonstrações são tão sofisticados e dependem de tantos outros conhecimentos, que não se tornam muito acessíveis para os alunos da educação básica.

Seja de maneira mais rigorosa ou mais informal, a questão primordial é compreender que a crença na veracidade de um teorema decorre de uma justificativa poderosa, e não de um ato de fé.

Referências Bibliográficas

[1] BARCELOS, Thiago. **Ensino da análise real**: metodologias utilizadas por professores formadores da licenciatura em matemática. 2019.

[2] CUNHA, Francisco. **Lógica e conjuntos**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2008.

[3] FILHO, Edgard. **Iniciação à lógica matemática**. 21ª ed. São Paulo: Editora Nobel, 2017.

[4] CARNIELLI, Walter A.; EPSTEIN, Richard L. **Pensamento crítico**: o poder da lógica e da argumentação. 3ª ed. São Paulo: Rideel, 2011.

[5] MURCHO, Desidério. **Lógica elementar**. Lisboa: Edições 70, 2019.

[6] HOLANDA, Francisco Bruno. **A Prova**: tópicos adicionais. Revisão: Antônio Caminha Muniz Neto. [S. l.]: Portal da Matemática – OBMEP, 2019.

[7] FOSSA, John. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[8] FILHO, Daniel. **Um convite à matemática**: com técnicas de demonstração e notas históricas. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] MILL, John Stuart. **Sobre a liberdade**. São Paulo: Vide, 2018.