



Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas
Engenharia de Controle e Automação



Sabrina Gonçalves Reis

Controle Dinâmico de um Pêndulo Invertido: Prototipagem, Estabilização e Avaliação Experimental

Ouro Preto
2026

Sabrina Gonçalves Reis

Controle Dinâmico de um Pêndulo Invertido: Prototipagem, Estabilização e Avaliação Experimental

Trabalho apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenharia de Controle e Automação.

Orientador: Prof. João Carlos Vilela de Castro

Ouro Preto
2026



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CONTROLE E
AUTOMACAO



FOLHA DE APROVAÇÃO

Sabrina Gonçalves Reis

Controle Dinâmico de um Pêndulo Invertido: Prototipagem, Estabilização e Avaliação Experimental

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação

Aprovada em 09 de abril de 2026

Membros da banca

Me. João Carlos Vilela de Castro - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Paulo Marcos de Barros Monteiro - Convidado (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dra. Adrielle de Carvalho Santana - Convidada (Universidade Federal de Ouro Preto)

João Carlos Vilela de Castro, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 11/05/2026



Documento assinado eletronicamente por **João Carlos Vilela de Castro, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 12/05/2026, às 19:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1087354** e o código CRC **DB3A869C**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.004351/2026-24

SEI nº 1087354

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: 3135591533 - www.ufop.br

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica, contribuindo imensamente para a minha formação. Um agradecimento especial ao meu orientador, Professor João Carlos Vilela de Castro, que, além de ter sido um excelente mestre em sala de aula, compartilhando seu vasto conhecimento, desempenhou um papel fundamental na minha graduação e no sucesso deste trabalho. Sua orientação e paciência foram essenciais.

Agradeço também aos professores Paulo e Adrielle, por todos os ensinamentos transmitidos ao longo do curso de Engenharia de Controle e Automação e pela honra de tê-los como membros da minha banca de defesa.

À minha família, meu porto seguro, deixo o meu muito obrigada. Em especial, agradeço à minha mãe e ao meu irmão pelo incentivo e apoio inabalável durante todo esse processo. Um agradecimento afetuoso à minha prima Ana, por compartilhar suas experiências e por todos os conselhos valiosos nesta reta final.

Aos meus amigos de curso e grandes companheiros de jornada — Letícia, Laryssa, Ana Laura, Gustavo, Matheus, Vitor, João Bernardes e Lucas —, muito obrigada pela motivação diária, por sempre acreditarem em mim e pelo apoio incondicional que tornou os dias mais leves.

Por fim, agradeço aos meus amigos do trabalho e da vida: Leandro, Lucas Rodrigues, Lucas Moreira e Ygor, por toda a ajuda, parceria e incentivo constante.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte deste momento, o meu muito obrigada.

Resumo

Neste trabalho, investiga-se o uso de técnicas de controle aplicadas a sistemas pendulares, englobando a modelagem matemática, o projeto de controladores e a implementação prática. Para contornar as não linearidades severas da bancada física construída, propõe-se uma arquitetura de controle em cascata. Utiliza-se a técnica baseada em dados VRFT (*Virtual Reference Feedback Tuning*) na malha interna para o rastreamento de velocidade, e o Regulador Quadrático Linear (LQR) na malha externa para o controle de equilíbrio. Os resultados experimentais demonstram que a abordagem em cascata estabilizou o sistema com sucesso, sendo capaz de rejeitar perturbações externas de forma robusta e atenuar eficazmente as não linearidades mecânicas do atuador.

Palavras-chave: sistemas pendulares. pêndulo invertido. controle em cascata. VRFT. LQR.

Abstract

The dynamics of pendulum systems are widely studied in engineering due to their complex nonlinear behavior and unstable equilibrium points. This work investigates the application of control techniques to such systems, encompassing mathematical modeling, controller design, and practical implementation through a custom-built prototype. To overcome the severe nonlinearities and hardware constraints of the experimental setup, a cascade control architecture is proposed. The inner loop employs a data-driven technique, Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT), for precise velocity tracking and mitigation of actuator dead zones and friction. The outer loop utilizes a Discrete Linear Quadratic Regulator (DLQR) to maintain the vertical balance of the pendulum. Experimental results demonstrate that the proposed cascade approach successfully stabilized the inverted pendulum, proving robust in rejecting external disturbances and effectively compensating for the mechanical imperfections of the recycled hardware components.

Keywords: pendulum systems. inverted pendulum. cascade control. VRFT. LQR.

Lista de figuras

Figura 1 – Diagrama de corpo livre.	18
Figura 2 – Circuito do Ensaio de Rotor Bloqueado.	20
Figura 3 – Resposta transiente da corrente no ensaio de rotor bloqueado.	22
Figura 4 – Gráfico de dispersão do ensaio a vazio para determinação de K_e	24
Figura 5 – Protótipo experimental do pêndulo invertido.	28
Figura 6 – Diagrama esquemático das conexões elétricas e lógicas.	30
Figura 7 – Diagrama de blocos do sistema implementado no Simulink.	32
Figura 8 – Ensaio experimental do controle de velocidade via VRFT.	42
Figura 9 – Simulação do controlador LQR com efeitos físicos e não lineares.	44
Figura 10 – Resposta do pêndulo invertido sob perturbações externas na arquitetura em cascata.	45

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados experimentais de tensão gerada e velocidade angular no ensaio a vazio.	23
Tabela 2 – Mapeamento das conexões elétricas do protótipo.	29
Tabela 3 – Parâmetros consolidados do modelo do pêndulo invertido.	41

Lista de símbolos

A	Matriz de dinâmica do sistema no tempo contínuo
A_d	Matriz de dinâmica do sistema no tempo discreto
B	Matriz de entrada do sistema no tempo contínuo
B_d	Matriz de entrada do sistema no tempo discreto
b_c	Coefficiente de atrito viscoso entre o carro e o trilho
B_p	Coefficiente de atrito viscoso na articulação da haste do pêndulo
e_v	Erro de rastreamento virtual (VRFT)
g	Aceleração da gravidade
H	Força de reação horizontal no pino de articulação
I	Momento de inércia da haste em relação ao seu centro de gravidade
I_a	Corrente de armadura do motor de corrente contínua
J	Função de custo quadrática
K	Matriz de ganhos de realimentação de estados (LQR)
K_e	Constante de força contra-eletromotriz do motor
K_t	Constante de torque do motor
K_p	Ganho Proporcional do controlador PID
K_i	Ganho Integral do controlador PID
K_d	Ganho Derivativo do controlador PID
L_a	Indutância de armadura do motor
l	Distância do eixo de rotação até o centro de massa da haste
M	Massa do carro de translação
m	Massa da haste do pêndulo
N	Número total de amostras no conjunto de dados empíricos
P	Matriz simétrica solução da Equação Algébrica de Riccati

Q	Matriz de ponderação dos desvios de estado (LQR)
R	Matriz de ponderação do esforço de controle (LQR)
R_a	Resistência de armadura do motor
R_s	Resistor sensor de precisão
r_v	Sinal de referência virtual (VRFT)
$T_d(z)$	Função de transferência discreta do modelo de referência
T_s	Período de amostragem
u	Sinal de esforço de controle aplicado ao sistema (tensão)
V	Força de reação vertical no pino de articulação
V_{emf}	Força contra-eletromotriz gerada pelo motor
X	Vetor de variáveis de estado do sistema
x	Posição linear (horizontal) do carro sobre o trilho
\dot{x}	Velocidade linear de translação do carro
\ddot{x}	Aceleração linear de translação do carro
\dot{x}_{ref}	Sinal de referência de velocidade comandada à malha interna
y	Variável de saída medida da planta
y_m	Resposta simulada do modelo de referência virtual
θ	Ângulo de inclinação da haste do pêndulo em relação à vertical
$\dot{\theta}$	Velocidade angular da haste do pêndulo
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular da haste do pêndulo
$\hat{\theta}$	Vetor de parâmetros ótimos estimados do controlador (VRFT)
τ	Constante de tempo da malha de velocidade em malha fechada
τ_e	Constante de tempo elétrica do motor
Φ	Matriz de regressores computada a partir de dados medidos
ω	Velocidade angular do rotor do motor elétrico

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Justificativas e Relevância	14
1.2	Objetivos	14
1.3	Organização e estrutura	15
2	REVISÃO DE LITERATURA	16
2.1	Modelagem Teórica do Sistema Pêndulo Invertido	17
2.2	Determinação Experimental dos Parâmetros Elétricos do Motor CC	19
2.2.1	Ensaio de Rotor Bloqueado	20
2.2.2	Cálculo da Corrente de Armadura de Rotor Bloqueado (I_a)	21
2.2.3	Cálculo da Resistência de Armadura (R_a)	21
2.2.4	Cálculo da Indutância de Armadura (L_a)	21
2.2.5	Ensaio de Rotação a Vazio	22
2.2.6	Análise Gráfica e Cálculo da Constante K_e	24
2.2.7	Determinação da Constante de Torque (K_t)	25
3	METODOLOGIA	26
3.1	Materiais e Componentes Utilizados na Construção do Protótipo	26
3.2	Procedimentos de Montagem e Integração Físico-Lógica	27
3.2.1	Adaptações Mecânicas e Acoplamento do Pêndulo	28
3.2.2	Projeto Elétrico e Hardware	28
3.2.3	Integração Eletrônica e Leitura de Sinais	30
3.2.4	Aquisição de Dados	31
3.3	Procedimentos Experimentais: Identificação de Parâmetros	31
3.3.1	Compensação de Não Linearidades e Dinâmicas Não Modeladas	32
4	PROJETO DOS CONTROLADORES	34
4.1	Projeto do Controlador de Velocidade Baseado em Dados	34
4.1.1	Fundamentação Teórica: VRFT e Mínimos Quadrados	34
4.1.2	Implementação Prática do VRFT no Protótipo	35
4.2	Projeto do Controlador Ótimo LQR	37
4.2.1	Representação em Espaço de Estados da Planta em Cascata	37
4.2.2	Formulação do Controle Ótimo Discreto	38
4.2.3	Sintonia das Matrizes de Ponderação e Implementação	38
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	40

5.1	Resultados da Estimação de Parâmetros e Validação do Modelo . .	40
5.2	Validação do Controle de Velocidade (VRFT)	41
5.3	Validação Simulada e Experimental da Arquitetura em Cascata . .	43
5.4	Análise Comparativa: Abordagem Model-Based (LQR) vs. Data-Driven (VRFT)	46
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	47
6.1	Síntese dos Resultados e Conclusões Finais	47
6.2	Limitações do Trabalho e Sugestões para Trabalhos Futuros	47
	Referências	49

1 Introdução

Um pêndulo simples é um sistema que consiste em uma haste ou fio com uma massa na extremidade, capaz de oscilar em torno de uma posição fixa. A partir dessa ideia, existem algumas variações do pêndulo que partem do mesmo princípio. Entre as de maior relevância estão o pêndulo invertido, que inverte a direção da oscilação e a base do pêndulo, e o pêndulo articulado, no qual a haste é formada pela junção de duas ou mais hastes, com ligações que permitem a rotação nas juntas.

Na Engenharia, o pêndulo invertido é considerado um modelo padrão de referência amplamente estudado. A relevância desse sistema deve-se às suas características dinâmicas, é um sistema altamente não linear e instável em malha aberta. O estudo da sua dinâmica fornece a base matemática necessária para o desenvolvimento de técnicas de estabilização.

Um exemplo prático dessa dinâmica é encontrado na engenharia aeroespacial, durante o lançamento de foguetes. Nos instantes iniciais da decolagem, o comportamento físico do veículo lançador assemelha-se ao de um pêndulo invertido, pois o centro de gravidade do veículo está posicionado acima do ponto de aplicação da força de empuxo, que se localiza nos motores da base.

Para evitar que o foguete tombe ou sofra desvios por perturbações atmosféricas, os sistemas de controle de voo realizam o vetoramento do empuxo. Nesse processo, o ângulo de expulsão dos gases é ajustado continuamente na base para compensar o desvio angular, mantendo o alinhamento do centro de massa e garantindo a trajetória vertical. Na literatura aeroespacial, a estabilização dessa dinâmica complexa de vetoramento é frequentemente abordada por meio de técnicas de controle ótimo linear quadrático (LQR), evidenciando a eficiência desse método matemático para a manutenção do equilíbrio em sistemas críticos (REDMILL et al., 1994).

Além do setor aeroespacial, o princípio do pêndulo invertido é utilizado na biomecânica, para o estudo da marcha bípede e o desenvolvimento de robôs humanoides e próteses ativas. Outra aplicação prática é o projeto de sistemas de estabilização estrutural em arranha-céus sujeitos a abalos sísmicos.

Nesse contexto, a construção e o controle de um pêndulo invertido em bancada permitem a reprodução em escala de problemas reais de engenharia. O desenvolvimento do controle para essa planta possibilita a análise e a validação experimental de estratégias matemáticas voltadas para a estabilização de sistemas instáveis, consolidando o conhecimento teórico em uma aplicação prática.

1.1 Justificativas e Relevância

Segundo Ogata (2010), o controle automático é essencial em diversos campos da engenharia, sendo necessária a validação empírica de seus conceitos teóricos. A transição de ambientes simulados para a implementação física impõe restrições estruturais que, frequentemente, não são contempladas nos modelos matemáticos ideais.

A implementação de um pêndulo invertido real exige a compensação de não linearidades mecânicas e elétricas, como o atrito estático de Coulomb, zonas mortas dos atuadores, folgas de transmissão e atrasos de amostragem. O efeito dessas variáveis, especialmente em equipamentos de baixo custo, degrada o desempenho de controladores puramente analíticos. Diante disso, a motivação deste trabalho consiste em investigar a aplicação de uma arquitetura de controle em cascata, utilizando sintonia baseada em dados (VRFT) na malha interna para compensar imperfeições motrizes, permitindo a operação adequada do controle ótimo (LQR) na malha externa sob condições operacionais restritivas.

Adicionalmente, o projeto apresenta relevância prática e econômica ao propor a construção da planta física a partir de componentes reciclados. O reaproveitamento de peças de impressoras descartadas, como a calha mecânica, o motor de corrente contínua e os sensores ópticos (*encoders*), viabiliza a montagem de um módulo de hardware funcional e de baixo custo.

Por fim, o protótipo desenvolvido constitui uma ferramenta didática replicável. A planta modelada e validada poderá ser incorporada às disciplinas de laboratório do curso, possibilitando aos discentes a aplicação e a análise experimental de diferentes técnicas de controle em um sistema físico.

1.2 Objetivos

Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo primordial desenvolver, modelar e estabilizar um protótipo de pêndulo invertido, implementando e validando experimentalmente uma arquitetura de controle em cascata que integra sintonia baseada em dados e controle ótimo para garantir o equilíbrio do sistema diante de não linearidades.

Objetivos Específicos

Para o alcance do objetivo geral, definem-se os seguintes objetivos específicos:

- Construir um protótipo funcional utilizando materiais mecânicos e eletroeletrônicos reciclados, consolidando um módulo didático e replicável destinado a aulas práticas

laboratoriais para os discentes do curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

- Realizar a modelagem matemática cinemática e dinâmica da planta, executando a estimação empírica de parâmetros físicos e avaliando as limitações teóricas impostas por não linearidades severas (como atrito estático e zona morta do atuador).
- Projetar e validar experimentalmente uma estratégia de controle em cascata, empregando o método *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) na malha interna de velocidade para absorver as imperfeições motrizes, e um controlador Ótimo Linear Quadrático (LQR) na malha externa para atuar no equilíbrio angular da haste.

1.3 Organização e estrutura

Para guiar o leitor através da metodologia e dos resultados, este documento foi organizado nos seguintes capítulos:

- Capítulo 1: Apresenta a introdução ao tema, a motivação e a relevância do estudo, os objetivos delineados e a organização estrutural do documento.
- Capítulo 2: Aborda a fundamentação teórica, englobando a revisão da literatura e a dedução analítica da modelagem matemática da planta.
- Capítulo 3: Descreve o hardware da bancada física, detalhando a integração dos componentes mecânicos reciclados, a instrumentação eletroeletrônica e os procedimentos de condicionamento de sinais no microcontrolador.
- Capítulo 4: Dedicar-se à concepção da estratégia de controle. Este capítulo detalha a estimação de parâmetros do atuador e o projeto da arquitetura em cascata, compreendendo a sintonia da malha interna de velocidade baseada em dados (VRFT) e o controle ótimo da malha externa de equilíbrio (LQR).
- Capítulo 5: Apresenta a validação experimental do sistema. Neste capítulo, são expostos e discutidos os resultados práticos obtidos.
- Capítulo 6: Encerra o trabalho com as considerações finais, resumando as contribuições práticas do projeto frente às limitações de infraestrutura e sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão de literatura

Diversos trabalhos na literatura abordam o controle de sistemas pendulares sob diferentes perspectivas, dada sua ampla aplicabilidade e complexidade. Esses sistemas apresentam comportamento dinâmico não linear e sensível a perturbações externas, o que exige estratégias de controle avançadas. A depender da configuração física e das condições de operação, os sistemas podem operar em torno de pontos de equilíbrio estáveis, como ocorre em pontes rolantes, ou instáveis, como no caso de pêndulos invertidos. Para lidar com esses desafios, a literatura propõe tanto abordagens clássicas, como controladores PID, quanto técnicas mais avançadas, incluindo controle ótimo, adaptativo, robusto, por modos deslizantes e, mais recentemente, métodos baseados em inteligência artificial.

Entre esses sistemas, pontes rolantes utilizadas no transporte de cargas pesadas recebem destaque devido à necessidade de controlar oscilações pendulares que surgem durante a movimentação da carga (YANG et al., 2014). Essas aplicações demandam soluções robustas para mitigar os efeitos de distúrbios e manter a estabilidade do sistema.

Outra linha relevante de pesquisa envolve o controle de robôs autoequilibrados sobre rodas, os quais representam sistemas que operam em torno de pontos de equilíbrio instáveis. Essa área tem ganhado notoriedade tanto na academia quanto na indústria, com exemplos notáveis como o uBot-5, JOE, B2 e o SEGWAY HT, que ilustram a diversidade de abordagens existentes (YANG et al., 2014).

Embora ambos os contextos envolvam o controle de sistemas modelados como pêndulos invertidos, há diferenças significativas entre eles. Zhang et al. (2020) analisam os desafios associados a efeitos de duplo pêndulo e movimento esférico em guindastes-torre. Por sua vez, Yang et al. (2014) investigam a influência da não planaridade no movimento de robôs autoequilibrados com duas rodas.

A aplicação de técnicas modernas de controle tem sido amplamente explorada nesses sistemas. Por exemplo, Verma et al. (2012) utilizam lógica fuzzy, um método baseado em inteligência artificial, para modelar e controlar sistemas pendulares tridimensionais com base em decisões racionais. No caso de pêndulos bidimensionais, que constituem o foco deste estudo, Shuang e Jian (2014) aplicam a técnica de controle ótimo linear quadrático (LQ).

Esses autores ressaltam que o controlador LQ oferece vantagens no projeto e na calibração do sistema, como a eliminação da necessidade de determinar manualmente os polos da malha fechada. A técnica se baseia na identificação adequada das variáveis de estado e na definição de pesos conforme a matriz de resposta do sistema. A resolução da equação algébrica de Riccati permite obter a matriz de realimentação de estados K , a qual

confere estabilidade assintótica às variáveis do sistema.

Apesar dessas vantagens, [Shuang e Jian \(2014\)](#) apontam limitações, especialmente quanto à definição qualitativa das matrizes de ponderação Q e R , que impactam diretamente o desempenho da resposta do sistema. Frequentemente, a obtenção de resultados satisfatórios exige ajustes iterativos desses parâmetros, o que evidencia a complexidade do método e a importância de uma calibração cuidadosa. Além disso, por se tratar de uma técnica essencialmente baseada em modelo matemático linearizado, o desempenho do LQR tende a se degradar significativamente quando aplicado em hardwares reais que apresentam não linearidades severas de atuação.

Para contornar as limitações de controladores puramente baseados em modelos físicos diante de imperfeições eletromecânicas, a literatura recente tem explorado métodos de sintonia baseados em dados (*data-driven*). Dentre essas técnicas, o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) tem se destacado por permitir a sintonia direta dos parâmetros do controlador a partir de um único conjunto de dados de entrada e saída do sistema em malha aberta, dispensando a necessidade de uma modelagem fenomenológica complexa do atuador ([CAMPI; SAVARESI; OUTROS, 2011](#)).

A fim de aliar a robustez do controle ótimo ao tratamento prático de não linearidades, o uso de arquiteturas de controle em cascata apresenta-se como uma solução eficaz. Nessa topologia, a dinâmica do sistema é dividida: uma malha interna, geralmente controlada por técnicas como o VRFT, encarrega-se de compensar os distúrbios e não linearidades do hardware (como zonas mortas e atrito), enquanto a malha externa, regida por um controlador como o LQR, foca exclusivamente na estabilização cinemática da planta. Essa separação hierárquica das dinâmicas fundamenta a abordagem metodológica proposta neste trabalho.

2.1 Modelagem Teórica do Sistema Pêndulo Invertido

A metodologia para a derivação das equações dinâmicas do pêndulo invertido sobre o carro, conforme apresentada por [Ogata \(2010\)](#), considera o diagrama de corpo livre do sistema, conforme ilustrado na [Figura 1](#).

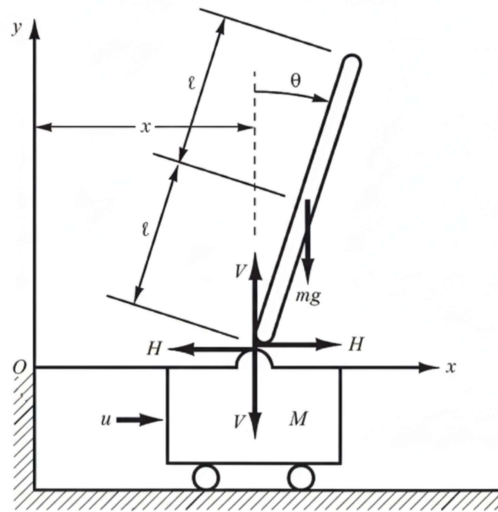


Figura 1 – Diagrama de corpo livre.

Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

Define-se o ângulo da haste a partir da linha vertical imaginária posicionada no centro do carro, que define o ponto de equilíbrio da haste, sendo θ o ângulo entre a haste e a vertical. As coordenadas (x, y) do centro de gravidade da haste do pêndulo são dadas por $x_G = x + l \sin \theta$ e $y_G = l \cos \theta$, onde x é a posição horizontal do carro e l é o comprimento do pêndulo até seu centro de gravidade. Adicionalmente, inserem-se as forças de dissipação do sistema, definindo-se b_c como o coeficiente de atrito viscoso entre o carro e o trilho, e b_p como o coeficiente de atrito viscoso na articulação da haste.

Aplicando as leis da mecânica, as equações não lineares de movimento do sistema são obtidas. O movimento rotacional da haste do pêndulo em torno de seu centro de gravidade é dado por:

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta - b_p \dot{\theta} \quad (2.1)$$

onde I é o momento de inércia da haste em relação ao centro de gravidade. O movimento horizontal do centro de gravidade da haste do pêndulo é descrito por:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (2.2)$$

E o movimento vertical do centro de gravidade do pêndulo por:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg \quad (2.3)$$

Paralelamente, o movimento horizontal do carro é descrito por:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H - b_c \dot{x} \quad (2.4)$$

Para simplificar o projeto de controle, essas equações são linearizadas em torno do ponto de equilíbrio vertical instável. Considerando que a operação ocorre próxima à posição vertical ($\theta \approx 0$), aplicam-se as aproximações $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$. Termos de ordem superior, como θ^2 e $\dot{\theta}^2$, são desprezados. Expandindo as derivadas espaciais sob essa linearização, as equações se transformam em:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl - b_p\dot{\theta} \quad (2.5)$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = H \quad (2.6)$$

$$0 = V - mg \quad (2.7)$$

Com o auxílio das equações (2.4) e (2.6), substituindo a variável H , obtém-se a relação para o movimento de translação:

$$(M + m)\ddot{x} + b_c\dot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (2.8)$$

E, a partir das equações (2.5), (2.6) e (2.7), substituindo $V = mg$ e $H = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$:

$$I\ddot{\theta} = mgl\theta - (m\ddot{x} + ml\ddot{\theta})l - b_p\dot{\theta} \quad (2.9)$$

que, ao ser reorganizada para isolar as derivadas de maior ordem, resulta em:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + b_p\dot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (2.10)$$

As equações (2.8) e (2.10) constituem o modelo matemático linearizado que descreve o movimento acoplado do sistema de pêndulo invertido sobre o carro com perdas por atrito viscoso.

2.2 Determinação Experimental dos Parâmetros Elétricos do Motor CC

A obtenção de um modelo matemático fidedigno para o atuador do sistema requer a determinação de seus parâmetros elétricos e eletromecânicos. Nesta seção, descreve-se os procedimentos experimentais realizados para encontrar a resistência de armadura (R_a) e a indutância de armadura (L_a) do motor de corrente contínua utilizado no protótipo.

2.2.1 Ensaio de Rotor Bloqueado

O ensaio de rotor bloqueado é um procedimento padrão para a caracterização elétrica de motores CC. Ele consiste em analisar o comportamento do motor em uma condição estática, com velocidade angular nula, o que permite isolar e medir os componentes de seu circuito de armadura.

Para a execução do ensaio, foi implementado o circuito de acionamento ilustrado na Figura 2. O circuito é composto por uma fonte de tensão CC de 6,2 V, um transistor NPN para aplicar um pulso de tensão ao motor, e um diodo de roda livre em paralelo com o motor para proteção do circuito contra picos de tensão indutiva.

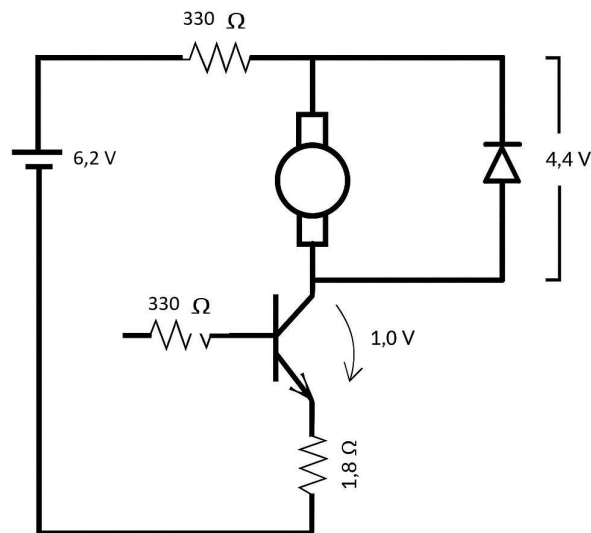


Figura 2 – Circuito do Ensaio de Rotor Bloqueado.

Fonte: Elaborada pela autora.

Para a medição indireta da corrente de armadura, um resistor de precisão de $1,8\ \Omega$, denominado como (R_s), foi inserido em série com o motor. A tensão sobre este resistor (V_{R_s}), que é diretamente proporcional à corrente de armadura, e a tensão nos terminais do próprio motor (V_m) foram monitoradas por meio de um multímetro digital.

O procedimento experimental consistiu nas seguintes etapas:

- O eixo do motor foi firmemente travado por meios mecânicos para assegurar a condição de velocidade nula ($\omega = 0$).
- Um sinal de onda quadrada foi aplicado à base do transistor, levando-o à saturação. Isso aplicou um degrau de tensão ao circuito série composto pelo motor e pelo resistor sensor.

- O multímetro foi configurado como voltímetro para capturar e registrar a resposta transiente e o estado estacionário das tensões $V_{Rs}(t)$ e $V_m(t)$ durante a aplicação do pulso.

A partir dos dados adquiridos pelo multímetro, os parâmetros elétricos foram calculados conforme detalhado a seguir.

2.2.2 Cálculo da Corrente de Armadura de Rotor Bloqueado (I_a)

A corrente de armadura em regime permanente (I_a), também referida como corrente de stall, foi determinada a partir da queda de tensão de estado estacionário no resistor sensor (V_{Rs}), aplicando-se a Lei de Ohm. A tensão medida foi de 800 mV.

$$I_a = \frac{V_{Rs}}{R_s} \quad (2.11)$$

$$I_a = \frac{0,8 \text{ V}}{1,8 \Omega} \approx 0,444 \text{ A} = 444 \text{ mA} \quad (2.12)$$

2.2.3 Cálculo da Resistência de Armadura (R_a)

Na condição de rotor bloqueado, a força contra-eletromotriz é nula ($V_{f_{cem}} = 0$), pois esta é proporcional à velocidade. Portanto, a tensão de estado estacionário medida nos terminais do motor (V_m) corresponde apenas à queda de tensão sobre sua resistência interna (R_a). A tensão medida em V_m foi de 4,4 V.

$$R_a = \frac{V_m}{I_a} \quad (2.13)$$

$$R_a = \frac{4,4 \text{ V}}{0,444 \text{ A}} \approx 9,91 \Omega \quad (2.14)$$

Para fins de simplificação nos cálculos subsequentes do modelo, este valor foi arredondado para 10Ω .

2.2.4 Cálculo da Indutância de Armadura (L_a)

A indutância de armadura (L_a) foi determinada a partir da análise da resposta transiente da corrente. A constante de tempo elétrica do circuito (τ_e) foi medida diretamente na forma de onda exponencial exibida no osciloscópio, utilizando-se as ferramentas de cursor. O valor obtido para a constante de tempo foi de $\tau_e = 1,28 \text{ ms}$.

A relação entre a constante de tempo, a resistência e a indutância em um circuito RL série é dada por:

$$\tau_e = \frac{L_a}{R_a} \quad (2.15)$$

Isolando-se a indutância, obtém-se:

$$L_a = R_a \cdot \tau_e \quad (2.16)$$

$$L_a = 10 \Omega \cdot (1,28 \times 10^{-3} \text{ s}) = 0,0128 \text{ H} = 12,8 \text{ mH} \quad (2.17)$$

Figura 3 – Resposta transiente da corrente no ensaio de rotor bloqueado, evidenciando a constante de tempo elétrica (τ_e).

Fonte: Elaborada pela autora.

Ao final do ensaio de rotor bloqueado, foram determinados os parâmetros elétricos do motor, $R_a = 10 \Omega$ e $L_a = 12,8 \text{ mH}$, que serão utilizados na função de transferência do atuador.

2.2.5 Ensaio de Rotação a Vazio

A determinação da constante de força contra-eletromotriz (K_e) é fundamental para a modelagem da interdependência entre os domínios elétrico e mecânico do motor CC. Este ensaio explora a característica do motor de atuar como um gerador quando seu eixo é rotacionado por uma fonte externa, permitindo uma medição direta da tensão gerada em função da velocidade.

Para a execução do ensaio, foi utilizada uma montagem com dois motores CC. O primeiro motor, denominado “motor de acionamento”, tinha seu eixo mecanicamente acoplado ao eixo do segundo motor, o “motor sob teste”. O motor de acionamento era alimentado por uma fonte de 12V através de um circuito driver, controlado por um microcontrolador Arduino. Esta configuração permitia variar a velocidade do conjunto de forma precisa através do ajuste do sinal de Modulação por Largura de Pulso (PWM).

Os terminais do motor sob teste foram deixados em aberto (sem carga) e conectados a um multímetro digital configurado como voltímetro para medir a tensão gerada em seus terminais (V_t). A velocidade angular (ω) era medida pelo sistema de encoder do motor de acionamento.

O procedimento experimental consistiu nas seguintes etapas:

- Os eixos do motor de acionamento e do motor sob teste foram firmemente acoplados.

- Os terminais elétricos do motor sob teste foram conectados a um multímetro para medição da tensão gerada (V_t).
- O microcontrolador Arduino foi programado para variar o *duty cycle* do sinal PWM enviado ao driver, aplicando diferentes níveis de potência ao motor de acionamento.
- Para cada patamar de *duty cycle*, aguardou-se a estabilização da velocidade e foram registrados os pares de dados correspondentes de velocidade angular (ω) em rad/s e a tensão gerada (V_t) em Volts.

Os dados coletados permitiram a caracterização da constante K_e , conforme detalhado a seguir.

Tabela 1 – Dados experimentais de tensão gerada e velocidade angular no ensaio a vazio.

Tensão (V)	Velocidade Angular (rad/s)
4,73	283
5,80	340
6,40	373
3,50	206
6,40	380
5,20	310

Fonte: Elaborada pela autora.

2.2.6 Análise Gráfica e Cálculo da Constante K_e

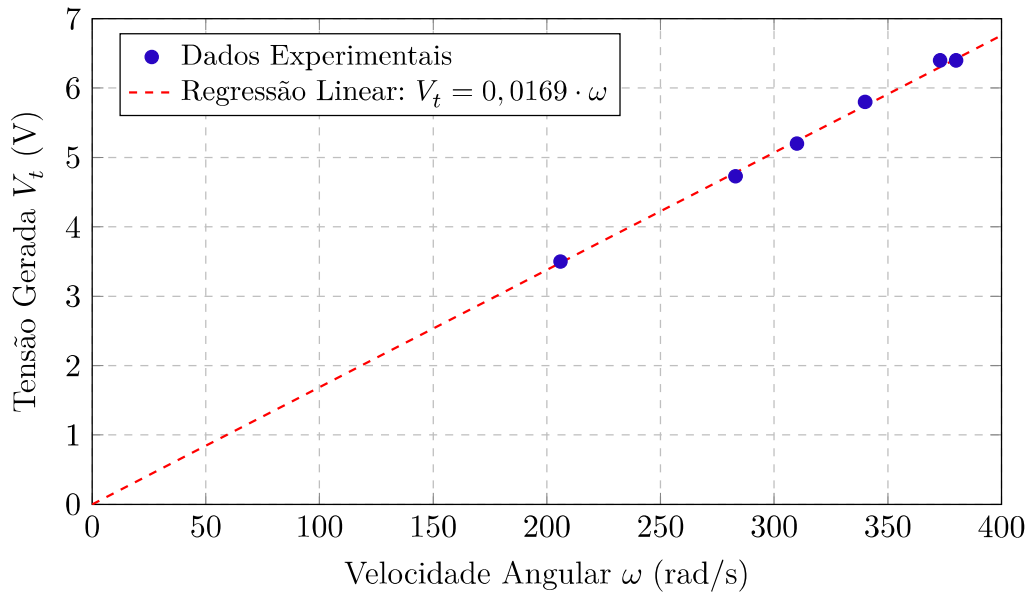


Figura 4 – Gráfico de dispersão relacionando a velocidade angular (ω) e a tensão gerada (V_t) com a respectiva reta de regressão linear.

Fonte: Elaborada pela autora.

A relação teórica entre a força contra-eletromotriz gerada (V_{emf}) e a velocidade angular (ω) é linear e descrita por:

$$V_{emf} = K_e \cdot \omega \quad (2.18)$$

Como o ensaio foi realizado com os terminais do motor em aberto ($I_a = 0$), a tensão medida nos terminais é igual à força contra-eletromotriz ($V_t = V_{emf}$). Os pares de dados experimentais (ω , V_t) foram plotados em um gráfico de dispersão, com ω no eixo das abscissas e V_t no eixo das ordenadas. Aplicou-se o método de regressão linear para ajustar uma reta da forma $y = mx$ ao conjunto de pontos, minimizando o erro quadrático médio. O coeficiente angular (m) da reta de ajuste representa a estimativa experimental da constante K_e .

Assumindo que a regressão linear dos dados coletados resultou em um coeficiente angular de $m = 0,085$, o cálculo de K_e é:

$$K_e = m = \frac{\Delta V_t}{\Delta \omega} \quad (2.19)$$

$$K_e = 0,085 \frac{\text{V}}{\text{rad/s}} = 0,085 \text{ V} \cdot \text{s/rad} \quad (2.20)$$

2.2.7 Determinação da Constante de Torque (K_t)

Em unidades do Sistema Internacional (SI), a constante de torque (K_t) é numericamente igual à constante de força contra-eletromotriz (K_e). Portanto, o valor de K_t pode ser diretamente inferido a partir do resultado do ensaio.

$$K_t [\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}] = K_e [\text{V} \cdot \text{s}/\text{rad}] \quad (2.21)$$

$$K_t \approx 0,085 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A} \quad (2.22)$$

Ao final do ensaio, foram determinadas as constantes eletromecânicas do motor, $K_e = 0,085 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad}$ e $K_t = 0,085 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$, parâmetros essenciais para a função de transferência que relaciona a tensão de entrada do motor com sua resposta mecânica.

3 Metodologia

3.1 Materiais e Componentes Utilizados na Construção do Protótipo

Para a construção e o funcionamento da planta física do pêndulo invertido, foram utilizados os seguintes componentes mecânicos e eletroeletrônicos:

- **Chopper de quatro quadrantes (Ponte H):** O *chopper* é um conversor CC-CC utilizado para modular a tensão de uma fonte de corrente contínua. Para facilitar a integração e o acionamento bidirecional do motor, utilizou-se o módulo comercial Ponte H L298N, que possui choppers integrados em seu circuito para controle de potência.
- **Microcontrolador (Arduino):** Plataforma de prototipagem baseada em um microcontrolador lógico programável. Suas portas digitais e rotinas de interrupção de hardware são fundamentais para a leitura dos sensores, enquanto as saídas do tipo PWM (*Pulse Width Modulation*) permitem modular a largura do sinal de tensão enviado à Ponte H, controlando a velocidade e o torque do motor.
- **Carro de impressão e Motor CC:** Conjunto mecânico retirado de uma impressora sucateada, compreendendo o motor de corrente contínua, as correias de transmissão e o próprio carro de deslocamento. O reaproveitamento dessas peças garantiu a precisão mecânica necessária com baixo custo.
- **Trilho guia linear:** Também reaproveitado da estrutura original da impressora descartada, atua como a via de translação de baixo atrito para a movimentação horizontal do carro de impressão.
- **Sensor *Encoder* Linear:** Fita óptica translúcida com marcações de alta resolução, reaproveitada da impressora em conjunto com seu sensor óptico original. É o elemento responsável por aferir a posição instantânea (x) do carro sobre o trilho.
- **Sensor *Encoder* Rotativo:** Dispositivo de medição angular de padrão industrial, com resolução de 600 pulsos por revolução (PPR). Foi fixado ao carro para realizar a leitura precisa do ângulo de inclinação (θ) da haste pendular.
- **Haste do pêndulo e Acoplamento 3D:** A haste foi construída a partir de uma peça cilíndrica de madeira reaproveitada (cabo de vassoura), conferindo leveza e

rigidez ao pêndulo. Para a junção mecânica entre a haste e os sensores, utilizou-se resina de impressão 3D (PLA/ABS) modelada sob medida.

- **Base estrutural da planta:** Prancha de madeira cortada nas proporções métricas do trilho guia. Além de agrupar os componentes e conferir portabilidade ao módulo didático, a base de madeira atua como um suporte estrutural essencial para garantir a estabilidade e o nivelamento do trilho guia sobre diferentes superfícies de trabalho. Adicionalmente, ela funciona como uma plataforma de montagem segura para a fixação e organização dos módulos eletrônicos do sistema, acomodando o microcontrolador Arduino, a Ponte H e os barramentos de alimentação.
- **Componentes de roteamento elétrico:** Utilizou-se uma matriz de contatos (*proto-board*) e fios de ligação rápida (*jumpers*) para a distribuição dos barramentos de alimentação (VCC e GND) e para a conexão segura dos sinais lógicos entre os sensores, a Ponte H e o microcontrolador.

3.2 Procedimentos de Montagem e Integração Físico-Lógica

A montagem do protótipo priorizou o reaproveitamento de componentes, aliando o conceito de sustentabilidade ao desenvolvimento de um módulo didático de baixo custo. Para garantir a precisão mecânica necessária à validação das leis de controle, optou-se por preservar a estrutura mecânica integral de uma impressora descartada.

Dessa forma, o trilho guia, o carro de impressão, o motor de corrente contínua e o sistema de transmissão por correia dentada foram mantidos em suas configurações originais. Essa estratégia forneceu uma base robusta e resistente para ser utilizada na implementação do pêndulo. O circuito original do carro de impressão, que já continha um sensor óptico alinhado a uma fita *encoder* linear, também foi preservado para realizar a medição da posição do carro.

A montagem final da base estrutural e dos trilhos pode ser visualizada na [Figura 5](#).

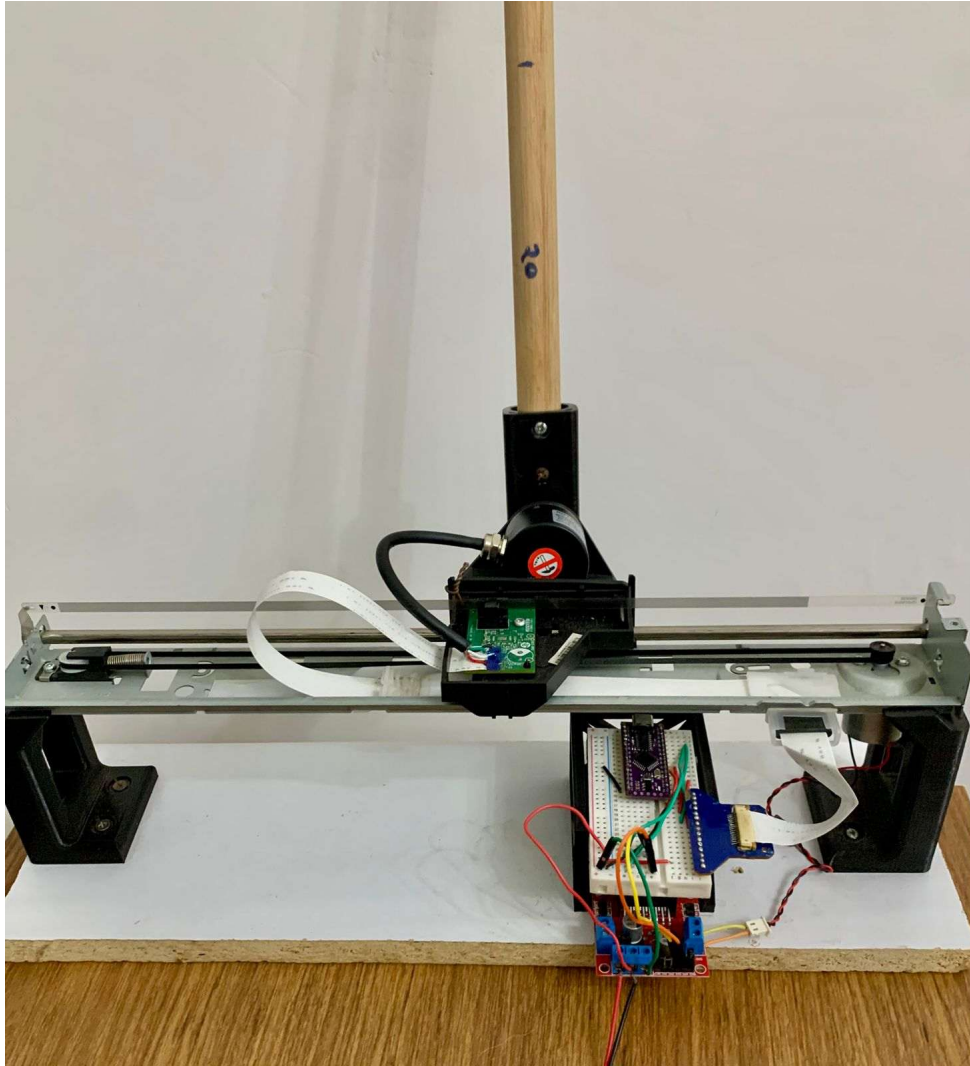


Figura 5 – Protótipo experimental do pêndulo invertido montado sobre trilho linear, evidenciando o carro, o motor CC e a haste pendular.

Fonte: Elaborada pela autora.

3.2.1 Adaptações Mecânicas e Acoplamento do Pêndulo

Para a medição do ângulo de inclinação da haste, o *encoder* rotativo precisou ser solidamente embarcado no conjunto móvel. Para tal, a peça de suporte impressa em 3D foi projetada para se encaixar com precisão no compartimento originalmente destinado aos cartuchos de tinta do carro de impressão. Essa adaptação mecânica permitiu que o eixo do sensor ficasse alinhado, garantindo um acoplamento seguro e sem folgas com a haste de madeira do pêndulo.

3.2.2 Projeto Elétrico e Hardware

O arranjo eletrônico do protótipo foi projetado com foco em portabilidade e eficiência, viabilizando o seu uso futuro como módulo didático em laboratório. Para a

unidade de processamento central, adotou-se o microcontrolador Arduino Nano. Sua escolha justifica-se pelas dimensões reduzidas, que facilitam a acomodação na estrutura física da planta, mantendo a capacidade de processamento e a quantidade de portas lógicas (interrupções) necessárias para a aplicação de controle em tempo real.

O acionamento de potência do motor de corrente contínua foi realizado por meio do módulo Ponte H (L298N). Para garantir o torque e a resposta dinâmica exigidos pela instabilidade natural do pêndulo invertido, o circuito de potência da Ponte H foi alimentado externamente por uma fonte chaveada reaproveitada de *notebook*, fornecendo uma tensão contínua de 19 V. A malha de comando lógico foi estabelecida conectando-se os pinos digitais 9 e 10 do Arduino Nano aos terminais de controle da Ponte H, responsáveis por definir o sentido de giro e a intensidade do esforço de controle via sinal PWM.

O sensoriamento do sistema é composto por dois *encoders* incrementais de quadratura. O primeiro, um *encoder* linear (fita óptica) original da impressora, é responsável por mensurar a posição do carro transladando sobre o trilho (x). O segundo, um *encoder* rotativo comercial com resolução de 600 pulsos por revolução (PPR), foi implementado especificamente para aferir o ângulo de inclinação da haste do pêndulo (θ).

Para a consolidação das ligações e roteamento dos sinais, utilizou-se um adaptador de cabo *flat*, minimizando o excesso de fiação solta e reduzindo o risco de interferências eletromagnéticas. A alimentação de ambos os sensores ópticos foi suprida de forma estável pelos terminais de 5 V e GND do próprio Arduino Nano. Por fim, a leitura instantânea das variações de posição foi garantida conectando-se os pares de canais (fases A e B) de cada *encoder* a quatro pinos de entrada digital do microcontrolador, os quais foram configurados para acionar as rotinas de interrupção de hardware (PCINT).

A Tabela 2 resume o mapeamento dos pinos utilizados na integração.

Tabela 2 – Mapeamento das conexões elétricas do protótipo.

Componente	Terminal/Pino	Conexão no Arduino Nano
Ponte H (L298N)	Comando de Direção/IN1	Pino Digital 9
	Comando de Direção/IN2	Pino Digital 10
Encoder Linear (Carro)	Sinal Fase A1	Pino Digital 2
	Sinal Fase B1	Pino Digital 3
Encoder Rotativo (Pêndulo)	Sinal Fase A2	Pino Digital 4
	Sinal Fase B2	Pino Digital 5
Alimentação Lógica	VCC (Sensores)	5V
	GND (Referência comum)	GND

A topologia de alimentação e as conexões elétricas foram roteadas conforme o diagrama esquemático da [Figura 6](#).

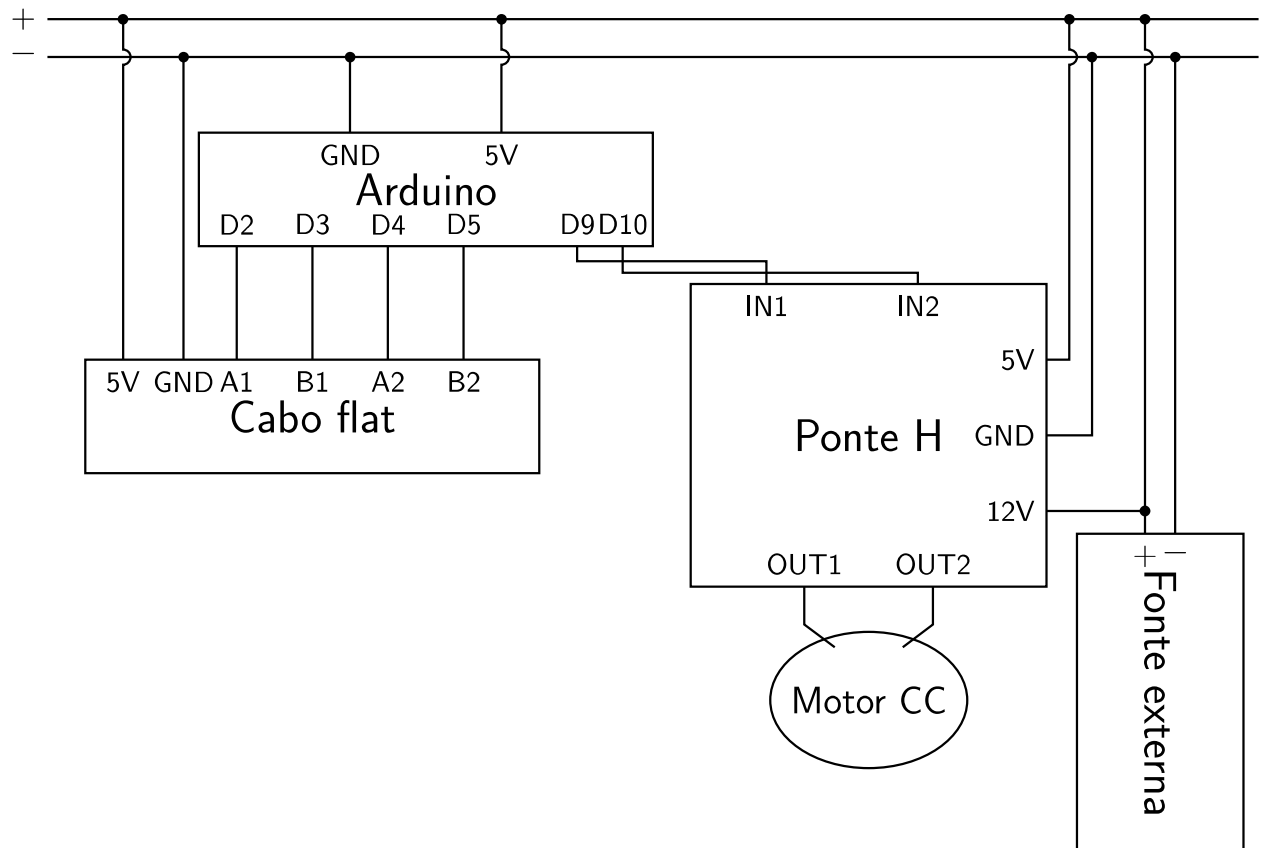


Figura 6 – Diagrama esquemático evidenciando o roteamento dos sinais lógicos do microcontrolador e a topologia de alimentação dos componentes.

Fonte: Elaborada pela autora.

3.2.3 Integração Eletrônica e Leitura de Sinais

Um dos principais desafios de projeto na montagem de um pêndulo invertido é a conexão dos cabos dos sensores embarcados no carro móvel até a unidade de controle (microcontrolador), evitando que o peso ou a rigidez dos fios atue como uma perturbação física no sistema.

Para solucionar essa questão, reaproveitou-se o cabo plano flexível (*flat cable*) original da impressora, que já possuía a maleabilidade e o roteamento adequados por baixo do trilho linear. Os fios do *encoder* rotativo foram soldados diretamente nas trilhas da placa de circuito impresso (PCI) original do carrinho.

Contudo, observou-se que diversas vias do *flat cable* estavam interligadas pelo circuito antigo. Para assegurar a integridade dos sinais de quadratura dos *encoders* (linear e rotativo), realizou-se um mapeamento de continuidade com o auxílio de um multímetro, identificando vias isoladas. Como medida de segurança adicional para evitar interferências e capacitâncias parasitas nos sinais de alta frequência, capacitores remanescentes do circuito

original foram dessoldados e removidos, garantindo a total isolação elétrica das trilhas utilizadas.

3.2.4 Aquisição de Dados

A unidade de processamento central adotada foi um microcontrolador da família Arduino, programado em linguagem C++. Para garantir uma resposta em tempo real e evitar a perda de pulsos dos *encoders*, a rotina de leitura dos sensores foi desenvolvida utilizando interrupções de hardware do tipo *Pin Change Interrupt* (PCINT).

Em vez de utilizar funções de alto nível, a rotina de serviço de interrupção (ISR) foi otimizada por meio de manipulação direta de registradores do microcontrolador (PIND) e operações lógicas bit a bit (*bitwise XOR*). Essa abordagem garante uma execução determinística e em frações de microssegundo, atualizando os contadores de posição instantaneamente a cada transição de borda dos canais A e B dos *encoders*.

A malha de atuação foi implementada utilizando o módulo Ponte H L298N. A geração do sinal de Modulação por Largura de Pulso (PWM) foi delegada à biblioteca `TimerOne`, configurada para operar em uma frequência de 25 kHz. Essa frequência de comutação garante uma corrente mais contínua na armadura do motor. O laço principal de controle e aquisição de dados foi estruturado com um período de amostragem (T_s) temporizado em 10 milissegundos, fundamental para a correta discretização e projeto dos controladores.

3.3 Procedimentos Experimentais: Identificação de Parâmetros

Para a obtenção de um modelo matemático fidedigno do pêndulo invertido, foi realizada uma etapa de estimação de parâmetros, englobando as características elétricas e mecânicas do motor de corrente contínua, bem como os parâmetros físicos do carro e da haste. O procedimento consistiu na modelagem analítica de cada subsistema e na posterior implementação das equações diferenciais resultantes no ambiente *Simulink/MATLAB*, conforme ilustrado no diagrama de blocos da [Figura 7](#).

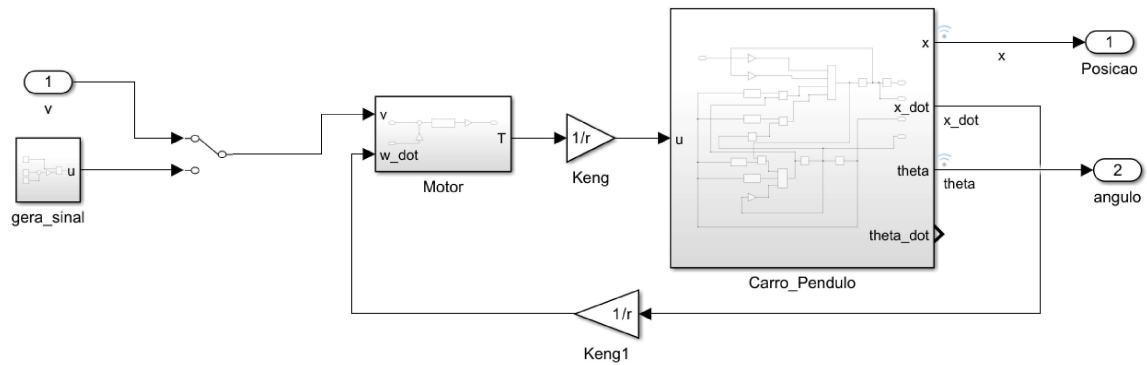


Figura 7 – Diagrama de blocos do sistema implementado no ambiente Simulink para a simulação e estimação de parâmetros.

Fonte: Elaborada pela autora.

Inicialmente, os parâmetros fisicamente mensuráveis foram alimentados diretamente no modelo. Isso incluiu a massa do carro (M), a massa da haste (m), o raio da polia, a resistência de armadura (R_a), a indutância da armadura (L_a) e a distância do eixo de rotação até o centro de massa da haste (l). Os parâmetros de difícil medição direta, como o momento de inércia do pêndulo (I) e os coeficientes de atrito viscoso, foram definidos como variáveis a serem estimadas utilizando a ferramenta *Parameter Estimator* do *Simulink*.

O segundo passo da metodologia baseou-se na aquisição de dados empíricos de resposta da planta. Para a caracterização da dinâmica do carro, o microcontrolador Arduino foi empregado para injetar diferentes sinais de excitação na malha aberta, como ondas quadradas de frequências variadas e sinais PRBS (*Pseudo-Random Binary Sequence*). Os dados de posição linear do carro e a respectiva tensão de comando aplicada foram registrados com um período de amostragem de 10 ms ($T_s = 0,01$ s), totalizando janelas de mil amostras por ensaio.

3.3.1 Compensação de Não Linearidades e Dinâmicas Não Modeladas

Durante a execução dos ensaios práticos de identificação, observaram-se divergências entre o comportamento matemático idealizado e a resposta real da planta física, exigindo adequações metodológicas para o sucesso da estimação.

A primeira dificuldade prática consistiu na discrepância entre o sinal de controle computado pelo Arduino e a tensão efetivamente entregue aos terminais do motor. Essa diferença decorre de perdas inerentes ao circuito de acionamento, principalmente a queda de tensão nos transistores semicondutores da Ponte H e no próprio cabeamento físico. Optou-se por não modelar explicitamente essa dinâmica elétrica residual. Em vez disso, assumiu-se que essas quedas de tensão, por serem relativamente constantes em regime permanente,

seriam compensadas e absorvidas durante a sintonia dos parâmetros otimizados pelo *toolbox* de estimação de parâmetros do simulink, garantindo a representatividade empírica do modelo para esta planta de hardware específica.

Adicionalmente, o sistema físico apresentou uma não linearidade severa de zona morta (*dead zone*) associada à inércia mecânica e ao atrito estático (atrito de Coulomb) dos trilhos. Teoricamente, qualquer diferença de potencial não nula aplicada ao motor deveria resultar em movimento do carro. Na prática, contudo, observou-se que o carro permanecia em repouso até que a tensão superasse um limiar considerável em relação à tensão nominal da fonte (aproximadamente 6 V).

Para contornar essa não linearidade de acionamento, mapeou-se a tensão de entrada em função do ciclo de trabalho (*duty cycle*) do sinal PWM enviado pelo microcontrolador, variando na escala de 0 a 1023 (resolução de 10 bits). Por meio de inspeção visual e análise dos dados do *encoder*, concluiu-se que o esforço de controle mínimo para suplantarmos o atrito de inércia e manter uma velocidade constante correspondia a um *duty cycle* de base de aproximadamente 300.

Consequentemente, esse valor de *offset* foi adotado como o novo "zero" lógico de referência para a geração dos degraus na onda quadrada e no sinal PRBS. Ao assegurar que a excitação ocorresse exclusivamente na região linear e útil de operação do motor elétrico, os resultados obtidos pelo algoritmo de estimação de parâmetros tornaram-se notavelmente mais coerentes e satisfatórios, viabilizando o projeto do controlador.

4 Projeto dos Controladores

4.1 Projeto do Controlador de Velocidade Baseado em Dados

Para a malha interna de controle da dinâmica horizontal do carro, optou-se por uma abordagem baseada em dados (*data-driven*), visando compensar as não linearidades do atuador físico, como zonas mortas e atrito estático nos trilhos. O método escolhido para sintonizar esse controlador foi o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT).

4.1.1 Fundamentação Teórica: VRFT e Mínimos Quadrados

A literatura clássica de controle frequentemente adota uma abordagem em duas etapas: primeiro, a identificação de um modelo matemático analítico da planta e, em seguida, o projeto do controlador baseado nesse modelo. Contudo, essa estratégia é suscetível a erros de modelagem e aproximações teóricas que podem degradar o desempenho do sistema.

Para lidar com essa limitação, métodos puramente baseados em dados são propostos. Conforme evidenciado na obra *Data-Driven Controller Design: The \mathcal{H}_2 Approach* (CAMPI; SAVARESI; OUTROS, 2011), a premissa central dessas técnicas é utilizar os dados de entrada e saída (coletados em ensaios de malha aberta ou fechada) para sintonizar o controlador, evitando a etapa intermediária de identificação do modelo paramétrico da planta.

Nesse contexto, o método *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) constitui uma técnica de otimização em etapa única (*one-shot*). A principal característica do VRFT consiste em reformular o problema de projeto do controlador, inerente à malha fechada, reduzindo-o a um problema clássico de identificação de sistemas em malha aberta.

O procedimento matemático do VRFT fundamenta-se nas seguintes etapas:

1. **Definição do Modelo de Referência:** Define-se uma função de transferência em malha fechada desejada, denotada por $T_d(z)$, que representa o comportamento dinâmico que a planta física deve seguir.
2. **Cálculo da Referência Virtual:** Dado um conjunto de N amostras de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ da planta real, calcula-se o sinal de referência virtual $r_v(t)$ que produziria a saída medida $y(t)$ caso o sistema operasse sob o modelo de referência $T_d(z)$. Matematicamente, aplica-se a inversão do modelo de referência:

$$r_v(t) = T_d^{-1}(z)y(t) \quad (4.1)$$

3. **Erro Virtual:** A partir de $r_v(t)$, determina-se o erro de rastreamento virtual do sistema, empregado na alimentação do controlador:

$$e_v(t) = r_v(t) - y(t) \quad (4.2)$$

4. **Otimização Paramétrica:** Para um controlador linear nos parâmetros θ , sua saída estimada $\hat{u}(t)$ é expressa como o produto entre uma matriz de regressores $\Phi(t)$ (formada pelos erros e suas derivadas) e o vetor θ . O objetivo consiste em determinar o vetor θ que minimize a diferença entre a saída do controlador parametrizado e o sinal de controle real $u(t)$ aplicado no ensaio.

A otimização paramétrica é solucionada pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A função de custo quadrática $J(\theta)$ a ser minimizada é dada pela soma dos resíduos entre o sinal de controle medido e a saída do controlador:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (u(t) - \Phi^T(t)\theta)^2 \quad (4.3)$$

Assumindo a inversibilidade da matriz de regressores (condição satisfeita pela aplicação de um sinal de excitação persistente, como o PRBS), a solução analítica que minimiza a função de custo é determinada pela Equação Normal:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TU \quad (4.4)$$

Conseqüentemente, a solução de mínimos quadrados fornece os parâmetros do controlador calibrados de forma a compensar as dinâmicas não modeladas e as não linearidades presentes no conjunto de dados empíricos utilizado no projeto.

4.1.2 Implementação Prática do VRFT no Protótipo

A aplicação empírica do VRFT para o controle de velocidade do carro foi implementada no ambiente computacional *MATLAB*. Utilizaram-se os dados de tensão aplicada (u) e posição linear (p) extraídos do ensaio de identificação com excitação PRBS, amostrados com um período $T_s = 10$ ms.

Como a variável de interesse para esta malha específica é a velocidade linear, o vetor de saída dinâmico do sistema (y) foi obtido numericamente por meio da derivada discreta do vetor de posições medidas:

$$y(k) = \frac{p(k) - p(k-1)}{T_s} \quad (4.5)$$

Para o modelo de referência $T_d(z)$, optou-se por um sistema de primeira ordem, caracterizado por uma resposta rápida e estritamente sem sobressinal. A constante de tempo $\tau = 80$ ms foi definida empiricamente. Esse valor foi escolhido visando um equilíbrio prático: ele é suficientemente rápido para que o carro acompanhe as rápidas correções exigidas pelo LQR para não deixar a haste cair, mas respeita a banda passante física do motor, evitando que o modelo de referência exija acelerações que levariam a Ponte H à saturação imediata. A função de transferência discreta do modelo alvo é dada por:

$$T_d(z) = \frac{1 - a}{z - a} \quad (4.6)$$

onde o polo em tempo discreto a é definido em função da constante de tempo da malha ($a = e^{-T_s/\tau}$).

A estrutura de controle selecionada para a parametrização foi um controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID). Na rotina computacional, os vetores de dados de velocidade foram processados pela dinâmica do modelo de referência inverso para a construção da matriz de regressores Φ . A cada instante de amostragem k , as colunas da matriz Φ foram preenchidas com as componentes proporcional, integral e derivativa da lei de controle operando sobre o erro virtual da velocidade, definidas teoricamente como:

$$\phi_1(k) = \frac{y(k+1) - y(k)}{1 - a} \quad (4.7)$$

$$\phi_2(k) = \frac{y(k+1)}{1 - a} \quad (4.8)$$

$$\phi_3(k) = \frac{y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)}{1 - a} \quad (4.9)$$

Com a matriz de regressores Φ e o vetor experimental de esforço de controle U estabelecidos, o vetor de parâmetros ótimos do controlador (θ) foi extraído utilizando-se a solução do problema de mínimos quadrados. Para contornar eventuais problemas de condicionamento na inversão matricial, utilizou-se a pseudo-inversa de Moore-Penrose:

$$\hat{\theta} = \Phi^\dagger U_{2:N} \quad (4.10)$$

O vetor resultante $\hat{\theta}$ forneceu diretamente os três ganhos paramétricos do controlador PID digital ($\theta_1 = K_p$, $\theta_2 = K_i$, $\theta_3 = K_d$). Por serem originados diretamente dos dados da planta, esses ganhos encontram-se sintonizados para rastrear a dinâmica de referência prescrita, compensando o atrito dos trilhos sem a necessidade de modelagem analítica intermediária do atuador.

4.2 Projeto do Controlador Ótimo LQR

Para a estabilização do pêndulo na posição vertical e o controle de posicionamento do carro, adotou-se o Regulador Quadrático Linear (LQR) para compor a malha externa da arquitetura em cascata. O LQR é um método de controle ótimo fundamentado em modelo, operando no espaço de estados e exigindo a representação analítica prévia da dinâmica da planta acoplada. Como a implementação final ocorre em um microcontrolador digital, o projeto foi concebido no domínio discreto (DLQR).

4.2.1 Representação em Espaço de Estados da Planta em Cascata

No contexto desta topologia, a planta controlada pelo LQR não é o atuador em malha aberta, mas sim o sistema mecânico operando sob a malha interna fechada de velocidade. O comportamento dessa malha interna, sintonizada via VRFT, é modelado matematicamente como um sistema de primeira ordem com constante de tempo τ . A relação entre a referência de velocidade comandada ($u = \dot{x}_{\text{ref}}$) e a aceleração resultante do carro (\ddot{x}) é dada por:

$$\ddot{x} = \frac{1}{\tau}(\dot{x}_{\text{ref}} - \dot{x}) \quad (4.11)$$

Substituindo a Equação (4.11) na equação diferencial linearizada da rotação do pêndulo e isolando a aceleração angular $\ddot{\theta}$, obtém-se a dinâmica da haste em função da referência de velocidade da malha interna:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl}{I}\theta - \frac{B_p}{I}\dot{\theta} - \frac{ml}{I\tau}(\dot{x}_{\text{ref}} - \dot{x}) \quad (4.12)$$

Para a formulação em espaço de estados, define-se o vetor de variáveis $X(t)$ composto pelo ângulo do pêndulo (θ), sua velocidade angular ($\dot{\theta}$), a posição linear do carro (x) e sua velocidade de translação (\dot{x}):

$$X(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A dinâmica do sistema linearizado invariante no tempo é inicialmente descrita na forma matricial contínua $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$, resultando nas seguintes matrizes de estado (A) e de entrada (B):

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl}{I} & -\frac{B_p}{I} & 0 & \frac{ml}{I\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{I\tau} \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \dot{x}_{\text{ref}} \quad (4.14)$$

Para o projeto do controle digital, esse modelo analítico contínuo foi discretizado no ambiente *MATLAB*, adotando-se o período de amostragem $T_s = 10$ ms. Esse procedimento converte o modelo para a forma de equações a diferenças $X(k+1) = A_d X(k) + B_d u(k)$, onde A_d e B_d representam as matrizes de estado e de entrada no domínio discreto.

4.2.2 Formulação do Controle Ótimo Discreto

O objetivo do controlador DLQR consiste em determinar uma lei de controle por realimentação de estados da forma $u(k) = -KX(k)$ que estabilize a planta amostrada. Para estabelecer o balanço adequado entre o erro de rastreamento e a energia despendida, o método minimiza a seguinte função de custo quadrática em tempo discreto J :

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (X^T(k)QX(k) + u^T(k)Ru(k)) \quad (4.15)$$

Nesta formulação, Q é uma matriz simétrica semidefinida positiva que pondera as penalidades sobre os desvios das variáveis de estado, enquanto R é uma matriz simétrica definida positiva que penaliza a magnitude do sinal de controle. No contexto deste trabalho, a minimização garante que as referências de velocidade \dot{x}_{ref} calculadas não ultrapassem as limitações físicas do atuador e a banda passante da malha interna.

A minimização da função J no domínio digital requer a solução da Equação Algébrica de Riccati em Tempo Discreto (DARE). A resolução computacional dessa equação fornece a matriz simétrica P , a qual viabiliza o cálculo analítico da matriz de ganhos de realimentação discreta K :

$$K = (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d \quad (4.16)$$

4.2.3 Sintonia das Matrizes de Ponderação e Implementação

A aplicação do LQR requer o ajuste empírico das matrizes de ponderação Q e R . Atribuiu-se maior peso aos elementos da diagonal principal da matriz Q correspondentes ao ângulo do pêndulo (θ) e à sua posição linear (x), priorizando a correção estrita de desvios verticais para assegurar o equilíbrio da haste dentro dos limites do trilho. O escalar R foi calibrado iterativamente para restringir a amplitude do sinal \dot{x}_{ref} , evitando comandos de velocidade inatingíveis pelo motor de corrente contínua.

Como o projeto foi concebido diretamente no domínio discreto, a matriz de ganhos K obtida encontra-se perfeitamente adequada para a implementação embarcada. Durante a execução no microcontrolador, as posições x e θ são mensuradas pelos *encoders* ópticos a cada ciclo de $T_s = 10$ ms, enquanto as velocidades \dot{x} e $\dot{\theta}$ são estimadas por meio da derivada discreta dos estados. A lei de controle $u(k) = -KX(k)$ é computada iterativamente, atualizando o *setpoint* dinâmico do controlador de velocidade da base.

5 Resultados e Discussão

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados experimentais obtidos a partir da implementação na planta física. A análise segue a progressão metodológica do projeto: inicialmente, avaliam-se os parâmetros estimados para o modelo dinâmico; em seguida, valida-se isoladamente a malha interna de velocidade do carro; e, por fim, analisa-se o desempenho da arquitetura em cascata completa na estabilização do pêndulo invertido.

5.1 Resultados da Estimação de Parâmetros e Validação do Modelo

A primeira etapa de testes práticos visou a consolidação do modelo dinâmico em espaço de estados, pilar fundamental para o projeto do controlador ótimo. Utilizando a ferramenta *Parameter Estimator* do ambiente *Simulink*, realizou-se o ajuste de curvas (*curve fitting*) entre a resposta das equações físicas e os dados lidos pelos *encoders* do protótipo durante os ensaios de malha aberta.

A presença de dinâmicas não modeladas, como o atrito estático de Coulomb nos trilhos e a zona morta do módulo Ponte H, representou um desafio inicial para a convergência do algoritmo de mínimos quadrados não lineares. A aplicação prévia de uma rotina de compensação de zona morta no microcontrolador garantiu que o motor operasse predominantemente em sua região linear durante as excitações com sinais PRBS.

Mediante o tratamento dos dados empíricos, o algoritmo de estimação isolou a dinâmica linear dominante do sistema. O procedimento permitiu estimar parâmetros físicos de difícil medição direta, como o momento de inércia da haste (I) e os coeficientes de atrito viscoso.

A Tabela 3 compila os parâmetros nominais medidos e os parâmetros dinâmicos estimados, que compõem a representação em espaço de estados da planta física.

Tabela 3 – Parâmetros consolidados do modelo do pêndulo invertido.

Símbolo	Descrição do Parâmetro	Valor	Unidade
M	Massa do carro de impressão	0,152	kg
m	Massa da haste do pêndulo	0,1133	kg
l	Distância até o centro de massa	0,2774	m
R_a	Resistência de armadura	10,0	Ω
L_a	Indutância de armadura	12,8	mH
K_t	Constante de torque	0,085	N·m/A
K_e	Constante contra-eletromotriz	0,085	V·s/rad
I	Momento de inércia estimado	0.002907284	kg·m ²
B_p	Atrito viscoso estimado (pêndulo)	0,000497	N·s/m

Fonte: Elaborada pela autora.

Com os parâmetros validados, as matrizes de dinâmica no tempo discreto (A_d) e de entrada (B_d) foram instanciadas, viabilizando o projeto do Regulador Quadrático Linear (DLQR).

5.2 Validação do Controle de Velocidade (VRFT)

Antes de submeter o sistema à estabilização da haste, avaliou-se isoladamente o desempenho da malha interna. O objetivo deste ensaio consistiu em verificar se o controlador PID de velocidade parametrizado via *Virtual Reference Feedback Tuning* ($K_p = 9,201$, $K_i = 5,399$, $K_d = -0,439$) forçaria o carro a rastrear o modelo de referência de primeira ordem ($\tau = 80$ ms).

Com o pêndulo operando livremente (sem atuação da malha externa de ângulo), aplicou-se uma referência de velocidade em onda quadrada com amplitude de ± 120 mm/s (0,12 m/s) e período de inversão de 1000 ms. Os dados de malha fechada coletados encontram-se na [Figura 8](#).

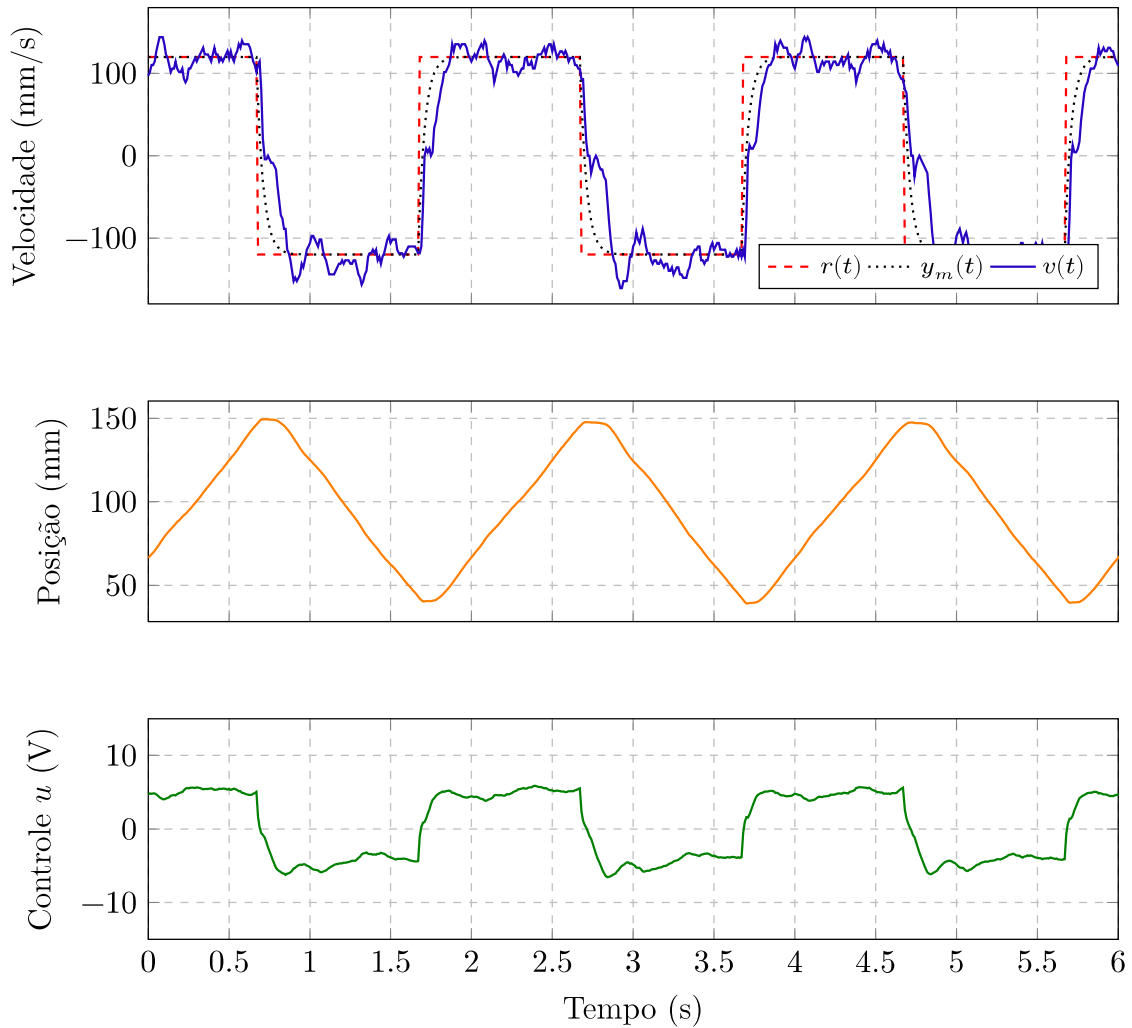


Figura 8 – Resposta do sistema em malha fechada ao controle de velocidade projetado via VRFT. Em destaque: rastreamento da velocidade (topo), oscilação da posição (centro) e esforço de controle aplicado à Ponte H (fundo).

Fonte: Elaborada pela autora.

Para melhor compreensão do gráfico superior da [Figura 8](#), destaca-se que $r(t)$ (linha vermelha tracejada) representa o sinal de referência em onda quadrada aplicado, $y_m(t)$ (linha preta pontilhada) é a resposta ideal ditada pelo modelo de referência virtual, e $v(t)$ (linha azul sólida) é a velocidade real medida no protótipo. A figura demonstra o excelente rastreamento dessa referência. A velocidade medida (linha azul) acompanha a tendência imposta, exibindo um sobressinal nas respostas transitórias subsequentes às inversões de sentido.

Esse fenômeno origina-se nas condições mecânicas do experimento. Durante o ensaio, a haste do pêndulo mantinha-se acoplada ao carro. As inversões abruptas de sentido induzem oscilações livres na haste, gerando perturbações inerciais transitórias que afetam a translação do carro. Contudo, o ajuste *data-driven* assegura que o erro

de rastreamento seja rapidamente mitigado, promovendo a convergência para o regime permanente de ± 120 mm/s em aproximadamente 0,3 segundos.

O gráfico de esforço de controle (u) detalha a ação de compensação: o sinal de tensão atinge picos transitórios (cerca de ± 10 V) para superar o atrito estático e a inércia, estabilizando na faixa de 4 a 5 V durante o deslocamento contínuo. O registro da posição (gráfico central) indica que a translação permaneceu restrita à janela operacional de ± 80 mm, preservando os limites estruturais do trilho mecânico e validando a malha interna para integração.

5.3 Validação Simulada e Experimental da Arquitetura em Cascata

Com o modelo em espaço de estados validado e a malha interna operante, procedeu-se ao projeto do Regulador Quadrático Linear em tempo discreto (DLQR) para atuar como malha externa na estabilização do pêndulo na posição vertical ($\theta = 0$).

A sintonia exigiu a calibração das matrizes de ponderação Q e R . Adotou-se uma matriz de identidade para Q , conferindo penalidades unitárias aos desvios de estado, e $R = 1$ para limitar a amplitude da referência de velocidade gerada, prevenindo a exigência de dinâmicas inatingíveis pela malha interna. A resolução da Equação Algébrica de Riccati Discreta (DARE) forneceu o vetor de realimentação $K = [-1.7004, -0.2724, -0.2186, -1.4009]$.

Antes da execução em hardware, o algoritmo LQR foi avaliado computacionalmente. A simulação integrou as equações de movimento via método de Runge-Kutta de 4^a ordem (RK4) e incorporou efeitos físicos como a quantização dos sensores (2400 PPR para o ângulo e 23613 pulsos/m para a posição). O resultado dessa etapa analítica é apresentado na [Figura 9](#).

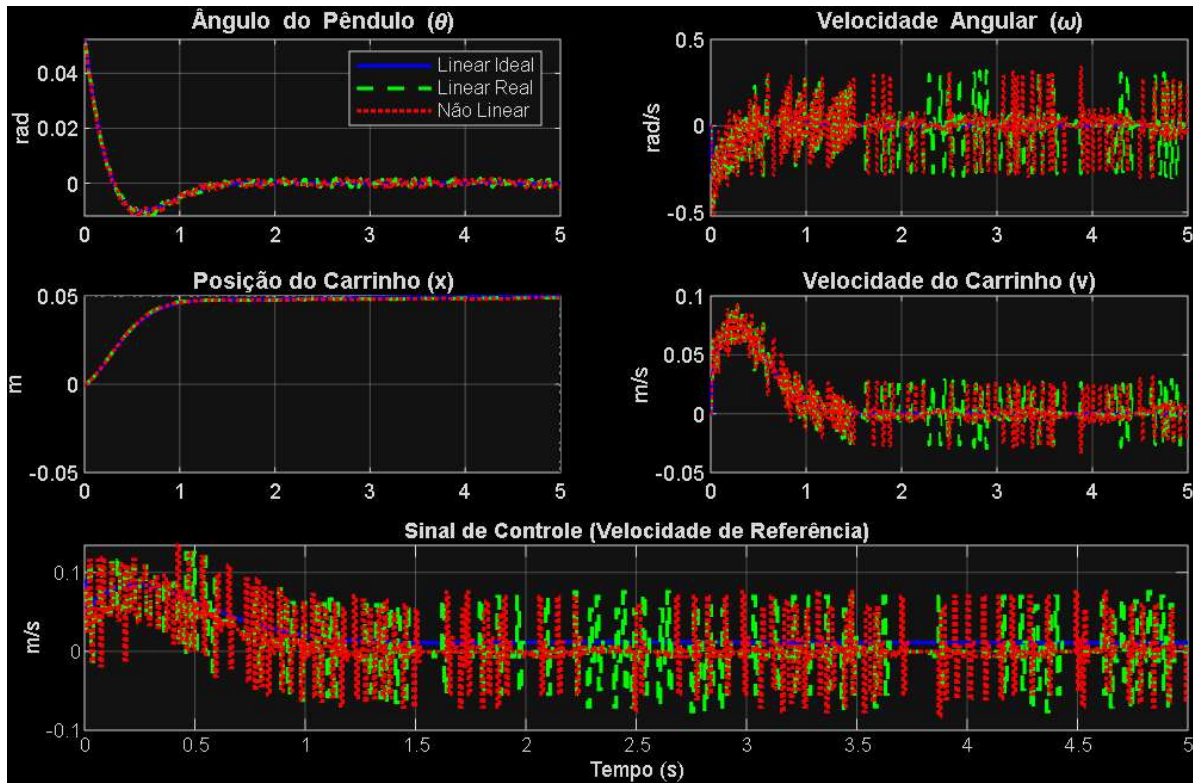


Figura 9 – Desempenho da malha LQR simulada. Os subgráficos evidenciam o rastreamento da referência e a estabilização do ângulo, contrapondo o comportamento linear ideal (azul), o modelo com sensores quantizados (verde tracejado) e a resposta não linear híbrida (vermelho pontilhado).

Fonte: Elaborada pela autora.

A simulação confirmou a convergência teórica do projeto de controle, demonstrando a capacidade da malha externa de manter a haste equilibrada rejeitando perturbações com comandos suaves. A introdução da resolução finita dos *encoders* (curva vermelha) resultou em divergências pontuais em relação ao modelo linear contínuo, caracterizando-se como uma representação acurada do comportamento esperado para a bancada real.

Para validar o desempenho global e final da arquitetura de controle proposta, a planta física operando com as malhas em cascata foi submetida a um ensaio de rejeição a distúrbios. Com o sistema estabilizado em regime permanente, aplicaram-se impulsos mecânicos externos diretamente à haste, forçando o deslocamento abrupto de seu centro de gravidade. A dinâmica de recuperação da planta é exibida na [Figura 10](#).

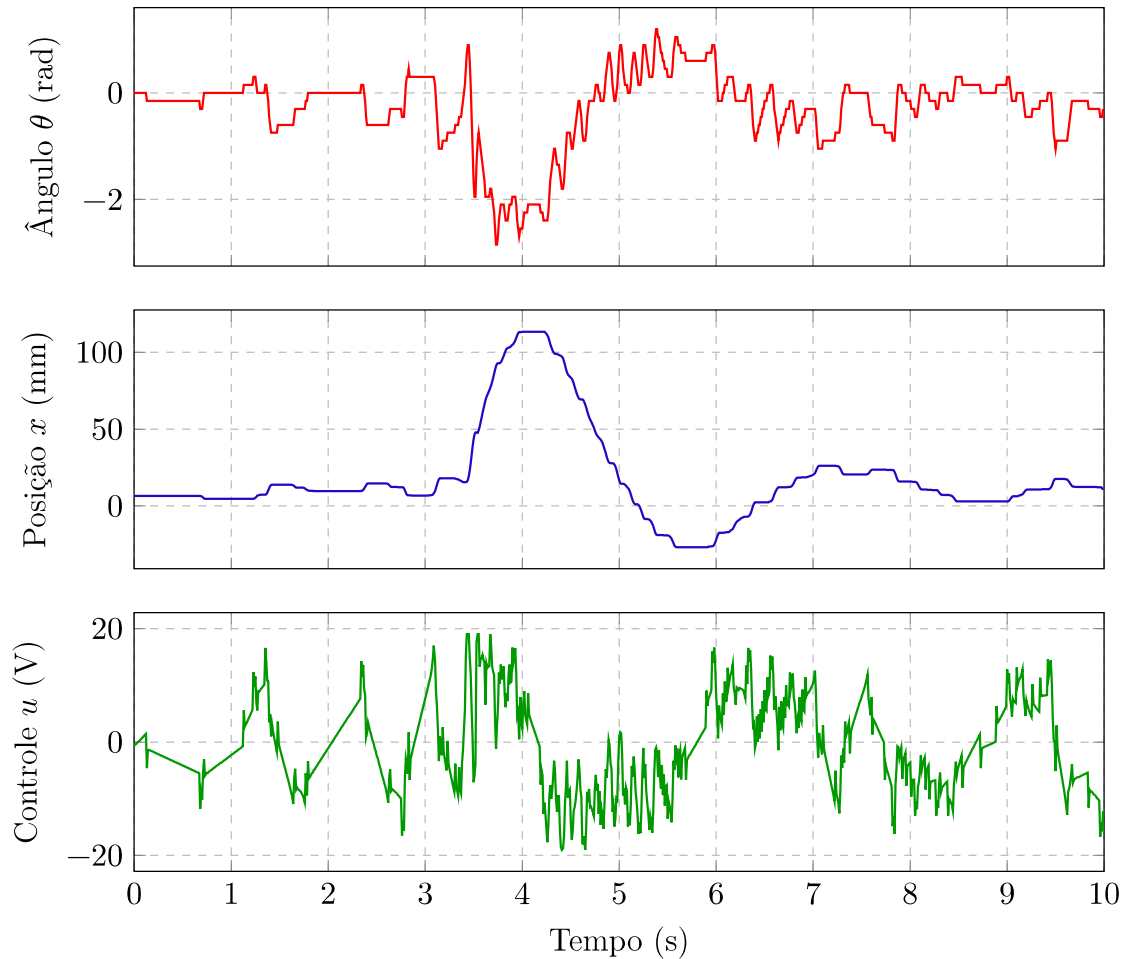


Figura 10 – Resposta experimental da planta física operando sob a arquitetura em cascata (DLQR + VRFT), evidenciando a estabilização e a rejeição a perturbações mecânicas (impulsos na haste).

Fonte: Elaborada pela autora.

A análise da [Figura 10](#) evidencia a cooperação entre as malhas. Diante do impacto mecânico sobre a haste ($\theta \neq 0$), a malha externa (DLQR) calcula imediatamente a necessidade de movimentação e comanda uma referência de velocidade. A malha interna (VRFT) processa essa referência e aplica a tensão corretiva (u) necessária no motor, induzindo o deslocamento do carro (x) no sentido da queda da haste. Essa ação de controle combinada promove o retorno ao ponto de equilíbrio com atuação restrita aos limites de excursão do trilho, comprovando a funcionalidade prática e robusta da técnica em cascata frente às não linearidades do hardware desenvolvido.

Analisando quantitativamente os resultados de recuperação na [Figura 10](#), observa-se que o sistema apresenta um tempo de acomodação de aproximadamente 1,5 a 2,0 segundos para retornar a haste à posição vertical após sofrer o impacto mecânico. Em regime permanente, o erro angular admissível oscila em uma estreita faixa de $\pm 0,05$ radianos, enquanto a posição do carro estabiliza-se com um desvio tolerável próximo a ± 10 mm.

Essas pequenas oscilações residuais são esperadas e justificam-se pela presença da zona morta residual do atuador, que impossibilita um ajuste fino estático perfeito quando a tensão de controle demandada pelo DLQR é muito baixa.

5.4 Análise Comparativa: Abordagem Model-Based (LQR) vs. Data-Driven (VRFT)

A implementação de dois paradigmas distintos de controle no desenvolvimento da planta física permite uma análise crítica de suas características, justificando a adoção da arquitetura em cascata.

A abordagem baseada em modelo, representada pelo LQR, apresenta adequado desempenho em regime permanente e estabilidade multivariável. Contudo, seu fluxo de projeto exige a dedução de leis físicas analíticas e a execução de rotinas de otimização para estimar parâmetros dinâmicos, demandando esforço matemático. Adicionalmente, o desempenho do LQR é estritamente dependente da precisão dessa modelagem prévia, tornando-o sensível a incertezas paramétricas e não linearidades não mapeadas do hardware.

Por outro lado, a abordagem baseada em dados, representada pelo VRFT, caracteriza-se pela simplificação da etapa de síntese. Ao dispensar a modelagem fenomenológica do atuador, o VRFT reduz o projeto do controlador a uma formulação algébrica de mínimos quadrados, extraindo os parâmetros a partir dos dados de excitação PRBS. O VRFT demonstra resiliência às não linearidades do conjunto mecânico (zonas mortas e atrito de Coulomb), uma vez que essas características já se encontram inerentes aos dados coletados e são compensadas matematicamente na síntese dos ganhos.

Conclui-se que a análise comparativa entre as técnicas fundamenta metodologicamente a arquitetura desenvolvida. A união dos métodos mitiga as deficiências individuais de cada um: o VRFT (*data-driven*) atua na malha interna operando como um abstrator de hardware, absorvendo as não linearidades e rastreando a velocidade, enquanto o LQR (*model-based*) atua na malha externa provendo a lei de controle ótimo necessária para o equilíbrio cinemático da planta instável.

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

6.1 Síntese dos Resultados e Conclusões Finais

A elaboração e a implementação da planta do pêndulo invertido atingiram o propósito de avaliar modelos matemáticos de controle frente às restrições operacionais de hardwares reais. A construção do protótipo com componentes mecânicos e elétricos reciclados de impressoras viabilizou uma plataforma de baixo custo para o ensino e a pesquisa, provendo um sistema com características não lineares que fundamentam o estudo prático em engenharia.

Os resultados experimentais comprovaram a viabilidade da arquitetura em cascata desenvolvida. A implementação do VRFT na malha interna confirmou a capacidade das técnicas guiadas a dados de fornecer ganhos estabilizadores a partir de ensaios empíricos, contornando a complexidade da modelagem analítica do motor e da transmissão mecânica. Simultaneamente, o projeto do LQR discreto na malha externa validou a teoria de controle em espaço de estados, assegurando a rejeição de perturbações e a manutenção da haste na vertical a partir de comandos de referência de velocidade.

A avaliação da topologia reforça a viabilidade da integração de paradigmas de controle para aplicações práticas. O rigor do modelo analítico confere estabilidade previsível à cinemática (LQR), enquanto a flexibilidade do controle via dados (VRFT) atenua os efeitos de incertezas dinâmicas do equipamento. O protótipo consolida-se como uma bancada didática para explorações experimentais curriculares no curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto.

6.2 Limitações do Trabalho e Sugestões para Trabalhos Futuros

Apesar da estabilização do sistema, registram-se limitações físicas no equipamento desenvolvido. A extensão útil do trilho guia (aproximadamente 30 a 40 centímetros operacionais) limita a excursão linear do carro. Essa restrição espacial impõe limitações de atuação ao controlador frente a grandes perturbações, mitigando ensaios em maiores velocidades. Adicionalmente, a zona morta do módulo Ponte H impacta o desempenho em regime permanente. Visto que o motor exige um nível mínimo de tensão para vencer o atrito estático, os sinais de controle de baixa amplitude gerados nas proximidades da origem de equilíbrio perdem eficácia. Essa não linearidade dificulta o ajuste fino de posicionamento, resultando em transientes oscilatórios de baixa amplitude durante a manutenção da haste na vertical.

Com base na estrutura física e algorítmica estabelecida, propõem-se as seguintes frentes para a expansão desta pesquisa:

- **Implementação de Observadores de Estado:** Para mitigar o ruído inerente à derivação numérica dos sinais dos *encoders* e atenuar a oscilação em regime permanente, sugere-se a implementação de técnicas de filtragem estocástica, como o Filtro de Kalman. A integração desses algoritmos pode fornecer estimativas de velocidade com maior relação sinal-ruído para a lei de controle.
- **Exploração de Estratégias Não Lineares:** A plataforma permite a implementação de controladores baseados em Lógica *Fuzzy* ou Redes Neurais Artificiais (RNA), com o intuito de investigar a compensação do atrito mecânico por meio de algoritmos adaptativos.
- **Rotina de *Swing-up*:** Atualmente, a malha de controle é ativada com a haste em posição vertical (próxima à origem). O desenvolvimento de uma técnica de controle não linear baseada em energia para realizar o levantamento (*swing-up*) autônomo da haste ampliaria o escopo operacional do protótipo, integrando lógicas de comutação entre a malha de elevação e a malha de estabilização do LQR.

Referências

- CAMPI, M. C.; SAVARESI, S. M.; OUTROS. *Data-Driven Controller Design: The \mathcal{H}_2 Approach*. New York: Springer, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 17, 34.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Universidades, 2010. ISBN 9788576058106. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>. Citado 1 vez nas páginas 14, 18.
- REDMILL, Keith et al. Intelligent hierarchical thrust vector control for a space shuttle. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 14, n. 3, p. 13–23, 1994. DOI: [10.1109/37.291461](https://doi.org/10.1109/37.291461). Citado 1 vez na página 13.
- SHUANG, Liu; JIAN, Fang. Linear Quadratic Optimal Controller Design an Inverted Pendulum. In: 2014 International Symposium on Computer, Consumer and Control. 2014. P. 416–418. DOI: [10.1109/IS3C.2014.115](https://doi.org/10.1109/IS3C.2014.115). Citado 2 vezes nas páginas 16, 17.
- VERMA, Manish Kumar et al. Artificial intelligence based control of 3D inverted pendulum. In: 2012 IEEE 5th India International Conference on Power Electronics (IICPE). 2012. P. 1–5. DOI: [10.1109/IICPE.2012.6450442](https://doi.org/10.1109/IICPE.2012.6450442). Citado 1 vez na página 16.
- YANG, Chenguang et al. Neural Network-Based Motion Control of an Underactuated Wheeled Inverted Pendulum Model. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, v. 25, n. 11, p. 2004–2016, 2014. DOI: [10.1109/TNNLS.2014.2302475](https://doi.org/10.1109/TNNLS.2014.2302475). Citado 3 vezes na página 16.
- ZHANG, Menghua et al. Modeling and energy-based sway reduction control for tower crane systems with double-pendulum and spherical-pendulum effects. *Measurement and Control*, v. 53, n. 1-2, p. 141–150, 2020. DOI: [10.1177/0020294019877492](https://doi.org/10.1177/0020294019877492). eprint: <https://doi.org/10.1177/0020294019877492>. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/0020294019877492>. Citado 1 vez na página 16.