



UFOP

Universidade Federal
de Ouro Preto

**Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Computação e Sistemas**

**Um Algoritmo Baseado em Simulated
Annealing para o Problema de
Roteamento de Caminhões Prancha
em Mina a Céu Aberto**

Mateus da Silva Costa

**TRABALHO DE
CONCLUSÃO DE CURSO**

**ORIENTAÇÃO:
Prof. Roberto Gomes Ribeiro**

**Agosto, 2025
João Monlevade–MG**

Mateus da Silva Costa

**Um Algoritmo Baseado em Simulated Annealing
para o Problema de Roteamento de Caminhões
Prancha em Mina a Céu Aberto**

Orientador: Prof. Roberto Gomes Ribeiro

Monografia apresentada ao curso de Sistemas de Informação do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para aprovação na Disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso II”.

Universidade Federal de Ouro Preto

João Monlevade

Agosto de 2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C837a Costa, Mateus da Silva.

Um algoritmo baseado em simulated annealing para o problema de roteamento de caminhões prancha em mina a céu aberto. [manuscrito] / Mateus da Silva Costa. - 2025.

52 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Roberto Gomes Ribeiro.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Sistemas de Informação .

1. Algoritmos computacionais. 2. Logística - Caminhões - Rotas. 3. Mineração a céu aberto - Transporte. 4. Otimização matemática. 5. Pesquisa operacional. 6. Simulação de recozimento (Matemática). I. Ribeiro, Roberto Gomes. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 519.8

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6-2431



FOLHA DE APROVAÇÃO

Mateus da Silva Costa

Um algoritmo baseado em simulated annealing para o problema de roteamento de caminhões prancha em mina a céu aberto

Monografia apresentada ao Curso de Sistemas de Informação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Sistemas de Informação

Aprovada em 02 de setembro de 2025

Membros da banca

Dr. Roberto Gomes Ribeiro - Orientador(a) - (Departamento de Computação e Sistemas - DECSI da Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP)
Dr. Fernando Bernardes Oliveira (Departamento de Computação e Sistemas - DECSI da Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP)
Dr. Luciano Perdigão Cota (Instituto Tecnológico Vale - ITV)

Roberto Gomes Ribeiro, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 07/10/2025



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Gomes Ribeiro, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/10/2025, às 16:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0991834** e o código CRC **4B7F33BB**.

Dedico este trabalho Àquele cujo amor eterno equilibra tudo em nossas vidas.

Agradecimentos

Ao único Deus-Trino, Criador dos céus e da terra, seja dada toda honra, glória, louvor e ações de graças para todo o sempre. Amém! Te louvo, ó Senhor, por tudo o que tens feito por mim.

Ao meu pai, Oziel Batista, pelo homem que é: guerreiro, trabalhador, pai e exemplo na fé. À minha mãe, Viviane, mulher virtuosa, sábia e guerreira, pela motivação sem a qual eu não teria chegado até aqui. Aos meus irmãos, Vinícius e Alice, sou grato a Deus pela vida de vocês.

Ao meu pastor, Harley Taveira, homem de Deus, amigo, conselheiro e pai na fé, pelo acolhimento e imenso apoio que tem me dado até aqui. À sua esposa, Rute de Oliveira, e aos pequenos Talitha, Allana, Arthur, Miguel e Eliel, gratidão por todo apoio e carinho.

Aos irmãos da congregação do Palmares, agradeço a Deus pelo privilégio de conhecê-los.

Aos amigos e familiares que sempre me inspiraram e motivaram, gratidão eterna.

Aos professores da graduação, pela paciência, dedicação e apoio.

Aos meus orientadores, Roberto Ribeiro e Luciano Cota, obrigado pela oportunidade e por todos os conselhos, instruções e conhecimentos transmitidos.

*“Mas a vereda dos justos é como a
luz da aurora, que vai brilhando
mais e mais até ser dia perfeito.”*

(Provérbios 4:18)

Resumo

Em operações de mineração a céu aberto, a eficiente realocação de equipamentos de grande porte entre diferentes frentes de lavra é essencial para garantir a produtividade. Para isso, são utilizados caminhões do tipo prancha, capazes de realizar o transporte com segurança. Este trabalho trata do complexo problema de roteamento desses caminhões, caracterizado como um problema de roteamento de veículos com múltiplas restrições operacionais, incluindo coleta e entrega, janelas de tempo e frota heterogênea. Devido à limitação de métodos exatos em cenários de grande escala, propõe-se um algoritmo baseado na meta-heurística *Simulated Annealing* (SA). A metodologia foi validada com dados reais de operações da Vale S.A. e comparada com uma formulação matemática de referência. Considerando o contexto experimental estabelecido, os resultados sugerem que a abordagem baseada em SA produz soluções de alta qualidade com menor tempo computacional, evidenciando seu potencial como ferramenta para otimização logística no setor de mineração.

Palavras-chaves: Problema de coleta e entrega, janelas de tempo, *simulated annealing*, mineração a céu aberto, logística de caminhões prancha.

Abstract

In open-pit mining operations, the efficient relocation of large-scale equipment between different mining fronts is crucial to maintaining productivity. This process depends on specialized tow trucks capable of safely transporting these machines. This study addresses the complex routing problem of these trucks, formulated as a Vehicle Routing Problem (VRP) with multiple operational constraints, including pickup and delivery, time windows, and a heterogeneous fleet. Given the limitations of exact methods in large-scale scenarios, a heuristic approach based on the Simulated Annealing (SA) metaheuristic is proposed. The methodology was validated using real-world data from Vale S.A. and compared against a benchmark mathematical formulation. Considering the established experimental context, the results suggest that the SA-based approach yields high-quality solutions with lower computational time, highlighting its potential as an effective tool for logistical optimization in the mining industry.

Key-words: Pickup and delivery problem, time windows, simulated annealing, open-pit mining, tow trucks logistics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de solução para dois caminhões prancha	26
Figura 2 – Esquema de solução para o PDP	31
Figura 3 – Representação de solução	32
Figura 4 – Rotas convertidas para avaliação	32
Figura 5 – Método de inserção aplicado a um ponto α_i	35
Figura 6 – Método de inserção aplicado a um delimitador (-1)	35
Figura 7 – Representação do processo de busca do <i>simulated annealing</i>	36
Figura 8 – Solução obtida pelo algoritmo SA para o cenário 9	44

Lista de tabelas

Tabela 1 – Matriz de tempos de viagem entre os locais de coleta e entrega em minutos.	25
Tabela 2 – Exemplo de solução para dois caminhões prancha.	26
Tabela 3 – Conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão do modelo.	27
Tabela 4 – Parâmetros da Função Autoadaptativa.	40
Tabela 5 – Hiperparâmetros do Simulated Annealing.	40
Tabela 6 – Cenários de Teste.	41
Tabela 7 – Características dos equipamentos de mineração a serem transportados.	42
Tabela 8 – Características dos caminhões prancha disponíveis.	42
Tabela 9 – Resultados para Instâncias de Pequeno Porte.	43
Tabela 10 – Solução obtida pelo algoritmo SA para o cenário 9.	44
Tabela 11 – Resultados para Instâncias de Grande Porte.	45

Lista de abreviaturas e siglas

ACO *Ant Colony Optimization*

CPDPTW *Collaborative Pickup and Delivery Problem under Time Windows*

DPDP-TWHVNDDP *Dynamic Pickup and Delivery Problem with Time Windows, Heterogeneous Fleet Vehicles, No Depot, and Dynamic Priority*

GA *Genetic Algorithm*

GRASP *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*

HF *Heterogeneous Fleet*

HFVRP *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*

MILP *Mixed-Integer Linear Programming*

MPMDVRPTWHF *Multi-Period Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows and Heterogeneous Fleet*

MVRPMPDDR *Multi-Period Vehicle Routing Problem with Mixed Pickup and Delivery and Rest Areas*

PBACO *Priority-Based Ant Colony Optimization*

PDP *Pickup and Delivery Problem*

SA *Simulated Annealing*

TSP *Traveling Salesman Problem*

TW *Time Windows*

VNS *Variable Neighborhood Search*

VRP *Vehicle Routing Problem*

VRPPD *Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery*

VRPPDTW *Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery and Time Windows*

VRPSDPTW *Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pickup and Time Windows*

VRPTW *Vehicle Routing Problem with Time Windows*

VRPTW-PD-CP *Vehicle Routing Problem with Time Windows, Pickup and Delivery, Customers Priority*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivação	17
1.2	Objetivos	17
1.3	Organização do trabalho	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	O Problema de Roteamento de Veículos e suas Variantes	19
2.2	Trabalhos Correlatos	21
2.3	Considerações Finais	23
3	CARACTERIZAÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	24
3.1	Caracterização do Problema	24
3.2	Modelo Matemático de Referência	26
3.2.1	Função Objetivo	28
3.2.2	Restrições	28
3.3	Considerações Finais	29
4	DESENVOLVIMENTO	30
4.1	Definição de Solução para o PDP	30
4.2	Representação de Solução	31
4.3	Função de Avaliação	32
4.4	Construção de Solução Inicial	34
4.5	Movimento de Vizinhança	35
4.6	<i>Simulated Annealing</i> Adaptado para o Problema	35
4.7	Considerações Finais	38
5	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	39
5.1	Escolha dos Hiperparâmetros	39
5.2	Instâncias	41
5.3	Análise de resultados	42
5.4	Resultados para pequenas instâncias	43
5.5	Resultados para grandes instâncias	45
5.6	Considerações Finais	46
6	CONCLUSÃO	47
6.1	Trabalhos Futuros	47

REFERÊNCIAS 49

1 Introdução

Minas a céu aberto frequentemente se estendem por grandes áreas geográficas, abrigando múltiplas frentes de lavra operando simultaneamente. A exploração mineral, nesse contexto, demanda uma alocação eficiente dos recursos operacionais, especialmente dos equipamentos de grande porte como pás carregadeiras, perfuratrizes, escavadeiras e tratores de esteira. Como esses ativos são altamente especializados, a sua realocação estratégica entre frentes de lavra é essencial para garantir a continuidade e a produtividade do processo minerário (HUSTRULID; KUCHTA; MARTIN, 2013).

Devido às dimensões dos equipamentos, o transporte entre diferentes pontos da mina não pode ser realizado por meios convencionais. Para isso, são empregados caminhões do tipo prancha, os quais são capazes de transportar equipamentos de grande porte com segurança. Esse processo logístico, no entanto, é complexo e envolve múltiplas decisões interdependentes em um curto horizonte de planejamento, exigindo o desenvolvimento de métodos especializados de otimização para lidar com as diversas restrições envolvidas.

Um dos principais desafios logísticos nesse contexto é a natureza de um problema de coleta e entrega – *Pickup and Delivery Problem* (PDP), pois cada operação de transporte requer que um equipamento seja coletado de uma frente de lavra e entregue em outra. Esse problema configura-se como uma variante do clássico problema de roteamento de veículos – *Vehicle Routing Problem* (VRP), classificado como NP-difícil (SAVELSBERGH; SOL, 1995). Além disso, em cenários reais, cada caminhão prancha pode transportar apenas um equipamento por vez, caracterizando uma restrição de capacidade unitária.

Outro fator que contribui para a complexidade do problema é a presença de janelas de tempo associadas às operações de coleta e entrega. A janela de tempo de coleta e entrega de cada equipamento varia de acordo com as operações da mina, como exploração de novas frentes de lavra e deslocamento de equipamentos da mina para a oficina.

A inclusão dessa restrição caracteriza o problema como um roteamento de veículos com janelas de tempo – *Vehicle Routing Problem with Time Windows* (VRPTW), o que dificulta encontrar soluções viáveis em tempo hábil do ponto de vista algorítmico (DESROCHERS; DESROSIERS; SOLOMON, 1992). Modelar e respeitar essas janelas temporais é fundamental para garantir a viabilidade do plano logístico.

Ademais, outro aspecto crítico refere-se às restrições operacionais associadas às atividades de carregamento e descarregamento dos equipamentos de mineração. Isso inclui os tempos operacionais necessários para cada etapa, como o tempo de construção de rampa para acesso à prancha — geralmente feita por uma carregadeira utilizando materiais como terra e escória —, o qual pode variar conforme a configuração do caminhão prancha

utilizado; o tempo de carregamento e descarregamento; bem como o tempo dedicado à amarração e desamarração dos equipamentos na prancha, que depende do tipo de equipamento a ser transportado. Essas restrições temporais impõem limitações que elevam o custo das rotas e colocam o problema em um patamar de dificuldade ainda maior, especialmente no que se refere à obtenção de soluções viáveis com baixo custo.

Além das restrições anteriores, destaca-se também a heterogeneidade da frota de transporte. Caminhões prancha podem variar em capacidade de carga, tipo de reboque, autonomia e velocidade, o que implica que nem todo veículo é adequado para transportar qualquer tipo de equipamento. Essa variabilidade aumenta a dificuldade na obtenção de soluções ótimas em tempo computacionalmente viável, caracterizando o problema como um roteamento de veículos com frota heterogênea – *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem* (HFVRP). Isso torna necessária a seleção criteriosa dos veículos para cada tarefa, levando em consideração as especificações técnicas de ambos – veículo e equipamento (BALDACCI; BATTARRA; VIGO, 2008).

Em suma, o problema abordado neste trabalho caracteriza-se como uma variante do VRP, com múltiplas extensões simultâneas: coleta e entrega, janelas de tempo, restrições operacionais e frota heterogênea com capacidade unitária. Até onde se sabe, apenas os estudos de Rezende (2022) e Rezende (2023) abordaram essas características. Em ambos estudos, foi proposta uma formulação do tipo *Mixed-Integer Linear Programming* (MILP), cujo objetivo é minimizar a duração da rota mais longa. Essa estratégia tem como propósito gerar rotas balanceadas, promovendo uma melhor distribuição das jornadas de trabalho entre os motoristas.

Para validar o modelo proposto, Rezende (2023) conduziu um estudo de caso em uma mina da Vale S.A., localizada no complexo mineral de Carajás, no estado do Pará. As instâncias avaliadas representaram situações operacionais reais e envolveram, no máximo, 8 equipamentos de mineração e 4 caminhões prancha. A premissa era que os equipamentos deveriam ser transportados no próximo turno de trabalho, com duração de 9 horas. A implementação foi realizada no solver Gurobi® (Gurobi Optimization, LLC, 2024), com tempos-limite de execução de 1 e 2 horas, considerados adequados para o contexto de tomada de decisão durante as trocas de turno.

Os resultados obtidos mostraram que, em seis dos nove cenários analisados, o modelo alcançou solução ótima dentro de 1 hora ($GAP = 0$). Com o tempo estendido para 2 horas, foi possível encontrar a solução ótima em mais um cenário. Apenas em dois casos o modelo não comprovou a otimalidade ($GAP > 0$). Esses resultados indicam um bom desempenho do modelo para instâncias de pequeno porte, mas também evidenciam a dificuldade em escalar a abordagem exata para cenários maiores e de maior apelo prático.

Diante dessas limitações, este trabalho propõe o desenvolvimento de um algoritmo baseado na meta-heurística *Simulated Annealing* (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI,

1983), com o objetivo de viabilizar a resolução do problema em instâncias de grande porte. A metodologia será validada por meio da comparação com os resultados obtidos em [Rezende \(2023\)](#), utilizando como base as mesmas premissas operacionais. Com isso, pretende-se avaliar a qualidade das soluções encontradas pelo algoritmo, bem como sua capacidade de gerar resultados em tempos compatíveis com a aplicação prática do problema.

1.1 Motivação

O planejamento eficiente do transporte de equipamentos pesados é essencial para a produtividade e a redução de custos na mineração. No Complexo Carajás, da Vale S.A., conforme mencionado por [Rezende \(2023\)](#), o roteamento dos caminhões prancha ainda é realizado manualmente por uma equipe de planejamento, por meio de uma estratégia de tentativa e erro. Esse método, embora funcional, exige tempo significativo e não garante a obtenção de soluções de alta qualidade, sobretudo devido à natureza do problema, classificado como NP-difícil ([SAVELSBERGH; SOL, 1995](#)).

Essa limitação operacional, somada à inexistência, no estado da arte, de metodologias heurísticas específicas para o problema em estudo, evidencia uma lacuna relevante tanto na prática industrial quanto na literatura científica. Assim, o desenvolvimento de uma abordagem de otimização heurística não apenas contribui para avanços acadêmicos, mas também possui potencial de impacto direto na eficiência das operações de mineração.

1.2 Objetivos

O presente trabalho consiste em desenvolver e validar um algoritmo baseado em meta-heurística para o problema de roteamento de caminhões prancha em mina a céu aberto.

Este trabalho possui aos seguintes objetivos específicos:

- Avaliar um modelo matemático de otimização direcionado ao roteamento de caminhões prancha em mina a céu aberto, a fim de compreender suas limitações.
- Desenvolver um algoritmo baseado em meta-heurística apropriado para o problema, capaz de solucionar instâncias de grande porte e em tempo hábil.
- Validar o algoritmo desenvolvido a partir de testes computacionais com instância reais do problema.

1.3 Organização do trabalho

O restante deste trabalho é organizado como se segue. O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, na qual são introduzidos os conceitos fundamentais relacionados ao VRP e suas variantes, bem como uma análise dos trabalhos correlatos mais relevantes, que servem de base para contextualizar e justificar a pesquisa realizada.

Na sequência, o Capítulo 3 descreve a caracterização e formulação do problema de transporte de equipamentos de grande porte em minas a céu aberto, incluindo as especificidades do cenário estudado e a apresentação do modelo matemático de referência.

O Capítulo 4 trata do desenvolvimento do algoritmo proposto, baseado na meta-heurística *Simulated Annealing*. São discutidas a representação de solução, a função de avaliação, o método construtivo adotado, os movimentos de vizinhança empregados e, por fim, a adaptação do SA para o domínio específico abordado.

Em seguida, o Capítulo 5 apresenta os experimentos computacionais realizados, contemplando a escolha dos hiperparâmetros, a descrição das instâncias utilizadas, os procedimentos de análise e os resultados obtidos para instâncias de pequeno e grande porte, com a devida comparação e interpretação.

Por fim, o Capítulo 6 reúne as conclusões deste trabalho e aponta possíveis direções para trabalhos futuros, destacando as contribuições alcançadas e as oportunidades de aprimoramento da metodologia proposta.

2 Revisão bibliográfica

Este capítulo constrói a fundamentação teórica que sustenta esta pesquisa. A revisão está organizada em duas seções principais que, em conjunto, contextualizam o problema e posicionam este trabalho frente ao estado da arte. A Seção 2.1 introduz o **VRP**, detalhando sua definição clássica, sua complexidade computacional e a variante específica abordada neste estudo, com suas múltiplas restrições integradas. Em seguida, a Seção 2.2 analisa trabalhos correlatos recentes na literatura, identificando as principais abordagens, modelos e métodos de solução empregados em problemas análogos. O objetivo é mapear o cenário científico atual e evidenciar a lacuna que esta pesquisa se propõe a preencher.

2.1 O Problema de Roteamento de Veículos e suas Variantes

O problema de roteamento de veículos (**VRP**), é um dos problemas centrais em logística e otimização de transportes. Ele pode ser entendido como uma generalização do problema do caixeiro viajante – *Traveling Salesman Problem (TSP)*, no qual se busca determinar a rota mais curta que permita a um único viajante visitar um conjunto de localidades exatamente uma vez e retornar ao ponto inicial ([LAWLER, 1985](#)).

No **VRP**, em vez de um único agente, considera-se uma frota de veículos que deve atender a múltiplos pontos de demanda, partindo de um ou mais depósitos. O objetivo é definir, para cada veículo, o conjunto de pontos que deverá visitar e a sequência de atendimento, de modo a minimizar o custo total, que pode estar relacionado à distância percorrida, ao tempo de operação ou a outros fatores relevantes ([TOTH; VIGO, 2014](#)).

Assim como o **TSP**, o **VRP** é considerado um problema NP-difícil, o que implica que, até o momento, não se conhece nenhum algoritmo capaz de resolvê-lo com complexidade polinomial. Conseqüentemente, à medida que o número de pontos aumenta, o conjunto de soluções possíveis cresce de maneira exponencial, tornando impraticável o uso de algoritmos exatos para instâncias de larga escala ([GAREY; JOHNSON, 1979](#)). Ferramentas como Gurobi® ([Gurobi Optimization, LLC, 2024](#)) ou CPLEX® ([IBM ILOG CPLEX Division, 2022](#)) conseguem resolver instâncias de pequena ou média escala de maneira ótima, mas rapidamente se tornam inviáveis em cenários maiores.

Existem diversas variantes do **VRP**, amplamente exploradas na literatura. Uma dessas variantes é o problema de roteamento de veículos com coleta e entrega – *Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery (VRPPD)*. Embora a literatura apresente modelos matemáticos e algoritmos para o **VRPPD**, observa-se uma lacuna na sua aplicação específica à indústria de mineração.

Dell’Amico, Righini e Salani (2006) propuseram um resolvidor genérico baseado em *branch-price-and-cut*, capaz de tratar diversas variantes do VRP, mas com limitações ao lidar com variantes mais realistas e integradas, como o problema de roteamento de veículos com coleta e entrega e janelas de tempo – *Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery and Time Windows* (VRPPDTW). De modo semelhante, Pessoa et al. (2020) apresentaram um algoritmo exato para o VRPPD com até 40 clientes, indicando avanços importantes, porém ainda restritos em termos de escala e extensão.

Por outro lado, alguns trabalhos vêm buscando integrar múltiplas restrições em cenários práticos. Louati et al. (2021) modelaram um problema real de distribuição em uma empresa do setor avícola, considerando simultaneamente janelas de tempo, capacidades, e tempos de carga e descarga, oferecendo modelos do tipo MILP e obtendo resultados satisfatórios. De modo complementar, Galindres, Guimarães e Gallego-Rendón (2023) e Lozano et al. (2016) destacaram a importância de incorporar restrições operacionais e múltiplos critérios objetivos – econômicos, ambientais e sociais – para aproximar o VRPPD de aplicações reais.

Rios et al. (2021) exploraram um VRP com coletas e entregas estocásticas em múltiplos depósitos, empregando heurísticas híbridas eficazes frente à complexidade e à incerteza da demanda. Dünnweber, Stadler e Nita (2023) propuseram um algoritmo genético híbrido para o VRPPD capacitado, integrando dados reais via API, o que reforça a viabilidade de métodos heurísticos em contextos operacionais realistas. Essas abordagens reforçam a necessidade de desenvolver métodos capazes de lidar simultaneamente com múltiplas restrições práticas, como se propõe neste trabalho.

O problema estudado neste trabalho trata-se de uma variante do VRP que integra simultaneamente:

- Natureza de coleta e entrega – PDP, na qual cada solicitação de transporte possui um ponto de origem/coleta e um ponto de destino/entrega (KOÇ; LAPORTE; TÜKENMEZ, 2020);
- Janelas de tempo – *Time Windows* (TW), que estabelecem períodos específicos para coleta e entrega de cada equipamento (LIU et al., 2023b);
- Restrições operacionais, como tempos de carregamento, descarregamento e preparação (REZENDE, 2023);
- Frota heterogênea – *Heterogeneous Fleet* (HF), em que veículos apresentam diferentes capacidades e características (RAN; LI; ZHAO, 2022);
- Capacidade unitária, permitindo o transporte de apenas um equipamento por vez (GRONALT; HIRSCH, 2007).

2.2 Trabalhos Correlatos

Nos últimos seis anos, diversos estudos têm explorado variantes do **VRP** com coleta e entrega, janelas de tempo e frota heterogênea, incorporando restrições práticas e propondo métodos matemáticos e heurísticos para solucioná-las.

O estudo de [Phuc e Thao \(2021\)](#) abordou o problema de roteamento de veículos com múltiplos períodos, múltiplos depósitos, janelas de tempo e frota heterogênea – *Multi-Period Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows and Heterogeneous Fleet* (**MPMDVRPTWHF**), incluindo restrições de precedência entre coleta e entrega, capacidade veicular, limite máximo de jornada e custos diferenciados por veículo. Os autores propuseram um modelo matemático e uma meta-heurística baseada em *Ant Colony Optimization* (**ACO**), adaptada para verificar a viabilidade a cada expansão de rota. Testes em instâncias-benchmark indicaram desempenho elevado, com *gap* médio de apenas 1,16% em relação ao método exato (**CPLEX**) e boa escalabilidade em casos reais, solucionando problemas com cerca de mil clientes em 15 a 17 minutos.

Em [Kamsopa et al. \(2021\)](#), foi estudado o problema de roteamento de veículos multi-período com coletas e entregas mistas, janelas de tempo semi-flexíveis, frota heterogênea, limite de duração de rota e a inclusão inédita de áreas de descanso para veículos – *Multi-Period Vehicle Routing Problem with Mixed Pickup and Delivery and Rest Areas* (**MVRPMPDDR**). O objetivo era maximizar o lucro líquido, considerando receitas e custos operacionais. Propôs-se um modelo **MILP** para instâncias pequenas e, para maior escalabilidade, uma meta-heurística híbrida combinando *Genetic Algorithm* (**GA**) e *Variable Neighborhood Search* (**VNS**), denominada GA-VNS, em que o **VNS** substituiu a mutação. Os experimentos mostraram que o **MILP** atingiu ótimos para instâncias reduzidas, enquanto o GA-VNS superou o desempenho individual do **GA** e do **VNS**, alcançando soluções próximas ao ótimo (eficiência média de 97,96%) e ganhos de até 3,18% em instâncias grandes.

[Su et al. \(2022\)](#) investigaram o problema dinâmico de coleta e entrega com janelas de tempo, frota heterogênea de veículos, sem depósito e com prioridade dinâmica – *Dynamic Pickup and Delivery Problem with Time Windows, Heterogeneous Fleet Vehicles, No Depot, and Dynamic Priority* (**DPDP-TWHVNDP**) — aplicado a plataformas logísticas compartilhadas. Os autores propuseram um modelo **MILP** e um algoritmo híbrido paralelo baseado em *scatter search*, combinado com **GA**, **VNS** e *tabu search*. Testes com instâncias estendidas de Li & Lim e dados reais mostraram que a abordagem solucionou problemas com até mil requisições, superando métodos conhecidos em mais de 35% na distância total e 30% na utilização de veículos.

O trabalho de [Wang et al. \(2019\)](#) tratou o problema colaborativo de coleta e entrega com janelas de tempo – *Collaborative Pickup and Delivery Problem under Time Windows* (**CPDPTW**), visando otimizar redes logísticas por meio da cooperação entre

fornecedores, prestadores de serviços logísticos e clientes. O modelo multiobjetivo buscava reduzir custos e frota, ao mesmo tempo em que maximizava lucros e a estabilidade das alianças. A metodologia combinou: (i) *Improved k-means* para alocação inicial de clientes; (ii) *Demand-and-Time-based Dijkstra Algorithm* (DTDA) para rotas iniciais; e (iii) *Improved NSGA-II* para otimização final, além de um modelo aprimorado de valor de Shapley para distribuição justa de lucros. Um estudo de caso em Chongqing (China) mostrou que alianças amplas reduzem significativamente custos e distâncias em relação a subalianças.

Madankumar e Rajendran (2019) propuseram um modelo MILP para o problema de roteamento de veículos com entregas e coletas simultâneas e janelas de tempo – *Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pickup and Time Windows* (VRPSDPTW), com frota heterogênea, visando minimizar custos totais de deslocamento e despacho. A formulação reduziu o número de variáveis binárias usando variáveis bidimensionais, aumentando a eficiência computacional. Testes com instâncias de Solomon mostraram que o modelo gerou *lower bounds* mais apertados e, na maioria dos casos, tempos de execução menores que modelos anteriores, sendo competitivo para problemas de pequeno e médio porte e útil como *benchmark* para heurísticas.

Finalmente, Tanash e As'Ad (2025) abordaram o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo, coleta e entrega, e prioridade de clientes – *Vehicle Routing Problem with Time Windows, Pickup and Delivery, Customers Priority* (VRPTW-PD-CP), com frota heterogênea. O modelo MILP desenvolvido buscava minimizar custos de transporte, penalidades por violação de prioridade e janelas, custos fixos de veículos e ociosidade. Devido à complexidade, foram desenvolvidos dois métodos heurísticos híbridos: um baseado em *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) e outro em *Priority-Based Ant Colony Optimization* (PBACO), ambos seguidos de melhoria via VNS. Com instâncias adaptadas de Solomon (até 80 clientes), os métodos heurísticos obtiveram desvios médios inferiores a 0,6% da melhor solução conhecida e tempos significativamente menores que o CPLEX, com o GRASP destacando-se em escalabilidade e o PBACO em desempenho em instâncias médias.

Embora esses trabalhos tenham explorado variantes do VRP com coleta e entrega, frota heterogênea e janelas de tempo, o problema abordado neste estudo incorpora, adicionalmente, capacidade unitária e restrições operacionais específicas relacionadas às operações de carga e descarga de equipamentos pesados em minas a céu aberto. Trata-se de um problema recente na literatura, apresentado exclusivamente pelo mestrando Diego Dinarte Rezende, em sua dissertação de 2023 (REZENDE, 2023) e no *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* de 2022 (REZENDE, 2022). Nesse contexto, Rezende formulou um modelo MILP para o roteamento de caminhões prancha, alcançando resultados satisfatórios nos cenários analisados e evidenciando uma lacuna relevante na literatura, que o presente

trabalho busca explorar.

2.3 Considerações Finais

Este capítulo apresentou a fundamentação teórica do trabalho, partindo da conceitualização do [VRP](#) e suas variantes até a análise de trabalhos correlatos recentes. A revisão evidenciou não apenas a complexidade inerente ao problema, classificado como NP-difícil, mas também a existência de uma lacuna específica na literatura no que tange à aplicação de modelos de otimização que integram simultaneamente as restrições de coleta e entrega, janelas de tempo, frota heterogênea, capacidade unitária e tempos operacionais no contexto da mineração a céu aberto. Embora existam estudos que abordam subconjuntos dessas características, a combinação particular investigada aqui, introduzida por [Rezende \(2023\)](#), permanece pouco explorada. Com base neste panorama, os capítulos seguintes detalharam a metodologia proposta para preencher essa lacuna, incluindo o modelo matemático de referência e a abordagem de solução desenvolvida.

3 Caracterização e Formulação do Problema

Este capítulo se dedica à caracterização e formulação do problema de roteamento de caminhões prancha em mina a céu aberto, fundamentando-se no estudo de [Rezende \(2023\)](#). A Seção 3.1 detalha as especificidades do problema, incluindo a frota de caminhões, os equipamentos a serem transportados e o objetivo de otimização. Em seguida, a Seção 3.2 apresenta o modelo matemático de referência, descrevendo seus conjuntos, parâmetros, variáveis de decisão, função objetivo e restrições.

3.1 Caracterização do Problema

Conforme descrito em [Rezende \(2023\)](#), o problema de roteamento de caminhões prancha em minas a céu aberto apresenta as seguintes características:

1. Caminhões prancha (\mathcal{H})
 - a) Existe um conjunto de caminhões prancha responsáveis pela coleta e entrega de equipamentos de mineração;
 - b) A frota de caminhões prancha \mathcal{H} é heterogênea;
 - c) Cada caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$ tem uma capacidade de carga LC_k em toneladas;
 - d) Cada caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$ tem uma localização no início do horizonte de planejamento;
 - e) Existe um tempo TBR_k para construir a rampa de carga e descarga em cada caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$. A rampa é feita por uma carregadeira utilizando materiais como terra e escória.
2. Equipamentos de mineração a serem transportados (\mathcal{E})
 - a) Existe um conjunto de equipamentos de mineração \mathcal{E} que precisam ser transportados por caminhões prancha por longas distâncias;
 - b) Cada equipamento deverá ser coletado em um local e , logo após, deverá ser transportado até o local de entrega;
 - c) Cada equipamento a ser coletado ou entregue no local i tem peso EW_i em toneladas;
 - d) Cada equipamento a ser coletado ou entregue no local i necessita de um tempo LT_i , em minutos, para prender ou desprender as amarrações no caminhão prancha;

- e) Existe um tempo de carga e descarga LU_i , em minutos, para cada equipamento a ser coletado ou entregue no local i .

O objetivo deste problema é determinar rotas para os caminhões prancha (\mathcal{H}) de modo a garantir o transporte de todos os equipamentos de mineração (\mathcal{E}), minimizando a duração da rota com o maior tempo de percurso.

A fim de facilitar a compreensão do problema de roteamento de caminhões prancha, [Rezende \(2023\)](#) apresenta um exemplo simplificado do problema. Nesse exemplo, quatro equipamentos de mineração devem ser transportados por dois caminhões pranchas. Foram desconsiderados o tempo de carga e descarga dos equipamentos, o tempo para prender e desprender as amarrações, bem como o tempo de construção da rampa.

A Tabela 1 exibe a matriz de tempos de viagem entre os locais de coleta e entrega, expressos em minutos. Os locais de coleta são identificados pela letra P, e os locais de entrega, pela letra D. O equipamento de mineração localizado em P1 deve ser recolhido e entregue em D1, o de P2 em D2, e assim sucessivamente. O termo DEP corresponde ao depósito.

Tabela 1 – Matriz de tempos de viagem entre os locais de coleta e entrega em minutos.

	Coleta					Entrega				
	DEP	P1	P2	P3	P4	D1	D2	D3	D4	DEP
DEP	0	38	56	18	49	56	25	21	50	0
P1	38	0	32	41	46	18	51	17	88	38
P2	56	32	0	66	77	29	76	39	98	56
P3	18	41	66	0	33	58	10	27	57	18
P4	49	46	77	33	0	56	36	44	89	49
D1	56	18	29	58	56	0	68	35	105	56
D2	25	51	76	10	36	68	0	37	52	25
D3	21	17	39	27	44	35	37	0	70	21
D4	50	88	98	57	89	105	52	70	0	50
DEP	0	38	56	18	49	56	25	21	50	0

Fonte: [Rezende \(2023\)](#)

A Tabela 2 apresenta uma possível solução para o exemplo simplificado. O caminhão prancha 1 parte do depósito para o local P1, coleta o equipamento e se desloca até D1 para entregá-lo; em seguida, dirige-se de D1 a P2, coleta o equipamento em P2 e o entrega em D2, finalizando a rota com o retorno ao depósito, totalizando 186 minutos de jornada de trabalho. Por sua vez, o caminhão prancha 2 parte do depósito para P3, coleta o equipamento e o entrega em D3; depois, dirige-se de D3 a P4, coleta o equipamento em P4 e o entrega em D4, retornando ao depósito ao final da rota, totalizando 228 minutos de jornada de trabalho. Como a rota do caminhão prancha 2 teve o maior tempo de percurso, ou seja, 228 minutos, o valor da função objetivo para essa solução corresponde a 228.

A Figura 1 ilustra a solução do problema simplificado no ambiente de mineração, na qual os caminhões prancha 1 e 2 são identificados pelos termos em inglês *Heavy Hauler 1* e *Heavy Hauler 2*, respectivamente.

Tabela 2 – Exemplo de solução para dois caminhões prancha.

Caminhão Prancha	Rotas	Custo (min)
1	DEP \Rightarrow P1 \Rightarrow D1 \Rightarrow P2 \Rightarrow D2 \Rightarrow DEP	186
2	DEP \Rightarrow P3 \Rightarrow D3 \Rightarrow P4 \Rightarrow D4 \Rightarrow DEP	228

Fonte: Rezende (2023)

Figura 1 – Exemplo de solução para dois caminhões prancha



Fonte: Rezende (2023)

3.2 Modelo Matemático de Referência

O modelo MILP detalhado em Rezende (2023) serve como base para este trabalho e é apresentado nesta seção. Os conjuntos, parâmetros de entrada e variáveis de decisão estão organizados na Tabela 3, enquanto a função objetivo e as restrições são apresentadas a seguir.

Tabela 3 – Conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão do modelo.

Conjuntos	
\mathcal{H}	Conjunto de caminhões prancha.
\mathcal{P}	Conjunto de locais de coleta.
\mathcal{D}	Conjunto de locais de entrega.
\mathcal{L}	$\mathcal{P} \cup \mathcal{D}$.
\mathcal{V}	$\mathcal{P} \cup \mathcal{D} \cup \{v_0\} \cup \{v_{2n+1}\}$, no qual n corresponde ao número de equipamentos que serão transportados, v_0 corresponde ao local de partida dos caminhões prancha, e v_{2n+1} corresponde ao local de retorno dos caminhões prancha ao final da rota.
Parâmetros	
TT_{ij}	Tempo de viagem entre dois vértices $i \in \mathcal{V}$ e $j \in \mathcal{V}$ (minutos)
LT_i	Tempo necessário para prender ou soltar as amarrações do equipamento de mineração a ser coletado ou entregue em $i \in \mathcal{L}$ (minutos)
LU_i	Tempo para carregamento ou descarregamento do equipamento de mineração a ser coletado ou entregue em $i \in \mathcal{L}$ (minutos)
TBR_k	Tempo para construir a rampa de carregamento e descarregamento do caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$ (minutos)
EW_i	Peso do equipamento de mineração a ser coletado ou entregue em $i \in \mathcal{L}$ (toneladas)
LC_k	Capacidade de carga do caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$ (toneladas)
A_i	Início da janela de tempo para transporte do equipamento de mineração a ser coletado ou entregue em $i \in \mathcal{V}$
B_i	Fim da janela de tempo para transporte do equipamento de mineração a ser coletado ou entregue em $i \in \mathcal{V}$
Variáveis de Decisão	
x_{ijk}	Variável binária que assume 1 se o caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$ parte do local $i \in \mathcal{V}$ em direção ao local $j \in \mathcal{V}$, 0 caso contrário.
w_{ik}	Variável que registra o instante em que o caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$ visita o local $i \in \mathcal{V}$
s_{ik}	Variável que armazena o tempo gasto pelo caminhão prancha $k \in \mathcal{H}$ para coletar ou entregar um equipamento de mineração no local $i \in \mathcal{L}$ (minutos)
mrd	Variável que armazena a duração da rota com maior tempo de percurso.

Fonte: [Rezende \(2023\)](#)

3.2.1 Função Objetivo

A equação (3.1) apresenta a função objetivo do modelo, cujo objetivo é minimizar a duração da rota com o maior tempo de percurso. Esse critério favorece o balanceamento das rotas, garantindo que o encerramento da operação coincida com o término da maior delas.

$$\text{Min } mrd \quad (3.1)$$

3.2.2 Restrições

$$\sum_{k \in \mathcal{H}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} - [v_0] \\ j \neq i}} x_{ijk} = 1, \forall i \in \mathcal{L} \quad (3.2)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} - [v_{2n+1}] \\ i \neq r}} x_{irk} - \sum_{\substack{j \in \mathcal{V} - [v_0] \\ j \neq r}} x_{rjk} = 0, \forall k \in \mathcal{H}, \forall r \in \mathcal{L} \quad (3.3)$$

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{V} - [v_{2n+1}] \\ i \neq j}} x_{ijk} - \sum_{\substack{i \in \mathcal{L} \\ i \neq j+n}} x_{i,j+n,k} = 0, \forall k \in \mathcal{H}, \forall j \in \mathcal{P} \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{V} - [v_0]} x_{0jk} = 1, \forall k \in \mathcal{H} \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V} - [v_{2n+1}]} x_{i,2n+1,k} = 1, \forall k \in \mathcal{H} \quad (3.6)$$

$$s_{0,k} = s_{2n+1,k} = 0, \forall k \in \mathcal{H} \quad (3.7)$$

$$w_{0k} = 0, \forall k \in \mathcal{H} \quad (3.8)$$

$$TBR_k + LU_i + LT_i = s_{ik}, \&\forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{L} \quad (3.9)$$

$$w_{ik} + s_{ik} + TT_{ij} - B_i(1 - x_{ijk}) \leq w_{jk}, \\ \forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathcal{V} \quad (3.10)$$

$$w_{ik} + s_{ik} + TT_{i,n+i} = w_{n+i,k}, \forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{P} \quad (3.11)$$

$$mrd \geq w_{2n+1,k}, \forall k \in \mathcal{H} \quad (3.12)$$

$$x_{ijk}EW_j \leq LC_k, \forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathcal{L} \quad (3.13)$$

$$A_i \leq w_{ik}, \forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{V} \quad (3.14)$$

$$w_{ik} + s_{ik} \leq B_i, \forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{V} \quad (3.15)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathcal{V} \quad (3.16)$$

$$s_{ik} \geq 0, \forall k \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathcal{V} \quad (3.17)$$

A Modelo garante que cada local seja visitado apenas uma vez, conforme estipulado pelas restrições (3.2). Além disso, o fluxo da rede é assegurado pelas restrições (3.3). A

entrega dos equipamentos de mineração coletados pelos caminhões prancha é garantida pelas restrições (3.4). As restrições (3.5) e (3.6) asseguram que cada caminhão prancha saía e retorne ao depósito apenas uma vez. A restrição (3.7) impede qualquer atividade no depósito. Ademais, a restrição (3.8) define que a partida de todos os caminhões prancha ocorre no instante zero.

As restrições (3.9) calculam o tempo total em que cada caminhão prancha permanece nos locais de carga e descarga. As restrições (3.10) garantem que o momento de visita a um local para coleta ou entrega de equipamentos de mineração ocorra após a visita ao local anterior, considerando o tempo de carregamento e deslocamento até o local atual. As restrições (3.11) asseguram que a entrega do equipamento de mineração ocorra imediatamente após a coleta, somando o tempo de carregamento e transporte.

Além disso, as restrições (3.12) determinam a duração da rota com o maior tempo de percurso, enquanto as restrições (3.13) garantem que os caminhões prancha transportem equipamentos dentro de suas capacidades. As restrições (3.15) e (3.14) asseguram que o horário de chegada para a coleta esteja dentro da janela de tempo estabelecida e que a entrega não ultrapasse o limite dessa janela. Por fim, as restrições (3.16) e (3.17) definem os domínios das variáveis x e s , respectivamente.

3.3 Considerações Finais

Este capítulo, ao detalhar a caracterização do problema e apresentar a formulação matemática, estabelece as bases sólidas sobre as quais a metodologia proposta no restante deste trabalho se apoia. O modelo matemático de referência apresentado, proposto por [Rezende \(2023\)](#), fornece a estrutura formal utilizada como ponto de partida para o desenvolvimento do algoritmo baseado em meta-heurística para o problema em estudo.

4 Desenvolvimento

Este capítulo apresenta o desenvolvimento do trabalho, descrevendo os elementos que compõem o algoritmo baseado em *Simulated Annealing*. Na Seção 4.1, é introduzida a definição de uma solução para o problema de entrega e coleta (PDP) por meio de um exemplo esquemático, que facilita a compreensão da estrutura básica das rotas e da relação entre os pontos de coleta e entrega. A partir desse exemplo, são detalhados conceitos fundamentais, como solicitação de serviço e restrições de precedência. Em seguida, a Seção 4.2 aprofunda esses conceitos, apresentando a representação de solução adotada para o problema. A Seção 4.3 descreve a função de avaliação utilizada para mensurar a qualidade das soluções, levando em conta custos e penalidades. Já a Seção 4.4 apresenta a heurística utilizada para gerar a solução inicial. Por fim, a Seção 4.5 expõe os movimentos de vizinhança aplicados na busca por soluções melhores, e a Seção 4.6 detalha a adaptação da meta-heurística SA ao problema.

4.1 Definição de Solução para o PDP

O PDP é uma extensão do clássico VRP, no qual cada solicitação de serviço envolve dois locais distintos: um ponto de coleta (*pickup*) e um ponto de entrega (*delivery*). Além disso, é necessário que sejam obedecidas tanto as restrições de precedência — isto é, a coleta deve sempre anteceder a entrega — quanto as restrições de capacidade dos veículos envolvidos.

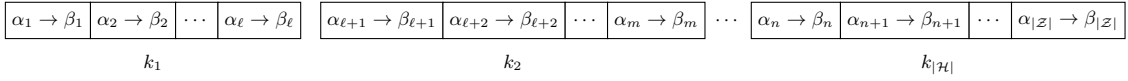
Seja uma solicitação de serviço representada por $\alpha_i \rightarrow \beta_i$, na qual $\alpha_i \in \mathcal{P}$ (conjunto de locais de coleta) e $\beta_i \in \mathcal{D}$ (conjunto de locais de entrega). O índice i indica a i -ésima solicitação de serviço. Assim, o equipamento disponível no local α_i deve ser coletado e posteriormente entregue em β_i .

Seja \mathcal{Z} o conjunto de todas as solicitações de serviço programadas para o próximo turno de trabalho em uma operação de mina, e \mathcal{H} o conjunto de caminhões prancha disponíveis, sendo k_i o i -ésimo caminhão, com $k_i \in \mathcal{H}$.

Dada uma permutação $\pi(\mathcal{Z})$ das solicitações de serviço, uma solução viável para o PDP consiste na distribuição ordenada e proporcional dessas solicitações entre os caminhões em \mathcal{H} , desde que sejam respeitadas as restrições do problema. A Figura 2 apresenta um exemplo esquemático dessa distribuição, em que k_i representa o i -ésimo caminhão prancha em \mathcal{H} , e cada bloco no vetor corresponde a uma solicitação de serviço a ser atendida. Assim, a rota do caminhão k_1 contempla as solicitações de índice 1 a ℓ , a rota do caminhão k_2 contempla as solicitações de índice $\ell + 1$ a m , e assim sucessivamente, até que a rota do

último caminhão $k_{|\mathcal{H}|}$ contemple a última solicitação $\alpha_{|\mathcal{Z}|} \rightarrow \beta_{|\mathcal{Z}|}$.

Figura 2 – Esquema de solução para o PDP



Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, para que uma solução do PDP possa ser manipulada computacionalmente, é necessário adotar uma representação adequada, que envolva tanto a definição das rotas para cada caminhão prancha disponível quanto a ordenação das coletas e entregas em cada rota, de modo a garantir a viabilidade da solução conforme as restrições estabelecidas pelo PDP.

4.2 Representação de Solução

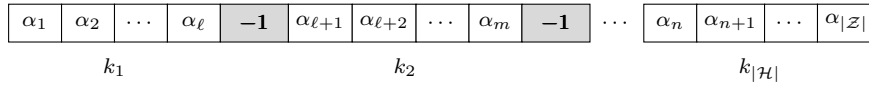
No início de cada turno, os caminhões prancha disponíveis encontram-se no ponto de origem v_0 . O modelo proposto não impõe a utilização de todos os veículos, de modo que cada caminhão disponível pode permanecer no depósito ou ser despachado para atender a uma ou mais solicitações de serviço, retornando ao depósito ao final de sua rota.

Dada uma solicitação de serviço representada por $\alpha_i \rightarrow \beta_i$, é possível inferir o ponto de entrega β_i a partir do ponto de coleta α_i , uma vez que ambos possuem o mesmo índice i . Com base nessa característica, este trabalho adota uma representação simplificada, na qual os pontos de entrega $\beta_i \in \mathcal{D}$, para $0 < i \leq |\mathcal{D}|$, bem como o ponto de origem v_0 , são omitidos.

Essa escolha visa preservar a integridade da solução durante a geração de vizinhança, uma vez que os pontos de entrega e o ponto de origem são elementos críticos. Qualquer realocação incorreta desses elementos comprometeria a viabilidade da solução, pois os pontos de entrega devem ser necessariamente precedidos por seus respectivos pontos de coleta, e o ponto de origem deve sempre estar posicionado nas extremidades das rotas.

A Figura 3 apresenta a representação de solução, que consiste em um vetor que organiza as rotas atribuídas a cada caminhão prancha k_i , com $0 < i \leq |\mathcal{H}|$ e $k_i \in \mathcal{H}$. As rotas são separadas por um delimitador específico (-1). Dentro de cada rota, as posições do vetor representam pontos de coleta α_i , a partir dos quais é possível deduzir os respectivos pontos de entrega β_i , conforme descrito anteriormente. Assim, o caminhão k_1 atende às solicitações que contenham os pontos de coleta de índices 1 a ℓ , na ordem em que aparecem no vetor. O caminhão k_2 , por sua vez, atende às solicitações que contenham os pontos de coleta de índices $\ell + 1$ a m , também na ordem em que aparecem no vetor, e assim sucessivamente, até que o último caminhão $k_{|\mathcal{H}|}$ atenda à solicitação que contenha o último ponto de coleta $\alpha_{|\mathcal{Z}|}$.

Figura 3 – Representação de solução

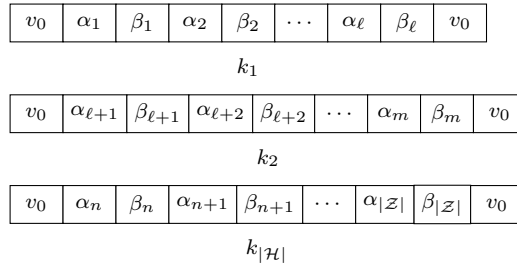


Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Função de Avaliação

Para que uma solução possa ser avaliada, é necessário convertê-la de sua maneira representacional inicial para uma versão expandida, na qual o ponto de origem v_0 e os pontos de entrega $\beta_i \in \mathcal{D}$, com $0 < i \leq |\mathcal{D}|$, sejam explicitamente incluídos nas rotas de cada caminhão prancha $k_i \in \mathcal{H}$, com $0 < i \leq |\mathcal{H}|$. A Figura 4 apresenta os vetores resultantes dessa conversão para as rotas dos caminhões k_1 , k_2 e $k_{|\mathcal{H}|}$, originalmente apresentadas na Figura 3. A partir desses vetores, é possível realizar uma avaliação iterativa sobre cada posição nas rotas.

Figura 4 – Rotas convertidas para avaliação



Fonte: Elaborado pelo autor

Seja s uma solução arbitrária, ω um fator de penalização e mdr o custo da rota de maior duração. O Algoritmo 1 implementa a função de avaliação $f(s, \omega)$, na qual s e ω são parâmetros de entrada. Após a avaliação de cada rota da solução, a função retorna o custo da rota mais onerosa, representado por mdr .

Nos **passos 1 e 2**, são declaradas as variáveis de controle: uma para armazenar o maior custo de rota encontrado e outra para contabilizar o número de violações de restrição detectadas. No **passo 3**, a solução é convertida para incluir explicitamente os pontos de entrega e origem.

No **passo 4**, inicia-se um laço iterativo sobre cada rota e seu respectivo caminhão prancha na solução. No **passo 5**, é declarada a variável responsável por acumular o tempo da rota corrente. Nos **passos 6 e 7**, são obtidos, respectivamente, a capacidade do caminhão prancha e o tempo necessário para a construção da rampa.

No **passo 8**, um segundo laço iterativo percorre os índices da rota, variando de 0 até o tamanho da rota menos 2. Nos **passos 9 e 10**, são identificados os pontos de origem

Algoritmo 1 Avaliação de Solução

Input: s, ω
Output: mdr

- 1: $mdr \leftarrow 0$
- 2: $violations \leftarrow 0$
- 3: $routes \leftarrow$ rotas de s convertidas para avaliação
- 4: **for** $route_k$ em $routes$ **do**
- 5: $C_k \leftarrow 0$
- 6: $capacity \leftarrow LC_k$
- 7: $ramp_time \leftarrow TBR_k$
- 8: **for** $idx = 0$ até $|route_k| - 2$ **do**
- 9: $i \leftarrow route_k[idx]$
- 10: $j \leftarrow route_k[idx + 1]$
- 11: $C_k += TT_{ij}$
- 12: $start_window, end_window \leftarrow A_j, B_j$
- 13: **if** $C_k < start_window$ **then**
- 14: $C_k \leftarrow start_window$
- 15: **else if** $C_k > end_window$ **then**
- 16: $violations += 1$
- 17: **end if**
- 18: **if** $j \neq 0$ **then**
- 19: $lashing_time \leftarrow LT_j$
- 20: $loading_time \leftarrow LU_j$
- 21: $C_k += ramp_time + lashing_time + loading_time$
- 22: **end if**
- 23: $equi_weight \leftarrow EW_j$
- 24: **if** $equi_weight > capacity$ **then**
- 25: $violations += 1$
- 26: **end if**
- 27: **end for**
- 28: **if** $C_k > mdr$ **then**
- 29: $mdr \leftarrow C_k$
- 30: **end if**
- 31: **end for**
- 32: $mdr += \omega \cdot violations$
- 33: **return** mdr

e destino, respectivamente. No passo **11**, o tempo de deslocamento entre esses pontos é acumulado.

Nos **passos 12 a 17**, são extraídos os limites da janela de tempo do ponto de destino. Se o instante atual for inferior ao início da janela, ele é ajustado para esse valor, indicando que o caminhão aguardará até que o atendimento seja permitido. Caso o instante atual ultrapasse o fim da janela de tempo, a variável acumuladora de violações é incrementada.

Nos **passos 18 a 22**, adicionam-se os tempos de amarração, carregamento e construção da rampa, exceto quando o destino for a origem. Nos **passos 23 a 26**, verifica-se se o peso do equipamento no ponto de destino excede a capacidade do caminhão prancha; caso positivo, a variável acumuladora de violações é incrementada.

Nos **passos 28 a 30**, o custo da maior rota identificada até o momento é atualizado, se necessário. No **passo 32**, o custo da rota de maior duração é ajustado, acrescentando-se o número de violações de restrição detectadas, multiplicado pelo fator ω . Por fim, a função retorna o custo correspondente à rota de maior duração na solução analisada, **passo 33**.

4.4 Construção de Solução Inicial

A solução inicial para o SA é gerada por meio de uma heurística de construção aleatória. Segundo Souza (2024): “A grande vantagem desta metodologia reside na simplicidade de implementação”. O Algoritmo 2 apresenta a implementação da função heurística. A função recebe como entrada o número de locais de coleta $|\mathcal{P}|$ e o número de caminhões prancha $|\mathcal{H}|$, retornando uma solução inicial s .

Algoritmo 2 Construtivo

Input: $|\mathcal{P}|, |\mathcal{H}|$
Output: s

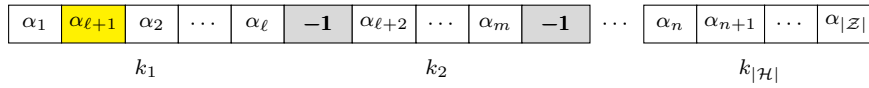
- 1: *delimiter_list* \leftarrow lista de tamanho $(|\mathcal{H}| - 1)$, preenchida com -1
- 2: *pickup_points_list* \leftarrow lista contendo números inteiros de 1 até $|\mathcal{P}|$
- 3: **for** *point* **in** *pickup_points_list* **do**
- 4: Inserir *point* em uma posição aleatória de *delimiter_list*
- 5: **end for**
- 6: $s \leftarrow$ *delimiter_list*
- 7: **return** s

No **passo 1**, gera-se uma lista de delimitadores (-1) para segmentar as rotas. No **passo 2**, cria-se a lista de pontos de coleta. Nos **passos 3 a 5**, um laço iterativo insere aleatoriamente cada ponto de coleta entre os delimitadores. Por fim, a solução inicial é uma permutação da lista de delimitadores e pontos de coleta, **passo 6 e 7**.

4.5 Movimento de Vizinhança

O processo de geração de soluções vizinhas é realizado por meio do método de inserção, conhecido na literatura como *Insertion Method* (LIU et al., 2023a). Nesse método, seleciona-se aleatoriamente um elemento da solução e procede-se à sua realocação. Caso o elemento selecionado corresponda a um ponto α_i , sua posição pode ser alterada dentro da mesma rota (realocação intra-rota) ou entre rotas distintas (realocação inter-rotas). A Figura 5 ilustra o resultado desse procedimento aplicado à solução representada na Figura 3, em que o ponto $\alpha_{\ell+1}$ (bloco amarelo) foi realocado da rota do caminhão k_2 para a segunda posição da rota do caminhão k_1 .

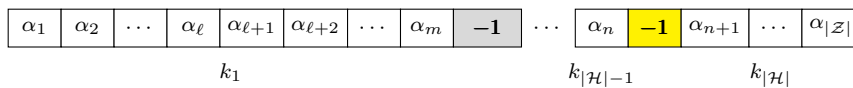
Figura 5 – Método de inserção aplicado a um ponto α_i



Fonte: Elaborado pelo autor

Se, por outro lado, o elemento selecionado for um delimitador (-1), o método pode realizar operações de união e divisão de segmentos de rota, ou ainda de rotas inteiras. A Figura 6 exemplifica essa situação com base na solução apresentada na Figura 3, na qual o delimitador (bloco amarelo) que separava as rotas dos caminhões k_1 e k_2 foi realocado para a segunda posição da rota de $k_{|\mathcal{H}|}$. Essa operação unificou as rotas de k_1 e k_2 , ao mesmo tempo em que dividiu a rota de $k_{|\mathcal{H}|}$.

Figura 6 – Método de inserção aplicado a um delimitador (-1)



Fonte: Elaborado pelo autor

Com o objetivo de expandir a vizinhança acessível a partir da solução corrente, a implementação define uma probabilidade de 50% de realizar uma segunda aplicação consecutiva do método de inserção.

4.6 *Simulated Annealing* Adaptado para o Problema

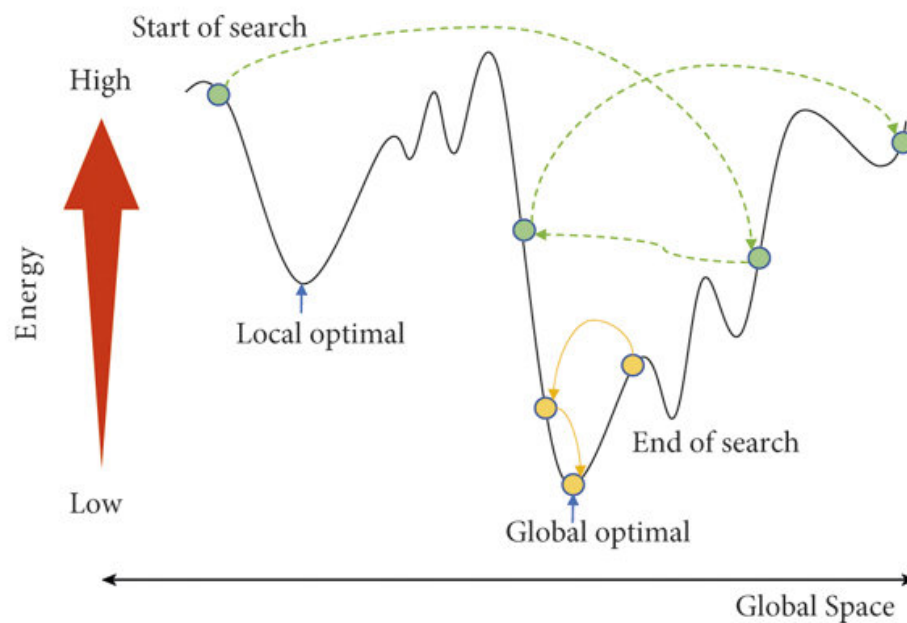
Para este trabalho, optou-se pela meta-heurística de resfriamento simulado, ou *Simulated Annealing*, proposta inicialmente por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983). Essa técnica é inspirada em um fenômeno físico observado durante o resfriamento de metais. Quando aquecidos a altas temperaturas, os átomos dos metais passam por uma agitação intensa, resultando em mudanças contínuas no seu arranjo atômico. Analogamente, no

início da execução do SA, isso corresponde a uma solução inicial para o problema de pesquisa, na qual as rotas de cada caminhão prancha são alteradas de maneira aleatória e exploratória.

À medida que a temperatura diminui, o arranjo atômico dos metais começa a se estabilizar, até que a temperatura se torne baixa o suficiente para impedir novas alterações na estrutura interna dos mesmos. O fascínio desse fenômeno reside no fato de que o arranjo estrutural final dos átomos não é determinado aleatoriamente. Com uma taxa de resfriamento ideal, o resultado final são metais de alta resistência, o que, no caso do SA, resulta em uma solução ótima ou próxima disso (LAARHOVEN; AARTS, 1987).

A Figura 7 ilustra esse comportamento. O eixo vertical representa a energia da solução (isto é, o valor da função objetivo a ser minimizada), enquanto o eixo horizontal corresponde ao espaço de busca global. No início da busca, partindo de uma solução inicial com alta energia, o algoritmo percorre o espaço global de forma ampla, podendo inclusive aceitar soluções piores para escapar de ótimos locais. Com a diminuição gradual da temperatura, a busca torna-se mais seletiva, até se estabilizar em uma solução próxima do ótimo global.

Figura 7 – Representação do processo de busca do *simulated annealing*



Fonte: Yang (2022)

O SA assemelha-se aos métodos tradicionais de busca local (TSAI; CHIANG, 2023), diferenciando-se, essencialmente, pela possibilidade de aceitar soluções piores com base na função de probabilidade: $e^{-\Delta f/T}$, na qual Δf representa a diferença entre a avaliação da nova solução s' e a da solução corrente s , isto é, $\Delta f = f(s') - f(s)$, e T é a temperatura

corrente.

O Algoritmo 3 apresenta o pseudocódigo do procedimento de resfriamento simulado aplicado a um problema de minimização, adaptado de Souza (2024). A entrada do algoritmo é composta por seis parâmetros. O primeiro é a função objetivo $f(s, \omega)$, calculada pelo Algoritmo 1, responsável por avaliar a qualidade de uma solução. O segundo é o operador de vizinhança $N(\cdot)$, que consiste na aplicação do método de inserção, conforme descrito na seção 4.5. O terceiro parâmetro é o fator de resfriamento $\alpha \in (0, 1)$, que determina a taxa de redução da temperatura ao longo das iterações, controlando o ritmo de exploração do espaço de busca. O quarto parâmetro, SA_{max} , define o número máximo de iterações permitidas em cada nível de temperatura. O quinto, T_0 , representa a temperatura inicial, influenciando a probabilidade de aceitação de soluções piores no início da execução. Por fim, o sexto parâmetro é a solução inicial s , a partir da qual o algoritmo inicia a busca. A saída do algoritmo é a melhor solução s^* encontrada ao longo da execução.

Algoritmo 3 Simulated Annealing

Input: $f(s, \omega), N(\cdot), \alpha, SA_{max}, T_0, s, \omega$

Output: s

```

1:  $s^* \leftarrow s$ 
2:  $IterT \leftarrow 0$ 
3:  $T \leftarrow T_0$ 
4: while  $T > 0.0001$  do
5:   while  $IterT < SA_{max}$  do
6:      $IterT \leftarrow IterT + 1$ 
7:     Gere um vizinho qualquer  $s' \in N(s)$ 
8:      $\Delta \leftarrow f(s', \omega) - f(s, \omega)$ 
9:     if  $\Delta < 0$  then
10:       $s \leftarrow s'$ 
11:      if  $f(s', \omega) < f(s^*, \omega)$  then
12:         $s^* \leftarrow s'$ 
13:      end if
14:    else
15:      Tome  $x \in [0, 1]$ 
16:      if  $x < e^{-\Delta/T}$  then
17:         $s \leftarrow s'$ 
18:      end if
19:    end if
20:  end while
21:   $T \leftarrow \alpha \times T$ 
22:   $IterT \leftarrow 0$ 
23: end while
24:  $s \leftarrow s^*$ 
25: return  $s$ 

```

A cada iteração, a temperatura é atualizada multiplicando-se por α , até que atinja um valor mínimo. Esse valor mínimo, geralmente definido de maneira empírica, depende

da natureza do problema abordado e da estratégia adotada. Neste trabalho, foi fixado em 0,0001.

4.7 Considerações Finais

Neste capítulo, foi detalhado o desenvolvimento dos componentes que integram o algoritmo baseado em SA para o problema de roteamento de caminhões prancha em minas a céu aberto. Inicialmente, definiu-se a estrutura de uma solução para o problema de coleta e entrega (PDP), considerando as restrições de precedência entre os pontos de coleta e entrega. Em seguida, foi apresentada a representação computacional simplificada das soluções, fundamental para garantir a manipulação adequada durante os movimentos de vizinhança.

Posteriormente, foi descrita a função de avaliação, responsável por medir a qualidade das soluções a partir do custo da rota de maior duração, acrescido de penalidades associadas a violações de restrições operacionais. A seguir, detalhou-se o procedimento construtivo utilizado para a geração da solução inicial, de caráter aleatório, o que garante diversidade na busca inicial. Os movimentos de vizinhança, baseados no método de inserção, foram então apresentados como o mecanismo de exploração do espaço de soluções. Por fim, foi exposta a adaptação da meta-heurística SA, que incorpora as etapas anteriores em sua estrutura:

1. **Obtenção de solução inicial**, por meio da heurística construtiva (Seção 4.4);
2. **Avaliação de solução**, utilizando a função de avaliação proposta (Seção 4.3);
3. **Geração de soluções vizinhas**, por meio do movimento de vizinhança (Seção 4.5);
4. **Aceitação de soluções**, controlada pelo critério probabilístico do SA, que permite a substituição da solução corrente por vizinhas de pior qualidade em estágios iniciais da busca (Seção 4.6);
5. **Resfriamento gradual da temperatura**, conduzindo o algoritmo a uma convergência progressiva em direção a soluções de melhor qualidade (Seção 4.6).

Assim, observa-se que este trabalho realiza uma adaptação de uma meta-heurística consolidada (SA) a um domínio específico, marcado por particularidades, como janelas de tempo, tempos de carregamento e descarregamento, bem como a capacidade unitária dos caminhões prancha. Essa adaptação respeita a lógica e os fundamentos do SA, mas também ajusta seus componentes essenciais (solução inicial, avaliação, vizinhança e aceitação) às características e restrições do problema em estudo, viabilizando sua aplicação prática nesse contexto.

5 Experimentos Computacionais

Este capítulo apresenta os experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho do algoritmo baseado na meta-heurística *Simulated Annealing* aplicado ao problema de transporte de equipamentos de mineração por caminhões prancha. A Seção 5.1 descreve o processo de escolha e configuração dos hiperparâmetros utilizados no algoritmo. A Seção 5.2 apresenta as instâncias consideradas nos experimentos, abrangendo cenários de pequeno e grande porte. A Seção 5.3 detalha as métricas e procedimentos adotados para análise comparativa de desempenho. A Seção 5.4 expõe os resultados obtidos para as instâncias de pequeno porte, enquanto a Seção 5.5 traz os resultados referentes às instâncias de grande porte. Por fim, a Seção 5.6 apresenta as considerações finais deste capítulo.

5.1 Escolha dos Hiperparâmetros

O fator de resfriamento (α) foi ajustado empiricamente. A temperatura inicial (T_0), por sua vez, foi determinada dinamicamente em tempo de execução por meio de uma função autoadaptativa, de modo a garantir uma taxa de aceitação inicial mínima de soluções vizinhas de 95%. O número máximo de iterações (SA_{max}) foi definido de modo a garantir que o tempo de execução não excedesse o limite de 10 minutos na maior instância do problema, composta por 48 equipamentos e 20 caminhões prancha.

Para penalizar soluções inviáveis, o fator de penalização ω foi fixado em 1000, impondo um custo significativo para soluções que violam restrições. Essa estratégia incentiva o algoritmo a priorizar a busca por soluções viáveis, minimizando a ocorrência de violações.

O Algoritmo 4, adaptado de Souza (2024), apresenta a implementação da função responsável pela determinação autoadaptativa de T_0 . O algoritmo ajusta iterativamente a temperatura inicial para garantir que uma fração mínima de soluções vizinhas seja aceita no início da execução do SA, favorecendo a exploração inicial do espaço de busca. A parametrização foi realizada por experimentação e está detalhada na Tabela 4. Além disso, os valores finais dos hiperparâmetros do SA, utilizados em todas as instâncias testadas, estão apresentados na Tabela 5.

Algoritmo 4 Temperatura Inicial

Input: $f(\cdot), N(\cdot), \beta, \gamma, SA_{max}, T_0, s, \omega$
Output: T

- 1: $T \leftarrow T_0$
- 2: Continua \leftarrow TRUE
- 3: **while** Continua **do**
- 4: Aceitos \leftarrow 0
- 5: **for** $IterT = 1$ to SA_{max} **do**
- 6: Gere um vizinho qualquer $s' \in N(s)$
- 7: $\Delta \leftarrow f(s', \omega) - f(s, \omega)$
- 8: **if** $\Delta < 0$ **then**
- 9: Aceitos \leftarrow Aceitos + 1
- 10: **else**
- 11: Escolha um número aleatório $x \in [0, 1]$
- 12: **if** $x < e^{-\Delta/T}$ **then**
- 13: Aceitos \leftarrow Aceitos + 1
- 14: **end if**
- 15: **end if**
- 16: **end for**
- 17: **if** Aceitos $\geq \gamma \times SA_{max}$ **then**
- 18: Continua \leftarrow FALSE
- 19: **else**
- 20: $T \leftarrow \beta \times T$
- 21: **end if**
- 22: **end while**
- 23: **return** T

Tabela 4 – Parâmetros da Função Autoadaptativa.

Parâmetro	Valor
β	2
γ	0.95
SA_{max}	1000
T_0	250

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 5 – Hiperparâmetros do Simulated Annealing.

Parâmetro	Valor
α	0.999
SA_{max}	120
T_0	Autoadaptativo

Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 Instâncias

A validação do modelo matemático proposto por Rezende (2023) foi realizada por meio de um estudo de caso no complexo Carajás, utilizando instâncias de pequeno porte com, no máximo, 8 equipamentos de mineração e 4 caminhões prancha, resolvidas no solver Gurobi®, versão 6.5.1.

Neste trabalho, o algoritmo baseado em SA foi validado considerando tanto instâncias de pequeno porte – às mesmas utilizadas em Rezende (2023) – quanto instâncias de grande porte, geradas a partir de dados reais de minas a céu aberto da Vale S.A, localizadas no complexo mineral de Carajás, no estado do Pará.

A dimensão de cada instância é definida pelo número de equipamentos a serem transportados (n) e pelo número de caminhões prancha disponíveis ($|H|$). No estudo de caso apresentado em Rezende (2023), foram gerados nove cenários com diferentes dimensões. Para validar o algoritmo SA em instâncias que não podem ser solucionadas por resolvidores exatos, foram testados cenários de grande porte. Esses cenários consideram quantidades de caminhões e de equipamentos variando de 12 a 20 e de 24 a 48, respectivamente, conforme apresentado na Tabela 6.

Tabela 6 – Cenários de Teste.

Cenário	$ H $	n
1		4
2	2	6
3		8
4		4
5	3	6
6		8
7		4
8	4	6
9		8
<i>Novos Cenários</i>		
10		24
11	12	36
12		48
13		24
14	16	36
15		48
16		24
17	20	36
18		48

Fonte: Elaborado pelo autor

A Tabela 7 detalha as especificações dos equipamentos de mineração a serem

transportados, incluindo quantidade, peso, tempos de operação (amarração e carregamento) e janelas de tempo para coleta e entrega. Por sua vez, a Tabela 8 descreve os caminhões prancha, destacando a quantidade disponível, a capacidade de carga e o tempo necessário para a construção de rampa. Essas características compõem as instâncias de pequeno e grande porte do problema em estudo, utilizadas para validar o algoritmo SA desenvolvido.

Tabela 7 – Características dos equipamentos de mineração a serem transportados.

Descrição	Intervalo de Valores
Qtde. de equipamentos	4 - 48
Peso dos equipamentos (t)	58 - 110
Tempo de amarração (min)	2 - 5
Tempo de carregamento (min)	10 - 12
Início da janela de tempo para coleta	0 - 100
Fim da janela de tempo para coleta	250 - 540
Início da janela de tempo para entrega	0 - 250
Fim da janela de tempo para entrega	250 - 540

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 8 – Características dos caminhões prancha disponíveis.

Descrição	Intervalo de Valores
Qtde. de caminhões prancha	2 - 20
Capacidade de carga (t)	110 - 115
Tempo de construção de rampa (min)	20

Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 Análise de resultados

Para compreender as limitações do modelo matemático apresentado por Rezende (2023) e comparar os resultados obtidos com os do algoritmo baseado em SA desenvolvido, o modelo foi reimplementado utilizando o solver Gurobi®, versão 6.5.1, e experimentado em todos os cenários de teste. Os experimentos foram realizados em um computador com processador Intel(R) Xeon(R) E5-2670 v3 @ 2.30GHz, 16 GB de RAM, executando o sistema operacional Windows Server 2012.

O algoritmo SA, por sua vez, foi desenvolvido em Python e executado no ambiente Google Colab, configurado com um processador Intel(R) Xeon(R) CPU @ 2.20GHz, 12 GB de RAM, executando o sistema operacional Ubuntu 22.04.3 LTS.

Para avaliar a eficácia do algoritmo SA, foi definida a métrica RPD^* , que mede o desvio percentual entre a melhor solução encontrada pelo algoritmo SA (*bestValue*) e o limite superior (*Upper Bound* – UB) identificado pelo solver. A expressão matemática é apresentada em (5.1).

$$RPD^* = \frac{bestValue - UB}{UB} \quad (5.1)$$

De forma complementar, para avaliar a consistência do algoritmo SA em múltiplas execuções, foi definida a métrica RPD^{avg} . Essa métrica calcula o desvio percentual entre o valor médio das soluções obtidas (*AvgValue*) e o melhor valor conhecido (*Best Known Value* - *BKV*), conforme representado em (5.2).

$$RPD^{avg} = \frac{AvgValue - BKV}{BKV} \quad (5.2)$$

5.4 Resultados para pequenas instâncias

A Tabela 9 apresenta os resultados do Gurobi e do algoritmo SA para instâncias de pequeno porte (cenários de 1 a 9). Para a execução do Gurobi, foi estipulado um limite de tempo de 1 hora. Os resultados incluem o limite superior, o tempo de execução e o GAP alcançado em cada cenário analisado. No caso do algoritmo SA, cada instância foi executada 30 vezes, sendo apresentados o melhor valor de solução encontrado, o valor médio das soluções, o tempo médio de execução e o RPD^* .

Tabela 9 – Resultados para Instâncias de Pequeno Porte.

Cenário	Gurobi			Algoritmo SA			
	UB	Time (s)	GAP (%)	Best Value	Avg Value	Time (s)	RPD^*
1	218	0,190	0	218	218	59,112	0
2	284	10,710	0	284	284	75,338	0
3	354	2289,700	0	354	354	89,556	0
4	201	0,270	0	201	201	64,447	0
5	218	8,340	0	218	218	79,810	0
6	255	654,780	0	255	255	95,384	0
7	156	0,330	0	156	156	69,044	0
8	201	6,840	0	201	201	85,238	0
9	201	355,550	0	201	201	98,814	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Em todos os cenários, o modelo matemático comprovou a otimalidade das soluções encontradas (GAP = 0%). Apenas nos três cenários que envolvem 8 equipamentos de mineração (cenários 3, 6 e 9), o Gurobi levou mais de 11 segundos para identificar a solução ótima. Devido à complexidade do problema, os modelos matemáticos enfrentam maiores

desafios para encontrar e provar a otimalidade das soluções em instâncias de maior porte. Por outro lado, o algoritmo SA mostrou-se eficaz ao encontrar a solução ótima em todos os cenários analisados, conforme indicado por $RPD^* = 0$, além de apresentar desempenho eficiente, com tempo médio de execução inferior a 100 segundos.

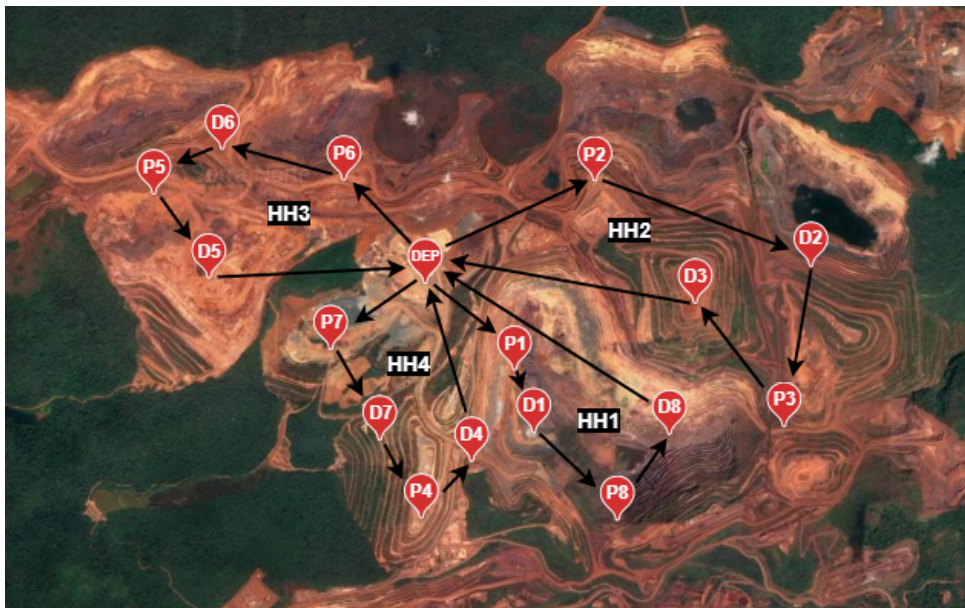
A Tabela 10 apresenta uma solução obtida pelo algoritmo SA para o cenário 9, que considera 4 caminhões prancha disponíveis e 8 equipamentos de mineração a serem transportados. Os pontos de coleta são identificados pela letra P, os pontos de entrega pela letra D, o depósito pelo termo DEP e os caminhões prancha pelo prefixo HH.

Tabela 10 – Solução obtida pelo algoritmo SA para o cenário 9.

Caminhão Prancha	Rotas	Custo (min)
HH1	DEP \Rightarrow P1 \Rightarrow D1 \Rightarrow P8 \Rightarrow D8 \Rightarrow DEP	190
HH2	DEP \Rightarrow P2 \Rightarrow D2 \Rightarrow P3 \Rightarrow D3 \Rightarrow DEP	201
HH3	DEP \Rightarrow P6 \Rightarrow D6 \Rightarrow P5 \Rightarrow D5 \Rightarrow DEP	180
HH4	DEP \Rightarrow P7 \Rightarrow D7 \Rightarrow P4 \Rightarrow D4 \Rightarrow DEP	186

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 8 – Solução obtida pelo algoritmo SA para o cenário 9



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 8 ilustra, no ambiente de mineração, as rotas dos caminhões prancha descritas na Tabela 10. O caminhão prancha HH1 parte do depósito (DEP) em direção a P1, coleta o equipamento de P1 e o entrega em D1. Em seguida, desloca-se até P8, coleta o equipamento de P8 e o entrega em D8, retornando ao depósito. Sua jornada totaliza 190 minutos.

O caminhão prancha HH2 sai do depósito para P2, coleta o equipamento de P2 e o entrega em D2. De lá, segue até P3, coleta o equipamento de P3 e o entrega em D3, encerrando a rota com o retorno ao depósito. O tempo total da jornada é de 201 minutos.

O caminhão prancha HH3 parte do depósito em direção a P6, coleta o equipamento de P6 e o entrega em D6. Em seguida, desloca-se até P5, coleta o equipamento de P5 e o entrega em D5, retornando ao depósito. Sua jornada soma 180 minutos.

Por fim, o caminhão prancha HH4 sai do depósito em direção a P7, coleta o equipamento de P7 e o entrega em D7. Depois, segue até P4, coleta o equipamento de P4 e o entrega em D4, concluindo a rota com o retorno ao depósito. O tempo total de sua jornada é de 186 minutos. O custo da solução é 201, correspondente à duração da rota mais longa.

5.5 Resultados para grandes instâncias

A Tabela 11 apresenta os resultados do Gurobi e do algoritmo SA nas instâncias de grande porte (cenários de 10 a 18). Para a execução do Gurobi, foi estipulado um limite de tempo de 1 hora. Os resultados incluem o limite superior, o tempo de execução e o GAP alcançado em cada cenário analisado. No caso do algoritmo SA, cada instância foi executada 30 vezes, sendo apresentados o melhor valor de solução encontrado, o valor médio das soluções, o tempo médio de execução, o RPD^{avg} e o RPD^* .

Tabela 11 – Resultados para Instâncias de Grande Porte.

Cenário	Gurobi			Algoritmo SA				
	UB	Time (s)	GAP (%)	Best Value	Avg Value	Time (s)	RPD^{avg}	RPD^*
10	191,420	3600	100	180,700	181,135	278,977	0,002	-0,056
11	-	3600	100	266,650	272,596	378,613	0,022	-
12	-	3600	100	338,820	346,567	474,687	0,023	-
13	167,670	3600	100	165,100	165,783	298,571	0,004	-0,015
14	-	3600	100	229,630	231,758	396,417	0,009	-
15	-	3600	100	256,270	262,950	492,664	0,026	-
16	159,100	3600	100	157,250	157,448	316,854	0,001	-0,012
17	249,630	3600	100	180,700	181,345	413,025	0,004	-0,276
18	-	3600	100	234,280	236,542	515,883	0,009	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Os experimentos realizados evidenciam que o Gurobi não foi capaz de identificar soluções ótimas para nenhuma das instâncias de grande porte dentro do limite de tempo de 1 hora (GAP = 100%). Apesar dessa limitação, foram encontradas soluções viáveis para 4 instâncias (cenários 10, 13, 16 e 17).

Por outro lado, o algoritmo SA apresentou um desempenho significativamente superior. Mesmo para instâncias de grande porte, o algoritmo foi capaz de encontrar

soluções de alta qualidade em um tempo computacional reduzido, com o tempo médio de execução não ultrapassando 9 minutos em cada cenário. Além disso, o SA apresentou uma baixa variabilidade nos resultados, com um RPD^{avg} inferior a 3% em todas as instâncias analisadas, reforçando sua robustez e confiabilidade. Esses fatores tornam o algoritmo SA uma alternativa promissora em relação ao solver Gurobi para problemas de grande escala, no qual o tempo de processamento é um fator crítico.

5.6 Considerações Finais

Neste capítulo, foram conduzidos experimentos computacionais que permitiram comparar o desempenho do algoritmo baseado em *Simulated Annealing* com o modelo matemático de referência resolvido pelo solver Gurobi. Para instâncias de pequeno porte, o algoritmo SA obteve soluções ótimas em todos os cenários, com tempos de execução reduzidos. Já para instâncias de grande porte, nas quais o Gurobi não conseguiu obter soluções ótimas dentro do tempo limite, o algoritmo SA apresentou resultados de alta qualidade e baixa variabilidade, evidenciando sua robustez e potencial para aplicações em problemas de maior escala.

6 Conclusão e Trabalhos Futuros

A pesquisa desenvolvida neste trabalho abordou o problema de roteamento de veículos aplicado à logística de realocação de equipamentos de grande porte em minas a céu aberto. O cenário estudado apresenta grandes desafios, derivados da natureza de coleta e entrega, bem como da necessidade de cumprimento de janelas de tempo específicas em distintas frentes de lavra. Além disso, a heterogeneidade da frota de caminhões prancha com capacidade unitária, aliada às particularidades dos processos de carregamento e descarregamento dos equipamentos, contribui para a elevação da dificuldade do problema.

Para lidar com essas dificuldades, foi proposto um algoritmo baseado na meta-heurística *Simulated Annealing*, com o intuito de gerar soluções de qualidade em um tempo computacional reduzido, considerado adequado para o contexto de tomada de decisão durante as trocas de turno.

Os experimentos computacionais foram conduzidos utilizando dados reais do complexo minerador de Carajás, da Vale S.A., localizado no Pará, e os resultados obtidos foram comparados com aqueles reportados pela formulação exata proposta em [Rezende \(2023\)](#). As análises sugerem que o algoritmo desenvolvido foi capaz de encontrar soluções viáveis e de boa qualidade em tempos de execução significativamente menores em comparação com a abordagem exata, especialmente para instâncias de maior dimensão. Esses resultados reforçam o potencial da técnica proposta para aplicações práticas em ambientes de mineração, no qual decisões rápidas e eficientes são fundamentais para garantir a continuidade das operações e a otimização dos recursos disponíveis.

6.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, uma primeira possibilidade consiste em ampliar o modelo atual para permitir o uso compartilhado dos caminhões-tratores responsáveis pelo transporte das pranchas. Atualmente, cada caminhão-trator é considerado acoplado de maneira fixa a uma prancha. No entanto, na prática operacional, é possível desacoplar e realocar os caminhões-tratores entre diferentes pranchas ao longo da operação, conforme a disponibilidade e a necessidade de transporte. A inclusão desse recurso no modelo poderia aumentar a flexibilidade e o aproveitamento da frota disponível.

Outra linha de evolução envolve a incorporação de características estocásticas ao modelo. O tempo de deslocamento entre as frentes de lavra, bem como os tempos de carregamento e descarregamento dos equipamentos, estão sujeitos a variações decorrentes de fatores operacionais e ambientais, como condições climáticas, disponibilidade de operadores

e eventuais bloqueios nas vias internas da mina. A introdução de incertezas e distribuições probabilísticas nesses parâmetros permitiria representar de modo mais realista a operação, fornecendo um roteamento mais robusto diante de imprevistos e atrasos.

Também se propõe avaliar a aplicabilidade da metodologia desenvolvida em outros tipos de frotas e cenários logísticos distintos do ambiente de mineração. Por exemplo, guinchos de pequeno porte utilizados por seguradoras para atendimento de sinistros urbanos e caminhões cegonha empregados no transporte de veículos possuem restrições operacionais e demandas de coleta e entrega semelhantes às do problema estudado. Validar o algoritmo nesses contextos ampliaria o escopo de aplicação da abordagem, indicando sua versatilidade e potencial de adaptação a diferentes setores da logística.

Por fim, uma oportunidade promissora consiste na integração da meta-heurística *Simulated Annealing* com outras técnicas de otimização em um arcabouço híbrido. A combinação com heurísticas construtivas, métodos de busca local mais especializados ou mesmo com técnicas de aprendizado de máquina poderia acelerar a convergência do processo de busca e melhorar a qualidade das soluções obtidas para instâncias de grande porte. Essa hibridização também abriria caminho para explorar abordagens paralelas ou distribuídas, aproveitando melhor os recursos computacionais disponíveis.

Referências

- BALDACCI, R.; BATTARRA, M.; VIGO, D. Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In: GOLDEN, B.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. (Ed.). *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*. Boston, MA: Springer, 2008, (Operations Research/Computer Science Interfaces, v. 43). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-77778-8_1>. Citado na página 16.
- DELL'AMICO, M.; RIGHINI, G.; SALANI, M. A branch-and-price approach to the vehicle routing problem with simultaneous distribution and collection. *Transportation Science*, v. 40, n. 2, p. 235–247, 2006. Citado na página 20.
- DESROCHERS, M.; DESROSIERS, J.; SOLOMON, M. A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. *Operations Research*, v. 40, n. 2, p. 342–354, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.40.2.342>>. Citado na página 15.
- DÜNNWEBER, J.; STADLER, T.; NITA, S. A parallel hybrid genetic search for the capacitated vrp with pickup and delivery. In: *Proceedings of [conferência a inserir]*. [S.l.: s.n.], 2023. Citado na página 20.
- GALINDRES, L. F.; GUIMARÃES, F. G.; GALLEGO-RENDÓN, R. A. Multi-objective sustainable capacitated location routing problem formulation in sustainable supply-chain management. *Engineering Optimization*, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 526–541, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/0305215X.2021.2014476>>. Citado na página 20.
- GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. USA: W. H. Freeman & Co., 1979. ISBN 0716710447. Citado na página 19.
- GRONALT, M.; HIRSCH, P. Log-truck scheduling with a tabu search strategy. In: _____. *Metaheuristics: Progress in Complex Systems Optimization*. Boston, MA: Springer US, 2007. p. 65–88. ISBN 978-0-387-71921-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-71921-4_4>. Citado na página 20.
- Gurobi Optimization, LLC. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://www.gurobi.com>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.
- HUSTRULID, W. A.; KUCHTA, M.; MARTIN, R. K. *Open Pit Mine Planning and Design, Two Volume Set & CD-ROM Pack*. 3. ed. CRC Press, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/b15068>>. Citado na página 15.
- IBM ILOG CPLEX Division. *User's Manual for CPLEX*. Incline Village, NV, 2022. Disponível em: <<https://www.ibm.com/docs/en/icos/22.1.1>>. Citado na página 19.
- KAMSOPA, K. et al. Hybrid genetic algorithm for multi-period vehicle routing problem with mixed pickup and delivery with time window, heterogeneous fleet, duration time and rest area. *Engineering Journal*, v. 25, n. 10, p. 71–86, Oct. 2021. Citado na página 21.

- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 35.
- KOÇ, Ç.; LAPORTE, G.; TÜKENMEZ, İ. A review of vehicle routing with simultaneous pickup and delivery. *Computers & Operations Research*, v. 122, p. 104987, 2020. ISSN 0305-0548. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054820301040>>. Citado na página 20.
- LAARHOVEN, P. J. M. V.; AARTS, E. H. L. Simulated annealing. In: *Simulated Annealing: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer, 1987. p. 7–15. Citado na página 36.
- LAWLER, E. L. *The Travelling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, 1985. (Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=qbFIMwEACAAJ>>. Citado na página 19.
- LIU, F. et al. *Heuristics for Vehicle Routing Problem: A Survey and Recent Advances*. 2023. ArXiv:2303.04147 [cs.AI]. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2303.04147>>. Citado na página 35.
- LIU, X. et al. A systematic literature review of vehicle routing problems with time windows. *Sustainability*, v. 15, n. 15, p. 12004, 2023. ISSN 2071-1050. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2071-1050/15/15/12004>>. Citado na página 20.
- LOUATI, A. et al. Mixed integer linear programming models to solve a real-life vehicle routing problem with pickup and delivery. *Applied Sciences*, MDPI, v. 11, n. 20, p. 9551, 2021. ISSN 2076-3417. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/11/20/9551>>. Citado na página 20.
- LOZANO, J. et al. A statistical comparison of objective functions for the vehicle routing problem with route balancing. In: *2016 Fifteenth Mexican International Conference on Artificial Intelligence (MICAI)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 130–135. Citado na página 20.
- MADANKUMAR, S.; RAJENDRAN, C. A mixed integer linear programming model for the vehicle routing problem with simultaneous delivery and pickup by heterogeneous vehicles, and constrained by time windows. *Sādhanā*, v. 44, n. 2, p. 39, 2019. ISSN 0973-7677. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12046-018-1048-y>>. Citado na página 22.
- PESSOA, A. et al. A generic exact solver for vehicle routing and related problems. *Mathematical Programming*, v. 183, p. 483–523, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10107-020-01523-z>>. Citado na página 20.
- PHUC, P. N. K.; THAO, N. L. P. Ant colony optimization for multiple pickup and multiple delivery vehicle routing problem with time window and heterogeneous fleets. *Logistics*, MDPI, Basel, v. 5, n. 2, p. 1–13, 2021. ISSN 2305-6290. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/10419/310152>>. Citado na página 21.
- RAN, L.-L.; LI, L.; ZHAO, X. Brief review on heterogeneous vehicle routing problems. In: *2022 34th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. [S.l.: s.n.], 2022. p. 5847–5852. Citado na página 20.

- REZENDE, D. D. X. P. d. Roteamento de caminhões prancha para coleta e entrega de equipamentos de mina a céu aberto: Um estudo de caso em carajás. In: *Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Juiz de Fora, MG, Brasil: Galoá, 2022. Disponível em: <<https://proceedings.science/sbpo/sbpo-2022/trabalhos/roteamento-de-caminhoes-prancha-para-coleta-e-entrega-de-equipamentos-de-mina-a-lang=pt-br>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.
- REZENDE, D. D. X. P. d. *Um modelo de programação linear inteira mista para o roteamento de caminhões prancha em minas a céu aberto*. Dissertação (Mestrado Profissional em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração) — Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2023. Citado 13 vezes nas páginas 16, 17, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 41, 42 e 47.
- RIOS, B. H. O. et al. Recent dynamic vehicle routing problems: A survey. *Computers & Industrial Engineering*, v. 160, p. 107604, 2021. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835221005088>>. Citado na página 20.
- SAVELSBERGH, M. W. P.; SOL, M. The general pickup and delivery problem. *Transportation Science*, v. 29, n. 1, p. 17–29, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- SOUZA, M. J. F. *Inteligência Computacional para Otimização: Meta-heurísticas*. Ouro Preto, Minas Gerais, 2024. Disponível em: <<http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disciplinas/InteligenciaComputacional/InteligenciaComputacional.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 34, 37 e 39.
- SU, Z. et al. Heterogeneous fleet vehicle scheduling problems for dynamic pickup and delivery problem with time windows in shared logistics platform: formulation, instances and algorithms. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*, Taylor & Francis, v. 9, n. 2, p. 199–223, 2022. Citado na página 21.
- TANASH, M.; AS'AD, R. Heuristic algorithms for the heterogeneous vehicle routing problem with time windows, customers priority, pickup and delivery. *IEEE Access*, v. 13, p. 110605–110622, 2025. Citado na página 22.
- TOTH, P.; VIGO, D. *Vehicle Routing*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611973594>>. Citado na página 19.
- TSAI, C.-W.; CHIANG, M.-C. *Handbook of Metaheuristic Algorithms: From Fundamental Theories to Advanced Applications*. [S.l.]: Elsevier, 2023. Citado na página 36.
- WANG, Y. et al. Collaborative mechanism for pickup and delivery problems with heterogeneous vehicles under time windows. *Sustainability*, v. 11, n. 12, p. 3492, 2019. ISSN 2071-1050. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2071-1050/11/12/3492>>. Citado na página 21.
- YANG, L. Research on logistics distribution vehicle path optimization based on simulated annealing algorithm. *Advances in Multimedia*, v. 2022, p. 1–8, 05 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2022/7363279>>. Citado na página 36.