

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

BRUNO JOSÉ BAÊTA BARBOSA

**ANÁLISE DO ESQUEMA TOPUS NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA
EQUAÇÃO DE TRANSPORTE ESCALAR 1D COM DIFERENTES
CONDIÇÕES INICIAIS**

Ouro Preto
2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

BRUNO JOSÉ BAÊTA BARBOSA

**ANÁLISE DO ESQUEMA TOPUS NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE
TRANSPORTE ESCALAR 1D COM DIFERENTES CONDIÇÕES INICIAIS**

Monografia apresentada ao Curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Alves Bonfim De Queiroz

Ouro Preto
2026

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

B238a Barbosa, Bruno Jose Baêta.

Análise do esquema TOPUS na solução numérica da equação de transporte escalar 1D com diferentes condições iniciais. [manuscrito] / Bruno Jose Baêta Barbosa. - 2026.

38 f.: il.: color., gráf..

Orientador: Prof. Dr. Rafael Alves Bonfim de Queiroz.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Ciência da Computação .

1. Segurança de sistemas. 2. Dinâmica dos fluidos. 3. Diferenças finitas. I. Queiroz, Rafael Alves Bonfim de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 681.5:532

Bibliotecário(a) Responsável: Renata Mara de Almeida - CRB-7: 6328



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO



FOLHA DE APROVAÇÃO

Bruno José Baeta Barbosa

Análise do Esquema TOPUS na Solução Numérica da Equação de Transporte Escalar 1D com Diferentes Condições Iniciais

Monografia apresentada ao Curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação

Aprovada em 26 de Fevereiro de 2026

Membros da banca

Rafael Alves Bonfim De Queiroz (Orientador) - Doutor - Universidade Federal de Ouro Preto
Guilherme Augusto Anício Drummond do Nascimento (Examinador) - Bacharel - Universidade Federal de Ouro Preto
Raimundo Santos Leite (Examinador) - Doutor - Universidade Federal de Ouro Preto

Rafael Alves Bonfim De Queiroz, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 26/02/2026



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Alves Bonfim de Queiroz, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 04/03/2026, às 13:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1062466** e o código CRC **360E4A87**.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por iluminar meus caminhos e me sustentar diariamente com saúde, serenidade e determinação para enfrentar desafios e chegar até este momento.

Agradeço à minha família, que me ofereceu base, incentivo e condições para que este sonho se tornasse possível. Em especial, agradeço ao meu pai, José Antonio, por ter me apresentado ao universo da tecnologia e por ter contribuído com as condições necessárias para que eu seguisse firme na minha trajetória acadêmica. Sou grato pelos ensinamentos, pelo exemplo e pela confiança, que foram essenciais para o meu desenvolvimento.

Agradeço à minha mãe, Raquel Costa, por todo o apoio e, principalmente, por ter me dado as condições para que eu alcançasse este momento. Seu cuidado e dedicação foram fundamentais para que eu pudesse continuar, mesmo diante das dificuldades.

Agradeço ao meu padrasto, Kenneth Hannon, que mesmo à distância contribuiu de forma muito importante, enviando ajuda financeira do exterior e demonstrando generosidade e compromisso com o meu futuro.

Agradeço ao Jaime, meu gestor no PicPay, por acreditar em mim quando eu mesmo duvidei. Sou muito grato pelos conselhos, pela orientação e pelo incentivo para que eu continuasse na universidade, especialmente nos momentos em que eu pensei em desistir. Sua confiança e suas palavras foram decisivas para que eu mantivesse o foco e seguisse até o fim.

Agradeço à minha namorada, Júlia Duarte, por toda a compreensão, parceria e apoio diário. Obrigado por estar ao meu lado, por me fortalecer nos dias difíceis e por celebrar comigo cada conquista ao longo do caminho.

Agradeço, com especial admiração, ao meu orientador Rafael, por ter aceitado este desafio e por me conduzir com paciência, responsabilidade e sabedoria durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço à NósTravamus, minha república, que se tornou uma segunda família. Sou grato pelos anos de convivência, amizade verdadeira, experiências inesquecíveis e pelo apoio mútuo que tornaram essa caminhada mais leve e significativa. Cada um contribuiu de forma única para esta conquista, e guardarei essa história com carinho e gratidão.

“God does not play dice with the universe.”
- Albert Einstein

Resumo

O estudo da advecção é fundamental para compreender o transporte de grandezas físicas, como calor, massa ou quantidade de movimento, em diversos fenômenos naturais e aplicações de engenharia. Este trabalho investiga o desempenho do esquema numérico TOPUS (*Third-Order Polynomial Upwind Scheme*) na resolução da equação de advecção unidimensional. Em particular, analisa-se a influência do parâmetro livre α , que controla a forma do polinômio de interpolação do esquema, sobre a precisão da solução e sobre a capacidade de capturar frentes de transporte sem a introdução de artefatos numéricos. Considera-se também o número de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), que relaciona o passo de tempo ao espaçamento espacial da malha. Para a avaliação, utilizam-se soluções analíticas de referência, permitindo a comparação por meio das normas de erro L_1 , L_2 e L_∞ . Os resultados indicam que, para $\text{CFL} = 0,05$, os menores erros ocorrem com valores negativos de α em todos os casos analisados. Para $\text{CFL} = 0,5$, o valor de α que minimiza o erro varia conforme o caso e a norma considerada, indicando que não existe um único valor ótimo universal para esse parâmetro.

Palavras-chave: Upwind. TOPUS. Advecção. Diferenças finitas.

Abstract

The study of advection is fundamental to understanding the transport of physical quantities, such as heat, mass, or momentum, in several natural phenomena and engineering applications. This work investigates the performance of the TOPUS (*Third-Order Polynomial Upwind Scheme*) numerical scheme in solving the one-dimensional advection equation. In particular, the influence of the free parameter α , which controls the shape of the interpolation polynomial of the scheme, is analyzed with respect to solution accuracy and the ability to capture transport fronts without introducing numerical artifacts. The Courant–Friedrichs–Lewy number (CFL), which relates the time step to the spatial grid spacing, is also considered. Analytical reference solutions are employed for validation, allowing comparisons through the error norms L_1 , L_2 , and L_∞ . The results indicate that, for $\text{CFL} = 0.05$, the smallest errors occur for negative values of α in all test cases. For $\text{CFL} = 0.5$, the value of α that minimizes the error depends on the test case and on the error norm considered, indicating that there is no single universally optimal value for this parameter.

Keywords: Upwind. TOPUS. Advection. Finite differences.

Lista de Figuras

Figura 2.1 – No eixo horizontal está a posição espacial x e no eixo vertical a grandeza transportada $u(x, t)$. As unidades de x e u dependem do problema físico considerado. Fonte: Elaborado pelo autor.	6
Figura 2.2 – Difusão numérica e oscilações espúrias, em comparação com a solução ideal. O eixo horizontal representa a posição espacial x e o eixo vertical a variável transportada u . Fonte: Elaborado pelo autor.	8
Figura 2.3 – Curvas do esquema TOPUS no diagrama de variáveis normalizadas para diferentes valores do parâmetro α . Fonte: Elaborado pelo autor.	12
Figura 2.4 – A Figura mostra o estêncil computacional da malha 1D, em que $U = i$ é o nó central, $R = i - 1$ e $D = i + 1$ são os vizinhos, e f e g representam as faces da célula de controle. O espaçamento Δx define a distância entre os nós, e a condição $a > 0$ indica o escoamento da esquerda para a direita. Fonte: Elaborado pelo autor.	15
Figura 3.1 – Perfil da condição inicial do Caso 1. Fonte: Elaborado pelo autor.	19
Figura 3.2 – Perfil da condição inicial do Caso 2. Fonte: Elaborado pelo autor.	21
Figura 3.3 – Perfil da condição inicial do Caso 3. Fonte: Elaborado pelo autor.	22
Figura 4.1 – Caso 1: resultados numéricos para $CFL = 0,05$ e diferentes valores de α . Fonte: Elaborado pelo autor.	27
Figura 4.2 – Caso 1: resultados numéricos para $CFL = 0,5$ e diferentes valores de α . Fonte: Elaborado pelo autor.	28
Figura 4.3 – Caso 2: resultados numéricos para $CFL = 0,05$ e diferentes valores de α . Fonte: Elaborado pelo autor.	29
Figura 4.4 – Caso 2: resultados numéricos para $CFL = 0,5$ e diferentes valores de α . Fonte: Elaborado pelo autor.	30
Figura 4.5 – Caso 3: resultados numéricos para $CFL = 0,05$ e diferentes valores de α . Fonte: Elaborado pelo autor.	31
Figura 4.6 – Caso 3: resultados numéricos para $CFL = 0,5$ e diferentes valores de α . Fonte: Elaborado pelo autor.	32

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Erros para diferentes valores de α e CFL.	33
Tabela 4.2 – Valores de α que minimizam cada norma em cada caso e CFL.	34

Lista de Abreviaturas e Siglas

CBC	<i>Convection Boundedness Criterion</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CFL	<i>Courant–Friedrichs–Lewy</i>
EDP	<i>Equações Diferenciais Parciais</i>
FOU	<i>First-Order Upwind</i>
MUSCL	<i>Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws</i>
NVD	<i>Normalized Variable Diagram</i>
QUICK	<i>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics</i>
TVD	<i>Total Variation Diminishing</i>
TOPUS	<i>Third-Order Polynomial Upwind Scheme</i>
WENO	<i>Weighted Essentially Non-Oscillatory</i>

Lista de Símbolos

u	Grandeza escalar transportada
a	Velocidade de advecção
x	Coordenada espacial
t	Tempo
α	Parâmetro livre do esquema TOPUS
$\hat{\phi}$	Variável normalizada utilizada na formulação do esquema
Δt	Espaçamento temporal
Δx	Espaçamento espacial
CFL	Número de Courant–Friedrichs–Lewy ($a\Delta t/\Delta x$)
L_1	Norma de erro L_1
L_2	Norma de erro L_2
L_∞	Norma de erro máximo

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Justificativa	2
1.2	Objetivos	3
1.3	Organização da Monografia	4
2	Fundamentação Teórica e Trabalhos Relacionados	5
2.1	Fundamentação Teórica	5
2.1.1	Advecção, Difusão e Convecção	5
2.1.2	Modelo Matemático da Advecção 1D	6
2.1.3	Métodos Numéricos para a Equação de Advecção	7
2.1.4	CBC - <i>Convection Boundedness Criterion</i>	8
2.1.5	TVD - <i>Total Variation Diminishing</i>	9
2.1.6	Esquema TOPUS	10
2.1.7	CFL – Courant–Friedrichs–Lewy	12
2.2	Trabalhos Relacionados	13
2.3	Discretização da Equação de Advecção 1D	14
3	Desenvolvimento	17
3.1	Descrição dos Experimentos	17
3.1.1	Caso 1	19
3.1.2	Caso 2	20
3.1.3	Caso 3	21
3.2	Ferramentas Computacionais	22
3.3	Avaliação dos Resultados Numéricos	23
4	Resultados	25
4.1	Comparação entre solução numérica e analítica	26
4.1.1	Caso 1	26
4.1.2	Caso 2	28
4.1.3	Caso 3	30
4.1.4	Tabela de Erros	33
4.2	Discussão dos Resultados	34
5	Considerações Finais	35
5.1	Conclusão	35
5.2	Trabalhos Futuros	36
	Referências	37

1 Introdução

O transporte de grandezas físicas, como calor, massa ou quantidade de movimento, está presente em diversos fenômenos naturais e aplicações de engenharia. Compreender como essas grandezas se propagam em um meio é fundamental para diversas áreas da ciência e da tecnologia, como a dinâmica dos fluidos, os processos ambientais, a modelagem de escoamentos atmosféricos e a simulação de fluxos em rios e canais (HIRSCH, 1988; ANDERSON, 1995; FERZIGER; PERIC, 2002). Em muitas dessas aplicações, o transporte ocorre predominantemente devido ao movimento do fluido, exigindo modelos matemáticos capazes de descrever adequadamente esse mecanismo e métodos numéricos eficientes para sua resolução.

Entre os mecanismos de transporte, destaca-se a *advecção*, que representa o deslocamento de uma grandeza escalar exclusivamente devido ao movimento convectivo do fluido, desconsiderando efeitos difusivos. Trata-se de um processo direcional, no qual a propriedade transportada é carregada pelo escoamento. Esse fenômeno é comumente observado em situações como o transporte de poluentes em cursos d'água, o deslocamento de massas de ar na atmosfera, a propagação de salinidade em ambientes costeiros ou o transporte de contaminantes em meios porosos.

Apesar de seu conceito físico ser relativamente simples, a simulação numérica precisa da advecção impõe importantes desafios (TORO, 2009). Em particular, quando a solução apresenta frentes abruptas, descontinuidades ou gradientes muito acentuados, muitos esquemas numéricos clássicos podem introduzir erros significativos. Esses erros geralmente se manifestam na forma de oscilações espúrias ou difusão numérica artificial, que podem distorcer a forma do perfil transportado e comprometer a qualidade da solução.

Para lidar com esses desafios, diversos métodos numéricos foram desenvolvidos ao longo das últimas décadas (HIRSCH, 1988; LEVEQUE, 2002; TORO, 2009; QUEIROZ, 2009), com destaque para os esquemas *upwind* de alta resolução. Esses esquemas procuram combinar elevada ordem de precisão espacial com propriedades desejáveis de estabilidade e monotonicidade. Em geral, utilizam técnicas de limitação de fluxo que controlam o comportamento da solução em regiões onde ocorrem fortes gradientes.

Entre os critérios amplamente utilizados para garantir essas propriedades destacam-se o *Convection Boundedness Criterion* (CBC) (GASKELL; LAU, 1988) e o conceito de *Total Variation Diminishing* (TVD) (HARTEN, 1983). O critério CBC estabelece restrições para garantir que a solução permaneça limitada por valores fisicamente admissíveis, evitando a geração de novos extremos numéricos. Já a propriedade TVD assegura que a variação total da solução não aumente ao longo da integração temporal, contribuindo para a supressão de oscilações não físicas próximas a descontinuidades.

Nesse contexto, o esquema TOPUS (*Third-Order Polynomial Upwind Scheme*) constitui uma alternativa eficiente dentro da classe de esquemas *upwind* de alta resolução. Trata-se de um esquema de terceira ordem cuja formulação é obtida a partir de uma reconstrução polinomial em variáveis normalizadas. Essa abordagem permite construir funções de interpolação capazes de preservar propriedades importantes da solução, mantendo boa precisão em regiões suaves e evitando oscilações em regiões de gradiente elevado.

Uma característica importante do esquema TOPUS é a presença de um parâmetro livre α , introduzido como coeficiente do polinômio de reconstrução. Esse parâmetro controla diretamente a forma da função interpoladora e, conseqüentemente, influencia o comportamento numérico do método, afetando a dissipação e a dispersão numérica da solução. Para $\alpha \in [-2, 2]$, o esquema TOPUS permanece inteiramente contido na região CBC, garantindo a preservação das propriedades de limitação da solução. Além disso, demonstra-se que o esquema satisfaz a propriedade TVD para o caso particular $\alpha = 2$ (QUEIROZ, 2009).

Neste trabalho, a equação de advecção escalar unidimensional (1D) é utilizada como modelo matemático para avaliar o desempenho do esquema TOPUS. O problema é resolvido numericamente, considerando diferentes valores do parâmetro α , investigando-se o impacto desse parâmetro na precisão da solução e na representação das frentes de transporte. Os resultados obtidos são comparados diretamente com a solução analítica conhecida do problema, permitindo avaliar quantitativamente o erro numérico associado a cada configuração do esquema.

O repositório contendo o código utilizado nas simulações está disponível em:
<https://github.com/bruno-baeta/topus-linear-advection>.

1.1 Justificativa

A equação de advecção 1D constitui um modelo matemático elementar, porém essencial, amplamente utilizado como problema-teste na análise e validação de esquemas numéricos aplicáveis a situações mais complexas, como escoamentos compressíveis, transferência de calor e dinâmica de fluidos computacional. Apesar de sua simplicidade matemática, este modelo captura os principais desafios associados ao tratamento numérico de termos convectivos dominantes.

Uma das principais vantagens desse problema é a possibilidade de controle rigoroso das condições iniciais e de contorno, além da existência de soluções analíticas exatas. Isso permite avaliar de forma objetiva o desempenho de diferentes métodos numéricos, comparando diretamente as soluções obtidas com a solução exata do problema.

Como discutido em Queiroz (2009), a escolha do esquema de discretização é decisiva para a qualidade da solução numérica, especialmente em problemas nos quais o termo convectivo domina o comportamento do sistema. Esquemas de baixa ordem tendem a introduzir difusão numérica excessiva, o que resulta no alisamento artificial das frentes de transporte. Por outro

lado, esquemas de alta ordem, quando não possuem mecanismos adequados de controle, podem produzir oscilações não físicas nas proximidades de descontinuidades.

Nesse contexto, o esquema TOPUS apresenta uma característica particularmente interessante: a presença do parâmetro livre α , que permite ajustar o comportamento do método. A análise sistemática desse parâmetro em um problema controlado, como a equação de advecção 1D, permite compreender de forma mais clara como diferentes escolhas de α influenciam a precisão e a estabilidade da solução.

Assim, testar diferentes valores desse parâmetro em um problema com solução analítica conhecida permite quantificar seu impacto nos erros numéricos e na representação das frentes de transporte, fornecendo subsídios importantes para o uso do esquema em problemas mais complexos de dinâmica dos fluidos computacional.

1.2 Objetivos

O objetivo principal desta monografia é analisar o desempenho do esquema TOPUS aplicado à equação de advecção unidimensional, considerando diferentes valores do parâmetro livre α , tendo como base de comparação soluções analíticas conhecidas.

Os objetivos específicos são:

- Apresentar os fundamentos físicos e matemáticos da advecção e dos esquemas numéricos *upwind* de alta resolução;
- Implementar numericamente a equação de advecção 1D com discretização temporal via método de Euler explícito e espacial via esquema TOPUS;
- Avaliar e comparar os resultados obtidos para diferentes valores de α , utilizando métricas de erro apropriadas;
- Discutir os efeitos do parâmetro α sobre a precisão da solução, indicando o valor mais adequado para cada caso-teste, conforme as condições numéricas.

1.3 Organização da Monografia

O restante da monografia está organizado como segue.

O **Capítulo 2** apresenta a fundamentação teórica e os trabalhos relacionados ao tema, abordando os conceitos de advecção, difusão e convecção, o modelo matemático da equação de advecção 1D, os principais métodos numéricos utilizados em sua discretização, os critérios CBC e TVD, a formulação do esquema TOPUS, o número de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) e a discretização da equação de advecção.

O **Capítulo 3** descreve a etapa de desenvolvimento do trabalho, incluindo a definição dos experimentos numéricos, a caracterização dos três casos analisados (condições iniciais), as ferramentas computacionais utilizadas e os critérios empregados para a avaliação dos resultados numéricos.

O **Capítulo 4** apresenta os resultados obtidos nas simulações numéricas para os Casos 1, 2 e 3, incluindo gráficos das soluções, tabelas de erro e uma discussão detalhada do comportamento do esquema TOPUS para diferentes valores do parâmetro α e do número de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), que relaciona o passo de tempo ao espaçamento espacial da malha.

Por fim, o **Capítulo 5** reúne as considerações finais do trabalho, incluindo as conclusões obtidas a partir dos experimentos realizados e sugestões de possíveis trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica e Trabalhos Relacionados

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do trabalho, abrangendo os conceitos físicos de transporte em escoamentos, a modelagem matemática da equação de advecção unidimensional, os principais métodos numéricos utilizados em sua resolução e a formulação do esquema TOPUS.

2.1 Fundamentação Teórica

2.1.1 Advecção, Difusão e Convecção

Antes de aplicar métodos numéricos a problemas de transporte, é essencial compreender os principais processos físicos envolvidos nos escoamentos de fluidos. Três mecanismos fundamentais estão geralmente presentes nesses fenômenos: advecção, difusão e convecção.

A advecção corresponde ao transporte de uma propriedade escalar causado exclusivamente pelo movimento do fluido, podendo ocorrer mesmo na ausência de gradiente dessa propriedade. Trata-se de um processo direcionado, em que a substância é carregada com o escoamento, sendo predominante em situações nas quais o movimento do fluido exerce papel dominante no transporte da grandeza considerada ([LEVEQUE, 2002](#)).

A difusão, por sua vez, é um processo que decorre do movimento aleatório das partículas, caracterizando a chamada difusão molecular. Esse mecanismo promove o espalhamento de uma propriedade escalar a partir de regiões de maior para menor valor, mesmo quando o fluido está em repouso. Por sua natureza dissipativa, a difusão tende a suavizar os gradientes espaciais da grandeza transportada ([SMITH, 1985](#)).

A convecção, na acepção adotada neste trabalho, refere-se à combinação dos efeitos advectivos e difusivos. Ela é particularmente relevante em sistemas com gradientes de temperatura ou concentração, como em escoamentos térmicos ou no transporte de poluentes. A modelagem adequada desses sistemas requer a consideração simultânea dos dois mecanismos ([FERZIGER; PERIC, 2002](#)).

A Figura 2.1 ilustra perfis típicos de escoamentos unidimensionais com predominância de advecção pura, difusão pura e convecção-difusão em um instante $t > 0$.

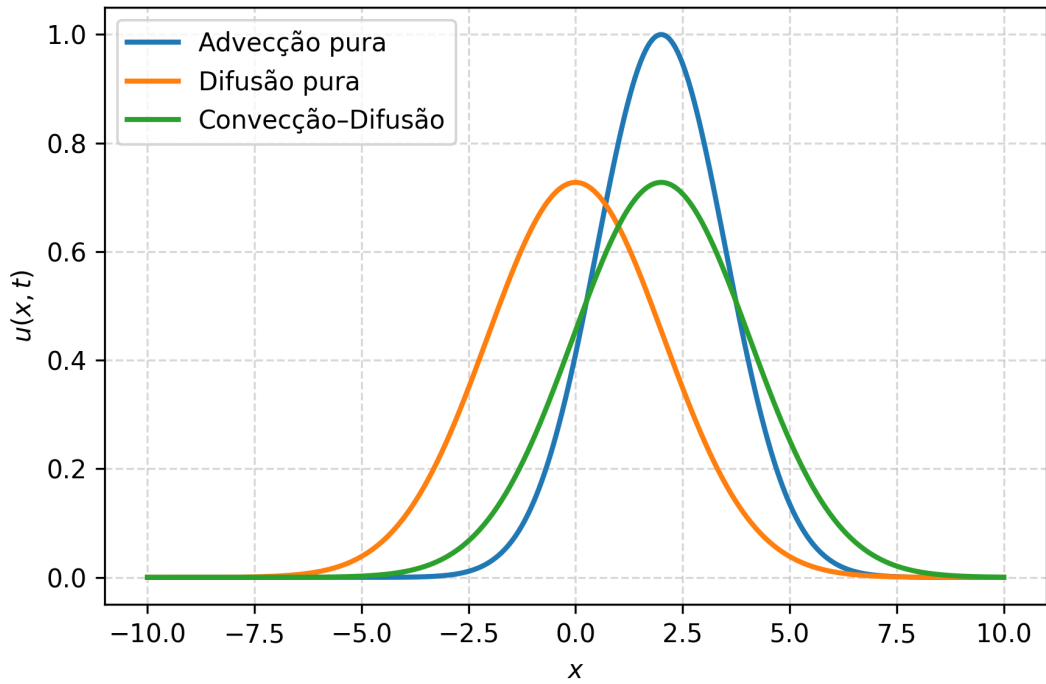


Figura 2.1 – No eixo horizontal está a posição espacial x e no eixo vertical a grandeza transportada $u(x, t)$. As unidades de x e u dependem do problema físico considerado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura mostra que a advecção pura (azul) desloca o perfil sem alterar sua forma, a difusão pura (laranja) amplia e suaviza o gradiente, enquanto a convecção-difusão (verde) combina deslocamento e espalhamento.

2.1.2 Modelo Matemático da Advecção 1D

A equação diferencial parcial que modela a advecção unidimensional de uma grandeza escalar é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

onde:

- $u(x, t)$ representa a quantidade escalar transportada na posição x e no tempo t ;
- a é a velocidade constante com que ocorre o transporte.

Para a solução numérica da equação (2.1), é necessário especificar uma condição inicial que defina a distribuição da variável u no instante $t = 0$:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_L, x_R]. \quad (2.2)$$

Além disso, as condições de contorno devem ser impostas nas extremidades do domínio espacial:

$$u(x_L, t) = u_L, \quad u(x_R, t) = u_R. \quad (2.3)$$

A solução analítica da equação de advecção 1D com coeficiente constante é conhecida e dada por:

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (2.4)$$

Essa solução representa o deslocamento do perfil inicial $u_0(x)$ ao longo do eixo x com velocidade constante a , sem alterações em sua forma, caracterizando um transporte puramente advectivo (MORTON; MAYERS, 2005).

2.1.3 Métodos Numéricos para a Equação de Advecção

A equação de advecção é frequentemente resolvida por métodos numéricos baseados em diferenças finitas, que discretizam o domínio em malhas espaciais e temporais e aproximam as derivadas parciais por expressões algébricas.

Entre os esquemas clássicos, o método de diferenças centrais no espaço é simples, mas pode se tornar instável em problemas convectivos resolvidos explicitamente quando o CFL não satisfaz a condição de estabilidade, resultando em oscilações espúrias.

O esquema *upwind* de primeira ordem é estável em uma ampla faixa de parâmetros, mas apresenta elevada difusão numérica, suavizando excessivamente as frentes de transporte (ANDERSON, 1995). O esquema de Lax-Wendroff, por sua vez, melhora a precisão por meio de termos de segunda ordem, mas pode introduzir oscilações não físicas próximas a descontinuidades (LAX; WENDROFF, 1960).

A difusão numérica pode ser entendida como transições abruptas, que se tornam mais largas e os picos tendem a perder amplitude quando comparados à solução ideal. Esse efeito não é físico no modelo de advecção pura, mas surge como consequência da discretização e é típico de esquemas mais dissipativos, como o *upwind* de primeira ordem (ANDERSON, 1995).

Já as oscilações não físicas aparecem como ondulações ao redor de descontinuidades e gradientes fortes, levando a ultrapassagens acima do máximo ou abaixo do mínimo esperados. Esse comportamento está associado a esquemas de maior ordem sem limitação adequada e é frequentemente observado em métodos como Lax-Wendroff na presença de frentes de transporte (LAX; WENDROFF, 1960). Aqui, frentes de transporte são as regiões do perfil onde u varia abruptamente, isto é, onde há gradientes elevados ou descontinuidades que se propagam ao longo do domínio.

A Figura 2.2 apresenta dois efeitos numéricos comuns em problemas dominados por convecção, em comparação com o comportamento ideal.

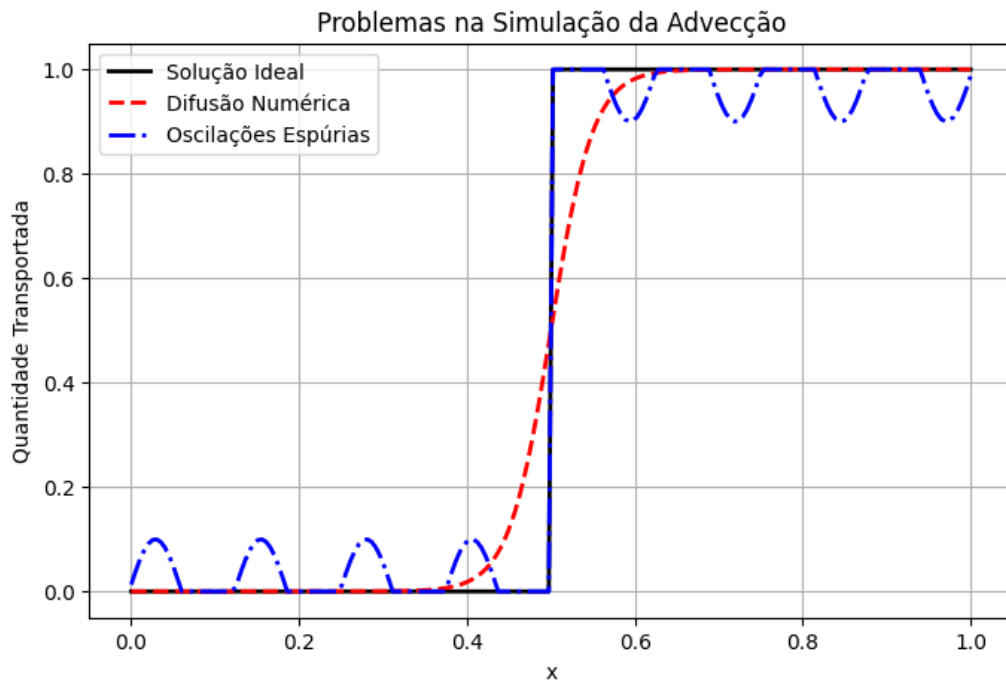


Figura 2.2 – Difusão numérica e oscilações espúrias, em comparação com a solução ideal. O eixo horizontal representa a posição espacial x e o eixo vertical a variável transportada u . Fonte: Elaborado pelo autor.

Para contornar essas limitações, surgiram os esquemas de alta resolução, projetados para preservar as características físicas da solução sem gerar oscilações. Os esquemas TVD, propostos por Harten (1983), garantem que a variação total da solução não aumente, evitando oscilações espúrias. Destacam-se nessa categoria o WENO (JIANG; SHU, 1996), o MUSCL (LEER, 1979) e o QUICK (LEONARD, 1979), cada qual com estratégias específicas para equilibrar precisão e estabilidade.

Dentro dessa classe de métodos, o esquema TOPUS apresenta-se como uma alternativa eficiente para problemas advectivos, unindo simplicidade de implementação à capacidade de manter alta precisão em diferentes configurações numéricas. Essa versatilidade justifica sua escolha para o presente estudo.

2.1.4 CBC - *Convection Boundedness Criterion*

O *Convection Boundedness Criterion* (CBC) foi introduzido com o objetivo de garantir que esquemas numéricos aplicados a termos convectivos não produzam valores não físicos, tais como oscilações espúrias, *overshoots* ou *undershoots*, especialmente em regiões caracterizadas por elevados gradientes ou descontinuidades (GASKELL; LAU, 1988).

Considerando o problema convectivo já apresentado anteriormente neste estudo, espera-se que a variável transportada permaneça limitada aos valores impostos pelas condições iniciais e de contorno ao longo da integração temporal. No entanto, esquemas convectivos de alta ordem podem

violar essa propriedade, produzindo novos extremos locais na solução numérica (LEONARD, 1988).

Com o objetivo de evitar tais comportamentos não físicos, estabelece-se o critério de limitação para esquemas convectivos. O valor interpolado na face computacional f , que representa a interface entre volumes de controle adjacentes, e denotado por ϕ_f , e deve satisfazer a condição

$$\min(\phi_U, \phi_D) \leq \phi_f \leq \max(\phi_U, \phi_D), \quad (2.5)$$

onde ϕ_U e ϕ_D correspondem aos valores da variável ϕ nos nós *upstream* e *downstream*, respectivamente. Essa restrição garante que a interpolação na face não produza novos máximos ou mínimos artificiais, que podem surgir por extrapolação de alta ordem em regiões com gradientes elevados ou descontinuidades (LEONARD, 1988).

Esse critério foi posteriormente reformulado por meio da introdução de variáveis normalizadas, permitindo uma interpretação geométrica clara do comportamento dos esquemas convectivos e estabelecendo a base para o desenvolvimento de métodos de alta resolução que preservam simultaneamente precisão e *boundedness* (LEONARD, 1988).

O critério CBC impõe que o valor interpolado na face satisfaça

$$0 \leq \hat{\phi}_f \leq 1. \quad (2.6)$$

Diversos esquemas de alta resolução foram desenvolvidos com base na formulação das variáveis normalizadas, respeitando o critério de limitação estabelecido por Leonard (LEONARD, 1988). Dentre esses esquemas, destaca-se o SMART, proposto originalmente nesse contexto, bem como o esquema TOPUS, introduzido posteriormente mantendo as restrições impostas pelo CBC (QUEIROZ, 2009).

2.1.5 TVD - *Total Variation Diminishing*

Assim como o *Convection Boundedness Criterion* (CBC), o conceito de *Total Variation Diminishing* (TVD) surge da necessidade de evitar soluções numéricas com propriedades não físicas em problemas dominados por convecção. Enquanto o CBC impõe limites locais à variável transportada, garantindo que valores interpolados permaneçam dentro de intervalos fisicamente admissíveis, o critério TVD atua de forma complementar, controlando a evolução global das oscilações ao longo do tempo (HARTEN, 1983; LEVEQUE, 2002).

Durante a discretização numérica de problemas convectivos, esquemas de alta ordem podem apresentar oscilações espúrias em regiões onde a solução varia de forma abrupta. Essas oscilações não representam fenômenos reais do escoamento e podem comprometer a interpretação dos resultados. O critério TVD foi introduzido justamente para impedir que esse tipo de comportamento se intensifique ao longo da integração temporal (HARTEN, 1983; LEVEQUE, 2002).

A ideia central do conceito TVD é que a solução numérica não deve se tornar mais oscilatória com o avanço do tempo. Para formalizar essa ideia, define-se a variação total de uma variável escalar discretizada $\{\phi_i\}$ como a soma das diferenças absolutas entre valores consecutivos,

$$TV(\phi) = \sum_i |\phi_{i+1} - \phi_i|. \quad (2.7)$$

Um esquema numérico é classificado como TVD quando a variação total da solução em um instante de tempo não excede a variação total no instante anterior, isto é,

$$TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n). \quad (2.8)$$

Essa condição assegura que o método não introduza novas oscilações na solução, mesmo na presença de gradientes acentuados ou descontinuidades (HARTEN, 1983).

Embora os esquemas TVD sejam eficazes na prevenção de oscilações não físicas, eles tendem a introduzir maior difusão numérica em regiões onde a solução é suave, o que pode reduzir a nitidez das frentes de transporte (LEVEQUE, 2002).

Na prática, os critérios CBC e TVD são frequentemente empregados de forma complementar no desenvolvimento de esquemas convectivos de alta resolução. Enquanto o CBC assegura que a solução permaneça limitada no espaço de variáveis normalizadas, o critério TVD contribui para controlar a evolução temporal das oscilações numéricas, resultando em soluções mais estáveis e fisicamente consistentes em problemas de advecção dominante.

2.1.6 Esquema TOPUS

O esquema TOPUS (QUEIROZ, 2009) utiliza um polinômio de quarto grau para a reconstrução dos fluxos numéricos, obedecendo às condições do diagrama CBC (LEONARD, 1979) e garantindo terceira ordem de precisão e monotonicidade.

A forma geral do esquema TOPUS, em variáveis normalizadas $\hat{\phi}_U \in [0, 1]$, é expressa por:

$$\hat{\phi}_f = a_4 \hat{\phi}_U^4 + a_3 \hat{\phi}_U^3 + a_2 \hat{\phi}_U^2 + a_1 \hat{\phi}_U, \quad (2.9)$$

com coeficientes determinados a partir de condições propostas no diagrama de Leonard (NVD – Normalized Variable Diagram) (LEONARD, 1988), que asseguram consistência, ordem de exatidão e mantêm o polinômio dentro da região limitada. Desse modo, impõem-se as seguintes condições:

- O polinômio passa pela origem $\hat{\phi}_f = 0$ quando $\hat{\phi}_U = 0$;
- Passa pelos pontos $Q(0,5; 0,75)$ e $P(1; 1)$;

- A inclinação da curva em Q é igual a 0,75;
- O coeficiente do termo de maior grau é considerado o parâmetro livre: $\alpha = a_4$. Responsável por ajustar a curvatura do polinômio e, portanto, o grau de difusão ou compressibilidade do esquema.

A partir dessas condições, obtêm-se:

$$a_1 = \frac{-\alpha + 10}{4}, \quad a_2 = \frac{5\alpha - 10}{4}, \quad a_3 = -2\alpha + 1. \quad (2.10)$$

Substituindo na equação original, tem-se:

$$\hat{\phi}_f = \alpha \hat{\phi}_U^4 + (-2\alpha + 1) \hat{\phi}_U^3 + \frac{5\alpha - 10}{4} \hat{\phi}_U^2 + \frac{-\alpha + 10}{4} \hat{\phi}_U. \quad (2.11)$$

Para valores de $\hat{\phi}_U$ fora do intervalo $[0, 1]$, o esquema retorna ao esquema *upwind* de primeira ordem.

Seja o gradiente local:

$$r_f = \frac{\hat{\phi}_U}{1 - \hat{\phi}_U}, \quad (2.12)$$

e o esquema *upwind* de alta ordem reescrito como:

$$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U + \frac{1}{2} \psi(r_f)(1 - \hat{\phi}_U). \quad (2.13)$$

Então, o limitador de fluxo associado ao TOPUS é dado por:

$$\psi(r_f) = \begin{cases} \frac{(-0.5\alpha + 1)r_f^3 + (\alpha + 4)r_f^2 + (-0.5\alpha + 3)r_f}{(1 + r_f)^3}, & r_f \geq 0, \\ 0, & r_f < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Para $\alpha = 2$, o esquema satisfaz as condições TVD, apresentando monotonicidade e terceira ordem de precisão nos testes realizados por [Queiroz \(2009\)](#).

A Figura 2.3 mostra as curvas do esquema TOPUS para diferentes valores do parâmetro livre α e do esquema FOU (*First-Order Upwind*), correspondente ao esquema *upwind* de primeira ordem.

Sejam as posições D (*Downstream*), R (*Remote-Upstream*) e U (*Upstream*) em relação à face computacional f da molécula computacional ilustradas na Figura 2.4. O esquema TOPUS definido em (2.11) está expresso em variável normalizada de [Leonard \(1988\)](#), cuja definição é:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}, \quad (2.15)$$

onde ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da variável genérica ϕ nos pontos D e R . Por exemplo, $\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$ e $\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$.

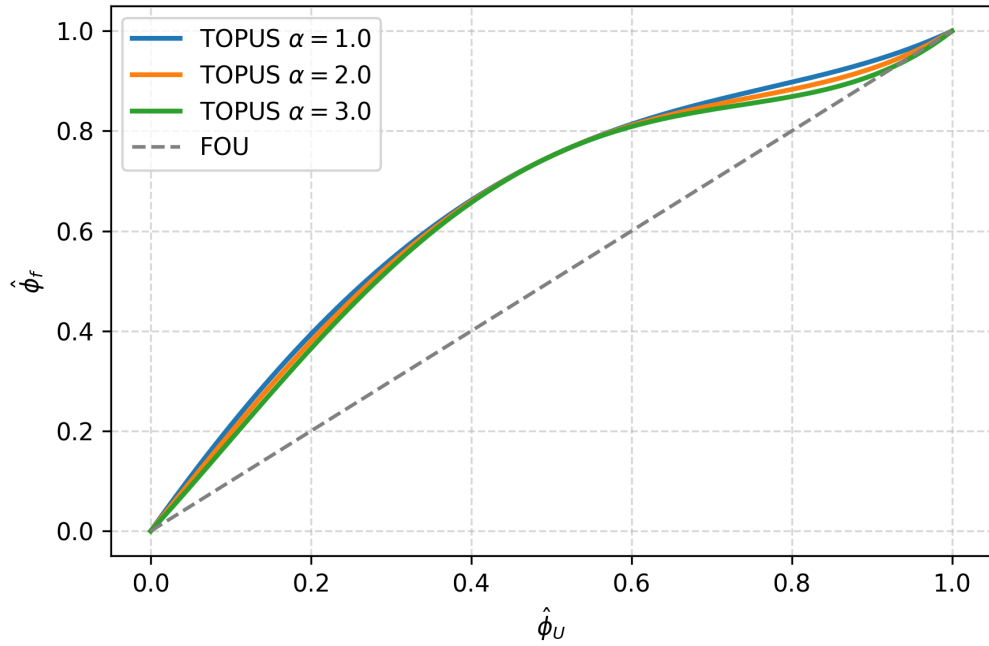


Figura 2.3 – Curvas do esquema TOPUS no diagrama de variáveis normalizadas para diferentes valores do parâmetro α .

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.7 CFL – Courant–Friedrichs–Lewy

Ao resolver numericamente equações que evoluem no tempo, como a equação de advecção, é necessário escolher um passo de tempo adequado. Se esse passo for muito grande, o método pode produzir resultados incorretos ou instáveis, mesmo quando o esquema espacial utilizado é adequado. O critério de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) fornece uma regra simples para orientar essa escolha (COURANT; FRIEDRICH; LEWY, 1928; LEVEQUE, 2002).

A ideia é que, durante um único passo de tempo, a informação transportada pelo escoamento não deve atravessar mais de uma célula da malha. Caso contrário, o método numérico deixa de acompanhar corretamente o movimento da informação no domínio espacial, o que pode gerar instabilidades na solução (COURANT; FRIEDRICH; LEWY, 1928).

Para a equação de advecção unidimensional com velocidade constante a , o número de CFL é definido como

$$\text{CFL} = \frac{a \Delta t}{\Delta x}, \quad (2.16)$$

em que Δt representa o passo de tempo e Δx é o espaçamento da malha. Para métodos explícitos, a condição de estabilidade exige que esse número seja menor ou igual a um,

$$\text{CFL} \leq 1. \quad (2.17)$$

O critério CFL é utilizado como uma condição básica de estabilidade temporal. A escolha do passo de tempo de modo a satisfazer essa condição garante que a solução numérica evolua de forma controlada, permitindo que as propriedades de limitação e controle de oscilações, asseguradas pelos critérios CBC e TVD, sejam preservadas ao longo da simulação (LEVEQUE, 2002).

2.2 Trabalhos Relacionados

Esta seção apresenta uma revisão de trabalhos relacionados à aplicação de métodos numéricos na resolução da equação de advecção 1D, com ênfase no desenvolvimento e análise do esquema TOPUS.

A equação de advecção 1D constitui um modelo matemático fundamental para o estudo de transporte convectivo em meios contínuos, sendo amplamente utilizada como problema-teste para validar e comparar esquemas numéricos. Sua simplicidade permite isolar os efeitos de discretizações numéricas sobre propriedades como difusão e dispersão, facilitando a identificação de limitações dos métodos empregados. Patankar (1980) aplicou essa equação em simulações de transferência de calor e massa, destacando a importância de métodos que minimizem a difusão artificial a fim de preservar as características físicas da solução. De modo semelhante, Tannehill, Anderson e Pletcher (1997) empregaram a equação de advecção em contextos mais complexos da dinâmica dos fluidos, abordando os desafios impostos por gradientes acentuados e condições de contorno não triviais.

Com o objetivo de superar as limitações dos métodos clássicos, como a excessiva difusão numérica ou a ocorrência de oscilações espúrias, diversos esquemas de alta resolução foram desenvolvidos. Um marco importante nessa evolução foi o conceito de esquemas TVD, formalizado por Harten (1983), que introduziu critérios rigorosos para garantir a monotonicidade das soluções. Entre os esquemas TVD, destaca-se o esquema MUSCL proposto por Leer (1979), que utiliza interpolação limitada para atingir a segunda ordem de precisão sem comprometer a estabilidade. Outro esquema relevante é o QUICK, introduzido por Leonard (1979), que emprega interpolação polinomial de terceira ordem e é amplamente utilizado em escoamentos unidirecionais devido à sua simplicidade e eficiência. Mais recentemente, os esquemas WENO, desenvolvidos por Jiang e Shu (1996), ampliaram as capacidades dos métodos de alta ordem ao lidar eficientemente com descontinuidades e ondas de choque, sendo frequentemente aplicados em simulações envolvendo turbulência e dinâmica não linear.

O esquema SMARTER, por sua vez, é um método de alta resolução baseado no diagrama de Leonard, projetado para garantir monotonicidade e reduzir oscilações numéricas em escoamentos convectivos (WATERSON; DECONINCK, 2007). Sua principal limitação é a rigidez da formulação, que define de forma fixa a curvatura da reconstrução. O TOPUS amplia essa abordagem ao introduzir o parâmetro livre α , permitindo ajustar a forma do polinômio de acordo

com o problema.

Nesse cenário, o esquema TOPUS, proposto por [Queiroz \(2009\)](#), surge como uma alternativa promissora ao combinar polinômios de terceira ordem com mecanismos de limitação que satisfazem os critérios CBC. O TOPUS Introduce um parâmetro livre α , que controla diretamente a forma do polinômio de reconstrução e, consequentemente, influencia a precisão e a dissipação numérica da solução. O estudo original aplicou o TOPUS a escoamentos com superfície livre, demonstrando que ajustes adequados em α permitem balancear suavidade e nitidez nas frentes de transporte.

Trabalhos comparativos, como o próprio estudo de [Queiroz \(2009\)](#), mostraram que o TOPUS pode superar esquemas tradicionais como o QUICK em termos de difusão numérica, especialmente quando o parâmetro α é calibrado de forma apropriada. O esquema demonstrou capacidade de manter a monotonicidade e evitar oscilações não físicas típicas de métodos de alta ordem sem limitação, tornando-se uma alternativa robusta e eficiente para problemas de convecção 1D. Tal robustez é particularmente relevante em aplicações ambientais e de engenharia, onde a fidelidade da solução numérica é essencial para a interpretação dos resultados e para a tomada de decisões técnicas.

Adicionalmente, o método das diferenças finitas continua sendo a principal abordagem na discretização de equações diferenciais parciais hiperbólicas, como a equação de advecção. Sua simplicidade conceitual e ampla aplicabilidade o tornam ideal para o desenvolvimento de novos esquemas. Referências clássicas como [LeVeque \(2002\)](#) e [Morton e Mayers \(2005\)](#) apresentam fundamentos teóricos e práticos sobre estabilidade, convergência e monotonicidade, além de abordagens modernas com uso de limitadores e técnicas TVD. Esse arcabouço teórico é essencial para embasar o desenvolvimento e a aplicação de esquemas como o TOPUS, que se apoia em diferenciação de alta ordem e técnicas de controle de oscilação para obter soluções fisicamente coerentes em contextos de convecção dominante.

Dessa forma, os trabalhos relacionados aqui discutidos demonstram a relevância da equação de advecção como ferramenta de validação, a evolução dos esquemas numéricos de alta resolução e o papel do TOPUS como contribuição recente e promissora no contexto da simulação numérica de transportes convectivos.

2.3 Discretização da Equação de Advecção 1D

A Figura 2.4 ilustra o estêncil computacional utilizado para a discretização da equação de advecção unidimensional (1D).

A seguir, são apresentadas as aproximações dos dois termos da equação de advecção 1D definida na Equação (2.1): o termo transiente e o termo convectivo.

O termo transiente é aproximado pelo método de Euler explícito, conforme a expressão:

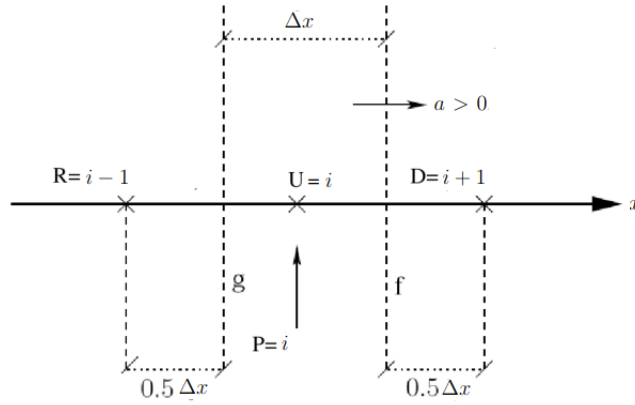


Figura 2.4 – A Figura mostra o estêncil computacional da malha 1D, em que $U = i$ é o nó central, $R = i - 1$ e $D = i + 1$ são os vizinhos, e f e g representam as faces da célula de controle. O espaçamento Δx define a distância entre os nós, e a condição $a > 0$ indica o escoamento da esquerda para a direita.

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_P = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad (2.18)$$

em que $P = i$ representa o nó da malha e n o instante de tempo atual.

Já o termo convectivo da Equação (2.1) é discretizado por meio do esquema TOPUS. Considerando a variável transportada u com velocidade constante a na direção x , a derivada convectiva é aproximada por:

$$\left. \frac{\partial (au)}{\partial x} \right|_P = \frac{(au)|_f - (au)|_g}{\Delta x}, \quad (2.19)$$

em que os pontos P , f e g correspondem, respectivamente, às posições i , $i + \frac{1}{2}$ e $i - \frac{1}{2}$. Substituindo esses índices, tem-se:

$$\left. \frac{\partial (au)}{\partial x} \right|_i = \frac{a u_{i+\frac{1}{2}} - a u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (2.20)$$

Como a velocidade a é constante, o que permite reescrever:

$$\left. \frac{\partial (au)}{\partial x} \right|_i = \frac{a(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}})}{\Delta x}. \quad (2.21)$$

Seja $\mathcal{T}(\hat{u}_U, \alpha)$ a função principal do esquema TOPUS, definida em variáveis normalizadas como:

$$\mathcal{T}(\hat{u}_U, \alpha) = \alpha \hat{u}_U^4 + (-2\alpha + 1) \hat{u}_U^3 + \frac{5\alpha - 10}{4} \hat{u}_U^2 + \frac{-\alpha + 10}{4} \hat{u}_U, \quad (2.22)$$

e considerando que a velocidade $a > 0$, as aproximações para $u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_{i-\frac{1}{2}}$ são calculadas conforme o esquema TOPUS, como segue:

- Aproximação de $u_{i+\frac{1}{2}}$ (com nós computacionais $D = i + 1, U = i, R = i - 1$):

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i-1} + (u_{i+1} - u_{i-1}) \mathcal{T}(\hat{u}_U, \alpha), & \hat{u}_U \in [0, 1], \\ u_i, & \hat{u}_U \notin [0, 1], \end{cases} \quad (2.23)$$

com:

$$\hat{u}_U = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}}. \quad (2.24)$$

- Aproximação de $u_{i-\frac{1}{2}}$ (com nós computacionais $D = i, U = i - 1, R = i - 2$):

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i-2} + (u_i - u_{i-2}) \mathcal{T}(\hat{u}_U, \alpha), & \hat{u}_U \in [0, 1], \\ u_{i-1}, & \hat{u}_U \notin [0, 1], \end{cases} \quad (2.25)$$

com:

$$\hat{u}_U = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{u_i - u_{i-2}}. \quad (2.26)$$

Com essas aproximações, a equação de advecção unidimensional (1D):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.27)$$

é discretizada pela união das Equações (2.18) e (2.21), resultando na seguinte forma discreta:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \frac{a \left(u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n \right)}{\Delta x}, \quad (2.28)$$

Portanto, a forma discreta explícita final utilizada neste trabalho é dada por:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (2.29)$$

em que os fluxos $u_{i+\frac{1}{2}}^n$ e $u_{i-\frac{1}{2}}^n$ são avaliados no instante de tempo n .

3 Desenvolvimento

Neste capítulo, são descritos os procedimentos metodológicos adotados para a análise do desempenho do esquema TOPUS aplicado à equação de advecção escalar unidimensional. São apresentados o modelo numérico considerado, a configuração dos experimentos computacionais e os critérios utilizados para a avaliação dos resultados obtidos.

A metodologia adotada busca avaliar sistematicamente a influência do parâmetro livre α e do número de Courant (CFL) sobre a precisão e o comportamento numérico do esquema TOPUS. Para isso, são utilizados diferentes problemas-teste com características distintas de transporte convectivo, permitindo investigar o desempenho do método em situações com perfis suaves, gradientes acentuados e descontinuidades.

3.1 Descrição dos Experimentos

Nesta seção, são descritos os experimentos numéricos realizados para a análise do desempenho do esquema TOPUS na resolução da equação de advecção escalar unidimensional. As simulações consideram diferentes condições iniciais e tempos de simulação, permitindo avaliar o comportamento do método em situações com perfis suaves, gradientes acentuados e descontinuidades.

Em todos os experimentos, considera-se a equação de advecção unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

com velocidade constante $a = 1$.

As condições de contorno adotadas são do tipo Dirichlet homogêneo, isto é, impõe-se $u_L = 0$ na fronteira esquerda e $u_R = 0$ na fronteira direita para todo o tempo.

Como o escoamento é para a direita ($a > 0$), a fronteira esquerda atua como contorno de entrada e a fronteira direita como contorno de saída. Dessa forma, a condição $u_L = 0$ evita a entrada de informação adicional no domínio, enquanto $u_R = 0$ permite controlar o problema de forma simples, garantindo que o comportamento observado nas simulações esteja associado principalmente ao desempenho do esquema numérico no interior do domínio.

As simulações foram realizadas em malhas unidimensionais uniformes, definidas a partir de um espaçamento espacial fixo $\Delta x = 5 \times 10^{-3}$. Para cada caso-teste, o domínio espacial considerado determina o número total de células da malha, calculado como

$$N = \frac{x_N - x_0}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

A escolha de uma malha uniforme simplifica a implementação numérica e permite comparar diretamente os resultados obtidos para diferentes condições iniciais e parâmetros do esquema.

A integração temporal foi realizada por meio do método de Euler explícito. O passo de tempo Δt foi determinado a partir do número de CFL, definido por

$$\text{CFL} = \frac{a \Delta t}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

Em nossos experimentos, foram considerados dois valores do número de Courant,

$$\text{CFL} = 0,5 \quad \text{e} \quad \text{CFL} = 0,05.$$

O primeiro valor situa-se próximo ao limite superior admissível de estabilidade para métodos explícitos aplicados a equações hiperbólicas simples, enquanto o segundo corresponde a um regime com passo de tempo reduzido. Essa escolha permite avaliar o comportamento do esquema tanto em condições numéricas mais exigentes quanto em regimes nos quais os efeitos da discretização temporal são minimizados.

O esquema TOPUS foi avaliado para o conjunto de valores do parâmetro livre

$$\alpha \in \{-8; -2; 0; 0,5; 2; 8\}. \quad (3.4)$$

Esses valores foram selecionados para abranger diferentes regimes do esquema, incluindo configurações mais compressivas (valores negativos), configurações intermediárias e configurações potencialmente mais difusivas (valores positivos elevados). Dessa forma, torna-se possível observar a influência do parâmetro α na qualidade da solução numérica, especialmente no equilíbrio entre dissipação numérica e preservação de frentes de transporte.

A influência de α pode ser interpretada no diagrama de variáveis normalizadas NVD (*Normalized Variable Diagram*), no qual o esquema convectivo é representado pela curva $\hat{\phi}_f(\hat{\phi}_U)$ no plano $(\hat{\phi}_U, \hat{\phi}_f)$. Nesse diagrama, a região CBC corresponde ao conjunto de curvas que satisfazem

$$0 \leq \hat{\phi}_f \leq 1,$$

evitando a ocorrência de *overshoots* e *undershoots*.

Para o esquema TOPUS, quando $\alpha \in [-2, 2]$, a curva permanece contida na região CBC. Além disso, para $\alpha = 2$, obtém-se um caso que satisfaz as condições TVD. Ainda, observa-se que o esquema SMARTER pode ser recuperado fazendo-se $\alpha = 0$.

As condições iniciais consideradas neste estudo seguem a mesma configuração adotada no desenvolvimento e na validação original do esquema TOPUS. Nesse contexto, foram selecionados três problemas com diferentes níveis de complexidade do transporte convectivo, incluindo perfis com múltiplos picos e vales, funções compostas com regiões suaves e descontínuas, bem como perfis altamente não lineares e oscilatórios (QUEIROZ, 2009).

3.1.1 Caso 1

O primeiro problema corresponde ao chamado perfil em forma de “W”, utilizado para avaliar o comportamento de esquemas convectivos na presença de múltiplos picos e vales próximos.

O domínio considerado é

$$x \in [-1, 1].$$

A condição inicial é dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} -x \sin\left(\frac{3\pi x^2}{2}\right) & x \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right], \\ |\sin(2\pi x)| & x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right], \\ 2x - 1 - \frac{1}{6} \sin(3\pi x) & x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]. \end{cases} \quad (3.5)$$

A Figura 3.1 apresenta o perfil correspondente à condição inicial $u_0(x)$ do Caso 1.

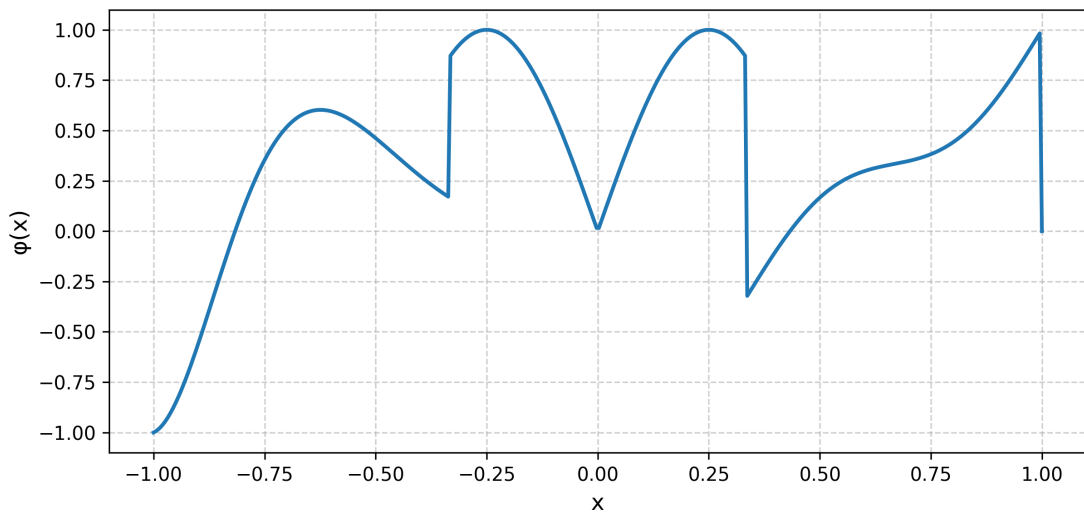


Figura 3.1 – Perfil da condição inicial do Caso 1.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse problema é utilizado para analisar a capacidade do esquema em preservar a monotonicidade da solução e evitar oscilações não físicas em regiões com variações abruptas.

As simulações foram realizadas até o instante final

$$t_f = 0,25.$$

Nesse instante, a solução numérica é comparada diretamente com a solução analítica deslocada.

3.1.2 Caso 2

No segundo problema, considera-se o domínio espacial

$$x \in [0, 2].$$

A condição inicial é composta por diferentes estruturas geométricas:

$$u_0(x) = \begin{cases} \exp \left[-\log(50) \left(\frac{x - 0,15}{0,05} \right)^2 \right] & x \in [0; 0,2), \\ 1 & x \in (0,3; 0,4), \\ 20x - 10 & x \in (0,5; 0,55), \\ -20x + 12 & x \in [0,55; 0,66), \\ \sqrt{1 - \left(\frac{x - 0,75}{0,05} \right)^2} & x \in (0,7; 0,8), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Esse perfil contém:

- uma função gaussiana, - um platô constante, - rampas lineares, - uma estrutura semicircular.

Essa diversidade de estruturas permite avaliar simultaneamente diferentes comportamentos numéricos do esquema.

A Figura 3.2 apresenta o perfil correspondente à condição inicial $u_0(x)$ do Caso 2.

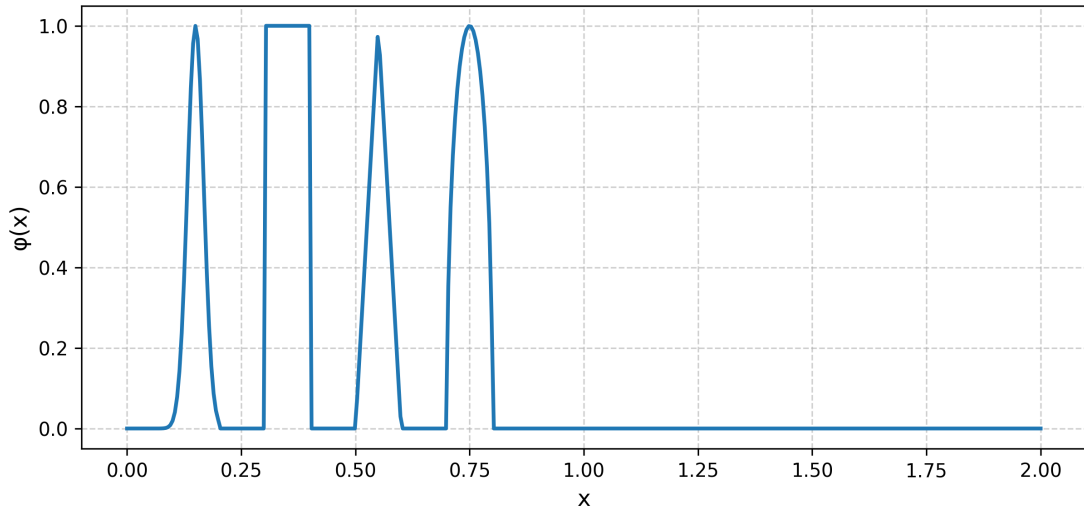


Figura 3.2 – Perfil da condição inicial do Caso 2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse problema combina regiões suaves, rampas lineares e discontinuidades abruptas, sendo utilizado para avaliar simultaneamente a difusão numérica e a capacidade do esquema em preservar picos e platôs da solução durante o transporte convectivo.

As simulações foram realizadas até o instante final

$$t_f = 1,0.$$

3.1.3 Caso 3

No terceiro problema, considera-se o domínio

$$x \in [-1, 1].$$

A condição inicial é dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0; 0,2], \\ 4x - 0,6 & x \in (0,2; 0,4], \\ -4x + 2,6 & x \in (0,4; 0,6], \\ 1 & x \in (0,6; 0,8], \\ 0 & x \in [-1; 0) \cup (0,8; 1]. \end{cases} \quad (3.7)$$

Esse perfil apresenta discontinuidades e regiões de variação rápida da solução.

A Figura 3.3 apresenta o perfil correspondente à condição inicial $u_0(x)$ do Caso 3.

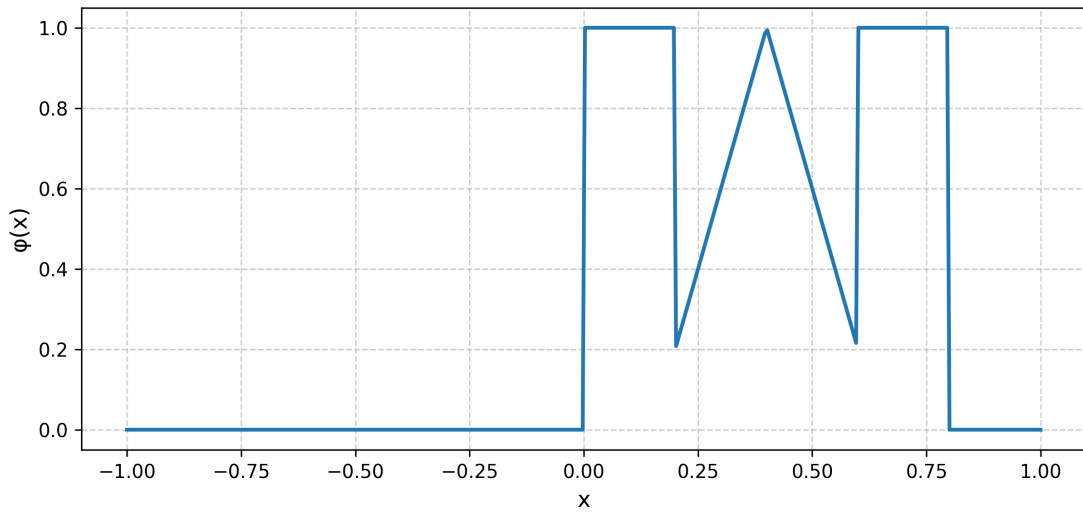


Figura 3.3 – Perfil da condição inicial do Caso 3.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse problema é utilizado para avaliar a robustez do esquema TOPUS em condições severas de transporte convectivo.

As simulações foram realizadas até o instante final

$$t_f = 0,125.$$

3.2 Ferramentas Computacionais

A implementação do esquema TOPUS e a realização dos experimentos numéricos foram desenvolvidas em linguagem Python.

Para o processamento numérico, foi utilizada a biblioteca NumPy, responsável pelas operações vetoriais, manipulação de arranjos e cálculo das métricas de erro.

A visualização e a geração das figuras foram realizadas com a biblioteca Matplotlib, permitindo comparar os perfis numéricos obtidos com as soluções analíticas de referência.

O desenvolvimento em Python foi adotado devido à ampla disponibilidade de bibliotecas voltadas à computação científica, além da facilidade de reprodução e extensão dos experimentos.

O código foi organizado de forma modular, separando rotinas para:

- construção do domínio espacial,
- definição das condições iniciais,

- cálculo da solução analítica,
- avanço temporal da solução numérica,
- geração das figuras e análise dos erros.

Essa estrutura modular facilita a manutenção do programa e reduz a possibilidade de inconsistências entre os diferentes casos de teste.

Para garantir a reprodutibilidade dos experimentos numéricos apresentados nesta monografia, o código-fonte foi disponibilizado em um repositório público no GitHub:

<https://github.com/bruno-baeta/topus-linear-advection>

3.3 Avaliação dos Resultados Numéricos

A avaliação do desempenho do esquema TOPUS foi realizada por meio das normas de erro L_1 , L_2 e L_∞ , que medem a diferença entre a solução numérica obtida e a solução analítica de referência.

Neste estudo, as métricas L_1 e L_2 são apresentadas em forma normalizada pela quantidade de pontos N , de modo a evitar que o valor do erro cresça artificialmente com o refinamento da malha.

As métricas são definidas por:

$$E_{L_1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u_i^{\text{num}} - u_i^{\text{exato}}|, \quad (3.8)$$

$$E_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i^{\text{num}} - u_i^{\text{exato}})^2}, \quad (3.9)$$

$$E_{L_\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^{\text{num}} - u_i^{\text{exato}}|. \quad (3.10)$$

onde:

- u_i^{num} representa o valor da solução numérica no ponto i ;
- u_i^{exato} representa o valor correspondente da solução analítica;
- N é o número total de pontos da malha espacial.

A análise conjunta dessas métricas permite avaliar diferentes aspectos da qualidade da solução numérica. Enquanto a norma L_1 fornece uma medida média do erro global, a norma L_2 enfatiza erros maiores devido ao seu caráter quadrático, e a norma L_∞ identifica o maior erro pontual presente na solução.

Essa análise possibilita caracterizar o comportamento do esquema TOPUS e identificar valores do parâmetro α associados a menores erros para diferentes configurações numéricas.

4 Resultados

Neste capítulo, são apresentados os resultados numéricos obtidos com o esquema TOPUS para os três casos definidos na metodologia, variando-se o parâmetro α e o número de Courant.

Os valores de $\alpha \in \{-8; -2; 0; 0,5; 2; 8\}$ foram escolhidos de modo a abranger configurações altamente compressivas, configurações intermediárias e valores fortemente difusivos, permitindo observar o comportamento do esquema em diferentes regimes de dissipação e compressibilidade, conforme justificado na metodologia.

Do ponto de vista numérico, valores negativos de α tendem a produzir esquemas mais compressivos, capazes de preservar melhor frentes abruptas e regiões de forte gradiente. Por outro lado, valores positivos elevados introduzem maior dissipação numérica, o que pode reduzir oscilações espúrias, porém ao custo de maior suavização das estruturas da solução.

Os valores do número de Courant foram escolhidos de modo a representar dois regimes numéricos distintos. O valor $CFL = 0,05$ corresponde a um regime com passo de tempo reduzido, no qual os efeitos da discretização temporal são minimizados, permitindo que a análise se concentre predominantemente no comportamento espacial do esquema TOPUS e na influência do parâmetro α .

Por outro lado, o valor $CFL = 0,5$ situa-se em um regime mais próximo do limite de estabilidade do método explícito, tornando a simulação numericamente mais exigente. Nesse caso, tornam-se mais evidentes os efeitos combinados da discretização espacial e temporal, possibilitando avaliar a robustez do esquema sob condições mais severas.

A adoção desses dois valores do número de Courant permite, portanto, uma análise comparativa abrangente do desempenho do esquema, tanto em regime conservador quanto em regime mais crítico de estabilidade.

4.1 Comparação entre solução numérica e analítica

A solução analítica da equação de advecção unidimensional corresponde simplesmente à translação do perfil inicial com velocidade constante a , sem alteração de forma ou amplitude. Dessa forma, a solução exata é dada pela Equação (2.4).

Assim, qualquer diferença observada entre a solução numérica e a solução analítica decorre exclusivamente de erros introduzidos pelo processo de discretização numérica. Em particular, podem surgir dois tipos principais de distorções:

- **difusão numérica**, caracterizada pelo alargamento ou suavização de frentes e picos da solução;
- **oscilações não físicas**, que aparecem como ultrapassagens (*overshoots*) ou subestimações (*undershoots*) próximas a regiões de forte gradiente ou descontinuidades.

A comparação visual entre as soluções numéricas e a solução analítica permite avaliar qualitativamente a capacidade do esquema TOPUS em preservar:

- a forma global do perfil transportado;
- a posição das frentes convectivas;
- a amplitude dos picos e vales da solução;
- a ausência de oscilações numéricas não físicas.

Nos resultados apresentados a seguir, cada conjunto de figuras mostra o comportamento do esquema para diferentes valores do parâmetro α , permitindo identificar tendências associadas à compressividade e à dissipação numérica.

4.1.1 Caso 1

Como as Figuras 4.1 e 4.2 ilustram, o Caso 1 apresenta um perfil inicial com múltiplas estruturas próximas entre si, contendo picos, vales e regiões de curvatura elevada. Esse tipo de configuração é particularmente útil para avaliar a capacidade de um esquema convectivo em preservar estruturas finas da solução durante o transporte.

A análise visual concentra-se em verificar se os picos e vales mantêm suas amplitudes e separação ao longo do transporte e se aparecem distorções nas transições mais estreitas do perfil.

Para $CFL = 0,05$, observa-se que valores mais negativos de α preservam melhor as estruturas do perfil, apresentando menor difusão numérica. À medida que α assume valores

positivos mais elevados, observa-se um aumento gradual da suavização das frentes, indicando maior dissipação introduzida pelo esquema.

Quando $CFL = 0,5$, o problema torna-se numericamente mais exigente. Nesse regime, as diferenças entre os valores de α tornam-se mais evidentes, sendo possível observar pequenas distorções adicionais nas regiões de maior curvatura do perfil.

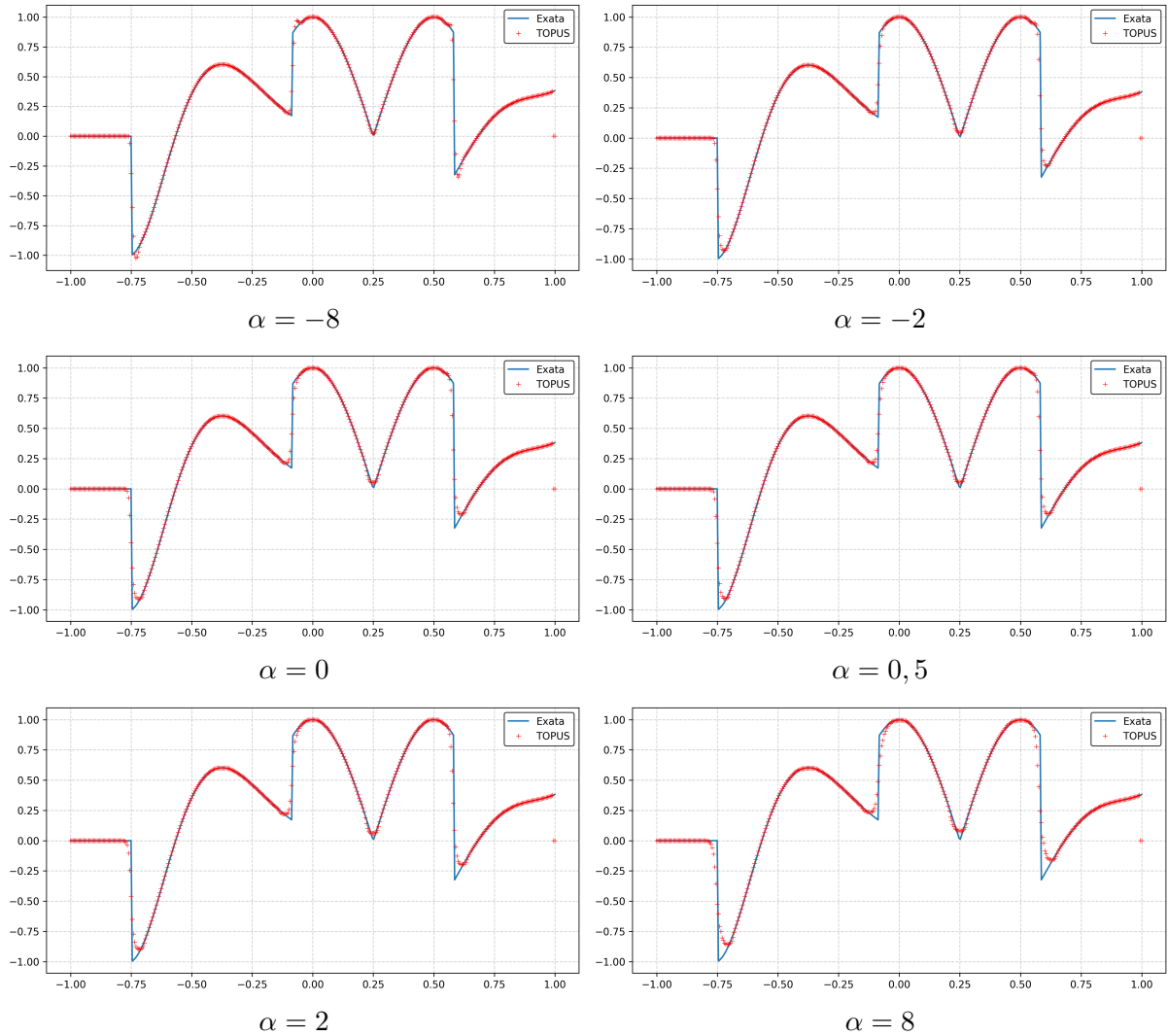


Figura 4.1 – Caso 1: resultados numéricos para $CFL = 0,05$ e diferentes valores de α .
Fonte: Elaborado pelo autor.

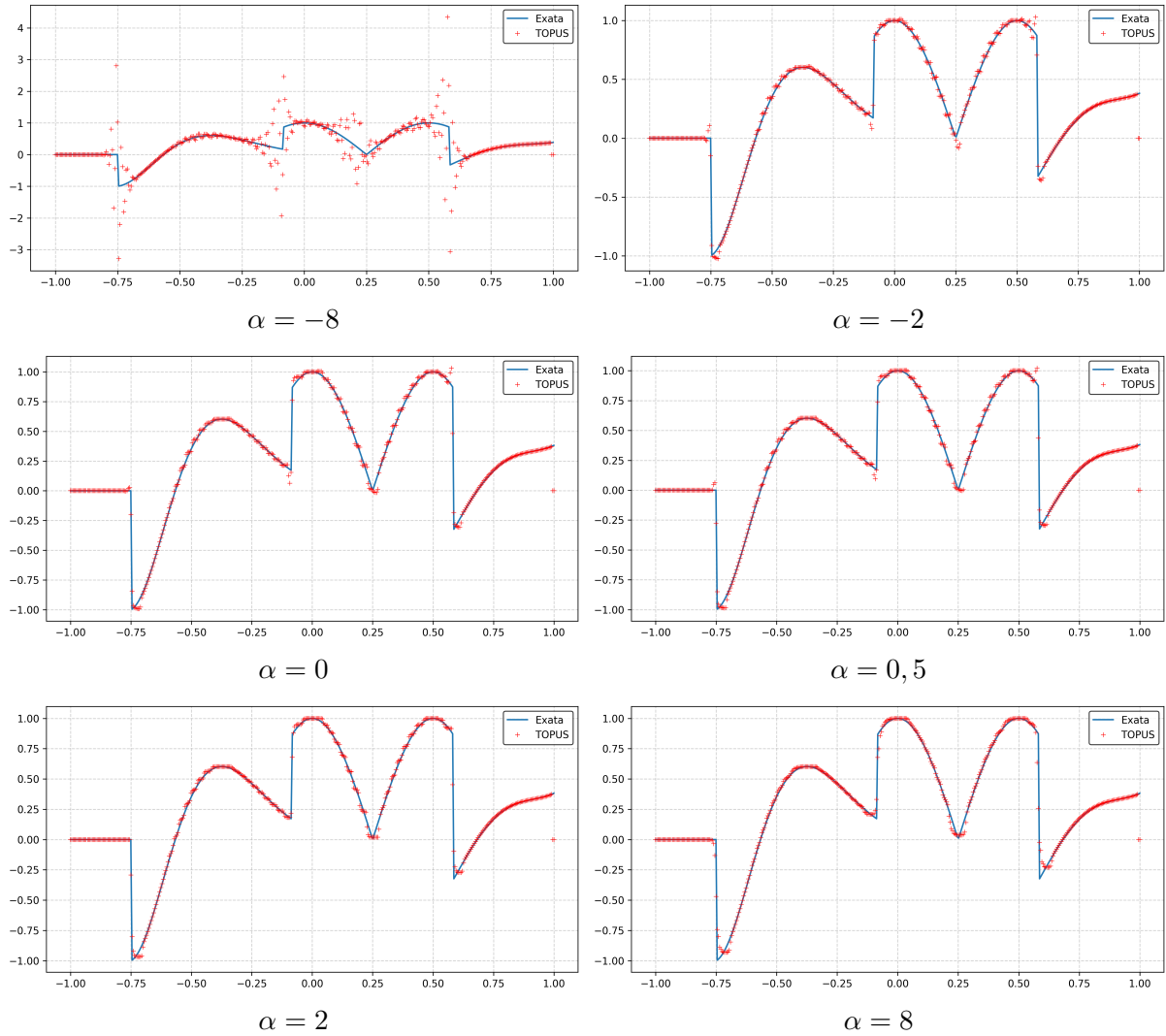


Figura 4.2 – Caso 1: resultados numéricos para CFL = 0,5 e diferentes valores de α .
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.2 Caso 2

As Figuras 4.3 e 4.4 enfatizam o comportamento do esquema TOPUS em um problema com diferentes tipos de estruturas: regiões suaves, rampas lineares, platôs constantes e descontinuidades abruptas.

Esse tipo de configuração constitui um teste mais desafiador para esquemas numéricos, pois exige simultaneamente boa resolução de frentes e controle de oscilações numéricas.

A comparação visual é guiada principalmente por dois critérios:

- preservação dos níveis dos platôs da solução;
- manutenção da posição das frentes convectivas.

Nos resultados com $CFL = 0,05$, observa-se que valores intermediários de α produzem soluções mais equilibradas, evitando tanto a excessiva difusão quanto a introdução de oscilações. Em particular, valores próximos de $\alpha = -2$ apresentam bom compromisso entre compressividade e estabilidade.

Para $CFL = 0,5$, os efeitos da discretização tornam-se mais pronunciados. Em algumas configurações, observa-se maior suavização das frentes, especialmente para valores elevados de α , refletindo o aumento da dissipação numérica.

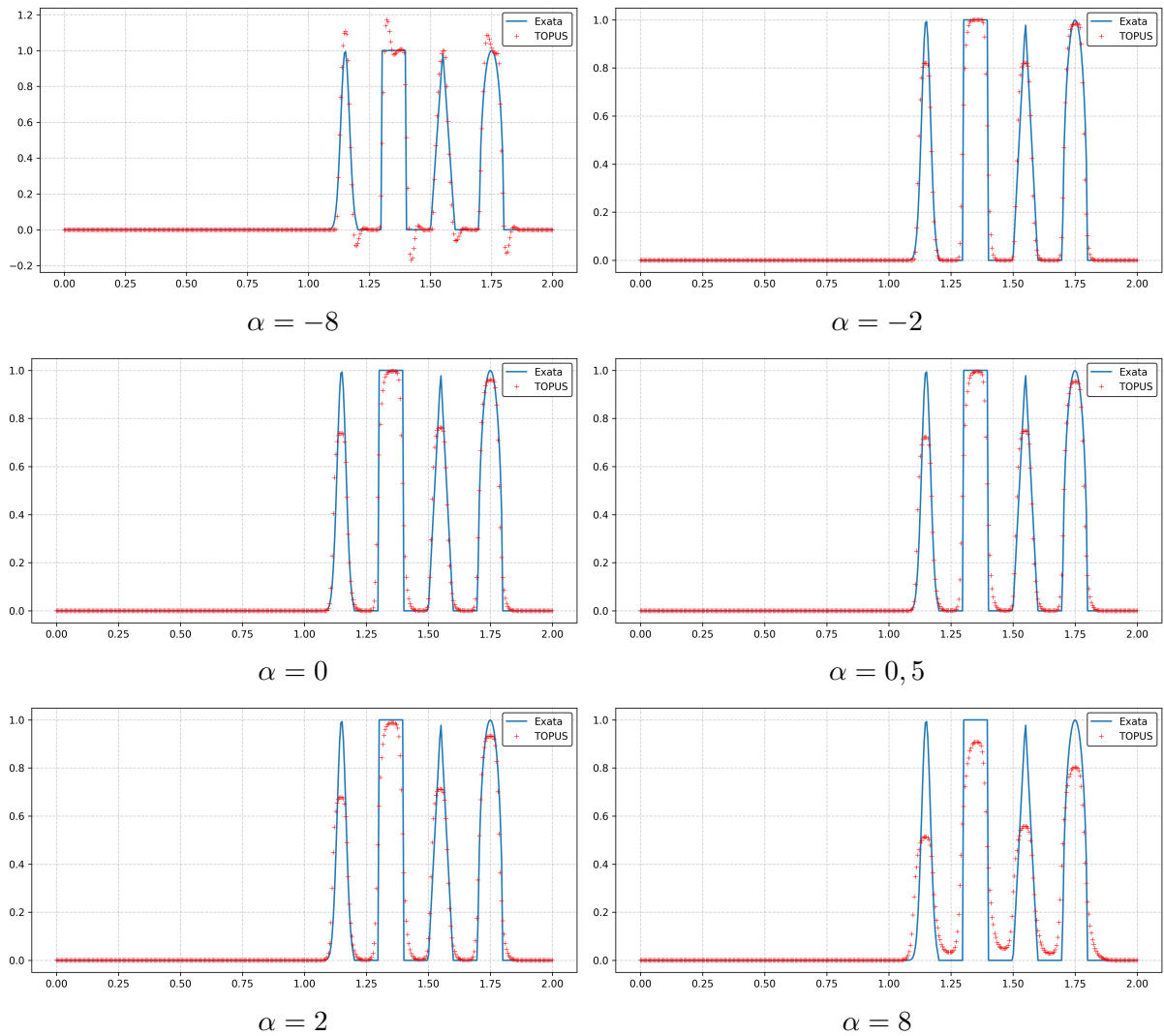


Figura 4.3 – Caso 2: resultados numéricos para $CFL = 0,05$ e diferentes valores de α .

Fonte: Elaborado pelo autor.

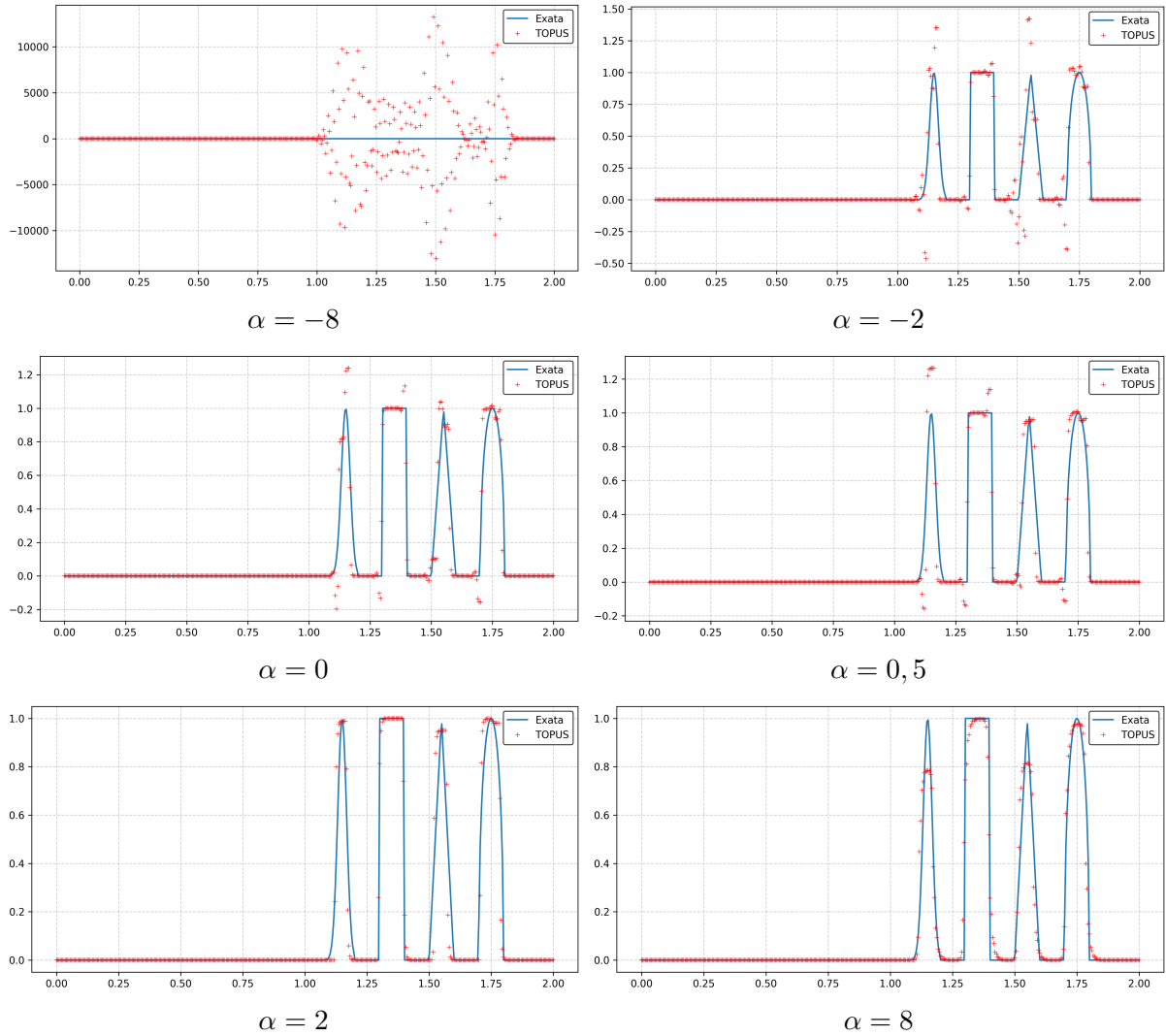


Figura 4.4 – Caso 2: resultados numéricos para $CFL = 0,5$ e diferentes valores de α .
 Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.3 Caso 3

As Figuras 4.5 e 4.6 evidenciam o comportamento do esquema TOPUS em um perfil com variações mais severas e trechos fortemente não lineares.

Esse tipo de perfil representa um teste importante para esquemas de alta resolução, pois combina regiões suaves com discontinuidades e transições abruptas.

Neste caso, o foco da análise é verificar se o esquema consegue transportar essas variações mantendo a estrutura do perfil original, evitando tanto o surgimento de ondulações espúrias quanto a excessiva dissipação numérica.

Para $CFL = 0,05$, observa-se novamente que valores negativos de α preservam melhor as estruturas do perfil, resultando em soluções mais próximas da solução analítica.

Para $CFL = 0,5$, embora o comportamento geral do esquema permaneça estável, nota-se

uma leve ampliação da difusão numérica em algumas regiões do perfil, especialmente quando α assume valores mais positivos.

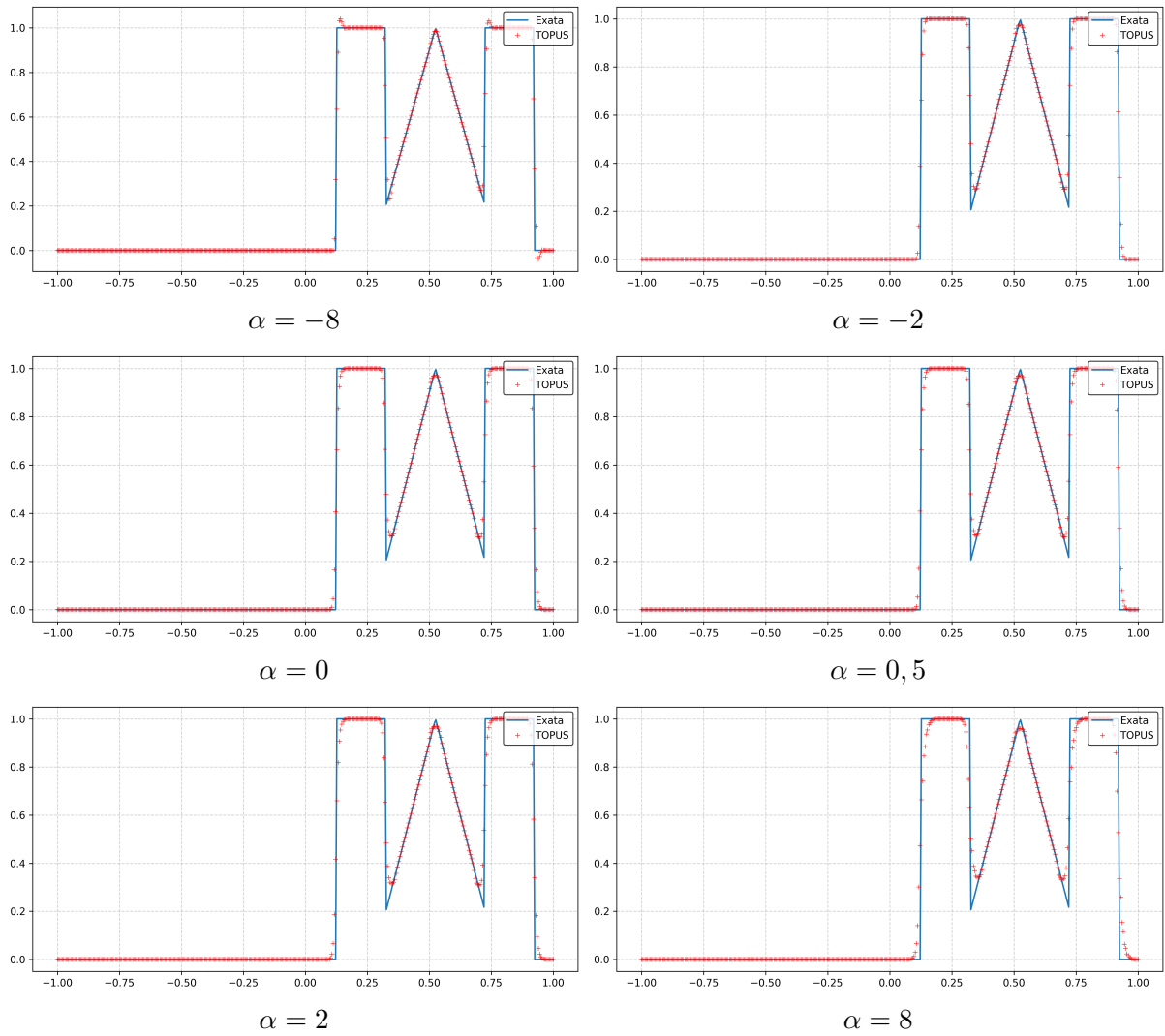


Figura 4.5 – Caso 3: resultados numéricos para CFL = 0,05 e diferentes valores de α .

Fonte: Elaborado pelo autor.

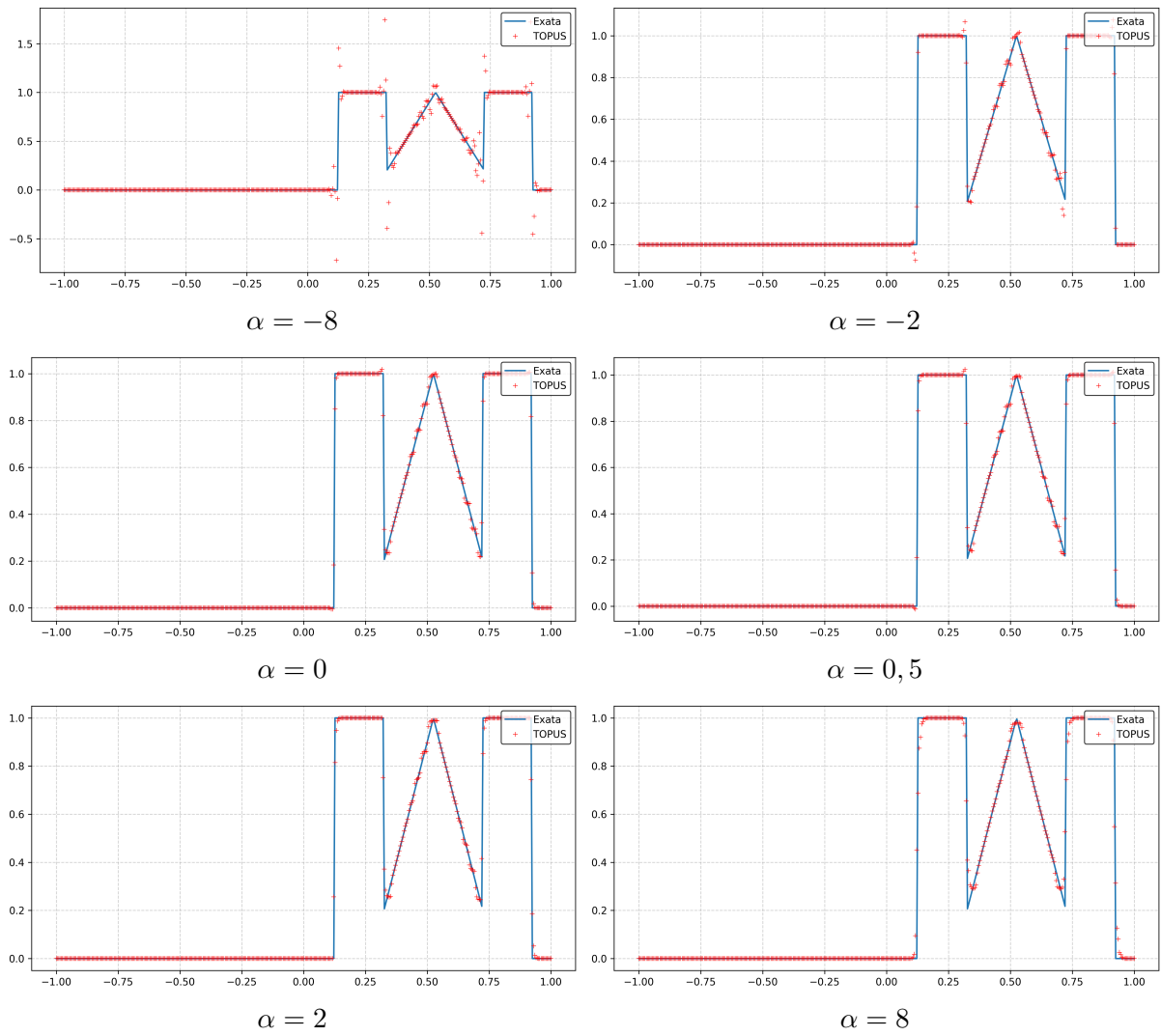


Figura 4.6 – Caso 3: resultados numéricos para CFL = 0,5 e diferentes valores de α .
 Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.4 Tabela de Erros

Além da comparação visual apresentada nas figuras anteriores, a análise quantitativa permite identificar de forma objetiva as configurações do parâmetro α que produzem as soluções mais precisas.

A Tabela 4.1 reúne os erros globais obtidos em cada caso, permitindo comparar quantitativamente o efeito do parâmetro α e do número de Courant nas soluções numéricas por meio das normas L_1 , L_2 e L_∞ .

Essas métricas fornecem diferentes perspectivas sobre a qualidade da solução numérica:

- a norma L_1 mede o erro médio absoluto ao longo do domínio;
- a norma L_2 está associada à energia do erro;
- a norma L_∞ mede o erro máximo pontual.

De modo geral, observa-se que o desempenho do esquema depende fortemente da combinação entre α e CFL. Para CFL = 0,05, os menores erros ocorrem com valores negativos de α em todos os casos. Para CFL = 0,5, o valor de α que minimiza o erro varia entre os casos e pode mudar conforme a norma considerada.

Tabela 4.1 – Erros para diferentes valores de α e CFL.

Casos	CFL	Erros	$\alpha = -8$	$\alpha = -2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 8$
1	0,5	E_{L_1}	0,19117	0,01807	0,01740	0,01752	0,01637	0,01951
		E_{L_2}	0,46341	0,03992	0,04325	0,04516	0,04529	0,05973
		E_{L_∞}	3,45404	0,38215	0,39253	0,43462	0,42000	0,61622
	0,05	E_{L_1}	0,01197	0,01386	0,01550	0,01590	0,01702	0,02384
		E_{L_2}	0,05297	0,05878	0,06214	0,06292	0,06504	0,08004
		E_{L_∞}	0,45405	0,52494	0,55221	0,55651	0,56571	0,62897
2	0,5	E_{L_1}	1,52308	0,04455	0,03099	0,03439	0,02468	0,02271
		E_{L_2}	3,09931	0,12795	0,08872	0,09931	0,07476	0,06649
		E_{L_∞}	13,2391	0,80979	0,44366	0,47162	0,42101	0,48645
	0,05	L_1	0,02512	0,01938	0,02322	0,02446	0,02832	0,05513
		E_{L_2}	0,06441	0,06045	0,06787	0,06973	0,07511	0,11446
		E_{L_∞}	0,51827	0,44111	0,47171	0,47516	0,48075	0,56702
3	0,5	E_{L_1}	0,02664	0,00663	0,00610	0,00644	0,00705	0,01178
		E_{L_2}	0,09800	0,02208	0,02379	0,02595	0,03094	0,05138
		E_{L_∞}	0,74338	0,18114	0,18299	0,20968	0,25651	0,45140
	0,05	E_{L_1}	0,00908	0,01077	0,01221	0,01258	0,01361	0,01945
		E_{L_2}	0,04564	0,05062	0,05331	0,05398	0,05588	0,06811
		E_{L_∞}	0,36576	0,38682	0,40542	0,40885	0,41651	0,47303

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Discussão dos Resultados

De forma geral, os resultados mostram que o melhor valor de α depende do caso, do regime de CFL e da norma considerada.

A Tabela 4.2 resume, em cada caso e CFL, qual valor de α minimiza cada norma.

Tabela 4.2 – Valores de α que minimizam cada norma em cada caso e CFL.

Caso	CFL	α em L_1	α em L_2	α em L_∞
1	0,5	2	-2	-2
1	0,05	-8	-8	-8
2	0,5	8	8	2
2	0,05	-2	-2	-2
3	0,5	0	-2	-2
3	0,05	-8	-8	-8

Fonte: Elaborado pelo autor.

No regime com CFL = 0,05, o melhor desempenho ocorreu sempre com valores negativos de α . Além disso, em cada caso, as três métricas apontaram para o mesmo valor de α , o que torna a escolha mais consistente e indica maior robustez do método nesse regime.

Por outro lado, para CFL = 0,5, não existe um único valor dominante de α . O valor ótimo passa a depender tanto do caso analisado quanto da métrica de erro considerada, refletindo a maior influência da discretização temporal nesse regime.

Outro resultado relevante observado é que os valores ótimos de α nem sempre pertencem ao intervalo clássico $[-2, 2]$, frequentemente associado à região CBC no diagrama de variáveis normalizadas. Em particular, para CFL = 0,05, os menores erros ocorreram frequentemente com $\alpha = -8$, indicando que configurações mais compressivas podem produzir soluções mais precisas em determinados regimes numéricos.

Esse comportamento sugere que a escolha do parâmetro α pode depender significativamente das características do problema considerado, bem como das condições numéricas adotadas, como a malha espacial e o número de Courant.

Esses resultados indicam que o parâmetro α desempenha um papel fundamental no equilíbrio entre compressividade e dissipação numérica, devendo ser escolhido de forma adequada ao regime numérico considerado.

5 Considerações Finais

Este capítulo apresenta as considerações finais sobre a monografia. Inicialmente, são apresentadas as conclusões obtidas a partir dos resultados numéricos. Em seguida, são indicadas possibilidades de continuidade do estudo, como trabalhos futuros.

5.1 Conclusão

Este trabalho avaliou o esquema TOPUS na solução numérica da equação de advecção escalar unidimensional (1D), variando o parâmetro livre α e considerando dois regimes distintos do número de Courant (CFL). A análise foi conduzida por meio da comparação entre soluções numéricas e analíticas, utilizando métricas de erro nas normas L_1 , L_2 e L_∞ , para três diferentes condições iniciais que representam níveis distintos de complexidade no transporte convectivo.

Os resultados obtidos mostraram que o desempenho do esquema TOPUS depende da combinação entre o valor do parâmetro α , o número de Courant adotado e o tipo de perfil inicial considerado. Em particular, observou-se que não existe um único valor de α capaz de minimizar simultaneamente as três métricas de erro em todos os cenários analisados.

Para o regime com $CFL = 0,05$, observou-se maior consistência nos resultados, com valores negativos de α apresentando desempenho superior em termos de erro numérico em dois dos três casos analisados. Nesse regime, os efeitos da discretização temporal são reduzidos, permitindo que o comportamento do esquema seja predominantemente governado pela discretização espacial. Como consequência, torna-se mais evidente a influência direta do parâmetro α no equilíbrio entre compressividade e dissipação numérica.

Por outro lado, para o regime com $CFL = 0,5$, observou-se maior variabilidade nos valores de α que minimizam as diferentes normas de erro. Nesse caso, a influência da discretização temporal torna-se mais significativa, e a interação entre os efeitos espaciais e temporais da discretização passa a afetar de forma mais complexa o comportamento do método.

Outro aspecto relevante observado é que, em alguns cenários, os menores erros ocorreram para valores de α fora do intervalo tradicional $\alpha \in [-2, 2]$, frequentemente associado à região CBC no diagrama de variáveis normalizadas. Esse resultado sugere que, dependendo das condições numéricas do problema, valores mais compressivos ou mais difusivos podem produzir soluções numéricas mais precisas.

De forma geral, os resultados obtidos indicam que o parâmetro α desempenha um papel importante no comportamento do esquema TOPUS, influenciando diretamente o equilíbrio entre preservação de frentes e dissipação numérica. Assim, conclui-se que a escolha de α deve ser feita de acordo com a configuração numérica adotada, considerando tanto o regime de CFL quanto as

características do perfil inicial transportado, conforme sintetizado no capítulo de resultados.

5.2 Trabalhos Futuros

Como continuidade deste estudo, algumas extensões naturais podem ser consideradas, permitindo aprofundar a análise do comportamento do esquema TOPUS em diferentes cenários numéricos.

A primeira possibilidade consiste em repetir os experimentos utilizando diferentes níveis de refinamento da malha espacial, variando o passo Δx . Essa análise permitiria investigar o comportamento do erro numérico em função do refinamento da malha, possibilitando estudar a taxa de convergência do método e verificar se as conclusões observadas para os valores de α se mantêm quando se utilizam malhas mais refinadas ou mais grosseiras.

Uma segunda extensão consiste em explorar uma gama mais ampla de valores para o número de Courant, além dos valores $CFL = 0,05$ e $CFL = 0,5$ considerados neste trabalho. Essa investigação permitiria analisar de forma mais detalhada o comportamento do esquema em diferentes regimes de integração temporal, identificando intervalos de CFL nos quais o método apresenta melhor desempenho ou maior sensibilidade à escolha do parâmetro α .

Outra possível linha de investigação consiste em aplicar o esquema TOPUS a problemas bidimensionais ou tridimensionais de transporte convectivo, como equações de advecção em duas dimensões ou modelos simplificados de dinâmica dos fluidos. Isso permitiria avaliar o desempenho do esquema em situações mais próximas de aplicações reais da dinâmica dos fluidos computacional.

Por fim, também seria interessante comparar o desempenho do esquema TOPUS com outros esquemas *upwind* de alta resolução amplamente utilizados na literatura, como SMART, CUBISTA, WACEB ou ADBQUICKEST. Esse tipo de comparação poderia fornecer uma avaliação mais abrangente do desempenho relativo do TOPUS em diferentes tipos de problemas convectivos.

Dessa forma, este trabalho contribui para a compreensão do papel do parâmetro livre α no comportamento do esquema TOPUS, fornecendo evidências numéricas sobre como sua escolha pode influenciar significativamente a precisão da solução em problemas de transporte convectivo.

Referências

- ANDERSON, J. D. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. New York: McGraw-Hill, 1995. (McGraw-Hill International Editions: Mechanical Engineering). ISBN 9780071132107. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=phG_QgAACAAJ>.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *Mathematische Annalen*, v. 100, p. 32–74, 1928.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. Berlin: Springer, 2002. ISBN 978-3-540-42074-3.
- GASKELL, P. H.; LAU, A. K. C. Curvature-compensated convective transport: Smart, a new boundedness preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 8, p. 617–641, 1988.
- HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, v. 49, n. 3, p. 357–393, 1983.
- HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. [S.l.]: Wiley, 1988. v. 1.
- JIANG, G.-S.; SHU, C.-W. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, v. 126, n. 1, p. 202–228, 1996. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999196901308>>.
- LAX, P. D.; WENDROFF, B. Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 13, n. 2, p. 217–237, 1960.
- LEER, B. van. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics*, v. 32, n. 1, p. 101–136, 1979. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999179901451>>.
- LEONARD, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 19, n. 1, p. 59–98, 1979. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782579900343>>.
- LEONARD, B. P. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 8, n. 10, p. 1291–1318, 1988.
- LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). ISBN 9780511791253.
- MORTON, K. W.; MAYERS, D. F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780511812248.
- PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1. ed. Washington, D.C.: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. ISBN 978-0891165223.

QUEIROZ, R. A. B. *Desenvolvimento e teste de esquemas upwind de alta resolução e aplicações em escoamentos com superfícies livres*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2009.

SMITH, G. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Clarendon Press, 1985. (Oxford applied mathematics and computing science series). ISBN 9780198596509. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hDpvljaHOrMC>>.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. 2. ed. Washington, DC: Taylor & Francis, 1997. ISBN 9780891165224.

TORO, E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2009.

WATERSON, N. P.; DECONINCK, H. Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach. *Journal of Computational Physics*, v. 224, n. 1, p. 182–207, 2007. ISSN 0021-9991. Special Issue Dedicated to Professor Piet Wesseling on the Occasion of His Retirement from Delft University of Technology. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910700040X>>.