



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Jaqueline Henrique Barbosa

Raízes de Funções: De Técnicas Clássicas ao Método de Iteração do Ponto Fixo

Ouro Preto

2025

Jaqueline Henrique Barbosa

Raízes de Funções: De Técnicas Clássicas ao Método de Iteração do Ponto Fixo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática da Universidade Federal de
Ouro Preto como requisito parcial para obtenção
do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Dr. Antônio Marcos da Silva

Ouro Preto

2025



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Jaqueline Henrique Barbosa

Raízes de funções: de técnicas clássicas ao método de iteração do ponto fixo

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática

Aprovada em 03 de setembro de 2025

Membros da banca

Dr. Antônio Marcos da Silva - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Juliano Soares Amaral Dias - Universidade Federal de Ouro Preto

Antônio Marcos da Silva, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em
06/02/2026



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos da Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/02/2026, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0968493** e o código CRC **33101C51**.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força, pela sabedoria e pela serenidade concedidas ao longo desta caminhada. Foi na fé que encontrei coragem para enfrentar os momentos de dificuldade para seguir adiante em busca dos meus objetivos.

Aos meus pais, Regina e José Antônio, e a toda a minha família, que sempre estiveram ao meu lado com amor incondicional, apoio constante e incentivo em cada etapa da minha vida acadêmica e pessoal. Sem vocês, este sonho não teria se tornado possível.

À Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), pela oportunidade de receber uma educação pública, gratuita e de qualidade, que me proporcionou não apenas conhecimento acadêmico, mas também experiências que levarei para toda a vida.

Às minhas amigas de Manhumirim, Laís, Skarlet e Jasmine que, mesmo à distância, nunca deixaram de estar presentes. Obrigada pela amizade sincera, pelo carinho, pelas mensagens e palavras de apoio que sempre me motivaram e me fizeram sentir acompanhada, mesmo nos momentos mais desafiadores.

Aos amigos que tive a felicidade de conhecer nos projetos que participei, PETMAT, Residência Pedagógica, PIBID e CAMAT, que contribuíram significativamente para o meu crescimento acadêmico, profissional e pessoal. Cada vivência compartilhada nesses espaços foi essencial.

Ao meu orientador, prof. Antônio Marcos, pela paciência, dedicação, disponibilidade e por todos os ensinamentos. Sua orientação foi fundamental para a construção deste trabalho e para o meu amadurecimento acadêmico. Agradeço também ao prof. Juliano Soares, por aceitar compor a banca de avaliação e contribuir com sugestões para a melhoria deste trabalho.

E, por fim, à República Loucamente, que se tornou mais do que um lar durante esses anos. Foi um espaço de acolhimento, amizade e parceria, onde encontrei uma verdadeira família que esteve comigo em todos os momentos dessa trajetória.

“O principal objetivo da educação é criar pessoas capazes de fazer coisas novas, e não simplesmente repetir o que outras gerações fizeram.”
(Jean Piaget)

Resumo

Este trabalho investiga o método de iteração do ponto fixo como ferramenta para a resolução de equações não lineares. Inicialmente, são revisitados alguns métodos clássicos para a determinação de raízes, como a Fórmula de Bhaskara, as Relações de Girard, o dispositivo de Briot-Ruffini, o Teorema da Decomposição, o Teorema das Raízes Racionais e o uso de funções inversas. Tais técnicas, embora fundamentais, apresentam limitações e se aplicam apenas a classes específicas de equações. Como exemplo, certas equações não podem ser solucionadas por esses métodos, mas admitem aproximações satisfatórias por meio da iteração do ponto fixo. Assim, discutimos tanto os métodos analíticos tradicionais quanto o processo numérico de aproximação baseado no ponto fixo.

Palavras-chave: Iteração do Ponto Fixo; Ponto Fixo, Raízes; Equações Não Lineares.

Abstract

This work investigates the fixed-point iteration method as a tool for solving nonlinear equations. Initially, some classical methods for determining roots are revisited, such as Bhaskara's Formula, Girard Relations, the Briot-Ruffini device, the Factorization Theorem, the Rational Root Theorem, and the use of inverse functions. Although fundamental, these techniques present limitations and apply only to specific classes of equations. For instance, certain equations cannot be solved through these methods but allow satisfactory approximations using fixed-point iteration. Thus, we discuss both traditional analytical methods and the numerical approximation process based on fixed points.

Keywords: Fixed-Point Iteration; Fixed Point; Roots; Nonlinear Equations.

Lista de Figuras

Figura 1 – Construção geométrica similar a usada pelos gregos	13
Figura 2 – Algoritmo de Briot-Ruffini Fonte: A autora	17
Figura 3 – Algoritmo de Briot-Ruffini Fonte: A autora	18
Figura 4 – Algoritmo de Briot-Ruffini Fonte: A autora	18
Figura 5 – Print adaptado Fonte: página 83 da referência [1]	19
Figura 6 – Algoritmo de Briot-Ruffini Fonte: A autora.	19
Figura 7 – Algoritmo de Briot-Ruffini Fonte: A autora.	19
Figura 8 – Algoritmo de Briot-Ruffini Fonte: A autora.	20
Figura 9 – Algoritmo de Briot-Ruffini Fonte: A autora.	20
Figura 10 – Gráfico 1 Fonte: A autora	26
Figura 11 – Gráfico de interseção 2 Fonte: A autora	33
Figura 12 – Gráfico de convergência	33
Figura 13 – Gráfico de interseção 2 Fonte: A autora	35
Figura 14 – Gráfico de convergência Fonte: A autora	36

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela 1 Fonte: A autora	31
Tabela 2 – Tabela 2 Fonte: A autora	32
Tabela 3 – Tabela 3 Fonte: A autora	32
Tabela 4 – Tabela 4 Fonte: A autora	34
Tabela 5 – Tabela 5 Fonte: A autora	34
Tabela 6 – Tabela 6 Fonte: A autora	35

Sumário

Introdução	10
1 RAÍZES DE EQUAÇÕES	12
1.1 A Fórmula de Bhaskara	12
1.2 Relações de Girard	15
1.3 Método de Briot-Ruffini	17
1.4 Teorema da decomposição	20
1.5 Teorema das raízes racionais	21
1.6 Funções inversas	22
1.7 Algumas considerações sobre os métodos apresentados	23
2 ALGUNS CONCEITOS ANALÍTICOS	25
3 MÉTODO DE ITERAÇÃO DO PONTO FIXO	30
3.1 O método	30
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
Referências	38

APÊNDICES **39**

APÊNDICE A – SUGESTÃO DE PASSOS PARA A ELABORAÇÃO DE UMA ATIVIDADE PARA O ENSINO MÉDIO	40
A.1 Planejamento da Atividade	40
A.1.1 Recapitulando	40
A.1.2 Apresentação Conceitual	40
A.1.3 Aplicando a Atividade	41

A.1.4	Considerações sobre a atividade	41
-------	---	----

Introdução

Desde a antiguidade, a matemática exerceu um papel fundamental no desenvolvimento do conhecimento humano. Na Mesopotâmia, há registro do uso de equações e de métodos semelhantes aos atuais para sua resolução. Os povos egípcios e babilônios recorriam a técnicas algébricas para resolver problemas matemáticos. Os babilônios demonstravam domínio avançado ao lidar com equações (veja [2]). Enquanto no Egito predominavam as equações lineares, os babilônios realizavam operações que permanecem presentes na matemática contemporânea, como somar um termo em ambos os lados de uma igualdade, multiplicar os dois lados de uma equação por um mesmo número e usar algumas fórmulas de fatoração. No entanto, não empregavam letras para representar incógnitas, em vez disso, recorriam a palavras como “comprimento”, “largura” e “volume”.

Após anos de estudos desenvolvidos por diversos matemáticos em diferentes regiões do mundo, a álgebra evoluiu de maneira que tornou possível organizar e entender melhor os métodos de resolução. As raízes das equações, tal como as conhecemos atualmente, resultam desse aprimoramento gradual, que se consolidou com estudos mais aprofundados realizados por matemáticos europeus durante o Renascimento (século XVI). Toda a história sobre o estudo de como determinar raízes de uma equação evidencia a sua importância na matemática.

Quando falamos sobre as raízes de equações algébricas estamos falando de um assunto que passou por séculos de estudos de diversos matemáticos de diferentes nacionalidades. Trata-se de um tema que conecta diferentes períodos históricos, mas permanece atual, compondo uma parte significativa do currículo escolar na educação básica.

De acordo com a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) o estudo de raízes e funciona como porta de entrada para conceitos mais complexos, que são desenvolvidos nas áreas de exatas do ensino superior, e servem de base para que os alunos aprendam a lidar com abstrações e generalizações. O aprendizado desse tema também está conectado com o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, uma vez que exige raciocínio lógico, organização e análise crítica. Também é citado a importância de que os alunos sejam capazes de desenvolver a ideia de equivalência, resolver problemas de igualdade e desigualdade durante o Ensino Fundamental, e no Ensino Médio o foco é voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico incentivando o aluno a modelar e resolver situações-problema que envolvam equações, inequações e funções.

Os professores podem explorar de softwares educativos para o ensino de raízes, como o Geogebra, até aplicativos que são utilizados no dia a dia de trabalhadores, como o Excel, já que isso promove uma educação mais interativa e um pensamento crítico. Na BNCC é citado que o uso da tecnologia pode ser um bom caminho para os alunos:

Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. . . .Nesse

contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BNCC, 2018, p. 265)

E o presente trabalho traz uma forma de resolver equações no geral, independente do seu grau ou que possuam raízes fora do conjunto dos reais, utilizando a ferramenta Excel e visualizando o gráfico no Geogebra, de uma forma que facilite o entendimento dos alunos e o método de ensino do professor. A monografia está estruturada da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos os métodos que são mais utilizados para resolução de equações: Fórmula de Bhaskara, Relações de Girard, Método de Briot-Ruffini, Teorema da Decomposição, Teorema das Raízes Racionais e funções inversas. Apresentamos também como tais métodos podem ser ineficazes para algumas equações. No capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos que são necessários para resolver equações via método de iteração do ponto fixo como alguns termos, definições e teoremas. O Capítulo 3, apresentamos o algoritmo do método e como utiliza-lo para as equações. No Capítulo 4, apresentamos uma proposta de atividade para alunos do ensino médio utilizando os mesmos meios tecnológicos utilizados para a realização do trabalho. O Capítulo 5, temos as considerações finais sobre o trabalho e a proposta de atividade.

Capítulo 1

Raízes de equações

Neste capítulo, apresentamos algumas das técnicas clássicas utilizadas para a determinação das raízes de equações algébricas. Mais especificamente, abordamos os seguintes métodos: Fórmula de Bhaskara, Relações de Girard, Dispositivo de Briot-Ruffini, Teorema da Decomposição, Teorema das Raízes Racionais e o uso da função inversa.

Antes de mais nada, precisamos definir o que é *raiz* de uma função.

Definição 1.0.1. Dizemos que um ponto c no domínio de uma função $f(x)$ é raiz da equação $f(x) = 0$ (ou raiz da função $f(x)$) quando $f(c) = 0$.

Para ilustrar, apresentamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.0.1. Seja

$$f(x) = x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Como $f(1) = 0$, $x = 1$ é raiz da equação.

De posse da definição acima, damos sequência com a apresentação de algumas técnicas para a determinação de raízes de uma função.

1.1 A Fórmula de Bhaskara

A Fórmula de Bhaskara, também conhecida como Fórmula Quadrática, foi criada por Bhaskara Akaria (1114 – 1185). Bhaskara Akaria nasceu na Índia e seus pais eram astrônomos renomados. Entretanto, os estudos algébricos começaram muito antes do seu nascimento.

Os babilônios já utilizavam tabelas e outras estratégias para resolver equações:

Para esclarecer esta abordagem dos babilônios a respeito da resolução da equação do segundo grau, com o uso de tais manipulações, consideremos o problema que pede o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá 14,30 (base sexagesimal). Sua solução equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, expressa por eles do seguinte modo, conforme Boyer (1974): tome a metade de 1, que corresponde a 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que resulta 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é, o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado. (CHAQUIAM, 2017, p.52)

Por sua vez, os gregos aprimoraram a técnica usada pelos babilônios e passaram a utilizar a geometria para resolver equações quadráticas.

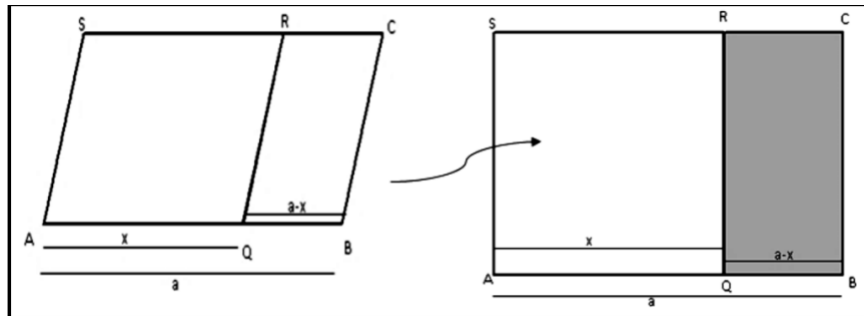


Figura 1 – Construção geométrica similar a usada pelos gregos

Fonte: Chaquiam (2017) [7]

Durante a Idade Média, os estudos da álgebra evoluíram até chegarem ao que hoje conhecemos como Fórmula de Bhaskara, utilizada para resolver equações do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são coeficientes quaisquer, sendo a sempre diferente de 0. Essa evolução contou com a colaboração de matemáticos islâmicos e indianos. O persa Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, que além de matemático também era astrônomo e geógrafo, escreveu dois livros sobre Álgebra e Aritmética, além de ser o criador do algoritmo. Abordou em sua obra a solução de equações envolvendo raízes, quadrados e números, seu trabalho foi influenciado pelo estudo dos gregos. E então, com base nos estudos de Al Khowarizmi, Bhaskara aprofundou o tema ao considerar que as equações quadráticas possuem duas raízes formais e demonstrou o resultado em seu livro Lilavati, que foi registrado na Índia no século XII. E chegamos a Fórmula de Bhaskara:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vamos demonstrar a fórmula de Bhaskara:

Dada uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, primeiro, vamos dividir a equação pelo quociente a obtendo o seguinte resultado:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Agora, isolamos o termo independente:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Em seguida, dividimos $\frac{b}{a}$ por 2 e elevamos o resultado ao quadrado:

$$\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Esse resultado é então somado aos dois lados da equação anterior, resultando em:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

O lado esquerdo da igualdade pode ser reescrito como um produto notável, e o lado direito pode ser simplificado, se, e somente se, $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2},$$

em seguida, aplicamos a raiz quadrada em ambos os lados da equação:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

isto é,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por fim, isolando a incógnita chegamos a Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.1)$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$

□

A seguir um exemplo de como utilizar a fórmula de Bhaskara:

Exemplo 1.1.1. *Encontre as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.*

Primeiro identificamos os coeficientes da equação: $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$, então substituímos na fórmula de Bhaskara, dada por (1.1):

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ x &= \frac{5 \pm 1}{2}. \end{aligned}$$

Para indicar as duas raízes, vamos usar x' para a primeira raiz e x'' para a segunda raiz:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' &= \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Logo, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $x' = 3$ e $x'' = 2$.

1.2 Relações de Girard

Nesta seção, apresentamos e demonstramos o método de Girard para resolver certos polinômios. Para isso, nos baseamos em [4].

O matemático francês Albert Girard (1595-1632), que viveu e trabalhou boa parte de sua vida nos Países Baixos, contribuiu para o desenvolvimento da álgebra de várias formas, em particular, ao desenvolver as chamadas *relações de Girard*. Em seu estudo, ele estabeleceu relações entre as raízes de um polinômio com seus coeficientes. Elas podem ser utilizadas para encontrar raízes de polinômios com grau igual ou maior do que 2.

Uma das relações de Girard nos diz que

Proposição 1.2.1. *A soma das raízes de uma equação do segundo grau é igual ao negativo da razão entre o coeficiente de x e o coeficiente de x^2 , ou seja, a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por $-\frac{b}{a}$.*

Demonstração. Sejam x' e x'' as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$.

De (1.1), temos

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac. \quad (1.2)$$

Então, a soma das raízes é dada por

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

ou seja,

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}.$$

□

Uma outra relação é

Proposição 1.2.2. *O produto das raízes de uma equação do segundo grau é igual à razão entre o termo independente c e o coeficiente de x^2 , ou seja, o produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é dado por $\frac{c}{a}$.*

Demonstração. Queremos provar que $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$.

Utilizando as raízes descritas por (1.2), temos que

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

Desenvolvendo o produto, obtemos

$$x' \cdot x'' = \frac{(-b)^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

□

A seguir vemos um exemplo de como utilizar as relações de Girard para encontrar as raízes de uma equação quadrática.

Exemplo 1.2.1. *Utilize as relações de Girard para encontrar as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Vamos utilizar S para a soma e P para o produto, vimos no Exemplo 1.1.1 que as raízes de $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $x' = 3$ e $x'' = 2$, então vamos verificar isso utilizando as relações de Girard. Para a soma temos que*

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$$

e para o produto temos

$$P = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6.$$

Vamos encontrar dois números cujo produto é 6: temos duas possíveis opções

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ e } (-2) \cdot (-3) = 6,$$

para encontrar o que seja válido devemos somar e encontrar aquele cuja a soma seja 5.

Note que $(-2) + (-3) = -5$ não se encaixa no que procuramos, nos restando apenas $2 + 3 = 5$.

Logo, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são $x' = 3$ e $x'' = 2$.

Da mesma forma, podemos utilizar as relações de Girard para as equações de 3º grau.

Tais equações são da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que a , b , c e d são coeficientes em $\mathbb{R}$ e a é sempre diferente de 0. Se r_1 , r_2 e r_3 , são raízes da equação, então as relações de Girard são dadas por

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Vamos demonstrar que, de fato, as relações acima são válidas.

Inicialmente, note que a equação cúbica pode ser escrita como

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3),$$

para todo x .

Expandindo o produto, temos

$$a(x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3)$$

Dividindo todos os termos da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d$ por a , obtemos $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$ Assim,

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3$$

Isso nos fornece

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}, \quad r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}.$$

□

1.3 Método de Briot-Ruffini

Paolo Ruffini (1765-1822) foi um matemático e médico nascido em Valentano, Estados Pontifícios, e estudou na Universidade de Modena. Ruffini se destacou na área de análise. O Método de Briot-Ruffini, também conhecido como dispositivo prático de Briot-Ruffini ou dispositivo de Briot-Ruffini é utilizado para a resolução de equações polinomiais. O algoritmo de Briot-Ruffini é um método de divisão de polinômios $f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0x^0$ por um binômio do tipo $g(x) = x - c$ em que encontramos um quociente q e um resto r da divisão.

O algoritmo funciona da seguinte forma:

1. Desenhamos uma linha na horizontal e outra perpendicular a essa linha, separando dois lados. Sendo o esquerdo maior e o direito menor.



Figura 2 – Algoritmo de Briot-Ruffini

Fonte: A autora

2. Identificamos os coeficientes do polinômio e colocamos, obedecendo a ordem, no lado esquerdo por cima da linha. Caso seja um polinômio de grau n com uma incógnita de expoente menor ($x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^2, x$) não presente na equação, devemos colocar o 0 como coeficiente desse termo ausente.

3. Colocamos no lado direito o coeficiente c do binômio.

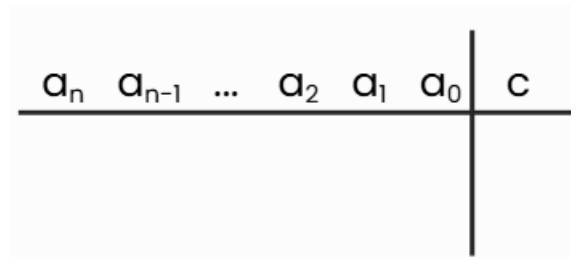


Figura 3 – Algoritmo de Briot-Ruffini
Fonte: A autora

4. Descemos o coeficiente do maior expoente para baixo da linha, multiplicamos pelo coeficiente a que está do lado direito e somamos com o coeficiente que está ao lado direito e seguimos este passo até o penúltimo coeficiente.

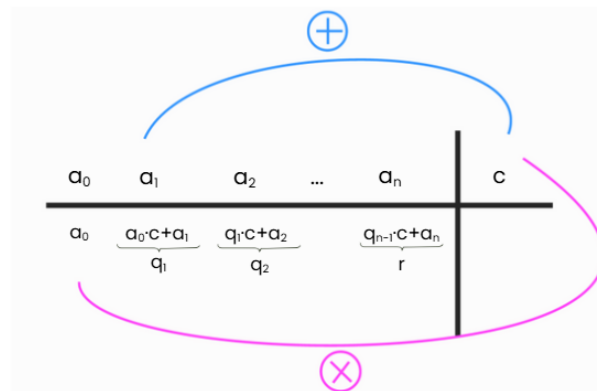


Figura 4 – Algoritmo de Briot-Ruffini
Fonte: A autora

5. O resultado que obtemos na parte debaixo da linha é o quociente da divisão do polinômio pelo binômio, sendo um grau menor. O resultado que estiver abaixo do último coeficiente é o resto da divisão.

Exemplo 1.3.1. Verifique que $x = 3$ não é raiz de $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$.

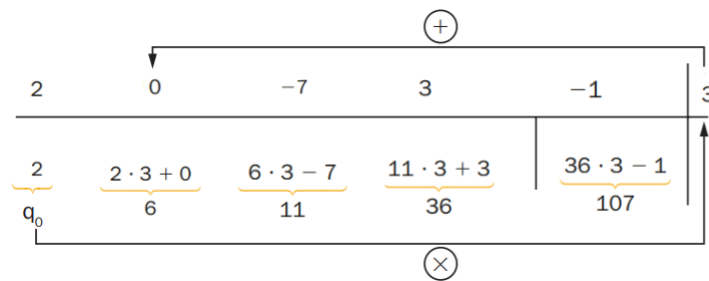


Figura 5 – Print adaptado
Fonte: página 83 da referência [1]

Então, $q = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36$ e $r = 107$.

2	6	11	36	3
2	12	47	177	

Figura 6 – Algoritmo de Briot-Ruffini
Fonte: A autora.

Agora temos o seguinte polinômio: $q = 2x^2 + 12x + 47$ e resto $r = 177$. Podemos utilizar o algoritmo novamente para $q = 2x^2 + 12x + 47$:

2	12	47	3
2	18	101	

Figura 7 – Algoritmo de Briot-Ruffini
Fonte: A autora.

Obtemos então $q = 2x + 18$ e resto $r = 101$. E utilizando mais uma vez o algoritmo de Briot-Ruffini, agora para $q = 2x + 18$.

2	18	3
2	24	

Figura 8 – Algoritmo de Briot-Ruffini
Fonte: A autora.

E assim verificamos que 3 não é raiz do polinômio $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$, pois na divisão realizada acima obtemos o quociente 2 e o resto 24, logo $f(3) \neq 0$.

Exemplo 1.3.2. Verifique que $x = 2$ é raiz de $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Vamos utilizar o algoritmo para verificar isso:

1	0	-3	-2	2
1	2	1	0	

Figura 9 – Algoritmo de Briot-Ruffini
Fonte: A autora.

Aqui, obtemos o quociente $q = x^2 + 2x + 1$ e o resto $r = 0$, logo $x = 2$ é raiz de $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

1.4 Teorema da decomposição

Uma outra forma de determinar as raízes de um polinômio é decompondo-o de acordo com o Teorema da Decomposição, o qual enunciamos a seguir. Para a sua demonstração, veja página 105 da referência [1].

Teorema 1.4.1. (Teorema da Decomposição) Se $r_1, r_2, \dots, r_n$ são raízes do polinômio $P(x)$, então $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$.

Vamos ver um exemplo de [1]:

Exemplo 1.4.1. Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ e suas raízes $\{1, -2, 4\}$, como ele pode ser escrito utilizando o Teorema da Decomposição?

O polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ pode ser escrito da forma: $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$.

1.5 Teorema das raízes racionais

Teorema 1.5.1. *Dada uma equação polinomial $P(x) = 0$, onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, ($a_n \neq 0$) com coeficientes inteiros, que admite raízes racionais $\frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q > 0$ e p, q são primos entre si, então p é divisor do coeficiente a_0 e q é divisor do coeficiente a_n .*

Demonstração. Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $P(x) = 0$ temos:

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os lados por q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Isolamos $a_n p^n$ e depois isolamos $a_0 q^n$:

$$a_n p^n = -q \left[a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} \right]$$

e

$$a_0 q^n = -p \left[a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1} \right],$$

como $a_0, a_1, \dots, a_n, p, q \in \mathbb{Z}$, os valores dentro dos parênteses nas duas equações são inteiros.

Vamos definir:

$$-q \left[a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} \right] = \alpha$$

e

$$-p \left[a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1} \right] = \beta.$$

Então:

$$\frac{a_n p^n}{q} = -\alpha \text{ e } \frac{a_0 q^n}{p} = -\beta.$$

Logo,

- Da primeira equação: $a_n p^n$ é divisível por q . Como p^n e q são primos entre si, segue que q divide a_n .
- Da segunda equação: $a_0 q^n$ é divisível por p . Como q^n e p são primos entre si, segue que p divide a_0 .



Vamos ver um exemplo retirado de [1] (2013, p. 145)

Exemplo 1.5.1. *Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$?*

Vamos encontrar as raízes inteiras dessa equação utilizando o teorema das raízes racionais, sendo p divisor de 9 e q divisor de 1. Então temos: $p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$ e $q = 1$. Logo, $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. Agora, substituímos o x com cada número obtido em $\frac{p}{q}$, vamos começar com 1:

Para $x = 1$:

$$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 9 \implies 1 + 3 - 3 - 9 \implies -8 \neq 0$$

Para $x = -1$:

$$(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 9 \implies -1 + 3 + 3 - 9 \implies -4 \neq 0$$

Para $x = 3$:

$$3^3 + 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 9 \implies 27 + 27 - 9 - 9 \implies 36 \neq 0$$

Para $x = -3$:

$$(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 9 \implies -27 + 27 + 9 - 9 \implies 0 = 0$$

Para $x = 9$:

$$9^3 + 3 \cdot 9^2 - 3 \cdot 9 - 9 \implies 729 + 243 - 27 - 9 \implies 936 \neq 0$$

Para $x = -9$:

$$(-9)^3 + 3 \cdot (-9)^2 - 3 \cdot (-9) - 9 \implies -729 + 243 + 27 - 9 \implies -648 \neq 0.$$

Então a única raiz inteira de $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$ é -3 .

1.6 Funções inversas

Funções inversas trazem consigo um conceito que permite desfazer a ação de uma função. Se uma função $f(x)$ transforma um valor x em um valor y , a sua inversa, que denotamos por $f^{-1}(x)$, transforma y de volta em x , mas nem toda função possui uma inversa: para que uma função f possua uma inversa, ela deve ser bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. A seguir, apresentamos a definição de função inversa de acordo com a referência [8], pág. 14:

Definição 1.6.1. *(Função Inversa) Uma função $f : A \rightarrow B$ é inversível se, e somente se, a relação inversa de f também é uma função, isto é, para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$.*

As funções inversas podem ser utilizadas em resoluções de equações que envolvem funções não lineares, como, por exemplo, exponenciais e logaritmos.

Exemplo 1.6.1. Resolva $\log_4 x = \frac{1}{2}$ utilizando sua inversa.

Sabemos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, então: $f(x) = \log_4 x \implies f^{-1}(x) = 4^x$. Queremos que $\log_4 x = \frac{1}{2}$, então precisamos encontrar o valor de x que dê o resultado $\frac{1}{2}$, aplicando a definição de função inversa temos:

$$x = 4^{\frac{1}{2}} \implies x = \sqrt{4}, \text{ então, } x = 2.$$

Vamos ver outro exemplo onde podemos utilizar a definição de função inversa para resolver:

Exemplo 1.6.2. Resolva $x = \sqrt[4]{2x^2 - 1}$ utilizando a função inversa.

A função inversa da raiz quarta, no domínio $x \in \mathbb{R} / x \geq 0$, é elevar à quarta potência. Temos: $x^4 = (\sqrt[4]{2x^2 - 1})^4 \implies x^4 = 2x^2 - 1$, então temos a seguinte equação: $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

Primeiro vamos definir $y = x^2$, e então temos $y^2 - 2y + 1 = 0$. Essa equação pode ser escrita como $(y - 1)^2 = 0$, então $y = 1$. Agora precisamos voltar para x : sabemos que $y = x^2$, logo $x^2 = 1 \implies x = \pm 1$.

Agora que temos duas possíveis raízes, vamos verificar qual satisfaz a nossa equação $x = \sqrt[4]{2x^2 - 1}$: Para $x = 1$:

$$1 = \sqrt[4]{2 \cdot 1^2 - 1} \implies 1 = \sqrt[4]{2 - 1} \implies 1 = \sqrt[4]{1} \implies 1 = 1.$$

Logo, a raiz 1 satisfaz a equação. Vamos verificar agora para $x = -1$

$$-1 = \sqrt[4]{2 \cdot (-1)^2 - 1} \implies -1 = \sqrt[4]{2 - 1} \implies -1 = \sqrt[4]{1} \implies -1 \neq 1.$$

Logo, $x = -1$ não satisfaz a nossa equação.

1.7 Algumas considerações sobre os métodos apresentados

No Brasil, de acordo com a BNCC [3], o ensino das equações e funções é iniciado no Ensino Fundamental II e aprofundado no Ensino Médio. As resoluções de equações são feitas utilizando alguns dos métodos algébricos que foram citados neste capítulo: Fórmula de Bhaskara, Relações de Girard e Teorema da decomposição. Aqui, incluímos outros três métodos conhecidos: Método de Briot-Ruffini, Teorema das Raízes Racionais e o método da função inversa. Porém, todos os métodos citados possuem certas limitações quanto ao seu uso na resolução de equações algébricas. Com isso, em alguns casos, é interessante recorreremos a métodos numéricos para obtermos informações sobre as possíveis raízes da equação a ser estudada.

A fórmula de Bhaskara, a mais conhecida entre elas, só é possível utilizar para equações de segundo grau. As Relações de Girard, conhecidas como Soma e Produto, ficam inviáveis para

equações que tenham graus grandes, além de impossibilitar a resolução de uma equação que tenha raízes que não sejam inteiras ou racionais. Já o Método de Briot-Ruffini é necessário que se tenha conhecimento de uma das raízes do polinômio, o que o torna mais adequado para uma verificação e simplificação do que para encontrar uma raiz. A aplicação do Teorema da Decomposição pode se tornar difícil, uma vez que nem sempre é simples encontrar as raízes de uma equação, especialmente as irracionais ou complexas. Além disso o teorema se restringe a equações polinomiais. O teorema das raízes racionais é utilizado para identificar possíveis raízes racionais de um polinômio que tenha coeficientes inteiros, sendo assim, se torna inviável quando as soluções não são racionais. Por fim, a técnica de utilizar funções inversas se limita pela obrigatoriedade da função, de fato, possuir inversa. Existem outros métodos, mas também possuem limitações como os métodos que citamos aqui.

Com todas essas limitações, surge a necessidade de um método que consiga nos fornecer informações relevantes sobre as raízes de equações mais gerais, independente do grau (no caso de ser uma equação polinomial) ou do tipo da função envolvida. É nesse contexto que se destaca o Método de Iteração do Ponto Fixo que será apresentado no próximo capítulo. Por se tratar de um método numérico, seu cálculo, via *Excel*, é mais simples e direto, o que o torna uma ferramenta interessante em casos mais gerais.

Capítulo 2

Alguns conceitos analíticos

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos básicos de análise que serão fundamentais para garantir o bom funcionamento do método do ponto fixo, o qual será descrito no capítulo seguinte.

Apresentamos agora a definição de ponto fixo de uma função. Definição essa que será fundamental para o decorrer do trabalho.

Definição 2.0.1. Dizemos que o número real c é ponto fixo de uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se $c \in D$ e satisfaz à equação

$$f(c) = c.$$

A seguir exibimos dois exemplos de funções que possuem pontos fixos:

Exemplo 2.0.1. Se $f(x) = \sin(x)$, então, $x = 0$ é ponto fixo de $f(x)$. De fato, basta notar que $f(0) = \sin(0) = 0$.

Exemplo 2.0.2. Se $f(x) = 2x - 1$, então, $x = 1$ é ponto fixo de $f(x)$, pois $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

É importante ressaltar que nem toda função possui ponto fixo, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 2.0.3. Se $f(x) = 1 + x$, então $f(x)$ não possui ponto fixo.

De fato, suponha que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$, ou seja, $x + 1 = x$. Isso implica que $1 = 0$, o que é um absurdo. $\square$

O Teorema do Valor Intermediário, enunciado a seguir, é um resultado importante da Análise Real. No que decorre, o apresentamos juntamente com outros resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e que podem ser encontrados [5].

Teorema 2.0.1. (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Mais precisamente, utilizaremos o seguinte resultado:

Corolário 2.0.1. Nas condições do Teorema 2.0.1, se $0 \in (a, b)$, $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração. A função f é contínua no intervalo $[a, b]$, pelas condições do Teorema 2.0.1. Se $0 \in (a, b)$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ temos que:

$$f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0 \text{ ou } f(a) > 0 \text{ e } f(b) < 0.$$

Pelo Teorema 2.0.1, temos que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ e como $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então $f(a) \cdot f(b) < 0$, a função f cruza o eixo das abscissas em algum momento, logo, $0 \in (a, b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplo 2.0.4. A função $f(x) = x^3$ no intervalo $I = [-1, 1]$ satisfaz as condições impostas no Corolário 2.0.1, logo, existe um número $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

De fato, como a função $f(x) = x^3$ é um polinômio, temos que $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Além disso, $f(-1) = (-1)^3 = -1$ e $f(1) = 1^3 = 1$. Logo, pelo Corolário 2.0.1, como $f(-1) \cdot f(1) < 0$ existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Geometricamente,

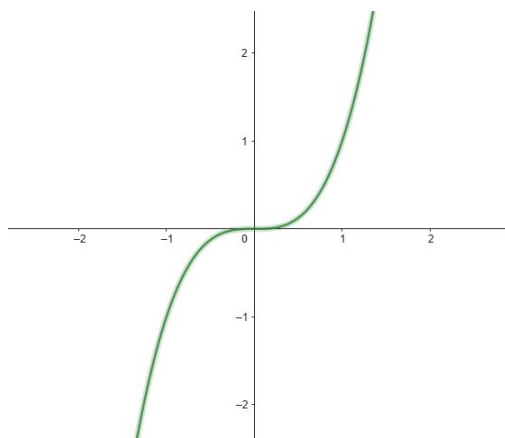


Figura 10 – Gráfico 1

Fonte: A autora

Outro teorema fundamental para o trabalho, é o Teorema do Valor Médio de Lagrange e um de seus corolários, como enunciados a seguir:

Teorema 2.0.2. (Teorema do Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A demonstração do Teorema do Valor Médio de Lagrange pode ser encontrada em [5]. Segue do Teorema 2.0.2 o

Corolário 2.0.2. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no intervalo I tal que $|f'(x)| \leq k$, para algum $k \geq 0$ e todo $x \in I$. Se $x, y \in I$, então*

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|. \quad (2.1)$$

Demonstração. De fato, se $x = y$ não há o que mostrar.

Se $x, y \in I$, com $x \neq y$, então $[x, y] \subseteq I$ e, portanto, f é contínua em $[x, y]$, já que é contínua em I . Segue, do Teorema 2.0.2, que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c), \quad c \in (x, y),$$

o que nos fornece a igualdade

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = |f'(c)|,$$

ou seja,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y - x|.$$

Como, por hipótese, $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ e $c \in I$, obtemos

$$|f(y) - f(x)| \leq k \cdot |y - x|.$$

□

Definição 2.0.2. *Dizemos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma contração se a desigualdade (2.1) é válida para todo $x, y \in I$ com $k \in [0, 1)$.*

A seguir, exibimos dois exemplos de contrações:

Exemplo 2.0.5. *A função $g(x) = -\sqrt{e^x}$ é uma contração no intervalo $[-1, 0]$.*

De fato, como $g(x) = -\sqrt{e^x}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois e^x é diferenciável em $\mathbb{R}$. $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{x}$ é diferenciável sempre que $x > 0$. Além disso,

$$|g'(x)| = \left| \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \right| < 1, \quad \forall x \in [-1, 0].$$

Pelo Corolário 2.0.2, $g(x)$ é uma contração.

Um outro exemplo é:

Exemplo 2.0.6. A função $g(x) = \frac{7-x^3}{8}$ é uma contração no intervalo $[0, 1]$.

De fato, como $g(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois $g(x)$ é um polinômio, e polinômios são funções deriváveis em $\mathbb{R}$, e

$$|g'(x)| = \left| -\frac{3x^2}{8} \right| < 1, \forall x \in [0, 1],$$

pelo Corolário 2.0.2, $g(x)$ é uma contração.

Teorema 2.0.3. *a. Se g é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$, então g possui um ponto fixo em $[a, b]$.*

b. Além disso, se g for diferenciável em (a, b) e existir uma constante k positiva tal que $k < 1$ com

$$|g'(x)| \leq k, \text{ para todo } x \in (a, b),$$

o ponto fixo em $[a, b]$ será único.

Demonstração. Inicialmente, para demonstrar o item (a), note que, como $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, então, $a \leq g(x) \leq b, \forall x \in [a, b]$.

Defina $h(x) = g(x) - x, x \in [a, b]$. Como $g(a) \geq a$ temos que $h(a) = g(a) - a \geq 0$ e como $g(b) \leq b$ temos $h(b) = g(b) - b \leq 0$, logo $h(a) \cdot h(b) \leq 0$.

Se $h(a) \cdot h(b) = 0$, então $h(a) = 0$ ou $h(b) = 0$, ou seja, $g(a) = a$ ou $g(b) = b$.

Caso contrário, $h(a) \cdot h(b) < 0$. Como, por hipótese, g é uma função contínua em $[a, b]$, então, h também é contínua em $[a, b]$.

Pelo Corolário 2.0.1, existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$. Isso implica que $g(c) - c = 0$, ou seja,

$$g(c) = c.$$

Logo, c é um ponto fixo de $g(c)$.

Vamos agora demonstrar o item (b). Temos que $|g'(x)| \leq k$, para todo $x \in (a, b)$, então, pelo Corolário 2.0.2, vale a seguinte desigualdade:

$$|g(x) - g(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

mas, por hipótese, $k < 1$, o que nos fornece:

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|, \forall x, y \in (a, b). \quad (2.2)$$

Suponha que g possua dois pontos fixos distintos $c, d \in [a, b]$. Isso implica que $g(c) = c$ e $g(d) = d$, tendo assim

$$|g(c) - g(d)| = |c - d|.$$

Mas, de (2.2), temos que $|g(c) - g(d)| < |c - d|$, ou seja,

$$|c - d| = |g(c) - g(d)| < |c - d|,$$

o que é um absurdo, logo $c = d$.

□

Capítulo 3

Método de Iteração do Ponto Fixo

3.1 O método

Neste capítulo, abordaremos o Método de Iteração do Ponto Fixo.

Esse método é utilizado para encontrar raízes de uma equação da forma $f(x) = 0$. Para isso, consideramos uma função auxiliar $g(x)$, a qual é definida por

$$g(x) = x - \lambda f(x),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Posteriormente, basta seguir os passos do seguinte algoritmo:

1. Escolha uma aproximação inicial x_0 para a raiz da equação $f(x) = 0$;
2. Defina $x_1 = g(x_0)$;
3. Considere $\epsilon > 0$ (Critério de parada);
4. Se $|x_1 - x_0| < \epsilon$ então x_0 é uma boa aproximação para a raiz de $f(x) = 0$. Caso contrário, repetir o processo a partir do passo 2.

A seguir mostramos como obter, via Método de Iteração do Ponto Fixo, uma boa aproximação para as raízes de algumas equações do tipo $f(x) = 0$.

Exemplo 3.1.1. *Vamos determinar uma boa aproximação para a raiz da equação $x^2 - e^x = 0$, considerando $\epsilon = 10^{-4}$ como critério de parada.*

Inicialmente, vamos verificar que, de fato, a equação $x^2 - e^x = 0$ possui uma solução real.

Definindo $f(x) = x^2 - e^x$, temos que

$$f(-1) = (-1)^2 - e^{-1} = 1 - e^{-1} > 0 \text{ e } f(0) = 0^2 - e^0 = -1 < 0,$$

ou seja, $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Com isso, uma vez que $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, em particular, em $[-1, 0]$, segue do Corolário 2.0.1 que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

Vamos agora utilizar o método da iteração do ponto fixo para determinar uma boa aproximação para c . Para isso, vamos determinar qual será a nossa função auxiliar $g(x)$.

Isolando x na equação $x^2 - e^x = 0$, temos três possíveis opções:

$$x = \sqrt{e^x}, x = -\sqrt{e^x} \text{ ou } x = \ln x^2.$$

Entretanto, a função $g(x) = \sqrt{e^x}$ não nos convém uma vez que a estimativa $|x_{n+1} - x_n|$, sendo $x_0 = -1$ e $x_{n+1} = \sqrt{e^{x_n}}$, tende ao infinito a medida que $n \rightarrow +\infty$ como podemos ver numericamente na tabela a seguir:

n	x_n	$x_{n+1}=g(x_n)$	$ x_{n+1}-x_n $
1	-1	0,6065306597	1,60653066
2	0,6065306597	1,3542737460	0,747743086
3	1,3542737460	1,9682343520	0,613960606
4	1,9682343520	2,6754488910	0,707214539
5	2,6754488910	3,8103629450	1,134914054
6	3,8103629450	6,7206271260	2,910264181
7	6,7206271260	28,7982195200	22,07759239

Tabela 1 – Tabela 1

Fonte: A autora

A função $g(x) = \ln x^2$ também não nos convém, ao fazer $x_0 = -1$ temos que:

$$g(x_1) = \ln(g(x_0)) = \ln((-1)^2) = 0.$$

No método de iteração do ponto fixo, o próximo valor é obtido através do resultado anterior, então, teríamos:

$$g(x_2) = \ln(g(x_1)) = \ln(0).$$

Mas, $\ln(0)$ resulta em uma indefinição, pois não existe um número real, tal que, quando elevado à base do logaritmo natural e resulte em 0. Por esse motivo, não podemos considerar como aproximação inicial $x_0 = -1$. Entretanto, considerando, por exemplo, $x_0 = -0,5$, vemos que a sequência dada por $x_{n+1} = g(x_n)$ não converge como mostra a tabela abaixo:

n	x_n	$x_{n+1}=g(x_n)$	$ x_{n+1}-x_n $
0	-0,5	-1,3862943611	
1	-1,3862943611	0,6532685200	2,0395628811
2	0,6532685200	-0,8515340490	1,5048025689
3	-0,8515340490	-0,3214315852	0,5301024638
4	-0,3214315852	-2,2699411133	1,9485095281
5	-2,2699411133	1,6395077798	3,9094488930
6	1,6395077798	0,9887921250	0,6507156548
7	0,9887921250	-0,0225423131	1,0113344380
8	-0,0225423131	-7,5847223110	7,5621799979

Tabela 2 – Tabela 2

Fonte: A autora

Logo, nos resta como função auxiliar $g(x) = -\sqrt{e^x}$. Como vimos no Exemplo 2.0.5, $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in [-1, 0]$. Além disso, como $g'(x) = -\frac{e^x}{2} < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, segue do teste da derivada 1ª que $g(x)$ é decrescente. Isso implica que

$$-1 = g(0) \leq g(x) \leq g(-1) = -\frac{1}{e} < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, segue do Teorema 2.0.3 que g possui um único ponto fixo no intervalo $[-1, 0]$, o qual é, pelo método do ponto fixo, a raiz de f .

A tabela abaixo mostra numericamente que uma boa aproximação para a raiz de f no intervalo $[-1, 0]$ quando escolhemos, como função auxiliar, $g(x) = -\sqrt{e^x}$, e, $\epsilon = 10^{-4}$ como critério de parada, é $x = -0,7034755540$.

n	x_n	$x_{n+1}=g(x_n)$	$ x_{n+1}-x_n $
1	-1	-0,6065306597	0,3934693403
2	-0,6065306597	-0,7384031500	0,1318724903
3	-0,7384031500	-0,6912860504	0,0471170995
4	-0,6912860504	-0,7077650963	0,0164790459
5	-0,7077650963	-0,7019574087	0,0058076876
6	-0,7019574087	-0,7039987458	0,0020413371
7	-0,7039987458	-0,7032805630	0,0007181828
8	-0,7032805630	-0,7035331504	0,0002525874
9	-0,7035331504	-0,7034443042	0,0000888462
10	-0,7034443042	-0,7034755540	0,0000312499
11	-0,7034755540	-0,7034645624	0,0000109917

Tabela 3 – Tabela 3

Fonte: A autora

O gráfico abaixo mostra o ponto A , que é a interseção entre a reta $y = x$ e $g(x) = -\sqrt{e^x}$, nos dando o valor aproximado que foi encontrado (como sendo sua abscissa) na Tabela 2 (Figura 3).

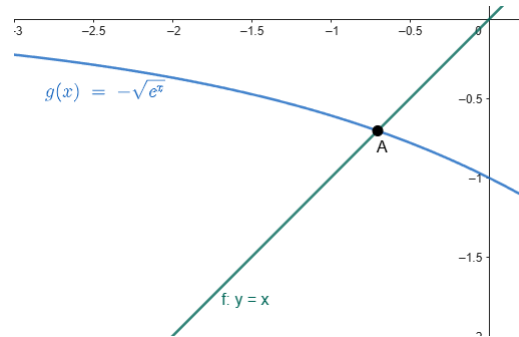


Figura 11 – Gráfico de interseção 2

Fonte: A autora

A convergência da sequência gerada pelo método do ponto fixo pode ser visualizada geometricamente da seguinte maneira: começando com uma aproximação x_0 , traça-se, perpendicularmente ao eixo x , um segmento de reta de x_0 até interceptar a curva definida por $g(x)$, o que nos fornece $x_1 = g(x_0)$. Depois, traça-se um segmento de reta, perpendicular ao eixo y , de x_1 até a reta $y = x$. A partir desse ponto, traça-se outro segmento de reta, perpendicular ao eixo x , indo até a curva $y = g(x)$, obtendo assim o ponto $x_2 = g(x_1)$. Repete-se esse processo até chegar no ponto fixo de $g(x)$.

No caso do Exemplo 3.1.1, temos o seguinte esquema:

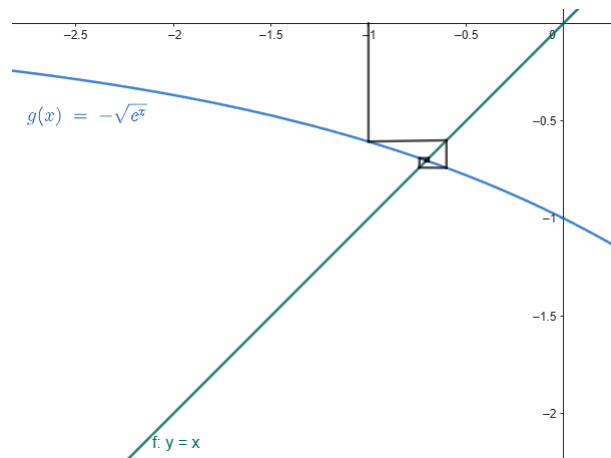


Figura 12 – Gráfico de convergência

Fonte: A autora

Exemplo 3.1.2. Determine uma aproximação para a raiz do polinômio $f(x) = x^3 + 8x - 7$ no intervalo $[0, 1]$ com critério de parada $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-8}$.

Primeiro, verificamos que $f(x) = x^3 + 8x - 7$ possui uma única solução real dentro do intervalo dado:

$$f(0) = 0^3 + 8 \cdot 0 - 7 = -7 < 0 \text{ e } f(1) = 1^3 + 8 \cdot 1 - 7 = 2 > 0.$$

Temos que $f(0) \cdot f(1) < 0$, como $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, em particular, em $[0, 1]$, segue do Corolário 2.0.1 que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Como função auxiliar temos duas possíveis opções: $g(x) = \sqrt[3]{7 - 8x}$, $g(x) = \frac{7-x^3}{8}$ e $g(x) = \frac{7}{x^2+8}$. A função $g(x) = \sqrt[3]{7 - 8x}$ não nos convém, uma vez que ela não converge, como podemos numericamente ver na Figura 4:

n	x_n	$x_{n+1}=g(x_n)$	$ x_{n+1}-x_n $
0	1	1,4422495703	0,9422495703
1	1,442249570	-1,6555973434	3,0978469137
2	-1,655597343	2,7254466063	4,3810439497
3	2,725446606	-2,4553996056	5,1808462119
4	-2,455399606	2,9867264257	5,4421260313
5	2,986726426	-2,5659166639	5,5526430896

Tabela 4 – Tabela 4

Fonte: A autora

Vamos verificar se a função auxiliar $g(x) = \frac{7}{x^2+8}$ nos convém com o auxílio da tabela:

n	x_n	$x_{n+1}=g(x_n)$	$ x_{n+1}-x_n $
0	1	-0,9032258065	1,4032258065
1	-0,903225806	2,4230309705	3,3262567770
2	2,423030971	-2,3136085330	4,7366395035
3	-2,313608533	2,9437238306	5,2573323635
4	2,943723831	-2,5483798831	5,4921037137
5	-2,548379883	3,0142668252	5,5626467083
6	3,014266825	-2,5770231175	5,5912899427
7	-2,577023117	3,0226502232	5,5996733407
8	3,022650223	-2,5803850248	5,6030352480
9	-2,580385025	3,0236311526	5,6040161774
10	3,023631153	-2,5807778247	5,6044089773
11	-2,580777825	3,0237457213	5,6045235460
12	3,023745721	-2,5808236944	5,6045694157
13	-2,580823694	3,0237590996	5,6045827940

Tabela 5 – Tabela 5

Fonte: A autora

Como podemos ver na tabela acima, o erro $|x_{n+1} - x_n|$ não converge para 0, logo ela não nos convém. Logo, nos resta como função auxiliar $g(x) = \frac{7-x^3}{8}$. Vimos no Exemplo 2.0.6 que

$|g'(x)| < 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Segue do Teorema 2.0.3 que g possui um único ponto fixo no intervalo $[0, 1]$, o qual é, pelo método de interação do ponto fixo, raiz de f .

A tabela abaixo nos mostra que, realizando os cálculos no Excel e tendo como critério de parada $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-8}$, o número 0,808851943 é uma boa aproximação para a raiz de f no intervalo $[0, 1]$ quando escolhemos como função auxiliar $g(x) = \frac{7-x^3}{8}$:

n	x_n	$x_{n+1}=g(x_n)$	$ x_{n+1}-x_n $
0	0,5	0,8593750000	0,3593750000
1	0,859375000	0,7956662178	0,0637087822
2	0,795666218	0,8120344834	0,0163682656
3	0,812034483	0,8080680575	0,0039664259
4	0,808068058	0,8090440725	0,0009760150
5	0,809044073	0,8088047916	0,0002392809
6	0,808804792	0,8088635074	0,0000587158
7	0,808863507	0,8088491027	0,0000144047
8	0,808849103	0,8088526368	0,0000035341
9	0,808852637	0,8088517697	0,0000008671
10	0,808851770	0,8088519824	0,0000002127
11	0,808851982	0,8088519302	0,0000000522
12	0,808851930	0,8088519430	0,0000000128
13	0,808851943	0,8088519399	0,0000000031

Tabela 6 – Tabela 6

Fonte: A autora

O gráfico da Figura 13 nos mostra a interseção entre a reta $y = x$ e $g(x) = \frac{7-x^3}{8}$:

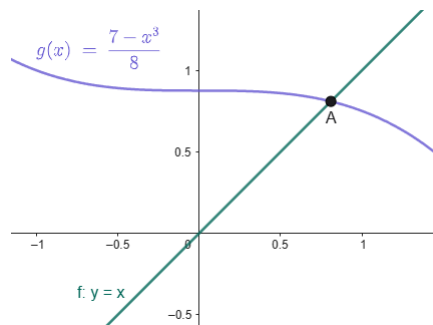


Figura 13 – Gráfico de interseção 2

Fonte: A autora

Abaixo temos o gráfico de convergência da função:

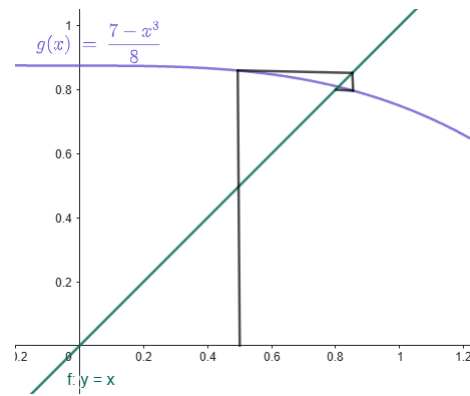


Figura 14 – Gráfico de convergência
Fonte: A autora

Capítulo 4

Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo estudar o método de iteração do ponto fixo para resolução de equações, destacando sua aplicação em funções cujo os métodos convencionais possuem limitações. Ao longo do desenvolvimento, foram apresentados alguns métodos clássicos para a resolução de equações como a Fórmula de Bhaskara, as Relações de Girard, o Método de Briot-Ruffini, o Teorema da Decomposição, o Teorema das Raízes Racionais e o uso de funções inversas. Foi observado que tais métodos são eficientes, porém, em determinados contextos, sua aplicação se torna inviável ou possui alguma limitação.

No decorrer do trabalho, foram revisados conceitos fundamentais de análise matemática que são necessários para o entendimento do funcionamento do método de iteração do ponto fixo, como definições, teoremas e as condições necessárias para a sua aplicação. Em seguida, foi apresentado o algoritmo passo a passo juntamente de exemplos de sua utilização no estudo das raízes de algumas equações.

Diante disso, conclui-se que o método do ponto fixo é uma ferramenta eficaz para a resolução de equações, especialmente em situações em que métodos algébricos tradicionais não são aplicáveis ou apresentam dificuldades. Além disso, o estudo desenvolvido pode servir como base para trabalhos futuros, seja no aprofundamento de métodos numéricos, seja na comparação do método do ponto fixo com outros métodos iterativos, como o método de Newton ou o método da bisseção.

Referências

- 1 IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios, Equações*. 8. ed. Editora Atual, 2013. Disponível em PDF via repositório online. Disponível em: <<https://barbosadejesu.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/09/fundamentos-da-matematica-elementar-6-1.pdf>>.
- 2 BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. 3. ed. [S.l.]: Blucher, 2012. Tradução de Helena Castro.
- 3 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: [s.n.], 2018. Ministério da Educação. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>.
- 4 CLUBES OBMEP. *As relações de Girard*. 2025. <https://clubes.obmep.org.br/blog/texto_004-relacoes-de-girard/>. Acesso em: 28 jul. 2025.
- 5 LIMA, E. L. *Análise real*. [S.l.]: Impa Rio de Janeiro, 2004. v. 1.
- 6 SILVA, A. C. d. *O método de Briot-Ruffini e as relações de Girard para resolução de equações algébricas do terceiro grau*. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco, Campus Pesqueira. Disponível em: <<https://repositorio.ifpe.edu.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/816/O%20m%C3%A9todo%20de%20Briot-Ruffini%20e%20as%20rela%C3%A7oes%20de%20Girard%20para%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20equa%C3%A7%C3%B5es%20alg%C3%A9bricas%20do%20terceiro%20grau.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.
- 7 CHAQUIAM, M. *Ensaio temático: história e matemática em sala de aula*. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017. 241 p. ISBN 978-85-98092-34-8. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/historia_matematica.pdf>.
- 8 IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral*. [S.l.]: Atual, 2013.

Apêndices

APÊNDICE A

Sugestão de passos para a elaboração de uma atividade para o Ensino Médio

Neste capítulo, descrevemos a proposta de uma atividade desenvolvida para as aulas de matemática no Ensino Médio. O objetivo desta atividade é promover uma aprendizagem que estimule a participação, o interesse e a reflexão sobre o uso do Método de Iteração do Ponto Fixo para a resolução de equações. A atividade foi pensada para alunos do Ensino Médio. Os materiais necessários para a aplicação desta atividade incluem um meio tecnológico que possa acessar: Excel e o aplicativo Geogebra.

A.1 Planejamento da Atividade

A atividade foi planejada considerando as limitações dos métodos ensinados no Ensino Médio, como foi analisado anteriormente e introduz um método numérico: o método de iteração do ponto fixo. A seguir, apresentamos a metodologia.

A.1.1 Recapitulando

O primeiro momento tem como objetivo relembrar algumas definições: definição de função $f(x)$ e de equação $f(x) = 0$, rerepresentar métodos já vistos e quando eles falham ou são pouco práticos e justificar a necessidade de métodos numéricos: quando a solução exata é difícil ou impossível por métodos elementares.

A.1.2 Apresentação Conceitual

- Conceito de ponto fixo: um número c é ponto fixo de g se $g(c) = c$.
- Explicar, com gráfico no Geogebra, que encontrar a interseção entre $y = g(x)$ e $y = x$ é o mesmo que achar um ponto fixo.
- Para aproximar a solução, utilizamos um processo chamado iteração: a cada passo, encontramos um novo valor com a fórmula $x_{n+1} = g(x_n)$. Observando se esses valores vão se aproximando do ponto fixo.

A.1.3 Aplicando a Atividade

A aplicação pode ocorrer individualmente ou com grupos formados, a depender da quantidade de alunos presentes na turma, após a divisão deve-se seguir os seguintes passos:

- Repassar para os alunos que os softwares necessários para a atividade são: Geogebra e Excel/Planilhas do Google;
- Explicar como escrever as funções no Excel/Planilhas e as fórmulas que cada um utiliza;
- Distribuir funções para os alunos, já incluindo o valor da primeira iteração e critério de parada;
- Para encontrar a função auxiliar de $f(x) = 0$, reescreva a equação como $x = g(x)$. Encontre diferentes formas de isolar x que serão possíveis funções auxiliares.
- Após todos os alunos terem analisado as funções e atingido o critério de parada das iterações, eles devem verificar o gráfico da função dada para eles no software Geogebra, comparando com a reta $y = x$ e a interseção entre elas;
- Após os passos acima concluídos, pode-se ter um momento de interação entre os alunos onde cada grupo apresenta a sua função, quantas iterações foram necessárias, o gráfico da função e outros tópicos.

– Funções para serem utilizadas:

- * $f(x) = \frac{1}{x} - 2$, critério de parada: $|f(x_n)| < 10^{-3}$;
- * $f(x) = \cos x - x$, critério de parada: $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$;
- * $f(x) = e^x - x$, critério de parada: $|f(x_n)| < 10^{-5}$;
- * $f(x) = x^3 - x - 1$, critério de parada: $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$.

A.1.4 Considerações sobre a atividade

A atividade demonstrou como o método de iteração do ponto fixo é uma ferramenta didática e eficaz que pode ser aplicada dentro das salas de aula do ensino básico, trazendo a tecnologia para dentro da sala de aula e promovendo a socialização dos alunos.