

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Física

Bernardo Oliveira Barbosa Nolasco

**Uma Proposta de Investigação da Eletrodinâmica
Axiônica Utilizando-se Guias de Onda**

OURO PRETO

2025

Bernardo Oliveira Barbosa Nolasco

**Uma Proposta de Investigação da Eletrodinâmica Axiônica Utilizando-se
Guias de Onda**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Departamento de
Física (DEFIS), Universidade Fe-
deral de Ouro Preto, como parte
dos requisitos para obtenção do tí-
tulo de Bacharel em Física.
Orientador: André Herkenhoff
Gomes

OURO PRETO

2025



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Bernardo Oliveira Barbosa Nolasco

"Uma Proposta de Investigação da Eletrodinâmica Axiônica Utilizando-se Guias de Onda".

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em 28 de março de 2025 .

Membros da banca

Doutor - André Herkenhoff Gomes - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto

Doutor - Romuel Figueiredo Machado - Universidade Federal de Ouro Preto

Doutor Thiago Escobar Colla - Universidade Federal de Ouro Preto

André Herkenhoff Gomes, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 28/03/2025



Documento assinado eletronicamente por **Andre Herkenhoff Gomes, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 04/06/2025, às 10:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0878193** e o código CRC **F4596175**.

RESUMO

Nesse trabalho, fizemos uma breve revisão da formulação lagrangiana do eletromagnetismo e buscamos entender as consequências teóricas do acoplamento entre o campo eletromagnético e o campo axiônico, entendido como um campo escalar regido pela equação de Klein-Gordon. Para realizar tal estudo propusemos um experimento simples em eletrodinâmica axiônica no qual buscamos entender a propagação de ondas eletromagnéticas confinadas em guias de onda. O fenômeno central que estudamos foi o da conversão de fótons em áxions, e vice-versa, quando na presença de um campo magnético externo. Ilustramos um experimento no qual um sinal eletromagnético é disparado no interior de um guia de onda imerso em um campo magnético externo e posteriormente convertido em áxion, o qual livremente se propaga para um segundo guia vizinho onde finalmente se reconverte em um novo sinal eletromagnético. Determinamos condições para a ocorrência do deste fenômeno, as quais foram usadas para ilustrar que nossa proposta de experimento é capaz de acessar áxions de massa na ordem de 10^{-7} eV em guias típicos operando em frequências da ordem de 10 GHz. Por fim, pela determinação da razão entre a potência do sinal final e potência do sinal inicial, ilustramos que nossa proposta é capaz de acessar valores na ordem de 10^{-10} GeV⁻¹ para a constante que dita a intensidade do acoplamento entre áxion e fóton.

ABSTRACT

In this work, we present a brief review of the Lagrangian formulation of electromagnetism and seek to understand the theoretical consequences of the coupling between the electromagnetic field and the axionic field, understood as a scalar field governed by the Klein-Gordon equation. To carry out this study, we propose a simple experiment in axionic electrodynamics in which we aim to understand the propagation of electromagnetic waves confined in waveguides. The central phenomenon we study is the conversion of photons into axions, and vice versa, in the presence of an external magnetic field. We illustrate an experiment in which an electromagnetic signal is emitted inside a waveguide immersed in an external magnetic field and subsequently converted into an axion, which freely propagates to a neighboring second guide, where it is finally reconverted into a new electromagnetic signal. We determine conditions for the occurrence of this phenomenon, which were used to illustrate that our experimental proposal is capable of accessing axions with masses on the order of 10^{-7} eV in typical guides operating at frequencies around 10 GHz. Finally, by determining the ratio between the final signal power and the initial signal power, we illustrate that our proposal can access values on the order of $10^{-10} \text{ GeV}^{-1}$ for the constant that dictates the coupling strength between the axion and the photon.

SUMÁRIO

1. Introdução	3
2. Objetivos	4
3. Revisão de literatura	4
3.1. Problema CP forte	4
3.2. Mecanismo de Peccei e Quinn	5
3.3. Áxions, ALPs e Matéria Escura	6
4. Metodologia	8
4.1. Equação de Euler-Lagrange em Teoria Clássica de Campos	9
4.2. Formulação Covariante da Eletrodinâmica	10
4.2.1. Transformações discretas	11
4.2.2. Potenciais e formulação covariante	11
4.2.3. Lagrangiana do eletromagnetismo	13
4.3. Lagrangiana de Klein-Gordon e o áxion	14
4.4. Acoplamento entre o campo eletromagnético e o áxion	15
4.5. Teoria da Perturbação	18
5. Resultados e Discussão	19
5.1. Guia de ondas retangular	19
5.1.1. Ondas Eletromagnéticas no primeiro guia	19
5.1.2. Potencia fornecida no guia de ondas da esquerda	23
5.1.3. Geração do campo axiônico	24
5.1.4. Geração de ondas eletromagnéticas no segundo guia de ondas	25
5.1.5. Potencia Transmitida no guia de ondas da direita	28
5.1.6. Sensibilidade aos parâmetros associados ao áxion	29
6. Conclusões	30
7. Referências Bibliográficas	31

1. INTRODUÇÃO

A matéria escura é um tipo de matéria que não emite luz e compõe cerca de 80% de toda a matéria do universo. Sua origem remonta a 1930, quando o astrônomo Fritz Zwicky estudava o aglomerado de Coma e observou que as galáxias que estavam nas bordas do aglomerado se moviam a uma velocidade muito superior à previsão teórica feita com base na quantidade de massa visível [1]. Zwicky utilizou o teorema do virial para relacionar a energia cinética das galáxias com a energia potencial gravitacional do aglomerado. A partir disso ele concluiu que deveria haver uma quantidade de massa que não emitia luz, para que o aglomerado fosse mantido coeso, a qual foi dado o nome de matéria escura.

Após as observações de Zwicky, diversas outras evidências corroboraram a existência da matéria escura. Um exemplo são as curvas de rotação de galáxias: gases e estrelas nas regiões periféricas das galáxias movem-se mais rápido do que o previsto pelas teorias atuais [1]. Isso sugere que a maior parte da matéria galáctica não emite luz e está localizada em uma estrutura conhecida como halo galáctico. Outro exemplo são as lentes gravitacionais, um fenômeno previsto pela Relatividade Geral de Einstein. Objetos massivos curvam o espaço-tempo, afetando a trajetória da luz. A distorção na imagem de galáxias de fundo causada por aglomerados próximos é muito maior do que o esperado ao considerar apenas a matéria visível, indicando novamente a presença de matéria que não emite luz.

Embora a existência da matéria escura esteja bem estabelecida, sua natureza microscópica ainda é um mistério. Diversos modelos foram propostos para explicá-la, sendo as WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles) inicialmente consideradas candidatas promissoras. Elas se destacavam por serem compatíveis com extensões supersimétricas do Modelo Padrão e por explicarem a abundância de matéria observada no universo [1]. No entanto, a ausência de detecções diretas e limites experimentais rigorosos praticamente descartaram essa hipótese, levando a uma busca por outros candidatos.

Entre esses candidatos, os áxions têm se mostrado particularmente promissores. Eles são bósons neutros de spin zero que interagem fracamente com outras partículas [2]. Tais propriedades o tornam um candidato natural para a matéria escura pois ele não interage fortemente com a luz. Eles surgiram historicamente para resolver um problema do Modelo Padrão conhecido como problema CP forte [3], essa conexão com a física de partículas estabelece uma base teórica sólida para a existência do áxion. A teoria também sugere que os áxions teriam sido produzidos em grande quantidade no universo primitivo [3], o que explica a abundância de matéria escura no universo.

2. OBJETIVOS

Esse trabalho tem como objetivo geral estudar a interação entre o campo do áxion e o campo eletromagnético utilizando teoria clássica de campos, o objetivo específico é estudar o efeito da existência do áxion sobre a propagação da luz em um guia de ondas e estimar a sensibilidade experimental para a massa e constante de acoplamento do áxion para um experimento desse tipo.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1. Problema CP forte

A conjugação de carga é uma transformação que consiste na troca de todas as partículas de um sistema físico por suas antipartículas (ou seja, todas as cargas são invertidas) [4]. Se o sistema consistir em um elétron que se move no espaço, a aplicação da conjugação de carga trocaria tal elétron por um pósitron (que tem todas as propriedades iguais às do elétron, exceto a carga, que é oposta). Quando uma lei física é invariante segundo a conjugação de carga, dizemos que tal teoria respeita a simetria C. Seria problemático se todas as leis físicas respektassem tal simetria, uma vez que o universo conhecido é preenchido predominantemente de matéria e não de antimatéria, enquanto a conservação da simetria C em todas as leis físicas sugeriria que existem iguais quantidades de ambas.

A transformação de paridade em um sistema físico inverte o sinal de todas as coordenadas espaciais nesse sistema [5]. Dessa forma, se uma partícula move-se ao longo do eixo x na direção positiva e uma transformação de paridade é aplicada ao sistema, tal partícula, após a transformação, estará movendo-se ao longo do eixo x na direção negativa. Quando uma lei física é invariante segundo uma transformação de paridade, dizemos que tal lei física respeita a simetria P.

Em 1956, uma análise dos dados experimentais existentes demonstrou que, embora houvessem dados que corroborassem a ideia de que as interações eletromagnética e nuclear forte respektassem tal simetria [4], ainda não haviam experimentos que verificassem a validade de tal simetria para processos de decaimento que envolvessem a interação nuclear fraca. Os físicos Tsung-Dao Lee e Chen-Ning Yang propuseram diversos testes experimentais diretos. O primeiro teste foi feito em 1956, num experimento baseado no decaimento beta do núcleo do cobalto-60, liderado por Chien-Shiung Wu, que demonstrou que a interação nuclear fraca de

fato não respeita a simetria P [4].

Após ser demonstrado que a interação fraca não respeita a simetria P, Lev Landau, em 1957, propôs que as leis físicas respeitem a simetria CP [6], que consiste na invariância de um sistema físico quando ele é submetido simultaneamente às duas transformações anteriores (conjugação de carga e transformação de paridade). Dessa forma, se num sistema trocarmos todas as partículas por suas antipartículas, isso será equivalente a inverter todas as coordenadas espaciais de tal sistema.

Em 1964, James Cronin, Val Fitch e alguns colaboradores forneceram evidências de que, no processo de decaimento de um káon, a simetria CP é quebrada [4]. A descoberta consistia no fato de que káons neutros podem transformar-se em suas antipartículas e vice-versa, porém as probabilidades de ocorrência dessas transformações não são as mesmas nas duas direções.

Devido ao fato de a simetria CP não ser fundamental na natureza (existem processos em que tal simetria é violada), era esperado pelos físicos que a interação nuclear forte também não respeitasse tal simetria. Há um termo na lagrangiana do Modelo Padrão, proporcional ao parâmetro constante θ_{QCD} , que controla a quebra dessa simetria pela cromodinâmica quântica. Somente se tal termo for nulo a interação nuclear forte respeita a simetria CP [3]. Algumas restrições experimentais impõem que tal termo é suficientemente próximo de zero para que possamos dizer que a cromodinâmica quântica respeita a simetria CP. A discordância entre as restrições impostas experimentalmente para o valor de θ_{QCD} e o valor que os físicos esperavam que tal parâmetro tivesse é o que chamamos de problema CP forte [3]. Depois de terem tido ciência de tal problema, dois físicos, Peccei e Quinn, propuseram uma solução para ele [3].

3.2. Mecanismo de Peccei e Quinn

A solução proposta por Peccei e Quinn para o problema CP forte consiste em introduzir uma nova simetria global $U(1)_{PQ}$ que, quando quebrada espontaneamente, leva ao surgimento de um novo campo escalar cuja dinâmica zera o termo que viola a simetria CP na lagrangiana do modelo padrão [3]. A tal campo escalar foi dado o nome de campo axiônico que, quando quantizado, leva ao surgimento do áxion, um bóson leve de spin 0.

Muitas das propriedades dos áxions dependem de uma constante f_a que chamamos constante de decaimento do áxion. A massa do áxion e a intensidade de todas as suas interações com os demais campos do modelo padrão são inversamente proporcionais a tal constante [3].

Após a proposta de Peccei e Quinn, os físicos Steven Weinberg e Frank Wilczek perceberam que a partícula que se origina da quebra da simetria introduzida por Peccei e Quinn interagiria

com o campo eletromagnético e com o campo gluônico[3]. O modelo original estudado por tais físicos (modelo PQWW) previa que a constante de decaimento do áxion f_a deveria ser da mesma ordem de grandeza que a escala eletrofraca e foi posteriormente descartado devido ao fato de que as interações que ele previa eram fortes o suficiente para que elas fossem detectadas experimentalmente, o que não ocorreu [3].

Posteriormente, outros físicos propuseram mais modelos baseando-se no mecanismo de Peccei e Quinn. O físico Kim mostrou que a constante de decaimento f_a não precisa ter a mesma ordem de grandeza que a escala eletrofraca [7]. Tal constante pode ser arbitrariamente maior, resultando em áxions mais leves e que se acoplam mais fracamente aos outros campos. Surgem então os áxions invisíveis, que solucionam o problema CP forte e driblam as restrições experimentais impostas ao modelo PQWW [3].

3.3. Áxions, ALPs e Matéria Escura

Caso existam, os áxions teriam sido produzidos no início do universo em duas populações distintas: áxions quentes e áxions frios. Essas populações se diferenciam pelos mecanismos de produção no contexto da cosmologia primitiva [3].

Os áxions quentes teriam sido gerados por processos térmicos no plasma primordial logo após o Big Bang, quando a temperatura do universo ainda era extremamente alta. Nessa fase inicial, a interação do campo axiônico com outros campos teria originado uma população de áxions com energias cinéticas significativas, comportando-se como partículas relativísticas por longos períodos. Por seu comportamento relativístico, essas partículas não são bons candidatos para formar estruturas gravitacionais massivas, como halos de matéria escura, galáxias ou aglomerados [3, 8].

Por outro lado, os áxions frios teriam sido produzidos durante o relaxamento do campo axiônico, em conexão com o mecanismo de quebra espontânea da simetria de Peccei e Quinn, que teria ocorrido no universo primordial [8]. Após essa quebra de simetria, o campo axiônico começou a oscilar em torno de seu valor mínimo de energia, gerando áxions com energia cinética muito baixa. Essas partículas têm potencial para se acumular gravitacionalmente, formando grandes estruturas como galáxias e halos de matéria escura [8].

Há um argumento teórico que sugere que os áxions frios podem alcançar equilíbrio térmico por meio de interações gravitacionais, formando condensados de Bose-Einstein. Essa característica os torna candidatos ideais para descrever a matéria escura em escala microscópica [3].

Além dos áxions da QCD, as ALPs (*axion-like particles*) surgem como candidatas mais versáteis para matéria escura [1]. Elas compartilham características semelhantes aos áxions, mas não possuem uma relação bem definida entre massa e constante de acoplamento. Essa ausência de restrição permite que as ALPs se encaixem em diferentes cenários cosmológicos e astrofísicos [3].

Na Figura 1, observa-se os limites experimentais impostos aos valores da constante de acoplamento e da massa dos áxions. As áreas em branco correspondem a valores que ainda não foram explorados experimentalmente, enquanto as áreas coloridas indicam valores para a constante de acoplamento do áxion com o fóton e da massa do áxion que já verificados em laboratório, mas para os quais nenhum sinal de áxions foi encontrado.

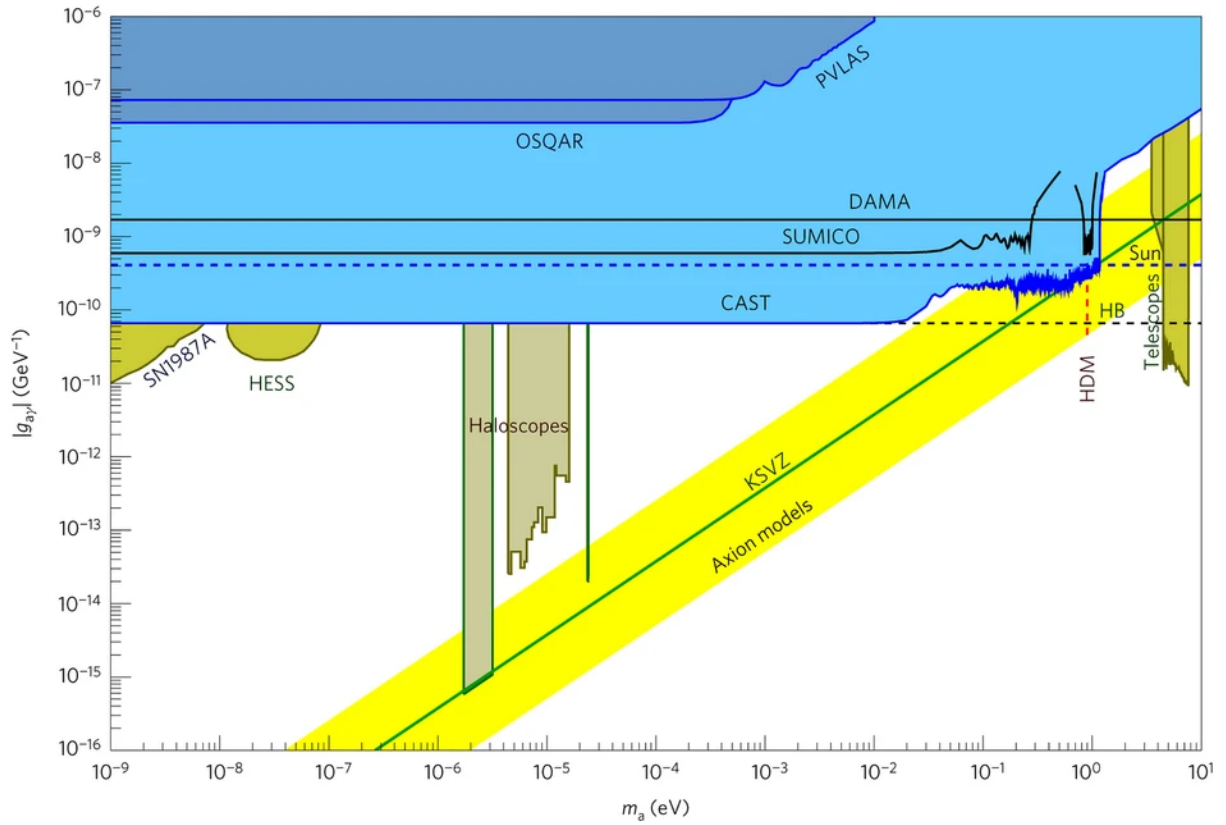


Figura 1: Gráfico com as restrições experimentais impostas para os valores da constante de acoplamento entre áxion e fóton para diferentes valores de massa do áxion [9].

Diversos experimentos têm buscado sinais de áxions ou ALPs, estando representados na Figura 1. Por exemplo, o ADMX (*Axion Dark Matter eXperiment*), que se enquadra na categoria de experimento de haloscópio, utiliza cavidades ressonantes para tentar detectar a conversão de áxions em fótons dentro de campos magnéticos intensos. Esse experimento estabeleceu limites importantes para a massa do áxion em faixas de frequência específicas, especificamente, para

a faixa de massas entre aproximadamente 2,66 μeV e 3,3 μeV (correspondendo a frequências de 640 MHz a 800 MHz), o ADMX alcançou sensibilidades que restringem $g_{a\gamma\gamma}$ a valores inferiores a cerca de $10^{-15} \text{ GeV}^{-1}$ [10].

Outro experimento de destaque é o CAST (*CERN Axion Solar Telescope*), que busca áxions solares e outros bósons leves através da conversão em fótons, sendo responsável por algumas das melhores restrições à interação entre áxions e fótons [9].

Destaca-se também a faixa amarela na Figura 1, que representa os valores de massa e constante de acoplamento previstos para áxions da QCD. No entanto, as ALPs, devido à sua ampla gama de massas e acoplamentos possíveis, tornam-se candidatas ainda mais atraentes para descrever a matéria escura. Se forem ultraleves, as ALPs podem apresentar propriedades únicas que afetam a formação de estruturas em pequena escala no universo e até mesmo atuar como energia escura, contribuindo para a expansão acelerada do universo [8].

Apesar do progresso experimental, ainda há muitas incertezas, especialmente em faixas de massa e interações de baixa energia. Assim, novas abordagens e tecnologias são cruciais para aumentar a sensibilidade e ampliar as possibilidades de detecção. Nesse contexto, este projeto tem como objetivo investigar teoricamente a viabilidade do uso da propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda como ferramenta para detectar sinais de partículas como o áxion.

4. METODOLOGIA

A mecânica clássica é a área da física que lida com os mecanismos responsáveis por definir a trajetória de partículas no espaço. Seu objetivo é determinar, a partir do conhecimento dos potenciais aos quais um sistema de partículas está sujeito, as posições e velocidades das partículas como funções do tempo.

Em mecânica clássica, lidamos com um número finito de partículas, cada partícula tem um número finito de graus de liberdade e, conseqüentemente, o sistema como um todo também tem um número finito de graus de liberdade. Utilizamos, então, na descrição de tais sistemas, um número finito de coordenadas generalizadas que coincide com o número de graus de liberdade do sistema.

Um campo é uma quantidade que varia continuamente através do espaço, sendo então definido em cada ponto do espaço. Como o espaço tem um número infinito de pontos dizemos que um campo tem um número infinito de graus de liberdade. Nesse sentido pode-se dizer que a teoria clássica de campos é uma generalização da mecânica clássica para os casos em que o número

de graus de liberdade do sistema passa a ser infinito. Faremos aqui uma breve discussão da formulação lagrangiana da teoria clássica de campos baseada no princípio da mínima ação.

4.1. Equação de Euler-Lagrange em Teoria Clássica de Campos

Segundo o princípio da mínima ação, para qualquer sistema físico, existe uma quantidade que sempre assume valores extremos. A essa quantidade damos o nome de ação e a representamos por S . No contexto da mecânica clássica, a ação é a quantidade que se minimiza quando uma partícula se move de um ponto do espaço de configuração a outro. É razoável então supor que ela dependa da trajetória no espaço de configuração, ou seja, é uma quantidade que deve depender das coordenadas de posição e de velocidade da partícula em cada instante de tempo. Diante desse contexto, a ação realizada por um sistema entre dois instantes de tempo é definida como sendo a integral, entre tais instantes de tempo, de um funcional chamado de lagrangiana, denotado por L . Tal funcional depende da velocidade $\dot{q}_i$ e posição q_i das partículas do sistema em função do tempo e pode também depender explicitamente do parâmetro tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (1)$$

Enquanto em mecânica clássica lidamos com um número finito de coordenadas generalizadas $q_i(t)$ indexadas pelo índice i e definidas em cada instante de tempo, em teoria clássica de campos passamos a lidar com a dinâmica de campos $\phi_a(\vec{x}, t)$ definidos em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo. Nesse sentido, a posição no espaço passa a ser uma variável independente, enquanto a variável dependente passa a ser o valor do campo, enquanto em mecânica clássica a posição da partícula no espaço é uma variável dinâmica que depende do instante de tempo considerado.

Em teoria clássica de campos, a lagrangiana é definida como integral no espaço de um funcional, denominado densidade lagrangiana e denotado por $\mathcal{L}$, que depende do campo ϕ_a , de sua primeira derivada temporal $\dot{\phi}_a$ e de suas primeiras derivadas espaciais $\nabla\phi_a$, podendo também depender dos parâmetros posição e tempo. Lidaremos aqui com casos em que a densidade lagrangiana não depende explicitamente das coordenadas no espaço-tempo; nesses casos, a dependência da densidade lagrangiana com as coordenadas do espaço-tempo é implícita por meio de sua dependência com o campo:

$$L(t) = \int \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) d^3x. \quad (2)$$

De forma análoga à mecânica clássica, definimos a ação do sistema entre dois instantes de

tempo como sendo a integral entre tais instantes da lagrangiana definida acima, ou seja,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a). \quad (3)$$

Para sermos mais sucintos, utilizaremos, no restante do texto, a palavra lagrangiana para nos referir ao que definimos aqui como sendo a densidade de lagrangiana do sistema.

Mantendo a analogia, podemos determinar a dinâmica dos campos através do princípio da mínima ação: nós variamos o caminho no espaço de configuração mantendo as extremidades fixas e impomos $\delta S = 0$. Ao fazer isso, obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \delta \partial_\nu \phi_a \right]. \quad (4)$$

Através de algumas manipulações na expressão acima, obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \delta \phi_a \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a \right\}. \quad (5)$$

O primeiro termo na expressão acima é uma derivada total e, como tal, transforma-se em um termo de superfície quando aplicamos o teorema de Gauss. Para que esse termo de superfície não contribua para a variação da ação, assumimos que o campo $\phi_a(\vec{x}, t)$ e suas variações $\delta \phi_a(\vec{x}, t)$ decaiam a zero no infinito, ou seja, nas fronteiras do sistema. Além disso, impomos que $\delta \phi_a(\vec{x}, t_1) = \delta \phi_a(\vec{x}, t_2) = 0$, significando que as variações nos campos são nulas nos tempos iniciais e finais, garantindo que as extremidades do caminho sejam fixas.

Nesse caso, impor que a variação da ação seja nula nos conduz às equações conhecidas como equações de Euler-Lagrange, dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \right) = 0. \quad (6)$$

A vantagem desse tipo de formulação é que ela permite, por meio do teorema de Noether, relacionar simetrias do modelo com quantidades que se conservam na teoria, tornando fácil garantir que o modelo respeite princípios de conservação que julgamos fundamentais na natureza, como conservação da energia, conservação de momento e conservação de carga. Além disso, tal formulação também facilita garantir que a teoria seja compatível com a relatividade especial; basta que o modelo respeite a invariância de Lorentz e a localidade.

4.2. Formulação Covariante da Eletrodinâmica

As equações que regem a dinâmica do campo eletromagnético são as chamadas equações de Maxwell. No sistema de unidades naturais, no qual $\hbar = 1$ e $c = 1$, elas são dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10)$$

Como as duas primeiras equações independem da distribuição de cargas ρ e correntes $\vec{J}$, elas são chamadas de equações de Maxwell homogêneas. As duas últimas, por outro lado, dependem de ρ e $\vec{J}$ e, por isso, são chamadas de equações de Maxwell não-homogêneas.

Tais equações são invariantes sobre três transformações discretas. Sob conjugação da carga, as densidades de carga, ρ , e de corrente, $\vec{J}$, invertem de sinal e os campos elétrico e magnético são definidos de forma a também inverterem de sinal sob tal transformação, mantendo assim as três equações de Maxwell inalteradas.

4.2.1. Transformações discretas

Sob transformação de paridade (P), o campo elétrico, por ser um vetor polar, inverte de sinal, enquanto o campo magnético, por ser um vetor axial, permanece inalterado. Devido ao fato de as derivadas espaciais também inverterem de sinal sob P, as equações de Maxwell permanecem inalteradas sob tal transformação.

Por fim, sob reversão temporal, as derivadas temporais invertem de sinal, o campo elétrico permanece invariante e o campo magnético inverte de sinal, garantindo a invariância das equações de Maxwell sob T. Assim, as equações de Maxwell apresentam, cada uma das três, as simetrias discretas C, P e T.

4.2.2. Potenciais e formulação covariante

Podemos utilizar as equações homogêneas para escrever os campos elétrico e magnético de uma forma mais conveniente. Começemos com a primeira delas. Como o divergente do campo magnético é sempre igual a zero, podemos escrever tal campo como sendo o rotacional de um potencial vetorial $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (11)$$

A segunda das equações de Maxwell que aparece acima é denominada lei de Faraday, ao utilizarmos a expressão obtida para o campo magnético na lei de Faraday, obtemos a seguinte

expressão:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (12)$$

Na equação acima o rotacional de um campo vetorial é nulo e isso é identicamente satisfeito desde que tal campo seja igual ao gradiente de um potencial escalar V , ou seja,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V. \quad (13)$$

Portanto, as equações de Maxwell homogêneas serão satisfeitas por identidades vetoriais se os campos elétrico e magnético satisfizerem as seguintes equações:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (14)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (15)$$

Utilizando a notação indicial, podemos escrever os campos em termos dos potenciais da seguinte forma:

$$B_i \varepsilon^{ijk} = \partial^j A^k - \partial^k A^j; \quad (16)$$

$$E_i = -\partial_i V - \frac{\partial A_i}{\partial t}. \quad (17)$$

Podemos definir agora um quadrivetor potencial cuja componente temporal é o potencial escalar e cujas componentes espaciais são as componentes do potencial vetor, ou seja, definimos um quadripotencial A^μ como:

$$A^\mu = (V, \vec{A}). \quad (18)$$

Utilizando tal quadrivetor, podemos definir o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ como sendo:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (19)$$

onde as componentes do operador quadrivetorial ∂^μ são dadas por:

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (20)$$

Ao analisar as componentes do tensor de campo $F^{\mu\nu}$, podemos perceber que ele é um tensor antissimétrico de posto 2. Como cada índice assume valores entre 0 e 3, temos então 6 componentes linearmente independentes em tal tensor. Analisando cada uma das componentes linearmente independentes percebemos que elas são dadas pelas componentes dos campos elétrico e magnético.

Vale notar também que o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ é invariante por uma transformação de calibre. Para ver isso considere a seguinte transformação feita sobre as componentes do quadripotencial:

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\lambda, \quad (21)$$

onde λ é um campo escalar qualquer. Dizemos que a transformação descrita pela expressão acima é uma transformação de calibre. Pode-se notar que o eletromagnetismo é invariante por uma transformação de calibre, isso pois ao substituir A^{μ} por A'^{μ} na expressão que fornece o tensor de campo, podemos notar que o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ permanece o mesmo¹.

4.2.3. Lagrangiana do eletromagnetismo

A lagrangiana que fornece as equações de Maxwell não-homogêneas deve também ser invariante por uma transformação de Lorentz, pois isso garante que a teoria é a mesma em qualquer referencial inercial. Podemos construir escalares a partir de tensores através da operação de contração. O escalar mais simples que pode ser construído utilizando o tensor de campo é $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. É natural então se esperar que haja um termo desse tipo na lagrangiana do eletromagnetismo, inclusive porque ele também não muda por transformações de calibre.

A lagrangiana também deve conter informações sobre a fonte para o campo eletromagnético, nesse sentido é natural esperar que o quadrivetor densidade de corrente J^{μ} apareça e que ele contraia com algum quadrivetor relacionado ao campo, sendo a escolha natural para isso é o quadripotencial A^{μ} , uma vez que ele é o único quadrivetor de posto 1 associado ao campo eletromagnético.

Esperamos portanto que a lagrangiana do eletromagnetismo seja algo do tipo:

$$\mathcal{L}_{\gamma} = \alpha F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \beta J^{\mu}A_{\mu}. \quad (22)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange na lagrangiana acima, é fácil perceber que elas reproduzem as equações de Maxwell não-homogêneas se as constantes α e β assumirem os seguintes valores: $\alpha = -\frac{1}{4}$ e $\beta = 1$. Utilizando tais constantes a lagrangiana do eletromagnetismo toma a forma

$$\mathcal{L}_{\gamma} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^{\mu}A_{\mu}. \quad (23)$$

¹ Para isso ver isso considere o tensor transformado $F'^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A'^{\nu} - \partial^{\nu}A'^{\mu}$. Utilizamos agora a definição de uma transformação de calibre para escrever A'^{μ} em termos do quadripotencial antigo A^{μ} : $F'^{\mu\nu} = \partial^{\mu}(A^{\nu} + \partial^{\nu}\lambda) - \partial^{\nu}(A^{\mu} + \partial^{\mu}\lambda)$. Utilizamos então a propriedade distributiva das derivadas para escrever $F'^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} + \partial^{\mu}\partial^{\nu}\lambda - \partial^{\nu}A^{\mu} - \partial^{\nu}\partial^{\mu}\lambda$. Por fim, utilizamos a comutatividade entre as derivadas e obtemos $F'^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} = F^{\mu\nu}$. Fica demonstrado então que o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ é invariante por uma transformação de calibre.

Naturalmente podemos nos questionar se o segundo termo da lagrangiana faz com que a ação viole a invariância de calibre, uma vez que tal termo envolve o quadripotencial e este se altera por uma transformação de calibre. Vejamos então o que ocorre com a ação quando aplicamos um transformação de calibre. Quando uma transformação de calibre é feita sobre o quadrivetor potencial, uma vez que $F^{\mu\nu}$ não se altera por uma transformação de calibre, obtemos uma ação S' dada por

$$S' = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A'_\mu \right) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu (A_\mu + \partial_\mu \lambda) \right]. \quad (24)$$

Ou ainda

$$S' = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu + \partial_\mu (\lambda J^\mu) - \lambda \partial_\mu J^\mu \right]. \quad (25)$$

Podemos agora utilizar a conservação da corrente e o fato de que o quadrivetor corrente J^μ deve zerar em uma hipersuperfície de raio infinito para escrever a expressão acima como

$$S' = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right) = S. \quad (26)$$

Fica então demonstrado que a ação que construímos aqui é invariante por uma transformação de calibre.

4.3. Lagrangiana de Klein-Gordon e o áxion

A equação de Klein-Gordon é usada para descrever bósons de spin 0. Ela pode ser obtida a partir da quantização da relação relativística entre energia e momento:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_a^2 c^4. \quad (27)$$

Para quantizar tal expressão, substituímos a energia e o momento pelos seus respectivos operadores ou seja, faremos as substituições $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ e $E \rightarrow \hat{H}$ e atuamos tais operadores no campo que descreverá o bóson de spin 0, o qual denotaremos pela função escalar $a(\vec{r}, t)$, utilizamos também o postulado de que o operador Hamiltoniano é o gerador da evolução temporal do campo, ou seja, $\hat{H}a(x, y, z, t) = i\hbar \partial_t a(x, y, z, t)$. Assumiremos que $a(\vec{r}, t)$ seja uma função real, pois queremos descrever um bóson eletricamente neutro. Ao seguir tal procedimento utilizando a relação acima, após algumas manipulações obtemos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 a(\vec{r}, t) + \frac{m_a^2 c^2}{\hbar^2} a(\vec{r}, t) = 0, \quad (28)$$

ou ainda, utilizando notação indicial e o sistema de unidades naturais,

$$\partial_\mu \partial^\mu a(\vec{r}, t) + m_a^2 a(\vec{r}, t) = 0. \quad (29)$$

A expressão que obtemos fornece a dinâmica para propagação livre de um bóson escalar qualquer.

A partir de tal expressão podemos intuir a forma para a lagrangiana que descreve tal bóson, uma vez que a equação de Euler-Lagrange relaciona a expressão que fornece a dinâmica dos campos com a lagrangiana que descreve tais campos. A equação de Euler-Lagrange para um campo escalar é:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0. \quad (30)$$

Comparando tal expressão com a equação diferencial que descreve a dinâmica do bóson de spin zero, podemos perceber que as seguintes igualdades devem ser satisfeitas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} = \partial^\mu a(\vec{r}, t). \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -m_a^2 a(\vec{r}, t). \quad (32)$$

A partir de tais igualdades podemos inferir a forma da lagrangiana que descreverá os bósons de spin zero:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a - \frac{1}{2} m_a^2 a^2. \quad (33)$$

Utilizaremos a lagrangiana descrita acima para descrever o campo axiônico livre, uma vez que o áxion é proposto como sendo um bóson escalar neutro. Contudo, a descrição completa do áxion envolve também suas interações com outros campos, sendo o campo eletromagnético de particular interesse devido às suas implicações físicas, como na busca por matéria escura. Nesse contexto, trataremos agora do termo de acoplamento entre os campos axiônico e eletromagnético, que será introduzido na lagrangiana da eletrodinâmica axiônica.

4.4. Acoplamento entre o campo eletromagnético e o áxion

A formulação covariante da eletrodinâmica nos permite modificar a teoria de Maxwell sem ferir princípios que julgamos serem fundamentais da natureza. Quando o campo axiônico está presente no modelo, ele altera a densidade lagrangiana do eletromagnetismo, introduzindo um termo que fornece o acoplamento entre os dois campos. Tal termo deve ser introduzido de forma a não ferir os princípios da relatividade e da eletrodinâmica quântica, teorias bem estabelecidas e verificadas experimentalmente.

Para que o modelo não fira nenhum princípio da relatividade especial, ele deve obedecer à simetria de Lorentz. Para isso, o termo que fornece o acoplamento entre os dois campos deve ser um invariante relativístico (algo que não se altera por uma mudança de referencial). Além disso, para que o modelo não seja inconsistente com a eletrodinâmica quântica, a simetria de

calibre deve continuar sendo satisfeita. Isso acontece desde que a dependência do termo de acoplamento com o campo eletromagnético envolva somente o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ e o tensor dual $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, e não envolva o campo A^μ .

O termo de acoplamento utilizado no modelo que estudaremos é dado por

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = -\frac{1}{4}g_{a\gamma\gamma}a(\vec{r}, t)\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (34)$$

onde $g_{a\gamma\gamma}$ é uma constante de acoplamento e $a(\vec{r}, t)$ é uma função escalar real descrevendo o campo axiônico. Devido ao fato da dependência de tal lagrangiana com o campo eletromagnético envolver somente os tensores $\tilde{F}^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$ e tais tensores serem invariantes por uma transformação de calibre, fica evidente então que a simetria de calibre não é violada pela adição de tal termo à lagrangiana do eletromagnetismo. Além disso, como os únicos tensores que aparecem em tal lagrangiana estão sendo contraídos, fica evidente que a lagrangiana é um invariante relativístico (não depende do referencial) e assim ela respeita a simetria de Lorentz.

Devido à natureza pseudoescalar do campo axiônico, ele inverte o sinal sob paridade (P) e inversão temporal (T) enquanto permanece invariante sob conjugação de carga (C). Assim, o termo de acoplamento

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = g_{a\gamma\gamma} a \vec{E} \cdot \vec{B},$$

é invariante sob P, pois tanto a quanto $\vec{E} \cdot \vec{B}$ mudam de sinal, e também é invariante sob C e T, já que as transformações destes não alteram o produto $a\vec{E} \cdot \vec{B}$. Portanto, o acoplamento $a\vec{E} \cdot \vec{B}$ respeita individualmente as simetrias C, P e T, garantindo que a inclusão do campo axiônico não viole as simetrias fundamentais da teoria.

A lagrangiana completa do modelo com o qual lidaremos aqui é dada pela soma das lagrangianas de Klein-Gordon para o áxion, de acoplamento entre os campos axiônico e eletromagnético, e do eletromagnetismo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial^\mu a(\vec{r}, t) \partial_\mu a(\vec{r}, t) - m_a^2 a^2(\vec{r}, t)] - \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a(\vec{r}, t) \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j_\mu A^\mu. \quad (35)$$

Podemos aplicar as equações de Euler-Lagrange para obter as equações dinâmicas para todos os campos que aparecem na expressão acima. Começando com o campo A^μ , temos

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}. \quad (36)$$

Efetuada as contas, obtemos então

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -g_{a\gamma\gamma} \partial_\mu a \tilde{F}^{\mu\nu} + j^\nu. \quad (37)$$

A equação acima resume duas das equações de Maxwell no contexto da eletrodinâmica axiônica.

Na forma vetorial podemos reescrever tais equações como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho + g_{a\gamma\gamma} \vec{\nabla} a \cdot \vec{B}, \quad (38)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - g_{a\gamma\gamma} \frac{\partial a}{\partial t} \vec{B} - g_{a\gamma\gamma} \vec{\nabla} a \times \vec{E}. \quad (39)$$

Podemos identificar os termos proporcionais ao campo axiônico que aparecem no lado direito das equações acima como sendo fontes para o campo eletromagnético, definimos então:

$$\rho_a = g_{a\gamma\gamma} \vec{\nabla} a \cdot \vec{B}, \quad (40)$$

$$\vec{J}_a = -g_{a\gamma\gamma} \frac{\partial a}{\partial t} \vec{B} - g_{a\gamma\gamma} \vec{\nabla} a \times \vec{E}. \quad (41)$$

Utilizando tais definições podemos reescrever as equações de Maxwell deduzidas anteriormente como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho + \rho_a, \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_a. \quad (43)$$

As duas equações de Maxwell restantes não são alteradas pois são identidades vetoriais que dependem de propriedades topológicas do espaço. Assim, elas continuam sendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (44)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (45)$$

Para o campo axiônico, a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}, \quad (46)$$

de onde obtemos a equação que governa a dinâmica do campo axiônico:

$$\partial_\mu \partial^\mu a + m_a^2 a = -\frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (47)$$

Esta pode ser reescrita explicitamente em termos dos campos elétrico e magnético como

$$\nabla^2 a - \partial_t^2 a - m_a^2 a = -g_{a\gamma\gamma} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (48)$$

O conjunto de equações que compreende as quatro equações de Maxwell modificadas escritas acima e a equação que governa a dinâmica do campo axiônico é o que denominamos eletrodinâmica axiônica.

4.5. Teoria da Perturbação

Em muitos casos, resolver as equações que descrevem a dinâmica dos campos eletromagnético e axiônico pode ser excessivamente complicado devido ao fato de tais campos interagirem entre si. Quando isso ocorre, podemos recorrer ao estudo de soluções aproximadas utilizando a teoria da perturbação. Façamos agora uma breve discussão sobre esse método.

Começamos escolhendo uma constante que aparece nas expressões para servir como parâmetro de perturbação, tal constante deve ter um valor pequeno para que a perturbação não seja maior do que o efeito principal.

Suponhamos então que o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ e seu dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$ possam ser expandidos como séries de potências do parâmetro $g_{a\gamma\gamma}$, ou seja,:

$$F^{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_{a\gamma\gamma})^n F_{(n)}^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_{a\gamma\gamma})^n \tilde{F}_{(n)}^{\mu\nu}. \quad (49)$$

Utilizando essa expansão, podemos escrever a equação que descreve a dinâmica do campo eletromagnético em regiões suficientemente afastadas de cargas ou correntes elétricas como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(g_{a\gamma\gamma})^n \partial_{\mu} F_{(n)}^{\mu\nu} + (g_{a\gamma\gamma})^{n+1} \partial_{\mu} a \tilde{F}_{(n)}^{\mu\nu} \right] = 0. \quad (50)$$

Podemos reescrever essa equação como:

$$\partial_{\mu} F_{(0)}^{\mu\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\partial_{\mu} F_{(n+1)}^{\mu\nu} + \partial_{\mu} a \tilde{F}_{(n)}^{\mu\nu} \right] (g_{a\gamma\gamma})^{n+1} = 0. \quad (51)$$

Como as diferentes potências de $g_{a\gamma\gamma}$ são linearmente independentes, a igualdade acima só será satisfeita se o termo que aparece fora do somatório e cada um dos coeficientes dentro dos colchetes forem nulos. Em ordem 0, temos:

$$\partial_{\mu} F_{(0)}^{\mu\nu} = 0. \quad (52)$$

Essa equação é a mesma que descreve a dinâmica do campo eletromagnético na eletrodinâmica usual quando não há fontes. Partindo para a primeira ordem na perturbação em $g_{a\gamma\gamma}$, obtemos:

$$\partial_{\mu} F_{(1)}^{\mu\nu} = -\partial_{\mu} a \tilde{F}_{(0)}^{\mu\nu}. \quad (53)$$

Esse resultado se adiciona ao anterior na teoria da perturbação, modificando ligeiramente o resultado esperado pela eletrodinâmica comum ao estudarmos a propagação do campo eletromagnético em regiões suficientemente distantes de onde existem fontes para o campo. Consideraremos aqui somente a correção de primeira ordem para o campo eletromagnético devido à interação com o áxion. Essa restrição se deve ao fato de que a perturbação é minúscula e qualquer outra correção traria efeitos desprezíveis.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Guias de onda eletromagnéticos são estruturas que confinam e direcionam a propagação de ondas eletromagnéticas, limitando-as a percorrerem trajetórias específicas, geralmente em frequências de rádio, micro-ondas ou ópticas. Eles são amplamente utilizados em sistemas de comunicação, radares e dispositivos ópticos devido à sua capacidade de transmitir sinais com baixa perda. Nesta seção, apresentaremos os resultados da nossa investigação teórica a respeito da propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda com o objetivo de explorar sua viabilidade como ferramenta para a detecção de áxions, candidatos hipotéticos à matéria escura.

5.1. Guia de ondas retangular

Começaremos agora discutindo o problema com o qual lidaremos no contexto da eletrodinâmica axiônica.

Na figura 2, temos o corte transversal de dois guias de onda retangulares idênticos com comprimentos característicos L_x e L_y , dispostos lado a lado. Inicialmente, inserimos ondas transversais magnéticas (TM, $B_z = 0$) no guia da esquerda e deixamos que elas se propaguem. Nesse estágio, caso os campos elétrico e magnético das ondas TM não sejam muito intensos, podemos utilizar a teoria de perturbação na ordem zero, tratando o problema como eletrodinâmica comum.

Após algum tempo, aplicamos um campo magnético constante, muito mais intenso do que o das ondas TM, na direção z dentro dos dois guias. Essa interação entre as ondas TM e o campo magnético constante gera o campo axiônico, que não respeita as mesmas condições de contorno que as ondas eletromagnéticas e, portanto, não fica confinado ao guia da esquerda.

Quando o campo axiônico penetra no guia da direita, sua interação com o campo magnético neste guia cria um campo eletromagnético, resultando na propagação de ondas eletromagnéticas dentro desse guia.

Começamos então descrevendo as ondas TM que se propagam no interior do primeiro guia.

5.1.1. Ondas Eletromagnéticas no primeiro guia

Vamos começar obtendo as soluções para o guia de ondas da eletrodinâmica convencional [11]. No nosso contexto, essa será a situação inicial e irá se referir à solução para os campos de ordem zero em teoria de perturbação. Os campos neste guia são denotados com um sobrescrito

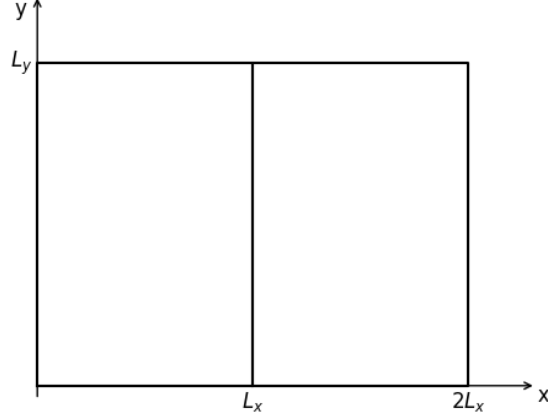


Figura 2: Imagem do corte transversal dos guias de ondas retangulares dispostos um ao lado do outro.

(0) e suas soluções não irão conter o parâmetro de perturbação $g_{a\gamma\gamma}$ referente ao acoplamento com o áxion.

O problema apresenta simetria por uma translação ao longo do eixo z . Além disso, estamos interessados em ondas que se propagam na direção z . Dessa forma, é razoável supor que os campos elétrico e magnético têm inicialmente a seguinte forma:

$$\vec{E}(x, y, z) = \text{Re}[\vec{E}^{(0)}(x, y) \exp(i(k_z z - \omega t))] + O(g_{a\gamma\gamma}), \quad (54)$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \text{Re}[\vec{B}^{(0)}(x, y) \exp(i(k_z z - \omega t))] + O(g_{a\gamma\gamma}). \quad (55)$$

, onde utilizamos a abordagem complexa, absorvemos as fases dos campos nas amplitudes complexas $\vec{E}^{(0)}$ e $\vec{B}^{(0)}$. Como não estamos supondo que haja cargas ou correntes no interior do guia, os campos elétrico e magnético obedecem às equações de Maxwell originais na ausência de fontes.

Utilizando as leis de Ampère e Faraday, obtemos as seguintes expressões:

$$\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} - ik_z E_y^{(0)} = i\omega B_x^{(0)}, \quad (56)$$

$$ik_z E_x^{(0)} - \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial x} = i\omega B_y^{(0)}, \quad (57)$$

$$\frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial y} = i\omega B_z^{(0)}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial y} - ik_z B_y^{(0)} = -i\omega E_x^{(0)}, \quad (59)$$

$$ik_z B_x^{(0)} - \frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial x} = -i\omega E_y^{(0)}, \quad (60)$$

$$\frac{\partial B_y^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial B_x^{(0)}}{\partial y} = -i\omega E_z^{(0)}. \quad (61)$$

Através de algumas manipulações das expressões acima, obtemos as seguintes expressões:

$$E_x^{(0)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial y} \right) \quad (62)$$

$$E_y^{(0)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left(-\omega \frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial x} + k_z \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} \right) \quad (63)$$

$$B_x^{(0)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial x} - \omega \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial y} \right) \quad (64)$$

$$B_y^{(0)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left(\omega \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial x} + k_z \frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial y} \right) \quad (65)$$

Podemos inserir tais expressões nas equações de Maxwell que envolvem o divergente dos campos e obtemos duas equações diferenciais que não estão mais acopladas: uma delas para a componente longitudinal do campo elétrico (E_z) e outra para a componente longitudinal do campo magnético (B_z). São elas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 - k_z^2 \right) E_z^{(0)} = 0, \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 - k_z^2 \right) B_z^{(0)} = 0. \quad (67)$$

Tais equações diferenciais podem ser facilmente resolvidas por separação de variáveis. Aqui podemos definir dois tipos diferentes de ondas que podem propagar-se no interior de um guia de ondas: temos os modos transversais magnéticos (TM), que não têm componente de campo magnético na direção longitudinal ($B_z = 0$), e os modos transversais elétricos (TE), que não têm componente de campo elétrico na direção longitudinal ($E_z = 0$). Consideraremos aqui somente os modos TM.

Estamos lidando com um guia de ondas retangular no qual as ondas propagam-se no modo TM na direção z . Dessa forma, nosso problema restringe-se a resolver a equação diferencial para E_z e aplicar as condições de contorno exigidas pela eletrodinâmica clássica. Quando fazemos isso, obtemos os seguintes campos no interior do guia da esquerda, ou seja, na região

($0 < x < L_x$ e $0 < y < L_y$):

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) = & [E_x^{(0)}(x, y)\hat{x} + E_y^{(0)}(x, y)\hat{y}] \text{sen}(k_z z - \omega t) \\ & + E_z^{(0)}(x, y)\hat{z} \cos(k_z z - \omega t) + \mathcal{O}(g_{a\gamma\gamma}),\end{aligned}\quad (68)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = [B_x^{(0)}(x, y)\hat{x} + B_y^{(0)}(x, y)\hat{y}] \text{sen}(k_z z - \omega t) + \mathcal{O}(g_{a\gamma\gamma}), \quad (69)$$

onde a amplitude de cada componente é dada por:

$$E_x^{(0)}(x, y) = \frac{k_x k_z E_{0z}}{k_z^2 - \omega^2} \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y), \quad (70)$$

$$E_y^{(0)}(x, y) = \frac{k_y k_z E_{0z}}{k_z^2 - \omega^2} \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y), \quad (71)$$

$$E_z^{(0)}(x, y) = E_{0z} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y), \quad (72)$$

$$B_x^{(0)}(x, y) = \frac{\omega k_y E_{0z}}{k_z^2 - \omega^2} \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y), \quad (73)$$

$$B_y^{(0)}(x, y) = \frac{\omega k_x E_{0z}}{k_z^2 - \omega^2} \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y). \quad (74)$$

Nessas expressões E_{0z} representa a amplitude inicial da componente z do campo elétrico.

As condições de contorno satisfeitas por tais campos elétrico e magnético são: (i) as componentes do campo elétrico tangentes à cada parede do guia devem se anular nelas e (ii) a componente do campo magnético normal a cada parede também deve zerar nelas. ou seja, devemos ter:

$$E_z(0, y, z, t) = 0, \quad (75)$$

$$E_z(L_x, y, z, t) = 0, \quad (76)$$

$$E_z(x, 0, z, t) = 0, \quad (77)$$

$$E_z(x, L_y, z, t) = 0, \quad (78)$$

$$E_x(x, 0, z, t) = 0, \quad (79)$$

$$E_x(x, L_y, z, t) = 0, \quad (80)$$

$$E_y(0, y, z, t) = 0, \quad (81)$$

$$E_y(L_x, y, z, t) = 0, \quad (82)$$

$$B_x(0, y, z, t) = 0, \quad (83)$$

$$B_x(L_x, y, z, t) = 0, \quad (84)$$

$$B_y(x, 0, z, t) = 0, \quad (85)$$

$$B_y(x, L_y, z, t) = 0. \quad (86)$$

Tais condições de contorno implicam as seguintes imposições sobre as componentes x e y do número de onda:

$$k_x = \frac{n\pi}{L_x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (87)$$

$$k_y = \frac{n'\pi}{L_y}, \quad n' = 1, 2, 3, \dots \quad (88)$$

Na parte externa do guia de ondas da esquerda, o campo eletromagnético inicial é nulo, isso porque o guia de ondas confina as ondas eletromagnéticas em seu interior. Substituindo a solução (72) para a amplitude do campo elétrico na direção z na equação diferencial (66) para tal amplitude, obtemos a relação de dispersão para o campo eletromagnético:

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n'\pi}{L_y}\right)^2 + k_z^2. \quad (89)$$

5.1.2. Potencia fornecida no guia de ondas da esquerda

Utilizando os resultados obtidos na seção anterior, podemos calcular a potência fornecida para o guia de ondas da direita. Começamos calculando o vetor de Poynting, dado pelo produto vetorial entre o campo elétrico e o campo magnético ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$):

$$\begin{aligned} \vec{S} = & -\frac{E_{0z}^2 \omega}{(\omega^2 - k_z^2)} [k_x \sin(2k_x x) \sin^2(k_y y) \sin[2(k_z z - \omega t)]] \hat{x} + \\ & -\frac{E_{0z}^2 \omega}{(\omega^2 - k_z^2)} [k_y (\sin^2(k_x x) \sin(2k_y y) \sin[2(k_z z - \omega t)])] \hat{y} + \\ & \frac{E_{0z}^2 \omega k_z}{(\omega^2 - k_z^2)^2} [k_x^2 \cos^2(k_x x) \sin^2(k_y y) + k_y^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y)] \sin^2(k_z z - \omega t) \hat{z} \end{aligned} \quad (90)$$

Tomando a média temporal da expressão acima, obtemos:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_{0z}^2 \omega k_z}{2(\omega^2 - k_z^2)^2} [k_x^2 \cos^2(k_x x) \sin^2(k_y y) + k_y^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y)] \hat{z} \quad (91)$$

A potência média fornecida é dada pela integral do fluxo da expressão acima através de um elemento $d\vec{a} = dx dy \hat{z}$, ou seja,

$$\langle P_{\text{fornec.}} \rangle = \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{z} = \frac{E_{0z}^2 \omega k_z L_x L_y (k_x^2 + k_y^2)}{8(\omega^2 - k_z^2)^2} \quad (92)$$

Utilizando a relação de dispersão para o fóton, dada pela equação (89), podemos reescrever a expressão acima como:

$$\langle P_{\text{fornec.}} \rangle = \frac{E_{0z}^2 \omega k_z L_x L_y}{8(\omega^2 - k_z^2)} \quad (93)$$

Essa expressão fornece a energia que flui pela seção transversal do guia por unidade de tempo.

5.1.3. Geração do campo axiônico

Após a propagação de ondas TM ser estabelecida no interior do primeiro guia de onda, um campo magnético constante de intensidade B_0 que aponta na direção z é ligado. Vamos supor que a intensidade de tal campo magnético externo é muito maior do que a intensidade do campo magnético da onda eletromagnética que se propagam no guia.

Analisando a equação (48) para a dinâmica do campo axiônico,

$$\nabla^2 a - \partial_t^2 a - m_a^2 a = -\frac{g_{a\gamma\gamma} \vec{E} \cdot \vec{\tilde{B}}}{2}, \quad (94)$$

podemos perceber que o produto escalar entre os campos elétrico e magnético no interior do guia serve de fonte para o campo axiônico. Portanto, um campo axiônico será gerado quando ligarmos o campo magnético. Notemos que, na situação com a qual estamos lidando aqui, o campo magnético que aparece na expressão acima é a sobreposição de dois campos: o campo devido à onda eletromagnética e o campo magnético constante de fundo que inserimos, ou seja,

$$\vec{\tilde{B}} = B_0 \hat{z} + \vec{B}(x, y, z, t). \quad (95)$$

Utilizando o fato de que os campos elétrico e magnético de uma onda TM são ortogonais, o produto escalar entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{\tilde{B}}$ fica

$$\vec{E} \cdot \vec{\tilde{B}} = E_z(x, y, z, t) B_0 = E_{0z} B_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \quad (96)$$

onde usamos (54) e (72) para E_z acima. Temos então

$$\nabla^2 a - \partial_t^2 a - m_a^2 a = -\frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} E_{0z} B_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t). \quad (97)$$

Devido ao fato do guia de ondas ser aberto ao longo do eixo z , podemos supor a seguinte solução para a equação diferencial acima:

$$a(x, y, z, t) = \alpha(x, y) \cos(k_z z - \omega t). \quad (98)$$

Substituindo tal solução na equação diferencial, obtemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 - k_z^2 - m_a^2 \right) \alpha(x, y) = -\frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} E_{0z} B_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y). \quad (99)$$

Devemos resolver essa equação em duas regiões distintas: (i) na região interna ao guia ($0 < x < L_x$ e $0 < y < L_y$), onde devemos satisfazer a equação diferencial como apresentada acima; e (ii) na região externa ao guia ($x < 0$ ou $x > L_x$ ou $y < 0$ ou $y > L_y$), onde devemos satisfazer a versão homogênea da equação diferencial anterior porque $E_{0z} = 0$ nessa região.

A solução no interior do guia é facilmente obtida, sendo o resultado dado por:

$$a(x, y, z, t) = \frac{g_{a\gamma\gamma} E_{0z} B_0}{2m_a^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t), \quad (100)$$

onde fizemos uso de (89) para simplificar a expressão final. Na região externa ao guia, temos uma combinação de ondas planas como solução geral da equação diferencial homogênea, mas ao impor a continuidade do campo e de suas derivadas nas paredes do guia verificamos que a solução para o campo axiônico também é dada pela Equação (100) na região externa ao guia.

Utilizando a expressão para o campo axiônico na equação diferencial (97) obtemos a relação de dispersão para o áxion:

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m_a^2 = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n'\pi}{L_y}\right)^2 + k_z^2 + m_a^2. \quad (101)$$

Vemos que sua consistência com a relação de dispersão (89) para o campo eletromagnético exige que $m_a^2 \ll \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n'\pi}{L_y}\right)^2 + k_z^2$. A necessidade dessa consideração surge ao assumirmos que a frequência do campo axiônico é idêntica à frequência da onda eletromagnética que o origina quando em interação com o campo magnético externo ($\vec{B}_0$). Fisicamente, isso só pode ser satisfeito de modo aproximado ao desconsiderarmos as trocas de momento e energia com o campo magnético externo no processo de conversão entre onda eletromagnética e campo axiônico.

Por fim, o campo axiônico (100) atravessa todas as paredes do guia de ondas da esquerda na Figura 2 por não estar sujeito às mesmas condições de contorno que o campo eletromagnético, e assim ele penetra no guia de ondas da direita. Em tal região, o campo axiônico interage com o campo magnético externo (presente também neste segundo guia) e é convertido novamente em campo eletromagnético.

Vamos agora descrever a onda eletromagnética gerada pela interação do campo axiônico com o campo magnético presente no guia de ondas da direita.

5.1.4. Geração de ondas eletromagnéticas no segundo guia de ondas

Podemos utilizar aqui a primeira ordem de perturbação para o campo eletromagnético para determinar qual é o campo gerado no segundo guia. Tais campos serão denotados com o sobrescrito (1).

As equações de Maxwell na primeira ordem de perturbação na forma vetorial são dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{(1)} = \rho_a, \quad (102)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(1)} = 0, \quad (103)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{(1)} = -\frac{\partial \vec{B}^{(1)}}{\partial t}, \quad (104)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(1)} = \vec{J}_a + \frac{\partial \vec{E}^{(1)}}{\partial t}, \quad (105)$$

onde identificamos os termos que envolvem o campo axiônico como fontes ρ_a e $\vec{J}_a$ para ondas eletromagnéticas no interior do guia de ondas da direita, sendo suas expressões dadas por (40) e (41), respectivamente.

Utilizando o campo magnético de fundo no segundo guia ($B_0 \hat{z}$) e o campo axiônico gerado em todo espaço pelo primeiro guia, dado pela equação (100), podemos calcular os termos que servem de fonte para as ondas eletromagnéticas no segundo guia. Utilizando as equações (40) e (41), obtemos:

$$\rho_a = -\frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} k_z}{2m_a^2} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_z z - \omega t), \quad (106)$$

$$\vec{J}_a = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} \omega}{2m_a^2} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_z z - \omega t) \hat{z}, \quad (107)$$

Por simplicidade de cálculo, utilizaremos a notação complexa para expressar o fator $\text{sen}(k_z z - \omega t)$ como $\text{Re}[-i \exp(k_z z - \omega t)]$.

De forma análoga ao que foi feito para as ondas eletromagnéticas no interior do primeiro guia, podemos supor uma solução do seguinte tipo para as ondas no segundo guia:

$$\vec{E}^{(1)}(x, y, z, t) = \text{Re}[\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}], \quad (108)$$

$$\vec{B}^{(1)}(x, y, z, t) = \text{Re}[\vec{\mathcal{B}}^{(1)}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}], \quad (109)$$

onde $\vec{\mathcal{E}}^{(1)}$ e $\vec{\mathcal{B}}^{(1)}$ são amplitudes complexas e carregam informação sobre a fase de cada campo.

Utilizando tais expressões para os campos elétrico e magnético nas equações de Maxwell que envolvem o rotacional dos campos, obtemos as seguintes relações entre as componentes dos campos elétrico e magnético:

$$\partial_y \mathcal{E}_z^{(1)} - i k_z \mathcal{E}_y^{(1)} = i \omega \mathcal{B}_x^{(1)}, \quad (110)$$

$$i k_z \mathcal{E}_x^{(1)} - \partial_x \mathcal{E}_z^{(1)} = i \omega \mathcal{B}_y^{(1)}, \quad (111)$$

$$\partial_x \mathcal{E}_y^{(1)} - \partial_y \mathcal{E}_x^{(1)} = i\omega \mathcal{B}_z^{(1)}, \quad (112)$$

$$\partial_y \mathcal{B}_z^{(1)} - ik_z \mathcal{B}_y^{(1)} = J_{ax} - i\omega \mathcal{E}_x^{(1)}, \quad (113)$$

$$ik_z \mathcal{B}_x^{(1)} - \partial_x \mathcal{B}_z^{(1)} = J_{ay} - i\omega \mathcal{E}_y^{(1)}, \quad (114)$$

$$\partial_x \mathcal{B}_y^{(1)} - \partial_y \mathcal{B}_x^{(1)} = J_{az} - i\omega \mathcal{E}_z^{(1)}. \quad (115)$$

Podemos reescrever tais relações como:

$$\mathcal{B}_x^{(1)} = -\frac{i}{\omega} \partial_y \mathcal{E}_z^{(1)} - \frac{k_z}{\omega} \mathcal{E}_y^{(1)}, \quad (116)$$

$$\mathcal{B}_y^{(1)} = \frac{k_z}{\omega} \mathcal{E}_x^{(1)} + \frac{i}{\omega} \partial_x \mathcal{E}_z^{(1)}, \quad (117)$$

$$\mathcal{E}_x^{(1)} = \frac{i}{\omega} \partial_y \mathcal{B}_z^{(1)} + \frac{k_z}{\omega} \mathcal{B}_y^{(1)} - \frac{i}{\omega} J_{ax}, \quad (118)$$

$$\mathcal{E}_y^{(1)} = -\frac{k_z}{\omega} \mathcal{B}_x^{(1)} - \frac{i}{\omega} \partial_x \mathcal{B}_z^{(1)} - \frac{i}{\omega} J_{ay}. \quad (119)$$

Utilizando as relações acima podemos escrever as componentes x e y dos campos $\vec{\mathcal{E}}^{(1)}$ e $\vec{\mathcal{B}}^{(1)}$ em função das derivadas das componentes z dos mesmos campos. Ao fazer isso obtemos:

$$\mathcal{B}_x^{(1)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left[k_z \left(\partial_x \mathcal{B}_z^{(1)} + J_{ay} \right) - \omega \partial_y \mathcal{E}_z^{(1)} \right], \quad (120)$$

$$\mathcal{B}_y^{(1)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left[k_z \left(\partial_y \mathcal{B}_z^{(1)} - J_{ax} \right) + \omega \partial_x \mathcal{E}_z^{(1)} \right], \quad (121)$$

$$\mathcal{E}_x^{(1)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left[\omega \left(\partial_y \mathcal{B}_z^{(1)} - J_{ax} \right) + k_z \partial_x \mathcal{E}_z^{(1)} \right], \quad (122)$$

$$\mathcal{E}_y^{(1)} = \frac{i}{\omega^2 - k_z^2} \left[k_z \partial_y \mathcal{E}_z^{(1)} - \omega \left(\partial_x \mathcal{B}_z^{(1)} + J_{ay} \right) \right]. \quad (123)$$

Podemos utilizar essas quatro expressões nas equações de Maxwell para o divergente dos campos, equações (102) e (102), para obter as equações diferenciais que devem ser satisfeita pelas componentes z dos campos elétrico e magnético. Ao fazer isso obtemos:

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \left(\omega^2 - k_z^2 \right) \right] \mathcal{E}_z^{(1)} = \frac{\omega}{k_z} (\partial_x J_{ax} + \partial_y J_{ay}) - \frac{i(\omega^2 - k_z^2)}{k_z} \rho_a, \quad (124)$$

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \left(\omega^2 - k_z^2 \right) \right] \mathcal{B}_z^{(1)} = (\partial_y J_{ax} - \partial_x J_{ay}). \quad (125)$$

Utilizando agora as equações (106) e (107) que fornecem os termos de fonte para o campo eletromagnético na equação acima, obtemos:

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \left(\omega^2 - k_z^2 \right) \right] \mathcal{E}_z^{(1)} = \frac{g_{a\gamma\gamma} B_0^2 E_{0z} (\omega^2 - k_z^2)}{2m_a^2} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y), \quad (126)$$

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \left(\omega^2 - k_z^2 \right) \right] \mathcal{B}_z^{(1)} = 0. \quad (127)$$

A respeito da equação (127), como não há fontes para a componente longitudinal do campo magnético no interior do segundo guia, e como estamos supondo que inicialmente o campo é nulo nesse guia, devemos ter um campo nulo no segundo guia para todos instantes de tempo:

$$\mathcal{B}_z^{(1)}(x, y) = 0. \quad (128)$$

Finalmente, a equação (126) para a componente longitudinal do campo elétrico no segundo guia é resolvida sem dificuldades. Após simplificação usando a relação de dispersão para o áxion em (101), sua solução é dada por:

$$\mathcal{E}_z^{(1)} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} (\omega^2 - k_z^2)}{2m_a^4} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y). \quad (129)$$

Levando em conta o fator para propagação ao longo do eixo z por meio de (108), a componente longitudinal acima torna-se

$$E_z^{(1)} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} (\omega^2 - k_z^2)}{2m_a^4} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) \cos(k_z z - \omega t). \quad (130)$$

Utilizando tal resultado nas expressões (118) e (119) para as demais componentes do campo elétrico e para as componentes transversais do campo magnético (116) e (117), e também levando em conta o fator de propagação ao longo do eixo z por meio de (108) e (109), obtemos:

$$E_x^{(1)} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} k_z k_x}{2m_a^4} \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_z z - \omega t), \quad (131)$$

$$E_y^{(1)} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} k_z k_y}{2m_a^4} \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y) \text{sen}(k_z z - \omega t), \quad (132)$$

$$B_x^{(1)} = -\frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} \omega k_y}{2m_a^4} \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y) \text{sen}(k_z z - \omega t), \quad (133)$$

$$B_y^{(1)} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 B_0^2 E_{0z} \omega k_x}{2m_a^4} \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_z z - \omega t). \quad (134)$$

5.1.5. Potencia Transmitida no guia de ondas da direita

Utilizando os resultados obtidos nas seções anteriores, é possível calcular a potência transmitida para o segundo guia de ondas.

Começamos calculando o vetor de Poynting, dado pelo produto vetorial entre o campo elétrico

e o campo magnético $\vec{S} = \vec{E}^{(1)} \times \vec{B}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\vec{S} = & -\frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 E_{0z}^2 \omega}{4m_a^8} \left[\frac{k_x(\omega^2 - k_z^2)}{4} \text{sen}^2(k_x x) \text{sen}(2k_y y) \text{sen}[2(k_z z - \omega t)] \right] \hat{x} + \\ & -\frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 E_{0z}^2 \omega}{4m_a^8} \left[\frac{k_y(\omega^2 - k_z^2)}{4} \text{sen}(2k_x x) \text{sen}^2(k_y y) \text{sen}[2(k_z z - \omega t)] \right] \hat{y} + \\ & + \frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 E_{0z}^2 \omega k_z}{4m_a^8} \left[k_x^2 \cos^2(k_x x) \text{sen}^2(k_y y) + k_y^2 \text{sen}^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \text{sen}^2(k_z z - \omega t) \right] \hat{z}.\end{aligned}\quad (135)$$

Tomando a média temporal da expressão acima, obtemos:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 E_{0z}^2 \omega k_z}{8m_a^8} \left[k_x^2 \cos^2(k_x x) \text{sen}^2(k_y y) + k_y^2 \text{sen}^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \right] \hat{z}. \quad (136)$$

A potência média transmitida para o segundo guia é dada pela integral de fluxo da expressão acima através do elemento $d\vec{a} = dx dy \hat{z}$, ou seja,

$$\langle P_{\text{transm.}} \rangle = \int_{L_x}^{2L_x} dx \int_0^{L_y} dy \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{z} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 E_{0z}^2 \omega k_z L_x L_y (k_x^2 + k_y^2)}{32m_a^8}. \quad (137)$$

5.1.6. Sensibilidade aos parâmetros associados ao áxion

Agora calculamos a razão entre a potência média transmitida no guia de ondas da direita, dada por (137), e a potência média inicialmente fornecida no guia de ondas da esquerda, dada pela equação (93). Isso nos fornecerá a porcentagem de energia que atravessou o guia da esquerda:

$$\frac{\langle P_{\text{transm.}} \rangle}{\langle P_{\text{fornec.}} \rangle} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 (k_x^2 + k_y^2) (\omega^2 - k_z^2)}{4m_a^8} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4}{4m_a^8} \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{n'^2}{L_y^2} \right)^2 \pi^4 \quad (138)$$

onde usamos as expressões (87) e (88) para reescrever k_x e k_y em termos das dimensões L_x e L_y do guia e dos números n e n' que identificam o modo $\text{TM}_{nn'}$.

Agora vamos estimar a sensibilidade teórica para um experimento desse tipo. Guias de onda típicos admitem ondas eletromagnéticas com frequência da ordem de 10 GHz. Na nossa análise, a hipótese de que conversões entre onda eletromagnética e campo axiônico preservam ambos com a mesma frequência ω só é válida para $m_a \ll \omega = 10 \text{ GHz} \sim 10^{-5} \text{ eV}$. Então, nossa proposta de experimento acessa áxion com

$$m_a \lesssim 10^{-7} \text{ eV}. \quad (139)$$

Consideremos que o modo inserido no primeiro guia seja o $n = 1$ $n' = 2$ e que a dimensão das paredes do guia seja $L_x = L_y = 1 \text{ cm} \sim 5 \times 10^4 \text{ eV}^{-1}$. Sistemas de alta detecção de sinais em

guias de onda são sensíveis a sinais transmitidos com potência na ordem de fentowatts (10^{-15} W) para sinais iniciais com potência na ordem de miliwatts (10^{-3} W), de modo que a razão no lado esquerdo da equação acima é da ordem de 10^{-18} . Por fim, considerando um campo magnético típico em experimentos na busca de áxions na ordem de $B_0 = 10 \text{ T} \sim 2 \times 10^5 \text{ eV}^2$, obtemos a seguinte estimativa para a constante de acoplamento

$$g_{a\gamma\gamma} \sim 10^{-19} \text{ eV}^{-1} = 10^{-10} \text{ GeV}^{-1}. \quad (140)$$

Tal resultado mostra que um experimento com guias de onda poderia explorar uma faixa de valores de massa e constante de acoplamento compatível com a faixa explorada por outros experimentos que buscam detectar o áxion, ilustrados na Figura 1. Utilizando outros modos para a onda TM no primeiro guia de ondas, outros valores para o campo magnético e outros valores para a distância entre as paredes do guia, tal experimento pode explorar uma faixa diferente de valores que possivelmente não foi explorada por nenhum experimento.

6. CONCLUSÕES

Com o objetivo de motivar experimentos que possam detectar indiretamente a presença do áxion, através das modificações que o campo axiônico gera no eletromagnetismo, estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas na eletrodinâmica axiônica. Nosso interesse principal foi determinar as ondas eletromagnéticas geradas em um guia de ondas quando ondas do modo transversal magnético (TM) são inseridas em outro guia de ondas.

Ao investigar a propagação de modos TM de ondas eletromagnéticas em um guia de ondas retangular, consideramos que, após o início da propagação, um campo magnético constante foi ativado, permitindo a conversão do campo eletromagnético em um campo axiônico. Determinamos o campo axiônico gerado por essas ondas e, em seguida, calculamos as ondas eletromagnéticas resultantes deste campo axiônico em um segundo guia de ondas, onde também havia um campo magnético constante apontando na direção z . Por fim calculamos a potência fornecida ao primeiro guia de ondas e a potência transmitida para o segundo guia de ondas e calculamos a razão entre essas duas. O resultado obtido foi:

$$\frac{\langle P_{\text{transm.}} \rangle}{\langle P_{\text{fornec.}} \rangle} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4}{4m_a^8} \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{n'^2}{L_y^2} \right)^2 \pi^4 \quad (141)$$

A análise dos resultados obtidos revelou que a potência transmitida por unidade de comprimento no segundo guia de ondas é diretamente proporcional à quarta potência da constante de

acoplamento entre o áxion e o fóton e do campo magnético externo aplicado e inversamente proporcional à oitava potência da massa do áxion.

Como os aparelhos experimentais conseguem medir potências com uma certa precisão, a ausência de sinais de áxion no segundo guia exclui uma faixa de valores para a constante de acoplamento em relação a uma massa específica de áxion. Exemplificamos a partir da situação experimental discutida anteriormente, assumindo a razão entre potência transmitida por potência inserida na ordem de 10^{-18} e o campo externo da ordem de 10 T. Nesse caso, identificamos que tal experimento acessa valores da constante de acoplamento na ordem de $10^{-10} \text{ GeV}^{-1}$ caso a massa do áxion esteja na faixa de 10^{-7} eV .

Vale destacar que, para sermos mais realistas, deveríamos ter considerado fenômenos de dissipação nas paredes do guia de ondas e incluído o fator de qualidade (Q) do guia. A ausência dessa consideração neste trabalho dificulta a aplicação direta dos resultados na análise de experimentos reais.

Os resultados obtidos neste trabalho, utilizando teoria clássica de campos, são promissores, mas também apresentam limitações. Não é possível, utilizando apenas teoria clássica de campos, determinar a probabilidade de conversão de fótons em áxions. Para uma análise mais rigorosa, seria necessário utilizar teoria quântica de campos, dado que o campo axiônico é de natureza quântica.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] K. Garrett and G. Dūda, “Dark matter: A primer,” *Adv. Astron.* **2011**, 968283 (2011).
- [2] M. E. Tobar, B. T. McAllister, and M. Goryachev, “Poynting vector controversy in axion modified electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **105**, 045009 (2022).
- [3] P. Sikivie, “Invisible axion search methods,” *Rev. Mod. Phys.* **93**, 015004 (2021).
- [4] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd ed. (Wiley-VCH, 2008).
- [5] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 3rd ed. (Cambridge University Press, 2020).
- [6] L. D. Landau, “On the conservation laws for weak interactions,” *Nucl. Phys.* **3**, 127 (1957).
- [7] J. E. Kim, “Weak-interaction singlet and Strong CP invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **43**, 103 (1979).
- [8] D. J. E. Marsh, “Axion cosmology,” *Phys. Rep.* **643**, 1 (2016).
- [9] CAST Collaboration, “New CAST limit on the axion-photon interaction,” *Nature Phys.* **13** (2017).
- [10] D. J. E. Marsh, “SQUID-based microwave cavity search for dark-matter axions,” *Phys. Rev. Lett.*

104, 041301 (2010).

[11] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica* (Pearson, 2011).