



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Alocação Ótima de PMUs em Sistemas de Potência Utilizando a Meta-heurística Symbiotic Organism Search

Gabriel Fernandes Del Rio Hamacek

João Monlevade, MG

2025

Gabriel Fernandes Del Rio Hamacek

**Alocação Ótima de PMUs em Sistemas de
Potência Utilizando a Meta-heurística Symbiotic
Organism Search**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Wilingthon Guerra Zvietcovich

Universidade Federal de Ouro Preto

João Monlevade

2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

H198a Hamacek, Gabriel Fernandes Del Rio.

Alocação ótima de PMUs em sistemas de potência utilizando a meta-heurística Symbiotic Organism Search. [manuscrito] / Gabriel Fernandes Del Rio Hamacek. - 2025.

55 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Wilingthon Guerra Zvietcovich.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia Elétrica .

1. Algoritmos. 2. Energia elétrica - Distribuição. 3. Energia elétrica - Transmissão. 4. Medidores elétricos. 5. Redes elétricas. 6. Sistemas de energia elétrica. I. Zvietcovich, Wilingthon Guerra. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 621.31

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6/2431



FOLHA DE APROVAÇÃO

Gabriel Fernandes Del Rio Hamacek

Alocação Ótima de PMUs em Sistemas de Potência Utilizando a Meta-heurística Symbiotic Organism Search

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Eletricista

Aprovada em 03 de Outubro de 2025

Conforme previsto no § 3º do artigo 38º da Resolução Coee nº 03/2025, a defesa da monografia foi substituída por publicação de artigo em evento científico.

De acordo

Wilingthon Guerra Zvietcovich, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 03/09/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Wilingthon Guerra Zvietcovich, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/10/2025, às 22:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0990046** e o código CRC **CA649F79**.

Aos meus queridos pais, familiares e amigos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por toda iluminação em momentos de dificuldade e luta.

Aos meus pais, por nunca mediram esforços para me ver feliz e realizado. A minha irmã, por todo o companheirismo. Aos meus avós, por me levarem sempre a acreditar no meu melhor. A todos os familiares e amigos que estiveram comigo durante esta caminhada.

A República São Jorge, por ser uma verdadeira escola de vida. Levarei vocês para sempre. A Amanda por sempre estar presente em todos os momentos, bons e ruins.

“É justamente a possibilidade de realizar um sonho que torna a vida interessante.”

Paulo Coelho.

Resumo

Este trabalho implementa a aplicação da metaheurística Symbiotic Organism Search (SOS) para resolver o problema de alocação ótima de Unidades de Medição Sincrofasorial (PMUs) em sistemas elétricos de potência (SEP). As PMUs são dispositivos essenciais para o monitoramento em tempo real das grandezas elétricas, auxiliando nas tarefas de uma operação segura e eficiente das redes elétricas. O problema é modelado como um problema de cobertura de conjuntos, com o objetivo de minimizar o número de PMUs instaladas, garantindo a observabilidade completa do SEP. O algoritmo SOS simula interações simbióticas naturais utilizando operadores como o mutualismo, o comensalismo e o parasitismo, com o intuito de visitar o espaço de soluções de forma robusta e eficiente. A metodologia proposta inclui a construção de uma matriz de observabilidade e uma matriz de distâncias entre barras as quais auxiliarão a metodologia proposta. A validação da metodologia foi realizada em sistemas testes do IEEE (14, 30, 57 e 118 barras), em uma rede de distribuição de energia elétrica e em redes reais (Peru-131 e Colômbia-93). Os resultados demonstram que o SOS é capaz de encontrar soluções de boa qualidade, comparáveis às outras abordagens da literatura, com destaque para sua simplicidade de implementação e diversidade de soluções obtidas.

Palavras-chave: Alocação, SOS, Otimização, PMU, Metaheurística.

Abstract

This work implements the application of the Symbiotic Organism Search (SOS) metaheuristic to solve the optimal allocation problem of Phasor Measurement Units (PMUs) in electric power systems (EPS). PMUs are essential devices for real-time monitoring of electrical quantities, supporting the tasks of safe and efficient operation of power networks. The problem is modeled as a set covering problem, aiming to minimize the number of installed PMUs while ensuring complete observability of the power system. The SOS algorithm simulates natural symbiotic interactions using operators such as mutualism, commensalism, and parasitism, in order to explore the solution space in a robust and efficient manner. The proposed methodology includes the construction of an observability matrix and a distance matrix between buses, which will support the proposed approach. The validation of the methodology was carried out on IEEE test systems (14, 30, 57, and 118 buses), on a power distribution network, and on real networks (Peru-131 and Colombia-93). The results demonstrate that SOS is capable of finding high-quality solutions, comparable to other approaches in the literature, with emphasis on its ease of implementation and the diversity of solutions obtained.

Keywords: PMU allocation, SOS, optimization, metaheuristics, power systems.

Lista de figuras

Figura 1 – Demonstração de uma cidade com quatro regiões	19
Figura 2 – Instalação do posto na região 1, atendendo a 2, 3 e 4	19
Figura 3 – Instalação do posto na região 3, atendendo a 1, 2 e 4	20
Figura 4 – Instalação do posto nas regiões 2 e 4, atendendo a 1 e 3	20
Figura 5 – Rede esquemática.	26
Figura 6 – Sistema com 3 barras.	27
Figura 7 – Sistema com 7 barras.	29
Figura 8 – Pseudocódigo da metaheurística SOS	36
Figura 9 – Número de PMUs versus soluções visitadas para os sistemas avaliados.	50

Lista de tabelas

Tabela 1	– Entrada e saída da para a rede da Figura 6	28
Tabela 2	– Representação de uma solução X	38
Tabela 3	– Forma simplificada.	38
Tabela 4	– Representação de duas soluções simbióticas X_i e X_j	40
Tabela 5	– Forma simplificada.	40
Tabela 6	– Parâmetros da Metodologia	48
Tabela 7	– Resultados obtidos para diferentes sistemas de potência	49
Tabela 8	– Quantidade de Soluções Encontradas para cada Sistema	49
Tabela 9	– Comparação dos resultados com outras metodologias encontradas na literatura	50

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Motivação e Justificativa	12
1.2	Objetivos	13
1.3	Estrutura do trabalho	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3	MODELAGEM DO PROBLEMA	18
3.1	Problema de Recobrimento	18
3.2	Analogia do problema	18
3.3	Formulação Matemática do Problema	20
3.3.1	Vetor de Existência	21
3.3.2	Vetor de Custo	21
3.3.3	Função Objetivo	21
3.3.4	Restrições	22
3.3.5	Exemplo Básico	22
3.4	Formulação Matemática do Problema de Alocação de PMUs	24
3.4.1	Vetor de Existência	25
3.4.2	Vetor de Custo	25
3.4.3	Função Objetivo	25
3.4.4	Restrições do Problema	26
3.5	Exemplos de Redes de Energia Elétrica	27
3.5.1	Sistema de 3 barras	27
3.5.2	Sistema de 7 barras	29
3.6	Construção da Matriz de Densidade através das matrizes auxiliares	31
3.7	Comparação entre os métodos de construção da Matriz de Densidade	32
4	SOLUÇÃO DO PROBLEMA	34
4.1	Metodologia Aplicada	34
4.1.1	Symbiotic Organism Search	34
4.1.1.1	Fase de Mutualismo	34
4.1.1.2	Fase de Comensalismo	35
4.1.1.3	Fase de Parasitismo	35
4.1.1.4	Pseudocódigo do Algoritmo	36
4.1.1.5	Parâmetros do Algoritmo	37
4.1.2	Função Objetivo para SOS	38

4.1.3	Matriz Distância entre Barras	39
4.2	Aplicação da Técnica Meta-Heurística SOS ao Problema de Alocação de PMUs	40
4.2.1	Etapa 1 - Definição dos Parâmetros e Construção da População Inicial . . .	41
4.2.2	Etapa 2 - Aplicação de Operadores	41
4.2.2.1	Etapa de Mutualismo	42
4.2.2.2	Etapa de Comensalismo	44
4.2.2.3	Etapa de Parasitismo	45
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	47
6	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	53

1 Introdução

O Sistema Elétrico de Potência (SEP) tem passado por uma evolução constante em todo o mundo, com o objetivo de atender de forma mais eficiente às crescentes demandas dos consumidores de energia elétrica e as exigências das normas. Esse avanço é impulsionado pela melhoria na qualidade de vida proporcionada pelo acesso à energia.

Com o aumento do número de usuários, o sistema torna-se progressivamente mais complexo, exigindo garantias contínuas quanto à sua qualidade e à sua capacidade de operar de forma ininterrupta (SHUKLA; SINGH, 2020). Esses aspectos são essenciais para promover melhorias constantes na segurança e na confiabilidade da rede elétrica. Tais questões são frequentemente debatidas entre as agências reguladoras e as concessionárias de energia elétrica, com o intuito de atender às exigências do setor.

No contexto brasileiro, a crescente complexidade do setor elétrico impõe desafios constantes à garantia da qualidade do fornecimento de energia elétrica. Entre os principais fatores que contribuem para esse cenário estão o aumento contínuo das cargas, a presença de cargas não lineares, as falhas elétricas e os desligamentos intempestivos, entre outros.

Com o objetivo de enfrentar essas dificuldades, diversos dispositivos são conectados ao longo da rede elétrica para atender normas de Qualidade da Energia Elétrica (QEE) fornecida. Esses equipamentos permitem o monitoramento e controle contínuos do sistema elétrico, registrando parâmetros fundamentais, como níveis de tensão e corrente, oscilações e distorções harmônicas, indicadores essenciais do desempenho do SEP (MEHL, 2012). A partir desses dados, é possível calcular outros parâmetros relevantes, como as perdas de energia, o que contribui para uma operação e manutenção mais eficiente, com base em informações precisas sobre a qualidade do sistema.

No início da década de 1980, iniciou-se o desenvolvimento e a comercialização dos dispositivos de monitoramento do SEP, conhecidos como *Phasor Measurement Units* (PMUs), ou unidades de medição de fasor. Esses dispositivos têm como função principal a supervisão e a análise em tempo real do sistema elétrico, possibilitando um controle mais preciso e eficiente (REE et al., 2010). As PMUs são normalmente instaladas em pontos estratégicos do SEP, especialmente em barramentos, a fim de garantir um monitoramento adequado.

Entretanto, para que a operação do sistema ocorra com sucesso, é fundamental a utilização de um número adequado de PMUs, assegurando tanto a cobertura quanto a precisão dos dados coletados. Surge, então, uma problemática e, ao mesmo tempo, uma motivação: encontrar uma forma de alocar as PMUs de maneira ótima em uma rede elétrica, utilizando a menor quantidade possível de dispositivos, de modo a reduzir os

custos operacionais sem comprometer a qualidade da supervisão.

Diante dessa contexto, o presente trabalho propõe a aplicação da técnica de alocação ótima de PMUs denominada *Symbiotic Organism Search* (SOS), devido à sua capacidade de identificar, de forma eficiente, as localizações mais relevantes dentro do sistema como um todo. Essa meta-heurística, inspirada nas interações simbióticas observadas na natureza, já demonstrou resultados satisfatórios em diferentes áreas do conhecimento, como otimização de processos industriais, planejamento de rotas, alocação de recursos e resolução de problemas complexos de engenharia, o que evidencia seu potencial para ser adaptada à alocação ótima de PMUs no contexto de sistemas elétricos.

1.1 Motivação e Justificativa

A escolha do tema deste trabalho foi guiada pelo interesse em aprofundar os conhecimentos na área de SEP e, em especial, nos mecanismos que asseguram sua operação estável e eficiente. Durante a formação acadêmica, as disciplinas que abordaram a estabilidade e segurança do sistema despertaram especial interesse, evidenciando o papel das ferramentas de monitoramento na melhoria do desempenho da rede elétrica. Nesse contexto, os PMUs chamaram a atenção por possibilitarem medições sincronizadas e de elevada precisão, características essenciais para embasar a tomada de decisão.

Outro aspecto que contribuiu para a definição do tema foi a oportunidade de integrar conhecimentos da engenharia elétrica com técnicas de otimização baseadas em inteligência computacional. A aplicação de metaheurísticas, como o método SOS, oferece novas perspectivas para tratar problemas complexos de posicionamento de dispositivos em redes elétricas. A possibilidade de explorar essa abordagem, unindo teoria e prática em um campo de estudo atual, constituiu um estímulo adicional para o desenvolvimento desta pesquisa.

A operação e o planejamento de sistemas elétricos de potência requerem estimativas consistentes dos parâmetros elétricos, uma vez que tais informações são a base para análises e decisões técnicas. O acompanhamento em tempo real dessas grandezas é decisivo para detectar situações críticas, identificar falhas e orientar ações que assegurem a continuidade e a estabilidade do fornecimento de energia. Nesse cenário, as PMUs se apresentam como instrumentos estratégicos, ao permitirem medições rápidas, sincronizadas e confiáveis.

Assim, determinar a alocação mais adequada das PMUs torna-se um desafio relevante, pois uma escolha mal planejada pode elevar custos ou comprometer a observabilidade do sistema. O emprego do método SOS, por sua vez, representa uma alternativa promissora para enfrentar esse problema, graças à sua flexibilidade e capacidade de explorar soluções eficientes em cenários complexos. A investigação aqui proposta, portanto, justifica-se pela contribuição potencial tanto para a literatura quanto para a prática da engenharia elétrica,

fornecendo subsídios para a modernização e o fortalecimento do setor energético.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é implementar a técnica de otimização baseada na meta-heurística *Symbiotic Organism Search* (SOS) para resolver o problema de alocação ótima de PMUs em SEP.

Como objetivos específicos, destacam-se:

1. Realizar um levantamento dos estudos mais relevantes na literatura recente sobre a alocação de PMUs, buscando evidenciar os avanços e tendências da área;
2. Apresentar os fundamentos teóricos relacionados às PMUs e à metodologia ACO;
3. Formular matematicamente o problema de alocação de PMUs;
4. E, por fim, implementar computacionalmente o modelo proposto, avaliando seu desempenho por meio de testes em diferentes redes elétricas e comparando os resultados obtidos com os dados reportados na literatura.

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos, de forma a proporcionar uma compreensão progressiva sobre o problema da alocação de medidores em SEP, desde sua contextualização até a apresentação dos resultados obtidos.

No primeiro capítulo, é apresentado a **Introdução** com a motivação e a justificativa para o desenvolvimento da pesquisa, delineando os objetivos do estudo, sua relevância acadêmica e aplicabilidade no contexto da engenharia elétrica e do monitoramento de redes.

Seguindo, no capítulo 2, **Revisão Bibliográfica**, reúne e analisa os principais estudos recentes relacionados à alocação de PMUs, destacando as abordagens e metodologias utilizadas na literatura especializada.

A terceira seção deste trabalho mostra a **Modelagem do Problema**, que expõe a formulação matemática do problema de alocação de medidores, com foco na minimização dos custos associados à implementação de um sistema de monitoramento da QEE. Também são apresentadas as topologias das redes utilizadas nas simulações.

A **Solução do Problema** é apresentada no capítulo 4, sendo detalhada o desenvolvimento e aplicação da técnica de otimização proposta para resolver o problema deste trabalho. É apresentada a abordagem da meta-heurística SOS.

Para fins conclusivos, os **Resultados e Discussões** no capítulo 5 mostra os resultados obtidos com a aplicação das metodologias propostas, analisando o desempenho dos algoritmos em diferentes cenários de SEPs e avaliando critérios como custo e observabilidade do sistema.

Ao final, o capítulo 6: **Conclusão** apresenta as considerações finais do trabalho, destacando a importância dos resultados obtidos para a área de SEP e sugerindo possíveis direções para pesquisas futuras.

2 Revisão Bibliográfica

A QEE tem se tornado um fator cada vez mais crucial em âmbito global, levando as concessionárias a buscarem excelência nesse atributo. Em resposta a essa crescente demanda, diversos estudos vêm sendo conduzidos com o objetivo de aprofundar a compreensão sobre o tema e identificar soluções viáveis e eficazes para assegurar a QEE fornecida.

Entre as estratégias adotadas pelas empresas para garantir essa qualidade, destacam-se a instalação de bancos de capacitores e reguladores de tensão, os quais atuam diretamente na melhoria dos parâmetros elétricos do sistema. No entanto, para que esses dispositivos sejam alocados de forma eficiente nos barramentos, faz-se necessário o uso de PMUs, que monitoram os parâmetros elétricos da rede e auxiliam a identificar possíveis falhas, possibilitando decisões mais assertivas na tomada de decisão.

Ammer e Renner (2004) enfatizam que o monitoramento das características e tendências da QEE em todo o SEP é uma prática essencial. No entanto, os autores destacam que, devido a limitações econômicas, a implementação desse monitoramento de forma integral ainda não é viável. Diante disso, torna-se fundamental a utilização de técnicas de otimização, que possibilitem um monitoramento eficiente e abrangente da energia elétrica, mesmo com recursos limitados (AMMER; RENNER, 2004).

Olguin (2006) apresenta um estudo voltado ao problema de monitoramento de Variações de Tensão de Curta Duração em sistemas de transmissão. O objetivo do trabalho consiste em resolver um problema de otimização que permita determinar tanto o número mínimo de medidores quanto sua alocação ótima em um SEP, com o intuito de reduzir os custos de investimento e assegurar a observabilidade dos eventos. As restrições do problema de recobrimento são formuladas com base em simulações prévias de faltas em cada barra do sistema, por meio da análise da sensibilidade na detecção das quedas de tensão resultantes. Para a resolução do problema, foi utilizado um algoritmo do tipo Branch & Bound (B&B), seguido pela aplicação de um Algoritmo Genético, com o objetivo de encontrar as melhores soluções que observam os afundamentos de tensão (OLGUIN; VUINOVICH; BOLLEN, 2006).

Leite (2018) realizou um estudo comparativo entre duas técnicas meta-heurísticas inspiradas no comportamento de animais para a implementação de PMUs: o Algoritmo do Vaga-lume e o Algoritmo do Morcego. Ambos os métodos são amplamente utilizados para resolver problemas complexos de otimização. A comparação entre as técnicas foi realizada por meio de diversos experimentos computacionais, considerando diferentes configurações, tais como a dimensionalidade do problema, o tamanho do enxame e o número de avaliações da função objetivo (PAIVA; LEITE; MARCONE, 2018).

Como trabalho de destaque na aplicação de técnicas de otimização para a instalação de medidores em um SEP, Almeida (2023) apresenta uma abordagem híbrida que combina um método meta-heurístico com Redes Neurais, visando aprimorar o monitoramento das tensões e garantir a confiabilidade do fornecimento de energia em operações em tempo real. Nesse estudo, as Redes Neurais são empregadas para o processamento rápido das diversas posições potenciais para alocação dos medidores, enquanto a meta-heurística, denominada *Sistema Imune Artificial*, gera e refina iterativamente soluções para o posicionamento dos dispositivos, equilibrando a exploração de novas alternativas e o aprimoramento das soluções já existentes. A metodologia foi testada em redes de 14, 33, 84 e 119 barramentos, apresentando resultados com baixos índices de desvio padrão, o que evidencia a consistência e a qualidade das alocações obtidas (ALMEIDA et al., 2023).

Martins e Oleskovicz (2022) analisaram o problema de alocação de medidores por meio de programação linear binária, considerando dois objetivos principais: minimizar o número de medidores e maximizar o número de faltas identificáveis, com base em medições de tensão. O problema foi testado em uma rede europeia de média tensão composta por 15 barramentos. Os resultados indicaram que a alocação de um ou dois medidores foi suficiente para identificar cerca de 90% das falhas. A principal contribuição deste estudo reside na identificação das posições ideais para os medidores, que se mantêm efetivas independentemente das variações na topologia da rede, aspecto este de grande relevância para redes de distribuição modernas (MARTINS; OLESKOVICZ, 2022).

Embora as metodologias apresentem variações, há um denominador comum na abordagem desses estudos: a busca por resultados eficientes a um custo reduzido. Recentemente, Alghassab (2024) abordou o problema de alocação ótima de PMUs por meio do algoritmo de otimização baseado na imunidade de rebanho ao coronavírus, que simula estratégias de imunidade coletiva para o combate à pandemia de COVID-19. Esse algoritmo foi adaptado para enfrentar o desafio da observabilidade total de falhas em SEP. Os testes foram realizados em diversos sistemas padrão, com 9, 14, 30 e 2383 barramentos, apresentando resultados que demonstraram a eficácia e robustez do algoritmo quando comparado a técnicas exatas e outras meta-heurísticas, evidenciando seu potencial para a otimização de redes elétricas inteligentes (ALGHASSAB et al., 2024).

Este Trabalho de Conclusão de Curso baseia-se no modelo matemático apresentado em Reis (2007), que apresentou a formulação matemática para o problema de alocação de medidores. E como técnica para resolver o problema foi implementada o SOS, com o intuito de explorar abordagens alternativas para a resolução do problema (REIS, 2007).

Embora o método utilizado neste trabalho seja aplicado principalmente para a alocação de medidores de tensão em SEP, ele apresenta diversas outras aplicações. Rodrigues (2018), por exemplo, empregou a metaheurística SOS para enfrentar o desafio da otimização de problemas de agendamento de fluxos de produção, comuns em ambientes

industriais e de manufatura. Tais problemas envolvem o planejamento do sequenciamento de um conjunto de tarefas em múltiplas máquinas, visando minimizar o tempo total de conclusão, atrasos e outras métricas de desempenho. O método foi testado em vinte instâncias distintas, demonstrando elevada eficiência na obtenção de soluções ótimas. Além disso, o SOS apresenta a vantagem de não requerer ajustes complexos de parâmetros, o que facilita sua aplicação em problemas reais. Dessa forma, o algoritmo revela-se uma ferramenta promissora para a otimização de processos industriais e para o gerenciamento eficaz de recursos (RODRIGUES et al., 2018).

Srivastava e Kalra (2020) demonstraram que o agendamento de tarefas em múltiplas máquinas na computação em nuvem constitui um problema complexo, que requer a otimização de métricas como o tempo de conclusão e o custo operacional. Para enfrentar esse desafio, o estudo propõe o uso do algoritmo SOS, inspirado nas relações simbióticas presentes na natureza. Focado na minimização tanto do tempo total quanto dos custos operacionais, o algoritmo apresentou desempenho superior em comparação a métodos tradicionais, alcançando melhorias de até 49,50% no tempo de execução e 42,73% na redução dos custos, conforme demonstrado pelas simulações realizadas (SRIVASTAVA; KALRA, 2020). Observa-se, portanto, que a técnica SOS possui um amplo espectro de aplicações, sendo aplicável sempre que surgir uma problemática passível de otimização. Um exemplo dessa versatilidade no âmbito da Engenharia Elétrica é o trabalho de Das (2017), que aborda o problema do despacho econômico, cujo objetivo é otimizar a geração de eletricidade, considerando restrições como custos de combustível e limites operacionais de geração. Nesse contexto, o algoritmo SOS foi testado e comparado com outras metodologias, como Algoritmos Genéticos e outros métodos de otimização, apresentando os mesmos resultados e demonstrando sua eficácia na resolução de problemas de despacho econômico, atendendo satisfatoriamente às restrições impostas. Os resultados indicam que o SOS é uma ferramenta eficaz, com grande potencial para aplicação em cenários reais, contribuindo para a melhoria da eficiência e redução dos custos na geração de energia elétrica (DAS; BHATTACHARYA; RAY, 2017).

3 Modelagem do Problema

3.1 Problema de Recobrimento

O presente capítulo aborda a formulação matemática do problema de alocação de PMUs nos SEPs em base do Problema de Recobrimento (PR), uma abordagem clássica da otimização combinatória que visa garantir que todos os elementos de um conjunto estejam devidamente atendidos por uma configuração mínima de recursos disponíveis (HOFFMAN; PADBERG, 2007). Problemas como localização de serviços, distribuição de recursos e definição de rotas frequentemente utilizam essa modelagem devido à sua capacidade de representar coberturas eficientes em diferentes domínios .

No caso específico da alocação de PMUs, o objetivo consiste em definir tanto a quantidade mínima de equipamentos necessários quanto os pontos ideais de instalação no SEP, de forma que todas as barras do sistema possam ser monitoradas. Esse monitoramento pode ocorrer diretamente, quando o medidor está instalado na própria barra, ou indiretamente, por meio de inferência com base em modelos elétricos (BALU et al., 1992).

A complexidade combinatória do problema, intensificada pelo crescimento do número de barras nas redes reais, inviabiliza a aplicação de métodos exatos em grande escala, devido ao tempo computacional elevado. Por essa razão, estratégias baseadas em meta-heurísticas vêm sendo amplamente utilizadas, oferecendo soluções satisfatórias dentro de prazos operacionais viáveis.

Neste capítulo, será inicialmente apresentado um exemplo ilustrativo baseado em um problema genérico de alocação, seguido pela adaptação do modelo à realidade dos SEPs no contexto da alocação de PMUs.

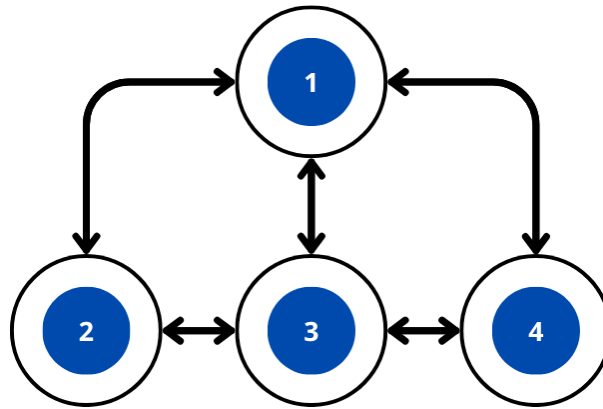
3.2 Analogia do problema

Uma forma didática e bastante utilizada para ilustrar problemas de recobrimento resolvido via a programação linear inteira, é por meio do exemplo da instalação de postos de atendimento do corpo de bombeiros em uma cidade. Segundo Raggi (2004), cada região da cidade requer cobertura por ao menos um posto, sendo que um único posto é capaz de atender tanto sua própria região quanto as regiões vizinhas. O desafio, nesse caso, consiste em minimizar o número total de postos instalados, assegurando que todas as áreas estejam adequadamente cobertas.

Supondo uma cidade dividida em quatro regiões, representadas na Figura 1, é possível identificar diferentes combinações de localização para os postos que garantam a

cobertura completa da cidade.

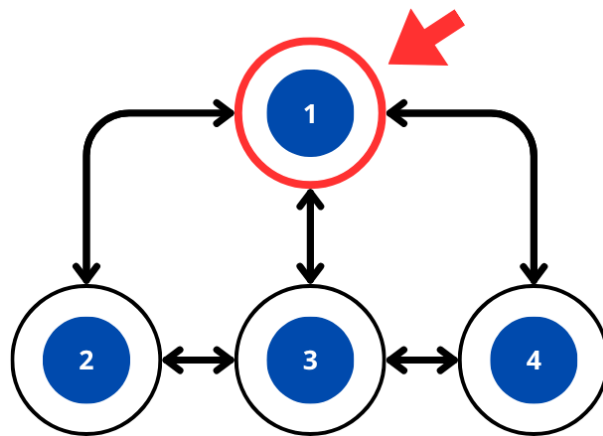
Figura 1 – Demonstração de uma cidade com quatro regiões



Fonte: Do autor.

Por exemplo, ao instalar o posto na região 1, é possível atender também as regiões 2, 3 e 4, devido à sua adjacência, como demonstra a Figura 2.

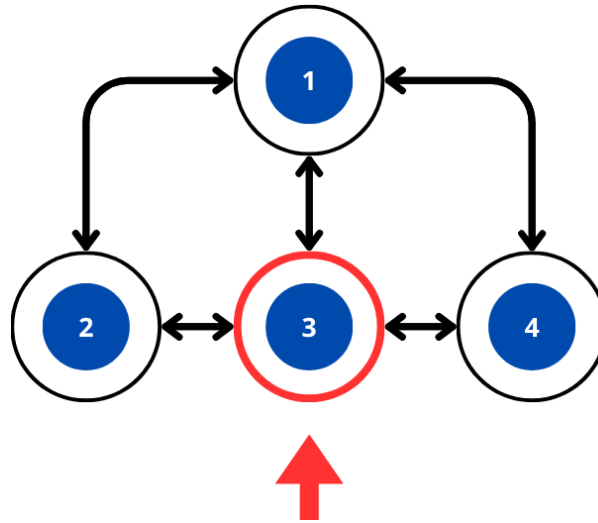
Figura 2 – Instalação do posto na região 1, atendendo a 2, 3 e 4



Fonte: Do autor.

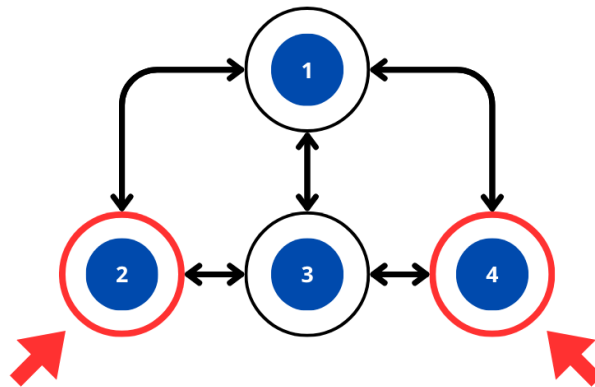
O mesmo resultado pode ser obtido instalando-se o posto na região 3. Outra solução possível seria alocar dois postos, um na região 2 e outro na 4, cobrindo todas as áreas, porém isto levaria a um custo mais elevado, como apresentado respectivamente na Figura 3 e Figura 4.

Figura 3 – Instalação do posto na região 3, atendendo a 1, 2 e 4



Fonte: Do autor.

Figura 4 – Instalação do posto nas regiões 2 e 4, atendendo a 1 e 3



Fonte: Do autor.

Esse exemplo demonstra claramente como diferentes soluções podem ser viáveis em termos de cobertura, mas que o número de instalações deve ser otimizado. Embora seja simples realizar essa análise em problemas de pequena escala, à medida que o tamanho do sistema cresce, o número de combinações possíveis torna-se exponencial, inviabilizando soluções baseadas apenas em observação direta. Portanto, torna-se necessária a formulação matemática do problema, o que permite sua resolução por métodos computacionais, especialmente quando aplicado a sistemas mais complexos, como a alocação de medidores em SEPs.

3.3 Formulação Matemática do Problema

A formulação do problema de alocação ótima de PMUs pode ser montado matematicamente aplicado a otimização combinatória, como explicado o problema de recobrimento

anteriormente descreve. Para isto, ele deve ser construído por variáveis do problema, que seguem enumeradas abaixo:

3.3.1 Vetor de Existência

O vetor x representa o vetor existência, ou seja, a variável de decisão no modelo de alocação de unidades de monitoramento, como postos de atendimento ou PMUs. Nesse contexto, n corresponde ao número total de regiões (ou barramentos, no caso de sistemas elétricos) candidatas à instalação.

Cada componente X_j do vetor é uma variável binária que indica a decisão de instalação em uma determinada localidade: assume o valor 1 caso seja instalado e 0 caso contrário.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

3.3.2 Vetor de Custo

A instalação de unidades de monitoramento, como as PMUs no SEP ou os postos de bombeiros em uma malha urbana, envolve um custo específico para cada local considerado. Esse custo é representado por meio de um vetor $\mathbf{c}$, com dimensão $1 \times n$, onde n corresponde ao número total de locais elegíveis para instalação. Cada elemento c_j ($j=1,2,3,\dots,n$) desse vetor indica o custo associado à instalação na posição j , permitindo que o modelo de alocação considere a viabilidade econômica de cada alternativa.

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad (3.2)$$

3.3.3 Função Objetivo

A função objetivo busca reduzir ao máximo o custo total associado à instalação dos postos do corpo de bombeiros em uma determinada região. Para isso, considera-se o número total de localidades n , onde o custo total é calculado como o produto entre o vetor de custos e o vetor que indica a presença ou ausência de um posto em cada local.

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j X_j \quad (3.3)$$

Ou seja,

$$\min z = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.3.4 Restrições

Para garantir que todas as barras (ou regiões) de uma rede elétrica sejam monitoradas adequadamente, é imprescindível que cada uma delas esteja coberta por pelo menos um PMU (ou posto de bombeiros). Essa cobertura é formalizada por meio de uma matriz quadrada denominada Matriz de Densidade D , dimensão $n \times n$, sendo n o número total de barras ou regiões consideradas.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

As linhas e colunas dessa matriz correspondem a essas unidades, e seus elementos assumem valores binários: 1 indica que a barra correspondente está diretamente coberta ou é adjacente à barra onde o PMU foi instalado; 0 indica a ausência dessa relação.

A formulação do problema possibilita a definição de um vetor de restrições u , com dimensão $n \times 1$, cuja finalidade é assegurar que todas as barras (bairros) sejam devidamente atendidos. Para isso, cada elemento desse vetor deve possuir um valor maior ou igual a 1, garantindo o cumprimento da restrição de cobertura total da área estudada. A construção desse vetor é parte fundamental da equação 3.6, que formaliza matematicamente essa condição de atendimento mínimo por bairro dentro do modelo proposto.

$$u_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot X_j \geq 1 \quad \Rightarrow \quad u = D \cdot x \geq 1 \quad (3.6)$$

3.3.5 Exemplo Básico

Neste capítulo, apresenta-se a modelagem do problema utilizando como exemplo uma cidade dividida em quatro regiões, conforme ilustrado na Figura 1. A partir dessa modelagem, desenvolve-se um algoritmo destinado à resolução do problema proposto.

O primeiro passo consiste na construção da matriz de densidade, que indica as regiões adjacentes entre si. Considerando que o exemplo envolve quatro regiões, a matriz resultante será quadrada de ordem 4. A partir dos critérios estabelecidos para o

preenchimento dessa matriz, é possível definir a matriz D , conforme exemplificado na Equação 3.7, como explicado anteriormente na seção.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Em seguida, constrói-se o vetor de existência, que contém quatro elementos correspondentes a cada uma das regiões, conforme apresentado na equação 3.8.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

O objetivo principal é minimizar o custo total, representado pelo número de postos de bombeiros a serem instalados, o qual é calculado pela soma dos custos individuais de instalação em cada região. Para simplificar este exemplo, é considerado o custo de cada instalação igual a 1. Essa função objetivo está representada pela equação 3.9,

$$\min z = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

enquanto a restrição que assegura o recobrimento total da área está descrita na equação 3.10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Reestruturando as Equações 3.9 e 3.10, com a intenção de uma diferente visualização do problema, tem-se:

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad (3.11)$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \quad (3.12)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \quad \geq 1 \quad (3.13)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \quad (3.14)$$

$$x_1 + \quad x_3 + x_4 \geq 1 \quad (3.15)$$

Dessa forma, obtém-se o modelo básico aplicável a diversas situações em que se busca garantir o recobrimento integral de uma área por meio de uma solução ótima, sendo neste exemplo direcionado à alocação eficiente de postos de bombeiros em uma cidade.

3.4 Formulação Matemática do Problema de Alocação de PMUs

Esta seção apresenta a modelagem do problema de alocação de medidores de QEE, com base na metodologia proposta por (ELDERY et al., 2006). O trabalho de Eldery implica que a formulação do problema considera a topologia do SEP e as leis de Ohm aplicadas a circuitos elétricos. O problema é estruturado como um caso do PR, no qual se busca minimizar o número de dispositivos instalados, assegurando a plena observabilidade do sistema.

Os medidores são instalados exclusivamente nas barras do sistema, sendo compostos por sistemas de aquisição, processamento e envio de dados. Esses equipamentos medem as tensões nas barras e as correntes nas linhas de transmissão, utilizando transformadores de corrente e de potencial. A modelagem considera o sistema trifásico representado por seu equivalente monofásico.

As variáveis de estado correspondem às tensões nas barras e às correntes nas linhas. Uma variável é dita observável quando pode ser obtida diretamente por um medidor ou indiretamente por meio de cálculos baseados nas medições disponíveis. Dessa forma, busca-se garantir que todas as variáveis de estado do sistema estejam acessíveis em tempo real.

Em resumo, tem-se:

- **Medidores de QEE/PMU**

É o instrumento utilizado para se medir as correntes nas linhas de transmissão e tensões dos barramentos, adquirindo, processando e enviando os dados coletados.

- **Variáveis de Estado**

É atribuída, neste contexto, como a tensão fasorial de cada barra e corrente de cada linha de transmissão.

• Observabilidade

É conferida a uma variável de estado quando seus valores podem ser obtidos por medições diretas realizadas por um medidor ou por forma indireta, sendo calculada. A total observabilidade do sistema é essencial em qualquer instante de operação.

• Local de instalação

Os PMUs são instalados somente nos barramentos do SEP.

O objetivo da modelagem é encontrar a configuração que utilize o menor número possível de PMUs, respeitando o requisito de observabilidade total do SEP. A formulação matemática emprega vetores de custo e de existência, cujas dimensões dependem do número de barras (n) e de linhas (L), totalizando um total de $m = n + L$ variáveis de estado.

Com essa abordagem, é possível definir a melhor estratégia de alocação dos medidores, otimizando os recursos disponíveis e garantindo a eficiência do monitoramento da QEE no SEP.

3.4.1 Vetor de Existência

O vetor de existência $\mathbf{x}$, com dimensão $n \times 1$, indica a presença ou ausência da instalação do PMU. Cada elemento desse vetor é uma variável binária que assume valor 1 caso o medidor esteja instalado naquela posição, ou 0 caso contrário.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.4.2 Vetor de Custo

Cada componente do vetor $1 \times n$ de custo $\mathbf{c}$ representa o valor associado à instalação de um PMU, conforme definido na equação , considerando um SEP com n barras.

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad (3.17)$$

3.4.3 Função Objetivo

O problema visa reduzir ao máximo o custo total do sistema de monitoramento, calculado pela soma dos custos de instalação de cada medidor. Essa abordagem segue o modelo descrito, onde n representa o número total de barras, e os custos correspondem à instalação dos PMUs nos barramentos do SEP.

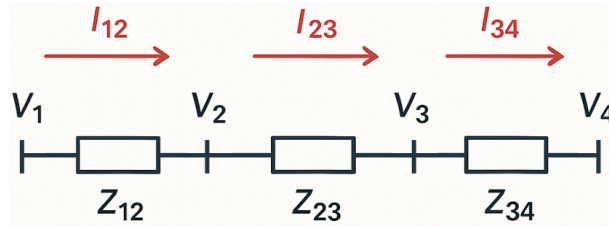
$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j \quad \Rightarrow \quad \min z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad (3.18)$$

3.4.4 Restrições do Problema

Para garantir a observabilidade de todas as variáveis de estado no SEP, é necessário assegurar que cada uma delas possa ser medida diretamente ou estimada a partir de medições realizadas por pelo menos um medidor de QEE. Isso significa que cada tensão em barra e corrente em linha deve ser diretamente medida ou estimada com base em medições realizadas por algum monitor. Para isso, considera-se a estrutura física da rede elétrica, representada por seu diagrama unifilar simplificado, no qual cada barra e linha de transmissão é identificada com seus respectivos parâmetros.

Como exemplo, toma-se uma rede com quatro barras e três linhas de transmissão. As tensões nas barras são indicadas por V_i , enquanto as correntes e impedâncias das linhas são representadas por I_{ij} e Z_{ij} , respectivamente, sendo i a barra de origem e j a de destino. Ao instalar um medidor na barra 2, torna-se possível medir a tensão nessa barra e as correntes que fluem pelas linhas conectadas a ela. Com essas informações e conhecendo as impedâncias, é viável calcular as tensões nas barras adjacentes por meio das leis de circuitos elétricos.

Figura 5 – Rede esquemática.



Fonte: Do autor.

Dessa forma, a restrição de observabilidade pode ser formalizada garantindo que, para cada barra do sistema, exista ao menos um medidor instalado diretamente nela ou em uma barra vizinha, com capacidade de prover os dados necessários para estimativas confiáveis das variáveis de estado. Essa modelagem permite determinar a quantidade mínima e os locais ideais para instalação dos medidores, otimizando custos e assegurando o monitoramento completo do sistema.

$$V_1 = V_2 + Z_{12} \cdot I_{12} \quad (3.19)$$

$$V_3 = V_2 - Z_{23} \cdot I_{23} \quad (3.20)$$

Assim, o medidor instalado no barramento 2 monitora as demais barras do sistema, 1, 2 e 3.

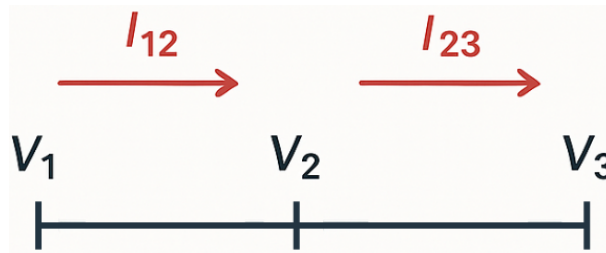
3.5 Exemplos de Redes de Energia Elétrica

Nesta parte do trabalho, será aplicado a modelagem descrita anteriormente para resolver diferentes exemplos práticos, dispensando a necessidade de informações específicas sobre carga ou geração do SEP. A abordagem começa com a resolução do PR em uma topologia simplificada, evoluindo gradualmente para configurações mais robustas e complexas. Para elaborar a matriz de densidade, utilizou-se o software Matlab, enquanto a geração dos vetores de observabilidade foi feita a partir de uma matriz de dados estruturada. Nessa matriz, cada linha representa uma linha de transmissão e contém os índices das duas barras que ela conecta, organizados em ordem crescente, com o objetivo de manter a consistência e a padronização na representação dos dados do sistema.

3.5.1 Sistema de 3 barras

A Figura 6 ilustra um sistema simplificado composto por três barras e duas linhas de transmissão, que será utilizado para exemplificar a construção da matriz de observabilidade e a aplicação do modelo matemático de otimização. Neste caso, temos $n = 3$ barras e $L = 2$ linhas, resultando em $m = 5$ variáveis de estado.

Figura 6 – Sistema com 3 barras.



Fonte: Do autor.

Com base na topologia do sistema, define-se o vetor de existência como a equação 3.21, representando a possível instalação de medidores em cada barra.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

O vetor de custos associado como a equação 3.22, onde cada elemento corresponde ao custo de instalação do medidor em sua respectiva barra.

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A matriz de observabilidade D , construída com base na conectividade entre as barras, permite verificar que a instalação de um medidor na barra 2 é suficiente para garantir a observação de todas as variáveis de estado do sistema. Isso ocorre porque a barra 2 está diretamente conectada às barras 1 e 3, possibilitando a medição direta da sua tensão e das correntes nas linhas adjacentes, e o cálculo das tensões nas outras barras por meio das leis de Ohm.

Tabela 1 – Entrada e saída da para a rede da Figura 6

Linha de origem	Linha de chegada
1	2
2	3

Fonte: Do autor.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Dessa forma, o problema de alocação é formulado como uma função objetivo de minimização do custo total do sistema de monitoramento:

$$\min z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Equacionando 3.25, tem-se:

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad (3.26)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \quad (3.27)$$

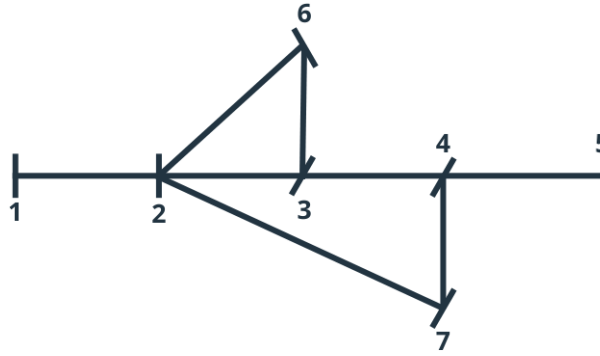
$$x_2 + x_3 \geq 1 \quad (3.28)$$

Este modelo serve de base para o desenvolvimento do algoritmo de otimização apresentado na próxima seção, o qual tem como finalidade encontrar a alocação ótima dos medidores com o menor custo possível, mantendo a completa observabilidade do sistema.

3.5.2 Sistema de 7 barras

Para ilustrar a aplicação da modelagem proposta, utiliza-se um SEP composto por sete barras e oito linhas de transmissão, conforme representado na Figura 7. Esse sistema servirá de base para a formulação do problema de alocação de PMUs.

Figura 7 – Sistema com 7 barras.



Fonte: Do autor.

Considerando as sete barras do sistema, o vetor de decisão x , com dimensão 7×1 , é composto por variáveis binárias que indicam a instalação ($X_j = 1$) ou não ($X_j = 0$) de um PMU na barra j :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

O vetor de custos c , que representa o custo de instalação em cada barra, é definido como:

$$c = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7] \quad (3.30)$$

A matriz de Densidade D , construída com base na topologia da rede, relaciona cada barra com aquelas que são monitoradas por um PMU instalado em sua vizinhança.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

A formulação matemática final do problema busca minimizar o custo total de instalação dos PMUs, assegurando que todas as barras sejam observáveis:

$$\min z = c \cdot x \quad (3.32)$$

Sujeito à restrição de cobertura, dada por:

$$u = D \cdot x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \geq 1 \quad (3.33)$$

Equacionando:

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad (3.34)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1 \quad (3.35)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 1 \quad (3.36)$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1 \quad (3.37)$$

$$x_4 + x_5 \geq 1 \quad (3.38)$$

$$x_2 + x_3 + x_6 \geq 1 \quad (3.39)$$

$$x_2 + x_4 + x_7 \geq 1 \quad (3.40)$$

Essa restrição garante que cada barra do sistema seja monitorada diretamente por um PMU ou indiretamente por meio de outra barra vizinha equipada com o dispositivo.

3.6 Construção da Matriz de Densidade através das matrizes auxiliares

Eldery et al. (2004, 2006) apresentam um método alternativo para a construção da matriz de densidade utilizando as leis de Ohm, fundamentado em:

Lema - Tensão: *Se a tensão em uma determinada barra e a corrente na linha que dela parte são observáveis, então é possível considerar também observável a tensão na barra adjacente.*

Para representar a observabilidade das variáveis de estado relacionadas às tensões nas barras, define-se a matriz de conectividade A . Os elementos desta matriz assumem valor 1 quando a variável é observada pelo medidor instalado na barra correspondente, e 0 caso contrário. A partir desta matriz, constrói-se o vetor de observabilidade u , que indica quantas vezes cada tensão é observada, calculado pela multiplicação da matriz A pelo vetor de existência x :

$$u_r = \sum_{k=1}^n a_{rk} \cdot x_k \quad (3.41)$$

$$u = A \cdot x \quad (3.42)$$

Para modelar essa condição, define-se a matriz de co-conectividade B , que representa a observabilidade das variáveis de estado referentes às correntes nas linhas de transmissão. Esta matriz é composta por duas submatrizes, B_j e B_k , ambas com as mesmas dimensões da matriz A . A coluna ρ representa o medidor instalado na barra ρ , enquanto a linha r está associada à variável de estado referente à corrente i_{jk} na linha entre as barras j e k . Os elementos dessas submatrizes são definidos a partir dos vetores a_j e a_k , que correspondem às linhas j e k da matriz A , conforme:

$$B_j = \begin{cases} a_j, & \text{se representa } i_{jk} \text{ e as barras } j \text{ e } k \text{ são conectadas;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} a_k, & \text{se representa } i_{jk} \text{ e as barras } j \text{ e } k \text{ são conectadas;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os vetores de observabilidade para as correntes, w_j e w_k , são obtidos pela multiplicação das submatrizes B_j e B_k pelo vetor x :

$$w_j = B_j \cdot x \quad (3.43)$$

$$w_k = B_k \cdot x \quad (3.44)$$

O vetor total w , que representa a observabilidade das correntes, é calculado pela combinação dos vetores w_j e w_k :

$$w = w_j^T \cdot w_k \quad (3.45)$$

É importante ressaltar que as matrizes A , B_j e B_k são organizadas de modo que as tensões nas barras estejam ordenadas crescentemente e as correntes sigam a mesma ordem crescente. Após a definição dessas matrizes auxiliares, constrói-se a matriz de densidade D , cuja dimensão corresponde ao número total de variáveis de tensão n acrescido de duas vezes o número de linhas $2L$ para representar as correntes, resultando em uma matriz de dimensão $(n + 2L) \times n$. Essa matriz é composta pelas submatrizes da seguinte forma:

$$D = \begin{bmatrix} A_{(1:n)_n} \\ A_{(L:m)_n} + B_j(L:m)_n \\ A_{(L:m)_n} + B_k(L:m)_n \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

onde $A_{(1:n)}$ corresponde à submatriz da conectividade referente às linhas de 1 até n , e $B_j(L : m)$ e $B_k(L : m)$ são as submatrizes de co-conectividade referentes às linhas de L até m , com todas as colunas incluídas.

3.7 Comparação entre os métodos de construção da Matriz de Densidade

Com base nos resultados obtidos e nos tempos computacionais medidos (que serão apresentados na Seção Resultados e Discussões), observa-se que ambas as abordagens para a construção da matriz de densidade se mostram eficazes, uma vez que conduzem a soluções equivalentes quando aplicadas aos algoritmos de otimização, como o SOS.

A principal distinção entre os métodos reside na complexidade envolvida na formulação de cada um. O procedimento que utiliza matrizes auxiliares, como as matrizes A , B_j e B_k , resulta em uma matriz de densidade de maior dimensão, pois contempla também as variáveis de corrente nas linhas do sistema. Esse aspecto torna sua implementação mais trabalhosa e demanda maior esforço computacional. Em contrapartida, a versão simplificada da matriz D baseia-se apenas nas variáveis de tensão das barras, resultando em uma estrutura de menor porte e construção mais direta.

Essa diferença estrutural reflete-se, ainda que de maneira sutil, no desempenho computacional. A matriz simplificada, por ser menos densa, tende a acelerar a execução dos

algoritmos, embora essa vantagem em tempo seja marginal e não comprometa a eficácia geral das soluções encontradas.

Assim, conclui-se que a escolha entre as metodologias de construção da matriz D pode ser feita com base nos objetivos e nas características do projeto. Para redes de menor porte, ambas as abordagens são viáveis e fornecem bons resultados. No entanto, para sistemas de grande escala, recomenda-se a utilização da matriz simplificada, devido à sua menor complexidade de implementação e leve ganho em tempo de execução.

4 Solução do Problema

Neste capítulo do trabalho, demonstraremos a técnica aplicada denominada *Symbiotic Organism Search* (SOS) na resolução do problema da alocação ótima de PMUs em sistemas de potência.

4.1 Metodologia Aplicada

4.1.1 Symbiotic Organism Search

O algoritmo *Symbiotic Organism Search* consiste em uma técnica de otimização do tipo metaheurística baseada em população, proposta originalmente por Cheng e Prayogo em 2014. A principal inspiração do SOS advém das interações simbióticas observadas no mundo natural, notadamente aquelas classificadas como mutualismo, comensalismo e parasitismo. Tais interações biológicas fornecem uma analogia eficiente para representar o comportamento colaborativo e competitivo entre entidades, o que pode ser aproveitado para guiar a busca por soluções ótimas em espaços complexos e de alta dimensionalidade (CHENG; PRAYOGO, 2014).

No âmbito do algoritmo, cada solução candidata ao problema em análise é interpretada como um *organismo simbiótico*. A qualidade dessa solução é mensurada por meio de uma função objetivo, e o processo de otimização é conduzido a partir das interações sucessivas entre esses organismos, que ocorrem em um ambiente virtual e iterativo. O principal objetivo do algoritmo é permitir que, ao longo das iterações, os organismos evoluam em direção a soluções de maior aptidão, simulando os princípios de cooperação e competição típicos de ecossistemas reais.

A execução do SOS inicia-se com a geração de uma população inicial composta por N organismos simbióticos. Cada organismo representa uma solução viável, construída de forma aleatória, mas respeitando as restrições impostas pelo problema. No caso específico da alocação ótima de PMUs, cada organismo é responsável por representar uma configuração de instalação desses dispositivos sobre os barramentos do SEP.

O algoritmo é estruturado em três fases principais de interação simbiótica: mutualismo, comensalismo e parasitismo, descritas nas subseções a seguir.

4.1.1.1 Fase de Mutualismo

Nesta etapa, dois organismos da população, denotados por X_i e X_j , são selecionados aleatoriamente. Esses organismos passam a interagir de maneira cooperativa, ou seja,

cada um busca melhorar sua própria solução ao colaborar com o outro. Essa relação de *mutualismo* é benéfica para ambas as partes envolvidas, tal como observado em diversos ecossistemas naturais.

A atualização das soluções ocorre com base em um vetor chamado de *Centro Mutualista*, calculado como a média das soluções envolvidas, podendo ser influenciado por fatores aleatórios e pela melhor solução global encontrada até o momento. As equações que definem essa atualização são apresentadas nas Equações 4.1, 4.2.2.1 e 4.3.

$$Mutual_{vector} = \frac{X_i + X_j}{2} = X_i + 0,5 * (X_i - X_j) \quad (4.1)$$

$$X_{i_{new}} = X_i + \text{rand}(0,1) \cdot (X_{\text{best}} - Mutual_{vector} \cdot BF1) \quad (4.2)$$

$$X_{j_{new}} = X_j + \text{rand}(0,1) \cdot (X_{\text{best}} - Mutual_{vector} \cdot BF2) \quad (4.3)$$

onde $BF1$ e $BF2$ são números inteiros aleatórios (1 ou 2).

Essa fase tem como principal objetivo aumentar a aptidão simultaneamente de duas soluções, promovendo um equilíbrio entre exploração e exploração cooperativa do espaço de busca.

4.1.1.2 Fase de Comensalismo

A segunda fase do algoritmo é caracterizada por uma relação unilateralmente benéfica, chamada de comensalismo. Nesse cenário, apenas o organismo X_i é modificado com base em sua interação com o melhor organismo da população, denotado por X_{best} . Diferentemente do mutualismo, X_{best} não sofre alterações durante essa fase, sendo apenas uma referência para orientar a melhoria de X_i .

A equação 4.4 descreve matematicamente como essa atualização é realizada. O intuito dessa fase é aumentar a aptidão de uma única solução, aproveitando o conhecimento acumulado pela população sem comprometer os organismos mais bem adaptados.

$$X_{i_{new}} = X_i + \text{rand}(-1,1) \cdot (X_{\text{best}} - X_j) \quad (4.4)$$

4.1.1.3 Fase de Parasitismo

Na fase final, o organismo X_i gera uma nova solução chamada de *solução parasita*, por meio da modificação aleatória de algumas de suas dimensões. Essa solução é então comparada com outro organismo X_j , escolhido aleatoriamente.

Se a solução parasita apresentar melhor aptidão, ela substitui X_j ; caso contrário, é descartada. Essa etapa contribui para a diversificação da população e reduz a chance de convergência prematura.

4.1.1.4 Pseudocódigo do Algoritmo

O funcionamento completo do algoritmo Symbiotic Organism Search pode ser sintetizado pelo seu pseudocódigo. O código destaca as duas fases principais, bem como os critérios de avaliação e substituição dos organismos ao longo das iterações.

Figura 8 – Pseudocódigo da metaheurística SOS

Etapa 1: Leitura dos Dados e Geração da População.;

1. **Inicialize** $x \leftarrow f^* \leftarrow \infty$; $x^* \leftarrow \emptyset$;
2. Leia os dados do problema;
3. $x \leftarrow x'$;
4. Para $n = 1, \dots, n$, faça:
5. Gere uma população de n indivíduos aleatórios;
6. Avalie a aptidão da população inicial.

Etapa 2: Aplicação de Operadores.

6. Para $i = 1, \dots, n$, faça:
7. **Operador Mutualismo**
 8. Selecione dois indivíduos da população como pares simbióticos;
 9. Aplique o operador de mutualismo para gerar novos simbiontes;
 10. Fim da etapa de mutualismo.
11. **Operador Comensalismo**
 12. Selecione uma solução da população como simbionte;
 13. Aplique o operador de comensalismo para gerar um novo simbionte;
 14. Fim da etapa de comensalismo.
15. **Operador Parasitismo**
 16. Selecione uma solução da população como simbionte;
 17. Aplique o operador de parasitismo para gerar um novo simbionte;
 18. Fim da etapa de parasitismo.

Etapa 3: Critério de Convergência.

19. Verifique o critério de parada; se atingido, encerre o algoritmo SOS;
20. Fim do processo.

Fonte: Do autor.

Nesta etapa inicial do algoritmo consiste na preparação do ambiente de otimização. Primeiramente, define-se a função f^* como um conjunto infinito e x , o vetor existência, como um vetor vazio, representando a melhor solução e seu valor de aptidão até o momento.

Em seguida, os dados do problema são lidos, incluindo parâmetros e restrições. Após essa leitura, inicia-se a geração da população inicial, composta por n soluções simbióticas criados aleatoriamente, cada um representando uma solução candidata. Por

fim, a aptidão de cada indivíduo é avaliada por meio da função objetivo, permitindo ao algoritmo identificar os pontos iniciais mais promissores no espaço de busca.

Na segunda etapa, o algoritmo executa as três principais operações simbióticas que guiam o processo de otimização: mutualismo, comensalismo e parasitismo. Para cada indivíduo da população, são aplicados, sequencialmente, esses operadores, que simulam diferentes tipos de interação biológica para explorar o espaço de busca.

Como citado no item 4.1.1, No algoritmo SOS, os operadores de mutualismo, comensalismo e parasitismo geram novas soluções por meio de interações cooperativas, modificações unilaterais e alterações aleatórias, respectivamente, promovendo a melhoria gradual das soluções, diversificação da população e prevenção da convergência prematura.

Para a última etapa, no final da aplicação dos operadores em toda a população, o algoritmo verifica se os critérios de parada foram satisfeitos, como número máximo de iterações ou estabilidade na função objetivo. Caso esses critérios sejam atendidos, o algoritmo é finalizado; caso contrário, as etapas anteriores são repetidas até a convergência.

Na linha 4 do pseudocódigo, observa-se que o valor de n , representando o número de organismos da população, exerce papel estratégico no desempenho do algoritmo. Valores inadequados podem resultar em convergência prematura para ótimos locais ou em um aumento desnecessário no tempo de processamento. Recomenda-se que o número de organismos seja proporcional ao tamanho da rede elétrica (RE) analisada, garantindo um equilíbrio entre qualidade da solução e custo computacional.

4.1.1.5 Parâmetros do Algoritmo

Outro parâmetro de relevância no SOS é a taxa de simbiose, que determina a probabilidade de ocorrência das interações simbióticas entre os organismos durante as iterações. Esse parâmetro, geralmente definido em um intervalo entre 0,1 e 0,9, deve ser ajustado cuidadosamente.

- **Taxas baixas** (próximas de 0,1) podem limitar a capacidade de exploração do algoritmo, fazendo com que a população fique presa em regiões locais do espaço de busca.
- **Taxas altas** (próximas de 0,9), por outro lado, podem comprometer a diversidade da população, favorecendo uma exploração excessiva e dificultando a convergência para soluções de alta qualidade.

Nos experimentos realizados para alocação de PMUs em diferentes SEPs, observou-se que a configuração mais eficiente foi obtida com uma taxa de simbiose de 0,5. Esse valor proporcionou um equilíbrio adequado entre a exploração do espaço de busca e a intensificação nas regiões promissoras, conduzindo a soluções robustas e estáveis.

4.1.2 Função Objetivo para SOS

A avaliação da aptidão (ou fitness) de cada solução simbiótica gerada durante a execução do algoritmo SOS é uma etapa fundamental no processo de otimização. Essa avaliação é realizada com base na função objetivo previamente definida, conforme apresentado na Equação 3.3, e está diretamente associada ao atendimento das restrições de observabilidade especificadas na Equação 3.5, ambas descritas na Seção 3 deste trabalho.

A função objetivo tem como principal finalidade medir a qualidade de cada solução simbiótica gerada, levando em consideração tanto o custo envolvido quanto a viabilidade técnica da configuração proposta.

Para ilustrar esse processo, considere a solução simbiótica aleatória X , representada na Tabela 5, aplicada à rede elétrica modelada na Figura 7, um sistema com 6 barras. Supondo um cenário em que o custo unitário de instalação de cada PMU seja $c_j = 1$, o valor da função objetivo associada a essa solução será simplesmente equivalente ao número de elementos ativos no vetor x , ou seja, ao número total de PMUs alocadas nos barramentos da rede.

Tabela 2 – Representação de uma solução X .

Barra	1	2	3	4	5	6	7
X	0	0	1	0	1	0	0

Fonte: Do autor.

Tabela 3 – Forma simplificada.

X	$[3,5]$
-----	---------

Fonte: Do autor.

Contudo, a minimização do número de PMUs por si só não é suficiente para garantir que a solução seja válida. É imprescindível que todas as restrições de observabilidade sejam atendidas, o que significa que cada barra da rede deve ser direta ou indiretamente observável. Esse critério é representado pelo vetor de restrições b_i , cujo valor mínimo aceitável é igual a 1 para todos os barramentos, ou seja, $b_i \geq 1$. Se, por exemplo, algum barramento permanecer não observável mesmo após a alocação das PMUs, a solução será considerada inviável.

Quando uma solução não satisfaz essas restrições, ela é penalizada no processo de avaliação. Essa penalização pode assumir diferentes formas, como a atribuição de um valor muito alto à função objetivo (tornando a solução pouco atrativa), ou ainda a sua completa eliminação da população. Alternativamente, o algoritmo pode permitir que a solução permaneça na população com uma penalidade ajustada, possibilitando que ela seja reavaliada em iterações futuras, caso se aproxime de uma configuração viável.

Dessa maneira, o algoritmo SOS não apenas busca soluções que apresentem menor custo de instalação de PMUs, mas também assegura que tais soluções cumpram todas as exigências operacionais do SEP. Essa abordagem garante a integridade das condições de observabilidade da rede, conforme estabelecido pelo modelo matemático do problema.

4.1.3 Matriz Distância entre Barras

Na aplicação do SOS ao problema de alocação ótima de PMUs, é fundamental considerar aspectos topológicos da rede elétrica na formulação das soluções. Um dos elementos centrais para isso é a Matriz de Distâncias utilizadas nas equações 4.1 e 4.2.2.1. Essa matriz tem a função de representar a distância topológica mínima entre os diversos barramentos do sistema, expressa em número de vértices que devem ser percorridos para conectar dois pontos da rede, ou seja, utilizada para quantificar a distância entre diferentes soluções simbióticas.

Essa matriz é construída antes da execução do algoritmo, como uma etapa de pré-processamento, com o intuito de otimizar o desempenho computacional e reduzir a carga de cálculo durante as iterações. A Matriz Distância é empregada em dois momentos cruciais do funcionamento do SOS:

1. Cálculo da distância entre soluções, para fins de avaliação da diversidade populacional no algoritmo SOS, o que permite avaliar se as soluções estão suficientemente distribuídas no espaço de busca ou se estão convergindo prematuramente para uma mesma região.
2. Geração de novas soluções, especialmente nas fases de variação (comensalismo e parasitismo), onde a movimentação no espaço de busca pode ser guiada por proximidade topológica, de modo a explorar regiões promissoras do espaço de forma estruturada e eficiente, sem depender exclusivamente do acaso.

Para exemplificar o uso da Matriz Distância, considere duas soluções simbióticas X_i e X_j aplicadas no sistema da Figura 7 de sete barras, representadas por vetores binários de alocação de PMUs. Suponha que a solução X_i contenha PMUs instaladas nos barramentos 3 e 5, enquanto X_j possui instalações nos barramentos 2 e 6 (vide Tabela 4). A distância entre essas duas soluções pode ser calculada a partir das menores distâncias topológicas entre cada par de barras, utilizando os valores da matriz.

- A distância entre a barra 3 (de X_i) e a barra 2 (de X_j) é igual a 1;
- A distância entre a barra 5 (de X_i) e a barra 6 (de X_j) é igual a 3.

Tabela 4 – Representação de duas soluções simbióticas X_i e X_j

Barra	1	2	3	4	5	6	7
X_i	0	0	1	0	1	0	0
X_j	0	1	0	0	0	1	0

Fonte: Do autor.

Tabela 5 – Forma simplificada.

X_i	[3, 5]
X_j	[2, 6]

Fonte: Do autor.

Essas distâncias representam o número mínimo de vértices a serem percorridos entre as barras correspondentes, considerando a topologia da rede. Esse tipo de métrica fornece uma avaliação mais realista da proximidade entre soluções simbióticas, uma vez que respeita as conexões físicas do SEP.

Além disso, a utilização da Matriz Distância é utilizada nas equações dos operadores de mutualismo e de comensalismo tornando os cálculos de otimização mais eficiente, especialmente em sistemas de grande porte.

4.2 Aplicação da Técnica Meta-Heurística SOS ao Problema de Alocação de PMUs

Conforme descrito na Seção 3, antes do início efetivo da execução do algoritmo SOS, realiza-se uma etapa fundamental de leitura e preparação dos dados referentes ao SEP. Esta etapa tem como principal objetivo estruturar as informações necessárias para o funcionamento eficiente da metaheurística, bem como definir os parâmetros que irão controlar o comportamento do algoritmo ao longo das iterações.

Inicialmente, são lidas todas as informações topológicas e estruturais do sistema, como os barramentos, linhas de transmissão, e os possíveis pontos de instalação dos PMUs.

Com base nesses dados, são construídas duas matrizes fundamentais para o funcionamento do algoritmo: a Matriz Densidade e a Matriz Distância. Mas também são definidos os parâmetros de controle da metodologia, os quais influenciam diretamente a eficiência e a qualidade das soluções obtidas, como o tamanho da população, o número máximo de gerações sem melhoria (*max_ger*), número máximo de visitas sem melhoria no operador Parasitismo (*max_visit*).

Essa etapa de inicialização garante que o algoritmo SOS inicie sua execução com dados estruturados e parâmetros adequadamente ajustados.

4.2.1 Etapa 1 - Definição dos Parâmetros e Construção da População Inicial

A primeira etapa do algoritmo SOS consiste na definição e inicialização dos parâmetros necessários à sua execução. São estabelecidos os valores do tamanho da população, do número máximo de gerações sem melhoria significativa na solução, do fator de balanceamento, e do número máximo de tentativas consecutivas sem progresso durante a busca local. A correta calibração desses parâmetros é essencial para garantir a eficácia e a convergência do algoritmo.

Em seguida, realiza-se a leitura das informações do SEP, a partir das quais é construída a matriz de distâncias entre barramentos, denominada *Matriz_Distância*, representando a topologia da rede elétrica e utilizada em diferentes fases do algoritmo, contribuindo tanto para a avaliação da diversidade entre soluções quanto para a geração de novas soluções durante os operadores simbióticos.

Concluídas essas etapas iniciais, procede-se com a geração da população inicial de soluções simbióticas. Cada solução é representada por um vetor binário, que indica a alocação de PMUs nos barramentos do sistema. A população é composta por n indivíduos gerados de forma aleatória, assegurando a diversidade necessária ao processo de otimização. Em seguida, cada solução é avaliada por meio da função objetivo definida na Equação 4.1, de forma a determinar sua aptidão com base no número de PMUs instaladas e no atendimento às restrições de observabilidade do sistema.

Para tornar mais clara a aplicação prática das fórmulas da meta-heurística, apresenta-se a seguir um exemplo numérico utilizando valores fictícios para as soluções X_i , X_j e X_{best} . No contexto do algoritmo SOS, X_i e X_j representam soluções simbióticas individuais extraídas da população atual, enquanto X_{best} corresponde à melhor solução encontrada até o momento, segundo a função objetivo.

Dados iniciais:

$$X_i = [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0],$$

$$X_j = [1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1],$$

$$X_{\text{best}} = [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1].$$

Forma simplificada:

$$X_i = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13],$$

$$X_j = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13],$$

$$X_{\text{best}} = [1, 2, 3, 5, 9, 11, 14].$$

4.2.2 Etapa 2 - Aplicação de Operadores

Após a construção da população inicial, o algoritmo Symbiotic Organism Search (SOS) entra em sua fase iterativa, onde os operadores simbióticos são aplicados sucessiva-

mente com o objetivo de explorar e refinar o espaço de soluções. Inicialmente, identifica-se a melhor solução simbiótica da população atual, denotada por X_{best} . A seguir, o conjunto de operadores (mutualismo, comensalismo e parasitismo) é aplicado a cada indivíduo da população ao longo de n iterações, onde n é o tamanho da população.

4.2.2.1 Etapa de Mutualismo

Corresponde às linhas 7 a 10 do pseudocódigo. Nesta etapa, duas soluções simbióticas X_i e X_j são selecionadas aleatoriamente da população. Com base nessas duas soluções, calcula-se o vetor de mutualismo $MutualVector$, dado por:

$$MutualVector = \frac{X_i + X_j}{2} = X_i + 0,5 * (X_i - X_j) \quad (4.5)$$

A seguir, duas novas soluções simbióticas são geradas com base nas equações:

$$X_{i_{new}} = X_i + \text{rand}(0,1) \cdot (X_{best} - MutualVector \cdot BF1) \quad (4.6)$$

$$X_{j_{new}} = X_j + \text{rand}(0,1) \cdot (X_{best} - MutualVector \cdot BF2) \quad (4.7)$$

onde $BF1$ e $BF2$ são valores aleatórios comumente fixados em 1 ou 2, e $\text{rand}(0,1)$ representa um número aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$.

Essas novas soluções são então avaliadas por meio da função objetivo apresentada na Equação 4.6, e são verificadas quanto ao cumprimento das restrições de observabilidade descritas na Equação 4.7, isto é, se $b_i \geq 1$ para todos os barramentos. Caso atendam aos critérios, são aceitas como candidatas válidas. Caso contrário, as soluções anteriores são mantidas ou substituídas apenas se as novas proporcionarem uma melhora no vetor de redundância b .

Continuando o exemplo:

1. Cálculo do vetor de mutualismo:

$$MutualVector = \frac{X_i + X_j}{2} = X_i + 0,5 * (X_i - X_j)$$

Componente a componente:

$$MutualVector = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + 0,5 \cdot ([1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] - [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13])$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3:

$$MutualVector = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + 0,5 \cdot [0, 1, 0, 1, 2, 4, 0]$$

$$MutualVector = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + [0, 0,5, 0, 0,5, 1, 2, 0]$$

Os valores com decimais se arredondam para cima:

$$Mutual_{Vector} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + [0, 1, 0, 11, 2, 0]$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3:

$$Mutual_{Vector} = [1, 9, 5, 6, 3, 14, 13]$$

Ordena-se:

$$Mutual_{Vector} = [1, 3, 5, 6, 9, 13, 14]$$

2. Cálculo de X_{inew}

$$X_{inew} = X_i + \text{rand}(0,1) \cdot (X_{\text{best}} - \text{Mutual}_{\text{vector}} \cdot BF_1)$$

$$X_{inew} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + \text{rand}(0,1) \cdot ([1, 2, 3, 5, 9, 11, 14] - [1, 3, 5, 6, 9, 13, 14] \cdot BF_1)$$

Ordena-se:

$$X_{inew} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + \text{rand}(0,1) \cdot ([1, 2, 3, 5, 9, 11, 14] - [1, 6, 3, 5, 9, 13, 14] \cdot BF_1)$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3. Considerando $BF_1 = 1$:

$$X_{inew} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + \text{rand}(0,1) \cdot [0, 4, 0, 0, 0, 1, 0]$$

Assumindo um $\text{rand}(0,1) = 0,1$:

$$X_{inew} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + [0, 0, 4, 0, 0, 0, 1, 0]$$

Os valores com decimais se arredondam para cima:

$$X_{inew} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + [0, 1, 0, 0, 0, 1, 0]$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3.

$$X_{inew} = [1, 2, 5, 7, 9, 12, 13]$$

3. Cálculo de X_{jnew}

$$X_{jnew} = X_j + \text{rand}(0,1) \cdot (X_{\text{best}} - \text{Mutual}_{\text{vector}} \cdot BF_2)$$

$$X_{jnew} = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13] + \text{rand}(0,1) \cdot ([1, 2, 3, 5, 9, 11, 14] - [1, 3, 5, 6, 9, 13, 14] \cdot BF_2)$$

Ordena-se:

$$X_{jnew} = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13] + rand(0,1) \cdot ([1, 2, 3, 5, 9, 11, 14] - [1, 6, 3, 5, 9, 13, 14] \cdot BF_2)$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3. Considerando $BF_2 = 1$:

$$X_{jnew} = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13] + rand(0,1) \cdot [0, 4, 0, 0, 0, 1, 0]$$

Assumindo um $rand(0,1) = 0,5$:

$$X_{jnew} = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13] + [0, 2, 0, 0, 0, 0, 5, 0]$$

Os valores com decimais se arredondam para cima:

$$X_{jnew} = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13] + [0, 2, 0, 0, 0, 1, 0]$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3.

$$X_{jnew} = [1, 7, 5, 6, 8, 12, 13]$$

Ordena-se:

$$X_{jnew} = [1, 5, 6, 7, 8, 12, 13]$$

As soluções X_{inew} e X_{jnew} obtidas representam versões modificadas das soluções originais X_i e X_j , incorporando informações da melhor solução global X_{best} e do vetor de mutualismo. Caso estas novas soluções apresentem desempenho superior de acordo com a função objetivo e respeitem todas as restrições do problema, elas substituirão as soluções originais na população, contribuindo assim para a melhoria contínua do processo de busca.

4.2.2.2 Etapa de Comensalismo

Descrita entre as linhas 11 e 14 do pseudocódigo, a etapa de comensalismo inicia-se com a seleção aleatória de uma solução simbiótica X_i . A partir dela, uma nova solução X_{inew} é gerada por:

$$X_{inew} = X_i + rand(-1,1) \cdot (X_{best} - X_j) \quad (4.8)$$

onde X_i é outro indivíduo da população selecionado aleatoriamente, diferente de X_i . A função $rand$ agora gera um número no intervalo $[-1,1]$, permitindo variações positivas ou negativas. A nova solução também é submetida à avaliação da função objetivo e ao teste das restrições. Se for viável e melhorar o desempenho em termos de redundância ou custo, a substituição é realizada.

Seguindo o mesmo exemplo:

$$X_i = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13],$$

$$X_j = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13],$$

$$X_{\text{best}} = [1, 2, 3, 5, 9, 11, 14].$$

$$X_{\text{inew}} = X_i + \text{rand}(-1,1) \cdot (X_{\text{best}} - X_j)$$

$$X_{\text{inew}} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + \text{rand}(-1,1) \cdot ([1, 2, 3, 5, 9, 11, 14] - [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13])$$

Ordena-se:

$$X_{\text{inew}} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + \text{rand}(-1,1) \cdot ([1, 2, 3, 5, 9, 11, 14] - [1, 2, 6, 5, 8, 10, 13] \cdot BF_1)$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3:

$$X_{\text{inew}} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + \text{rand}(-1,1) \cdot [0, 0, 3, 0, 3, 4, 1]$$

Assumindo um $\text{rand}(-1,1) = 0,3$:

$$X_{\text{inew}} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + [0, 0, 1, 0, 1, 1, 3, 0, 3]$$

Os valores com decimais se arredondam para cima:

$$X_{\text{inew}} = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13] + [0, 0, 1, 0, 1, 2, 1]$$

Aplicando o vetor distância do item 4.1.3:

$$X_{\text{inew}} = [1, 3, 4, 7, 10, 14, 11]$$

Ordena-se:

$$X_{\text{inew}} = [1, 3, 4, 7, 10, 11, 14]$$

4.2.2.3 Etapa de Parasitismo

Por fim, a etapa de parasitismo, contemplada nas linhas 15 a 17, promove maior diversidade no processo evolutivo. Nela, uma solução simbiótica X_j é selecionada aleatoriamente e modificada aleatoriamente em uma ou mais de suas dimensões, originando uma nova solução denominada "parasita". Esta solução parasita é então comparada à solução original X_i . Se a parasita apresentar melhor desempenho de acordo com a função objetivo e respeitar as restrições impostas, substitui a solução X_i .

Adicionalmente, esta etapa pode ser repetida k vezes (sendo k um parâmetro definido previamente), com o intuito de explorar o entorno da solução X_i e identificar possíveis vizinhanças com desempenho superior. Esse mecanismo contribui para o refinamento da solução local e aumenta a probabilidade de escapar de mínimos locais.

Seguindo na mesma linha dos exemplos das etapas anteriores:

$$X_i = [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13],$$

$$X_j = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13],$$

$$X_{\text{best}} = [1, 2, 3, 5, 9, 11, 14].$$

Para gerar a solução parasita, alteramos aleatoriamente algumas dimensões de X_j . Suponha que a modificação aleatória em uma dimensão seja:

$$\text{rand_change} = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0].$$

1. Geração da solução parasita:

$$X_{\text{parasita}} = X_j + \text{rand_change} = [1, 2, 5, 6, 8, 10, 13] + [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$$

$$X_{\text{parasita}} = [1, 2, 5, 7, 8, 10, 13]$$

2. Avaliação e substituição:

Compara-se X_{parasita} com X_i usando a função objetivo. Se X_{parasita} for melhor e respeitar as restrições, substitui X_i :

$$X_{\text{new}} = X_{\text{parasita}} \quad (\text{caso viável e melhor desempenho})$$

5 Resultados e Discussões

A metodologia proposta foi implementada em *Matlab*, utilizando-se bibliotecas específicas para processamento de grafos (para construção das matrizes de densidade e distância) e para operações numéricas (para avaliação da função objetivo e aplicação dos operadores simbióticos). As simulações foram conduzidas em sete sistemas de referência clássicos, escolhidos de forma a abarcar diferentes escalas e complexidades topológicas: Redes IEEE com 14, 30, 33, 57, 69 e 118 barras (Power Systems Test Case Archive, 1999); e nas redes PERU 131 (CHURA, 2014) e COLOMBIA 93 (MENDONÇA, 2016).

Para assegurar a comparabilidade com resultados reportados em estudos anteriores, adotou-se o custo unitário de instalação de cada PMU igual a 1, ou seja,

$$c_j = 1 \quad (5.1)$$

de modo que a função objetivo se reduz à simples minimização do número total de PMUs instaladas. Cada experimento foi repetido 30 vezes de forma independente, garantindo confiabilidade estatística aos resultados. Para cada execução, registraram-se:

1. O número ótimo de PMUs e o custo total correspondente;
2. O tempo médio de convergência, medido em segundos, desde a inicialização até a obtenção da solução ótima pela primeira vez;
3. O percentual de observabilidade final, ou seja, a fração de barramentos cuja restrição $b_i \geq 1$ foi satisfeita;
4. O número médio de gerações necessário para alcançar a melhor solução;
5. A evolução do vetor de redundância b ao longo das iterações, permitindo avaliar a dinâmica da cobertura de observabilidade.

Os parâmetros de controle do SOS, como tamanho de população, número de ciclos e critério parasitário, são apresentados na Tabela 6. Estes são organizados em seções subsequentes, distribuídas por topologia de rede, de modo a possibilitar uma comparação direta com os melhores valores reportados na literatura, bem como a análise da eficiência e escalabilidade do método proposto.

Tabela 6 – Parâmetros da Metodologia

Rede Elétrica	Tamanho da População	Número de Ciclos	Critério Parasitário
IEEE-14	20	50	70
IEEE-30	20	90	150
IEEE-33	20	99	165
IEEE-57	300	60	600
IEEE-69	35	210	613
IEEE-118	59	354	1741
PERU 131	66	393	2162
COLÔMBIA 93	47	279	1093

Fonte: Do autor.

Os resultados obtidos para cada sistema teste estão apresentados na Tabela 7, na qual é possível observar, de forma detalhada, o número total de PMUs alocadas em cada rede elétrica e o respectivo vetor de redundância associado a cada solução. Esta tabela fornece uma visão geral da eficiência das soluções encontradas pela metodologia proposta, permitindo avaliar tanto a quantidade de unidades de medição fasorial utilizadas, quanto o nível de cobertura redundante alcançado em cada barramento do sistema.

A apresentação simultânea desses dois parâmetro, número de PMUs e redundância de medição, é fundamental para a análise da qualidade das soluções geradas, uma vez que permite identificar não apenas a solução com menor custo (em termos de quantidade de equipamentos), mas também aquelas que oferecem maior resiliência frente a falhas e maior robustez na estimação de estados em caso de perda de dados.

Pode-se observar, a partir dos resultados obtidos nas simulações realizadas, que em alguns casos foram encontradas múltiplas soluções distintas que apresentam o mesmo valor para a função objetivo, ou seja, o mesmo número total de PMUs alocados, mas que diferem quanto ao vetor de redundância de medição. Esse vetor de redundância representa quantas PMUs monitoram simultaneamente cada barramento do sistema, sendo, portanto, um parâmetro relevante especialmente para finalidades de estimação de estado, como em situações de perda de dados vindos de uma PMU específica.

Por exemplo, no caso do sistema teste IEEE-14 barras, foram identificadas duas soluções viáveis com alocação de quatro PMUs cada, apresentando o mesmo custo total, porém com diferentes vetores de redundância. Essa diferença implica que, em uma das soluções, determinados barramentos estão sendo monitorados por mais de uma PMU, o que pode ser vantajoso do ponto de vista da robustez e confiabilidade do sistema de medição, aumentando sua resistência a falhas.

Os resultados apresentados acima demonstram apenas duas das soluções encontradas de cada sistema para análise simplificada. Na Tabela 8 apresenta a quantidade de

Tabela 7 – Resultados obtidos para diferentes sistemas de potência

Rede Elétrica	Número da solução	Número mínimo de PMUs	Redundância		
			$b = 1$	$b = 2$	$b > 2$
IEEE-14	1	4	12	2	0
	2	4	10	3	1
IEEE-30	1	10	19	6	4
	2	10	17	10	2
IEEE-33	1	11	32	1	0
	2	11	33	0	0
IEEE-57	1	17	46	9	2
	2	17	49	7	1
IEEE-69	1	24	67	3	0
	2	24	67	2	1
IEEE-118	1	32	82	32	4
	2	32	92	21	5
PERU 131	1	34	112	17	2
	2	34	114	16	1
COLÔMBIA 93	1	21	72	17	3
	2	21	77	13	2

Fonte: Do autor.

soluções encontradas para cada sistema.

Tabela 8 – Quantidade de Soluções Encontradas para cada Sistema

Rede Elétrica	Quantidade de Soluções
IEEE-14	4
IEEE-30	14
IEEE-33	4
IEEE-57	5
IEEE-69	14
IEEE-118	2
PERU 131	2
COLÔMBIA 93	6

Fonte: Do autor.

Os resultados obtidos para os sistemas testes do IEEE, apresentados na Tabela 7, são comparados com aqueles encontrados na literatura especializada, que também abordam o problema de alocação de PMUs, utilizando funções objetivo similares, porém com o emprego de metodologias distintas. Essa comparação é resumida na Tabela 9, na qual é possível verificar a equivalência entre os resultados obtidos pelo algoritmo proposto neste trabalho e os relatados por outros autores. Essa equivalência serve como validação do desempenho da metodologia baseada no algoritmo SOS, demonstrando sua eficácia na

resolução do problema com resultados competitivos frente às abordagens já consolidadas na literatura.

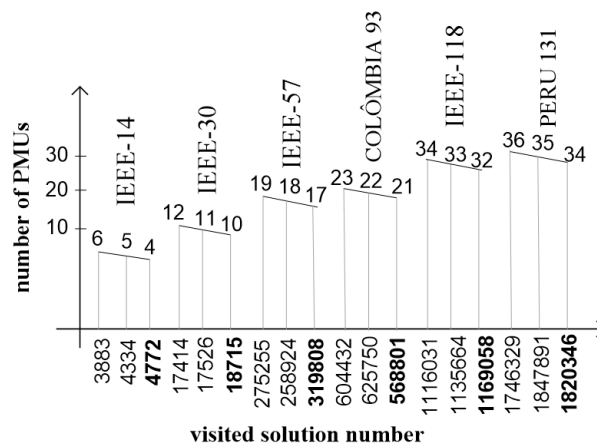
Tabela 9 – Comparação dos resultados com outras metodologias encontradas na literatura

Metodologia	Número mínimo de PMUs			
	IEEE-14	IEEE-30	IEEE-57	IEEE-118
SOS (proposto)	4	10	17	32
Programação Linear Inteira Generalizada (GOU, 2008)	4	10	17	-
Mínimos Quadrados Ponderados (KORRES et al., 2015)	4	10	17	32
Programação Linear Inteira Modificada (KYRIAKIDES; HEYDT, 2009)	-	-	-	32
Programação Quadrática Inteira (TAI et al., 2013)	-	10	17	32
Programação Semi-definida (MANOUSAKIS; KORRES, 2015)	4	10	17	32

Fonte: Do autor.

A Figura 9 também foi elaborada, apresentando o número de soluções visitadas necessárias para determinar o número de PMUs nos diferentes sistemas avaliados.

Figura 9 – Número de PMUs versus soluções visitadas para os sistemas avaliados.



Fonte: Do autor.

6 Conclusão

Este trabalho apresentou uma nova aplicação da técnica de otimização Symbiotic Organism Search para a resolução do problema de alocação ótima de Unidades de Medida Fasorial (PMUs), com foco no monitoramento eficiente dos parâmetros de SEPs. A correta alocação dessas unidades é essencial para garantir a observabilidade completa do sistema, além de contribuir significativamente para a confiabilidade, estabilidade e segurança operativa da rede elétrica.

A alocação ótima de PMUs configura-se como um desafio clássico da área da otimização e pode ser abordada por uma variedade de métodos, que vão desde algoritmos exatos até técnicas heurísticas e metaheurísticas. Dentre essas abordagens, destaca-se a metaheurística Symbiotic Organism Search (SOS), uma técnica baseada em população que simula o comportamento simbiótico observado em organismos naturais. Essa heurística tem se consolidado como uma alternativa promissora em problemas complexos de otimização, especialmente pela sua habilidade em equilibrar a exploração e a intensificação do espaço de busca.

Neste contexto, a aplicação do algoritmo SOS mostrou-se eficaz ao empregar uma matriz de distância entre as barras do sistema como dado de entrada. Essa abordagem permite que a função objetivo priorize simultaneamente dois aspectos fundamentais: a minimização do custo total de instalação das PMUs e a maximização da cobertura da rede, garantindo, assim, uma alocação eficiente e estrategicamente posicionada das unidades. A estrutura do algoritmo permite evitar a convergência prematura para soluções subótimas, uma limitação comum em outras técnicas, o que evidencia sua robustez e desempenho superior em diversos testes e simulações.

Os resultados obtidos indicam que a metaheurística SOS é não apenas competitiva em termos de qualidade das soluções, mas também vantajosa pela sua simplicidade de implementação, flexibilidade de parametrização e facilidade de adaptação a diferentes topologias de rede. Tais características tornam o método especialmente atraente tanto para aplicações acadêmicas quanto industriais, promovendo avanços significativos na área de planejamento e operação de SEPs.

Dessa forma, conclui-se que a utilização do SOS para a alocação ótima de PMUs representa uma abordagem viável, eficiente e escalável, capaz de atender às exigências crescentes de monitoramento em tempo real dos sistemas modernos de energia. Com isso abre-se espaço para estudos futuros que considerem a integração de critérios adicionais no modelo de alocação, como confiabilidade sob falhas, redundância de monitoramento e aspectos econômicos associados à manutenção das PMUs. Outro caminho promissor seria

a aplicação da metaheurística em ambientes de redes elétricas inteligentes (smart grids), nos quais a presença de fontes de energia distribuída e a necessidade de respostas rápidas tornam o problema ainda mais dinâmico e desafiador. Adicionalmente, estudos podem explorar a combinação do SOS com outras técnicas híbridas de otimização ou aprendizado de máquina, a fim de aprimorar ainda mais a qualidade das soluções e reduzir o tempo de processamento em sistemas de grande porte.

Os resultados deste trabalho foram publicados na Conferência Internacional do IEEE Colombian Caribbean: <<https://attend.ieee.org/c3/>>.

Referências

- ALGHASSAB, M. A. et al. Optimal location of pmus for full observability of power system using coronavirus herd immunity optimizer. *Heliyon*, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e31832>>. 16
- ALMEIDA, T. S. et al. A hybrid meta-heuristic approach for optimal meter allocation in electric power distribution systems. *Learning and Nonlinear Models*, v. 21, n. 1, p. 36–46, 2023. 16
- AMMER, C.; RENNER, H. Determination of the optimum measuring positions for power quality monitoring. In: IEEE. *2004 11th International Conference on Harmonics and Quality of Power (IEEE Cat. No. 04EX951)*. [S.l.], 2004. p. 684–689. 15
- BALU, N. et al. On-line power system security analysis. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 80, n. 2, p. 262–282, 1992. 18
- CHENG, M.-Y.; PRAYOGO, D. Symbiotic organisms search: a new metaheuristic optimization algorithm. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 139, p. 98–112, 2014. 34
- CHURA, S. Planificação de sistemas de transmissão usando um método de pontos interiores. Lima, 2014. 47
- DAS, D.; BHATTACHARYA, A.; RAY, R. Symbiotic organisms search algorithm for economic dispatch problems. In: *Proceedings of the International Conference on Electrical, Computer and Communication Technologies (ICECCT)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–7. 17
- ELDERY, M. A. et al. A novel power quality monitoring allocation algorithm. *IEEE transactions on power delivery*, IEEE, v. 21, n. 2, p. 768–777, 2006. 24
- GOU, B. Generalized integer linear programming formulation for optimal pmu placement. *IEEE transactions on Power Systems*, IEEE, v. 23, n. 3, p. 1099–1104, 2008. 50
- HOFFMAN, K.; PADBERG, M. W. Set covering, packing and partitioning problems. In: FLOUDAS, C. A.; PARDALOS, P. M. (Ed.). *Encyclopedia of Optimization*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 14, p. 3482–3486. 18
- KORRES, G. N. et al. Optimal phasor measurement unit placement for numerical observability in the presence of conventional measurements using semi-definite programming. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Wiley Online Library, v. 9, n. 15, p. 2427–2436, 2015. 50
- KYRIAKIDES, E.; HEYDT, G. T. Synchronized measurements in power system operation: international practices and research issues. In: IEEE. *2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting*. [S.l.], 2009. p. 1–3. 50
- MANOUSAKIS, N. M.; KORRES, G. N. Optimal pmu placement for numerical observability considering fixed channel capacity—a semidefinite programming approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 31, n. 4, p. 3328–3329, 2015. 50

- MARTINS, P. E. T.; OLESKOVICZ, M. *Alocação Multi-objetivo de Medidores para Localização de Faltas utilizando Medições de Tensão*. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.20906/cba2022/3258>>. 16
- MEHL, E. L. Qualidade da energia elétrica. *UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ-UFPR*, p. 21, 2012. 11
- MENDONÇA, I. M. d. Identificação de rotas relevantes para o planejamento estático da expansão de sistemas de transmissão de energia elétrica. *Universidade Federal de Juiz de Fora*, 2016. 47
- OLGUIN, G.; VUINOVICH, F.; BOLLEN, M. H. An optimal monitoring program for obtaining voltage sag system indexes. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 21, n. 1, p. 378–384, 2006. 15
- PAIVA, F.; LEITE, I.; MARCONE, M. Um breve estudo sobre os algoritmos do vagalume e do morcego para otimização de funções de referência. *HOLOS*, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, v. 34, n. 4, p. 190–206, 2018. 15
- Power Systems Test Case Archive. Power systems test case archive. 1999. University of Washington. 47
- REE, J. D. L. et al. Synchronized phasor measurement applications in power systems. *IEEE Transactions on smart grid*, IEEE, v. 1, n. 1, p. 20–27, 2010. 11
- REIS, D. C. S. D. Um algoritmo branch and bound para o problema da alocação ótima de monitores de qualidade de energia elétrica em redes de transmissão. *Juiz de Fora, MG*, 2007. 16
- RODRIGUES, L. R. et al. A modified symbiotic organisms search algorithm applied to flow shop scheduling problems. In: *2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. [S.l.]: IEEE, 2018. p. 1–7. 17
- SHUKLA, D.; SINGH, S. Real-time estimation of atc using pmu data and ann. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Wiley Online Library, v. 14, n. 17, p. 3604–3616, 2020. 11
- SRIVASTAVA, D.; KALRA, M. Improved symbiotic organism search based approach for scheduling jobs in cloud. In: *Proceedings of the International Conference on Advanced Informatics for Computing Research*. [S.l.]: Springer, Singapore, 2020. p. 453–461. 17
- TAI, X. et al. Optimal pmu placement for power system state estimation with random component outages. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 51, p. 35–42, 2013. 50