Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica

Trabalho de Conclusão de Curso

Estimação de estados de sistemas incertos: Uma abordagem via filtro de partículas e LMIs

Letícia Maria Sathler Vianna

João Monlevade, MG
2018

Letícia Maria Sathler Vianna

Estimação de estados de sistemas incertos: Uma abordagem via filtro de partículas e LMIs

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.
Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga
Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2018

V617e Vianna, Letícia Maria Sathler.
Estimação de estados de sistemas incertos [manuscrito]: uma abordagem via filtro de partículas e LMIs / Letícia Maria Sathler Vianna. - 2018.

58f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.
Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia elétrica. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Controle robusto. I. Braga, Márcio Feliciano. II. Campos, Víctor Costa da Silva. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 621.3.011.7

Catalogação: ficha@sisbin.ufop.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Colegiado do Curso de Engenharia de Elétrica

ATA DE DEFESA

Aos 20 dias do mês de fevereiro de 2018, às 12 horas e 30 minutos, no bloco B deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pela formanda Letícia Maria Sathler Vianna, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Márcio Feliciano Braga, Víctor Costa da Silva Campos, Anny Verly e Rodrigo Augusto Ricco.

O candidato apresentou a monografia intitulada: Estimação de estados de sistemas incertos: Uma abordagem via filtro de partículas e LMIs. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela Aprovação da candidata, com a nota média 10,0, de acordo com a Tabela 1. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo formando.

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

Banca Examinadora	Nota
Márcio Feliciano Braga	10
Víctor Costa da Silva Campos	10
Anny Verly	10
Rodrigo Augusto Ricco	10
Média	10

João Monlevade, 20 de fevereiro de 2018.

Márcio Feliciano Braga
Professor Orientador

Víctor Costa da Silva Campos
Professor Coorientador

Letícia Maria Sathler Vianna
Aluna

Anny Verly
Professora Convidada

Rodrigo Augusto Ricco
Professor Convidado

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Colegiado do Curso de Engenharia de Elétrica

TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado **"Estimação de estados de sistemas incertos: Uma abordagem via filtro de partículas e LMIs"** é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 21 de fevereiro de 2018.

Letícia Maria Sathler Vianna

Letícia Maria Sathler Vianna

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor incondicional.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar todas as dificuldades.

Agradeço de forma especial ao meu pai, José Vianna, que sempre me incentivou e esteve presente nessa jornada; sem ele não teria alcançado essa vitória. À minha tia, Maria Garcia Vianna, pelo exemplo de guerreira.

Aos professores Márcio e Víctor pela orientação, paciência e disponibilidade. Agradeço por sempre enxergarem além do que meus olhos podiam ver e por serem exemplo de pesquisadores e de pessoas.

Aos amigos que a universidade me proporcionou e que fizeram meus dias mais felizes; para evitar a indelicadeza de esquecer alguns nomes, deixo de citá-los. A todos, muito obrigada.

"Anyone who has never made a mistake has never tried anything new."
– Albert Einstein

Resumo

A estimação de estados está presente em múltiplas áreas do conhecimento e em diversos problemas. O presente trabalho apresenta a estimação de estados para sistemas incertos utilizando duas abordagens: desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e via filtro de partículas. Neste texto, são apresentados o embasamento teórico de ambas abordagens e os resultados encontrados. Os métodos foram aplicados em duas plantas existentes no Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas (ICEA) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) tendo como finalidade comparar a eficácia de ambos. A primeira planta consiste em um módulo didático que trata de sistemas robustos incertos que tem por finalidade ser utilizado em disciplinas que envolvam modelagem e controle de sistemas dinâmicos; e a segunda, uma câmara termoeletricamente controlada.

Palavras-chave: Sistemas incertos, estimação de estados, LMIs, filtro de partículas, controle robusto, parâmetros incertos.

Abstract

States estimation is frequently used in multiple areas and in a considerable number of problems. This work presents a states estimation for uncertain systems using two approaches: by applying Linear Matrix Inequalities (LMIs) and via particle filter. In this text, the theoretical basis of both approaches and the results found through them are presented. In order to compare their efficiency, they were applied on two different plants at the Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas (ICEA) of Universidade Federal de Outro Preto (UFOP). The first plant is a didatic module that deals with uncertain robust systems, which aims to be used in courses on modeling and controling dynamic systems. The second one is a thermoelectrically controlled chamber.

Keywords: Uncertain systems, state estimation, LMIs, particles filter, robust control, uncertain parameters.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

1.1 O problema de estimação de estados

O problema de estimação de estados consiste em construir, para cada instante de tempo k, uma estimativa $\hat{x}(k)$ de um determinado estado $x(k)$ medindo apenas a saída $y(k)$ e a entrada $u(k)$.

Considera-se o modelo de evolução, dado por

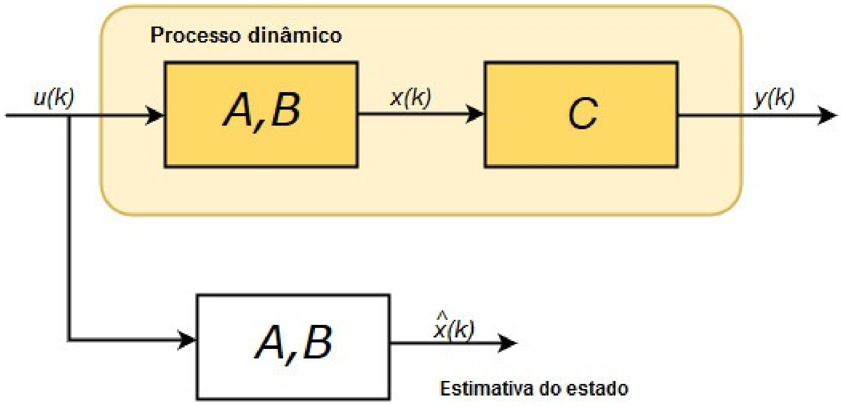
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{1.1}$$

que, juntamente ao modelo de observação, representado por

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \tag{1.2}$$

constituem uma representação em espaço de estados do sistema (SEPPÄNEN, 2005). Em que o vetor x é composto por n estados, o vetor u por m entradas e o vetor y por k saídas. Assim, a matriz $A \in \Re^{nxn}$, a matriz $B \in \Re^{nxm}$, a matriz $C \in \Re^{kxn}$ e a matriz $D \in \Re^{kxm}$. O processo de estimação em malha aberta pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 – Processo de estimação de estado.



Note que uma cópia do sistema é criada, representada pelo simulador do tipo

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k),$$

cujo objetivo é reproduzir o comportamento real do sistema.

A partir da análise da Figura 1, pode-se verificar que a estimação de estados é um processo em que são usados dados dinâmicos do sistema para estimar valores que descrevem completamente os estados do sistema de acordo com algum modelo representativo (CHING; BECK; PORTER, 2006).

1.2 Aplicações

A estimação de estados pode ser aplicada tanto em sistemas lineares quanto em sistemas não lineares. Entretanto, para sistemas lineares, essa é feita de forma mais simples (SIMON, 2006). É aplicada em diversos problemas e múltiplas áreas de conhecimento. Alguns exemplos de aplicações incluem: navegação, orientação espacial, determinação de órbitas (SEPPÄNEN, 2005), como no programa espacial Apollo coordenado pela NASA (agência espacial dos Estados Unidos, sigla em inglês de *National Aeronautics and Space Administration*), em que foi feita a estimação das trajetórias da nave por meio do filtro de Kalman (SCHMIDT, 2012). Ou ainda, na detecção de mudanças das propriedades dinâmicas de sistemas estruturais durante terremotos em razão da capacidade de estimar estados do sistema em tempo real (CHING; BECK; PORTER, 2006).

O problema de estimação de estados é utilizado para estimar os estados desconhecidos em diversas redes neurais recorrentes que são estruturas de processamento capazes de representar uma grande variedade de comportamentos dinâmicos e atrasos desconhecidos de tempo (WANG; WANG; WU, 2016). Além disso, também, pode ser aplicada na extração de petróleo, como apresentado em Abreu (2016). Nesse projeto, a estimação é realizada, principalmente, como forma de estimar as variáveis medidas pelo sensor de fundo de poço permanente (PDG, do inglês *Permanent Downhole Gauge*) em situações em que ocorram falhas e, consequentemente, perda de dados.

1.3 Sistemas incertos

O controle de sistemas incertos é um dos principais tópicos da teoria de controle moderno, os quais podem apresentar incertezas paramétricas ou estruturais.

As incertezas paramétricas ocorrem quando a planta é conhecida, cujos parâmetros podem ser variantes no tempo ou até mesmo desconhecidos. Em relação às incertezas estruturais, as quais os parâmetros da planta são insuficientes para realizar a estimação do modelo, o sistema dinâmico não é precisamente conhecido podendo apresentar diversas interpretações. Nesse caso, o processo de projeto de um controlador eficaz é dificultado (HESPANHA; LIBERZON; MORSE, 2003).

Para lidar com sistemas que apresentam modelagem precária ou grandes incertezas, como a variação de parâmetros e distúrbios externos, são utilizadas, por exemplo, estratégias de controle robusto e controle adaptativo (OLIVEIRA, 2006).

1.4 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é realizar aplicações de métodos de estimação de estados clássicos para sistemas incertos utilizando filtro de partículas e filtros projetados via desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Posteriormente, objetiva-se aplicá-los em um módulo didático que trata de sistemas robustos que tem por finalidade ser utilizado em disciplinas que envolvam modelagem e controle de sistemas dinâmicos. E em uma câmara termoeletricamente controlada com o intuito de estimar os estados desconhecidos de forma *offline*.

1.4.1 Objetivos específicos

- Revisão bibliográfica sobre estimação de estados;
- Aprendizado de LMIs e filtro de partículas aplicados a estimação de estados;
- Aplicação das técnicas em ambiente simulado;
- Aplicação das técnicas projetadas no módulo didático;
- Aplicação das técnicas projetadas na câmara termoeletricamente controlada;
- Análise comparativa das abordagens de controle utilizadas.

1.5 Estrutura do Trabalho

Este trabalho é composto por cinco capítulos organizados da seguinte maneira.

O Capítulo 1 descreve os assuntos introdutórios pertinentes ao trabalho, tal como as aplicações e a estrutura dos capítulos adotados.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão do conceito de estimação de estados, alguns conceitos e ferramentas matemáticas fundamentais para a elaboração deste trabalho.

O Capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica e as metodologias para a estimação do projeto do filtro utilizando LMIs e os resultados obtidos aplicando a filtragem em um exemplo simulado.

O Capítulo 4 destina-se a fundamentação teórica e as metodologias para a estimação de estados por meio do filtro de partículas, além da apresentação dos resultados da implementação da técnica em exemplos simulados.

O Capítulo 5 realiza a apresentação das técnicas projetadas aplicadas em duas plantas distintas, sendo a primeira um módulo didático desenvolvido com o intuito de ser utilizados em disciplinas de controle. A segunda planta, intitulada câmara termoelétrica controlada, na qual é objetivado o controle da temperatura interna da câmara.

Finalmente o Capítulo 6 destina-se ao registro das conclusões encontradas para ambas as plantas e à indicação de possíveis trabalhos futuros.

2 Estimação de estado

2.1 O que é?

A estimação de estados, de acordo com Frazao (2010), é um procedimento matemático capaz de determinar a melhor estimativa de um conjunto de variáveis de estado, a qual determina a condição de operação de um determinado sistema. Funciona como uma ferramenta de filtragem para eliminar e/ou compensar erros e possíveis faltas de dados ou mesmo estimar sinais que não estão normalmente disponíveis no processo.

A solução para o problema de estimação de estados tem como base a técnica de recursividade em algoritmos, na qual cada estimativa atualizada dos estados é feita a partir da estimativa anterior e dos novos dados de entrada colhidos (HAYKIN et al., 2001).

Existem dois tipos de estimativas: estimação de estados sequencial, utilizada para controle em tempo real, em que a estimativa *a priori* de um estado do processo é atualizada continuamente e as melhores estimativas encontradas são utilizadas para realizar o controle do sistema. E a estimação de estados não sequencial, que necessita de uma base completa de dados inicial para então ser realizada a estimação (RAY, 1980).

Os algoritmos de estimação de estados que apresentam sinais contaminados com ruídos podem ser classificados em três categorias.

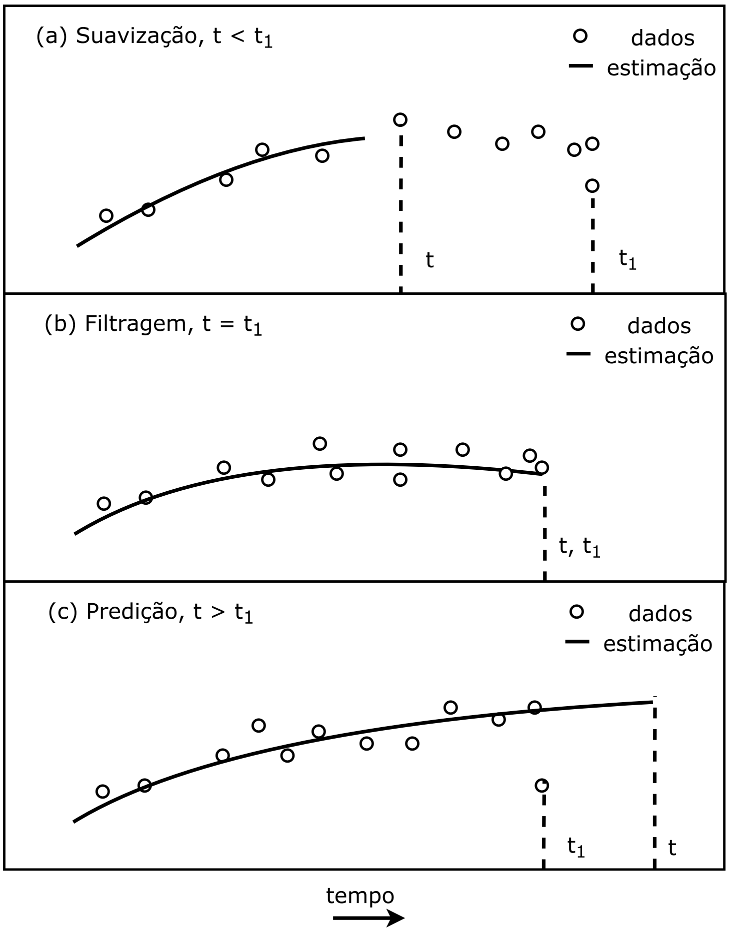
1. Suavização: técnica não sequencial utilizada quando a estimação não necessita ser feita em tempo real. Assim, a estimativa no tempo t é feita tomando dados antes e depois do instante t. Portanto, a suavização não fornece a estimativa em tempo real do instante t, somente do estado em algum momento entre t_1 e t, como apresentado na Figura 2 (a). Desta forma, $t < t_1$.

2. Filtragem: estimativa do tempo t realizada a partir de dados até o instante t e não além desse. Desse modo, as estimativas estão em $t = t_1$. Essa é a técnica de estimação mais comum utilizada em leis de controle com realimentação de estados, em razão das estimativas de estados serem atualizadas de forma sequencial (OGUNNAIKE; RAY, 1994).

3. Predição: técnica empregada quando deseja-se extrapolar as medições de dados, na qual as estimativas do tempo t são feitas até o tempo t_1. Assim, $t > t_1$. As situações nas quais a predição é empregada podem surgir quando ocorrem atrasos de análise em medições de resultados ou quando os estados possuem atrasos de tempo.

Em situações em que é desejado trabalhar com filtragem ou predição, é considerado normalmente modos de aplicação para estimação *online*. Quando é utilizado o problema

Figura 2 – Tipos de estimação de estados: a) Suavização, b) Filtragem e c) Predição.



Fonte: Adaptado de Ray (1980).

de suavização comumente considera-se trabalhar com estimação *offline*. Entretanto, esse problema pode tratar de processos *online* desde que atrasos entre a obtenção de medidas do sistema e sua estimativa não tenham fator de relevância (KALMAN et al., 1960).

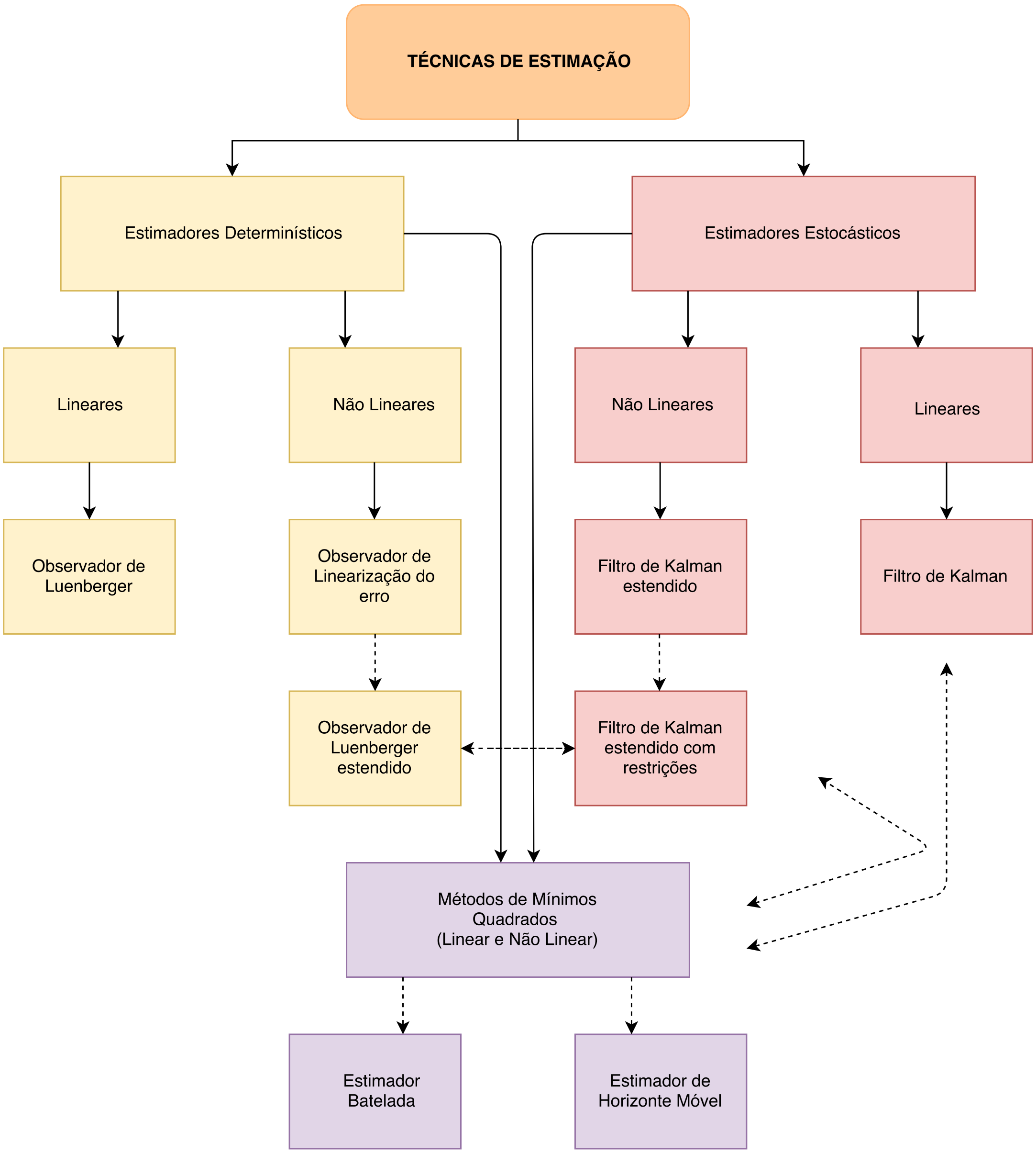
2.2 Observadores e Filtro de Kalman

Um grande número de técnicas de estimação de estados utilizando abordagens determinísticas e estocásticas pode ser encontrado. Realizando a divisão dessas duas abordagens em grupos, como apresentado na Figura 3, os observadores estão contidos no grupo de estimadores determinísticos e o filtro de Kalman no grupo de estimadores estocásticos (PAIM, 2009).

Quando o modelo é incerto, em termos de incertezas politópicas, não é possível fazer um estimador observador, assim é necessário projetar um filtro. Entretanto, os filtros não funcionam se o sistema não for estável em malha aberta.

A definição de observabilidade, segundo Simon (2006), para sistemas lineares no

Figura 3 – Técnicas de estimação.



Fonte: Adaptada (PAIM, 2009).

caso discreto é:

> *"Um sistema de tempo discreto é observável se qualquer condição inicial x_0 puder ser determinada unicamente pela entrada u_i e pela saída y_i a partir de um número finito de medições."*

Dessa forma, se o sistema é observável então seu estado inicial pode ser determinado. Assim, todos os estados entre o tempo final e inicial também podem ser (SIMON, 2006).

Nem sempre os estados estão disponíveis para realimentação, devido à falta de conhecimento dos estados do sistema. Entretanto, se o sistema for completamente observável, é possível projetar um observador para realizar a estimação de estados a partir do conhecimento do estado, da entrada e da saída do sistema, cuja estimação é realizada por filtros dinâmicos do tipo (IOANNOU; SUN, 2012)

$$\hat{x}(k+1) = A_f\hat{x}(k) + B_f u(k) + K_f y(k),$$

em que $\hat{x}$ é o estado estimado e K_f o ganho do observador.

Para realizar a estimação para sistemas invariantes no tempo sem incertezas, são utilizados filtros tais como o observador de Luenberger e o filtro de Kalman. O primeiro trata do caso determinístico, em que o ganho K_f é responsável por fazer o erro convergir para zero, dado um sistema completamente observável na forma (1.1) e (1.2) (LUENBERGER, 1966).

Quanto ao filtro de Kalman, que trata do caso estocástico, considera-se que é inserido um ruído branco e gaussiano dado por $w(k)$, em que o ganho do observador K_f é utilizado para minimizar a variação do erro de estimação, cujo modelo utilizado para representar o sistema é (AGUIRRE, 2004)

$$\begin{aligned} x(k+1) =& Ax(k) + Bu(k) + w(k), \\ y(k) =& Cx(k) + Du(k). \end{aligned}$$

Esse filtro realiza a propagação da média e covariância do estado ao longo do tempo. Quando o filtro de Kalman é utilizado para a estimação de estados, a atualização do estado pode ser medida e sua média e covariância podem ser aproximadas usando métodos estatísticos (SIMON, 2006).

Dessa forma, o filtro de Kalman é a solução ótima e centralizada para resolver o problema de estimação de estados de sistemas lineares e gaussianos (AGUIRRE, 2004).

O algoritmo originalmente proposto por Kalman (KALMAN; BUCY, 1961) é aplicado apenas em sistemas lineares. Entretanto, é possível utilizá-lo em sistemas não lineares realizando analiticamente a linearização das equações do sistema. A partir dessa alteração, o filtro passa a ser conhecido como filtro de Kalman Estendido (AGUIRRE, 2004).

Existe também na literatura, o filtro de Kalman *unscented*, o qual não requer a linearização analítica das equações, como no caso anterior. Além disso, o filtro de Kalman *unscented* destaca-se por utilizar uma forma mais eficiente para o cálculo da propagação temporal da média e da matriz de covariância dos estados do sistema não linear (WAN; MERWE, 2000).

Se a média e a covariância das atualizações não são como esperadas, então ocorreu algo de inesperado com o filtro. Dessa maneira, o modelo ou mesmo as estatísticas de ruído adicionadas ao sistema podem estar incorretas. A fim de melhorar o desempenho, os parâmetros do filtro de Kalman podem ser ajustados (SIMON, 2006).

3 Estimação de estados via LMI

3.1 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) são ferramentas matemáticas amplamente utilizadas em teoria de controle em razão de vantagens. As LMIs são aplicadas na resolução de problemas envolvendo muitas variáveis matriciais, além de ser um método flexível para resolver problemas que apresentam restrições associadas aos métodos convencionais (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007).

As LMIs se caracterizam por poderem ser resolvidas numericamente de maneira eficaz e também por permitirem a incorporação de restrições adicionais como, por exemplo, incertezas no modelo (PERES, 1997).

As LMIs apresentam a forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i > 0, \tag{3.1}$$

sendo o vetor $x \in \Re^n$ e as matrizes $F_i = F_i' \in \Re^{nxn}$, dado $i = 0, ..., n$. Como $F(x) > 0$ então (3.1) deve ser definida positiva para todo x, ou seja, $u'F(x)u > 0$ para todo vetor $u \neq 0$ (BOYD et al., 1994).

A LMI $F(x) > 0$ equivale a um conjunto de n desigualdades polinomiais em x, obtidas impondo a condição de que os menores principais líderes da $F(x)$ devem ser positivos. A desigualdade (3.1) é uma restrição convexa em x (BOYD et al., 1994).

Assim, as desigualdades lineares, as desigualdades quadráticas (convexas) e as restrições que surgem da teoria de controle, como Lyapunov, podem ser representadas na forma de uma LMI. As desigualdades convexas também podem ser convertidas em LMIs por meio do complemento de Schur (BOYD et al., 1994).

O complemento de Schur em relação a R é representado por

$$\begin{gathered} R(x) > 0, \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

em que $Q(x) = Q(x)'$, $R(x) = R(x)'$ e $S(x)$ depende de x.

O complemento de Schur (3.2) pode ser convertido na seguinte desigualdade matricial

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0.$$

Note que também é possível realizar a conversão em sentido inverso, na qual uma LMI será representada pelo seu complemento de Schur.

3.2 Análise de Estabilidade por Meio de LMI

Um sistema linear discreto no tempo, descrito por

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{3.3}$$

com $A \in \Re^{nxn}$, é assintoticamente estável se uma das condições apresentadas a seguir forem verificadas:

- $\lim_{k \to \infty} x(k) \to 0$;
- $max_i \; |\lambda_i(A)| < 1, \; \forall i = 1, ..., n$.

De acordo com Boyd et al. (1994), outra forma de verificar a estabilidade é por meio de uma função de Lyapunov candidata $v(x)$, devendo ser verificadas duas condições. Para $\forall x \neq 0$:

- $v(x) > 0$;
- $v(x(k+1)) - v(x(k)) < 0$.

Assumindo que a função candidata é dada por

$$v(x) = x'Px, \tag{3.4}$$

em que $P = P' > 0$, calculando a primeira diferença de (3.4) e utilizando (3.3), tem-se

$$\begin{aligned} v(x(k+1)) - v(x(k)) &= x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) < 0, \\ &= x(k)'(A'PA - P)x(k) < 0, \\ &= A'PA - P < 0. \end{aligned}$$

Portanto, para determinar se A é estável, basta encontrar uma solução factível de $P = P' \in \Re^{nxn}$ tal que

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A'PA - P &< 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3 Sistemas incertos

Os modelos de sistemas físicos são representados usualmente por espaço de estados descritos por variáveis de estado. Pertubações, variações ou incertezas podem afetar sistemas físicos. Frequentemente, as incertezas são apresentadas como variações dos parâmetros ou coeficientes do modelo, quando totalmente ou parcialmente conhecidos (SCHERER; WEILAND, 2000).

O sistema linear para o caso discreto incerto pode ser representado da forma

$$x(k+1) = A(\cdot)x(k);$$
$$A(\cdot) \in \mathscr{A},$$

em que $A(\cdot)$ é a representação incerta da matriz A, sendo $\mathscr{A}$ um politopo de incertezas.

Para as considerações que se seguem, supõe-se que $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p)$ seja o vetor que representa todas as incertezas em um sistema dinâmico.

Assim, existem dois casos distintos de incertezas. As invariantes no tempo, nas quais o vetor α é fixo e os elementos incertos então contidos no conjunto $\Delta \subseteq \Re^p$. Quando os parâmetros incertos são variantes no tempo, o vetor α é desconhecido, varia em função do tempo e os valores de $\alpha(k)$ pertencem ao conjunto de incertezas $\Delta \subseteq \Re^p$ (SCHERER; WEILAND, 2000).

3.3.1 Parâmetros incertos

As incertezas podem ser de tipos diferentes, tais como afim, politópicas, limitadas em norma ou intervalares. As duas primeiras serão discutidas a seguir.

3.3.1.1 Incertezas na forma afim

O modelo incerto pode ser representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ C(\alpha) & D(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix},$$

em que α é variante ou invariante no tempo.

As matrizes do sistema incerto com os parâmetros dependentes na forma afim, dado por α, são escritas como

$$A(\alpha) = A_0 + \alpha_1 A_0 + ... + \alpha_p A_p,$$
$$B(\alpha) = B_0 + \alpha_1 B_0 + ... + \alpha_p B_p,$$
$$C(\alpha) = C_0 + \alpha_1 C_0 + ... + \alpha_p C_p,$$
$$D(\alpha) = D_0 + \alpha_1 D_0 + ... + \alpha_p D_p,$$

tendo p parâmetros incertos (SCHERER; WEILAND, 2000).

3.3.1.2 Incertezas politópicas

Supondo que a matriz A do sistema não seja precisamente conhecida, mas pertença a um politopo de incertezas $\mathscr{A}$, qualquer matriz A dentro do domínio de incertezas pode ser escrita como a combinação convexa dos vértices A_i , sendo $i = 1, ..., N$, do politopo, ou seja, $A(\alpha) \in \mathscr{A}$ (LEITE et al., 2004). Assim,

$$\mathscr{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i; \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1; \quad \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Se a matriz incerta A depender de l parâmetros incertos limitados superiormente por $l_{\max}$ e inferiormente por $l_{\min}$, então o número de vértices do sistema é

$$N = 2^l.$$

3.3.2 Estabilidade

Considere um sistema incerto representado por

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k), \tag{3.6}$$

em que $x \in \Re^{nxn}$ é o vetor de estados e $A(\alpha) \in \mathscr{A}$, sendo dada pela combinação convexa dos vértices do politopo. Então, a estabilidade de (3.6) pode ser verificada utilizando uma função de Lyapunov dependente do parâmetro incerto α. $A(\alpha)$ é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov que satisfaça com $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \Re^{nxn}$ as seguintes LMIs

$$\begin{gathered} P(\alpha) > 0, \\ A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Se A não apresentar incertezas, então basta testar as LMIs em (3.7) com P constante (LEITE et al., 2004).

As condições (3.7), considerando $P(\alpha)$ dada por P, são conhecidas como estabilidade quadrática (EQ), essa condição pode ser verificada através da convexidade da desigualdade de Lyapunov (LEITE et al., 2004). Note ainda que se o sistema for composto de apenas um vértice, isto é, o sistema é precisamente conhecido, então (3.7) recupera (3.5).

3.4 Filtragem para sistemas lineares incertos

A filtragem, para o caso de sistemas de controle, tem como objetivo obter estimativas de grandezas que possuam ruídos que atrapalham a obtenção de alguns parâmetros do sistema. A fim de obter uma representação mais fiel do sistema modelado emprega-se a teoria de Lyapunov tanto para a análise de estabilidade quanto para a síntese de controladores e filtros. Essa teoria pode ser aplicada tanto para sistemas lineares quanto para não lineares, resultando, de modo geral, em condições baseadas em LMIs (LACERDA, 2014).

Considerando o sistema linear incerto invariante no tempo

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A(\alpha)x + B_1(\alpha)w, \\
z &= C_1(\alpha)x + D_{11}(\alpha)w, \\
y &= C_2(\alpha)x + D_{21}(\alpha)w,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

em que $A(\alpha) \in \Re^{nxn}$, $B_1(\alpha) \in \Re^{nxr}$, $C_1(\alpha) \in \Re^{pxn}$, $D_{11}(\alpha) \in \Re^{pxr}$, $C_2(\alpha) \in \Re^{qxn}$ e $D_{21}(\alpha) \in \Re^{qxr}$. O estado é representado por $x \in \Re^n$, $w \in \Re^r$ é o ruído, $z \in \Re^p$ é a saída de referência e $y \in \Re^q$ é a saída medida (LACERDA, 2014). Por simplicidade de notação os vetores no instante k são denotados sem o contador temporal. Por exemplo, o vetor $x(k)$ é denotado por x.

As matrizes do modelo incerto (3.8) estão contidas em um domínio politópico parametrizado em função do vetor de incertezas α. Assim,

$$
Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i \ , \quad \alpha \in \mathscr{A},
$$

sendo $Z(\alpha)$ qualquer matriz do sistema (3.8).

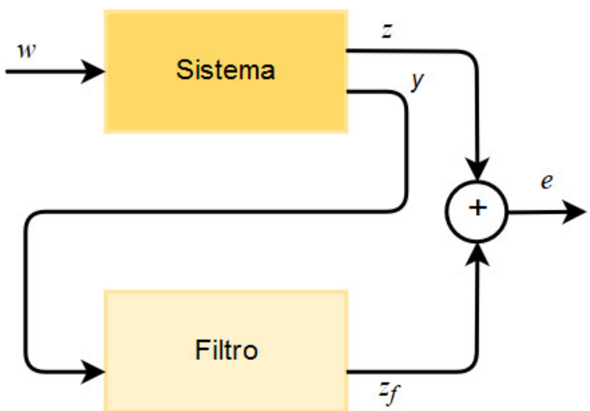
O objetivo do filtro que será projetado é atender às seguintes restrições: robustez, estabilidade, ordem completa, linearidade e invariância no tempo. Além disso, o filtro é descrito como

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(k+1) &= A_f\hat{x} + B_f y, \\
z_f &= C_f\hat{x} + D_f y,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

em que $A_f \in \Re^{nxn}$, $B_f \in \Re^{nxq}$, $C_f \in \Re^{pxn}$ e $D_f \in \Re^{pxq}$, sendo $\hat{x} \in \Re^n$ o estado estimado e $z_f \in \Re^p$ a saída estimada.

O problema de filtragem é ilustrado por Lacerda (2014) por meio do diagrama de blocos apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Problema de Filtragem.



Fonte: Adaptado de Lacerda (2014).

O processo da Figura 4 resume-se na entrada de um ruído w ao sistema e dele saem duas saídas. A saída de medição y é empregada no processo da obtenção do filtro (3.9). E a saída de referência z é utilizada para encontrar o erro de estimação realizado por meio da diferença entre z e a saída do filtro z_f, dado por

$$e = z - z_f. \tag{3.10}$$

Para representar o modelo referente à Figura 4 é utilizado um sistema aumentado, responsável por englobar ao sistema o filtro projetado. O sistema aumentado é definido como sendo

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D_{21} \end{bmatrix} w,$$
$$e = \begin{bmatrix} C_1 - D_f C_2 & -C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} - D_f D_{21} \end{bmatrix} w.$$

Após a realização da definição do erro (3.10), o vetor de estados aumentado é definido $\tilde{x}' = [x' \;\; \hat{x}']$. Dessa maneira, tem-se

$$\mathscr{G} \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(\alpha)\tilde{x} + \tilde{B}(\alpha)w, \\ \qquad\quad e = \tilde{C}(\alpha)\tilde{x} + \tilde{D}(\alpha)w, \end{cases} \tag{3.11}$$

em que $\mathscr{G}$ representa o sistema aumentado. As matrizes que o compõem são definidas como

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f C_2(\alpha) & A_f \end{bmatrix} \in \Re^{2n\times 2n},$$
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ B_f D_{21}(\alpha) \end{bmatrix} \in \Re^{2n\times r},$$
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1(\alpha) - D_f C_2(\alpha) & -C_f \end{bmatrix} \in \Re^{p\times 2n},$$
$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} D_{11}(\alpha) - D_f D_{21}(\alpha) \end{bmatrix} \in \Re^{p\times r}.$$

O problema abordado é encontrar um filtro (3.9) tal que a dinâmica do erro do sistema aumentado (3.11) seja assintoticamente estável e o desempenho da norma $\mathscr{H}_2$ ou $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para o erro e seja limitado (LACERDA, 2014).

3.5 Projeto de filtros utilizando LMI

O projeto de filtros tem como objetivo realizar a criação de um sistema para reproduzir sinais de interesse que tenham a menor influência possível em relação ao ruído presente nos sinais de entrada do filtro. Quando o modelo apresenta parâmetros bem definidos, uma solução ótima é encontrada utilizando o filtro de Kalman. Entretanto, os sistemas reais apresentam, em sua maioria, parâmetros incertos (MARTINS, 2007).

As incertezas podem aparecer devido à influência de fatores externos e à natureza do sistema. Nesse caso, o filtro projetado com as características nominais do sistema pode não ser mais eficiente, surgindo a necessidade de levar as incertezas em consideração. Como consequência, o filtro deve ser do tipo robusto — o qual é tolerante às variações das características do sistema (MARTINS, 2007).

Para os sistemas sujeitos a pertubações, atraso de tempo e incerteza de parâmetros, entre outros fatores, é empregada a teoria de Lyapunov tanto para tratar a análise de estabilidade quanto para realizar a síntese de controladores e filtros, resultando em condições baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs). Nesse caso, um problema escrito na forma de LMI pode ser solucionado por meio de algoritmos computacionais de programação convexa (LACERDA, 2014).

Para um determinado valor de α, a função de transferência de w para e é dada por

$$H(z,\alpha) = \tilde{C}(\alpha)(zI - \tilde{A}(\alpha))^{-1}\tilde{B}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha). \tag{3.12}$$

As normas $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$ da matriz de transferência do sinal de ruído em relação ao erro de estimação (3.12) são muitas vezes utilizadas como critérios de desempenho em projetos de filtros. O motivo da escolha é a capacidade dos critérios citados em abordar o caso em que o sistema é afetado por um sinal de ruído com características estatísticas tanto conhecidas quanto desconhecidas (LACERDA, 2014).

3.5.1 Desempenho nominal

Os sistemas reais estão sujeitos a pertubações sendo, diversas vezes, necessário verificar o reflexo dessa pertubação na saída. Para realizar a quantificação desse reflexo são utilizadas as normas.

Normas nada mais são que formas de medida e podem ser calculadas de diferentes formas, como será apresentado a seguir. Logo, o quociente entre a saída do sistema aumentado e e a pertubação de entrada w quantifica o ganho relativo que a entrada possui sobre a saída.

Norma $\mathscr{H}_\infty$

Considere a função de transferência dada por (3.12). Para um determinado valor de α, a norma $\mathscr{H}_\infty$ no domínio da frequência é dada por

$$\|H(z)\|_\infty = \sup_{\omega\in[-\pi,\pi]} \sigma_{max}(H(\exp(j\omega))),$$

em que σ_{max} representa o maior valor singular de uma matriz. Assim, a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência é o supremo do máximo valor singular da resposta em frequência do sistema.

A norma possui uma correspondência temporal, dada por

$$\|H(z)\|_\infty^2 = \sup_{\|w(k)\|\neq 0, w(k)\in l_2} \frac{\|e(k)\|^2}{\|w(k)\|^2},$$

em que l_2 representa o espaço para sinais de energia finita de sequências discretas no tempo (SCHERER; WEILAND, 2000).

Norma $\mathscr{H}_2$

Por simplicidade, o termo de transmissão direta é desconsiderado, ou seja $D = 0$ do sistema (3.8). Caso seja considerado, basta incluir $Tr(D'D) = Tr(DD')$ no desenvolvimento.

A norma $\mathscr{H}_2$ é definida como

$$\begin{aligned} \|H(z)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Tr[(H(\exp(j\omega))^* H(\exp(j\omega)))]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_i \sigma_i(H(\exp(j\omega)))d\omega. \end{aligned}$$

Para o caso de sistemas incertos, considerando estabilidade quadrática, obtém-se o custo garantido $\mathscr{H}_2$ (BARBOSA; SOUZA; TROFINO, 2005).

Para sistemas estáveis, as normas podem ser computadas por meio da função de Lyapunov (3.4) a partir de um procedimento convexo de otimização (LACERDA, 2014).

3.5.2 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_2$

3.5.2.1 Projeto de filtro via abordagem primal

Neste trabalho, considera-se o caso da estabilidade quadrática. Por simplicidade, considera-se $D_{11} = 0$ e $D_f = 0$. Caso fossem considerados diferentes de zero, o valor da norma não seria uma constante.

Para o filtro, é desejável determinar uma matriz $P \in \Re^{2n\text{x}2n}$ simétrica definida positiva, $M \in \Re^{r\text{x}r}$, $\rho > 0$ e as matrizes do filtro $A_f \in \Re^{n\text{x}n}$, $B_f \in \Re^{n\text{x}q}$ e $C_f \in \Re^{p\text{x}n}$.

Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema $\mathscr{H}_2$ com custo garantido para ρ se existirem matrizes $M \in \Re^{r\text{x}r}$, $Z = Z' \in \Re^{n\text{x}n}$, $X = X' \in \Re^{n\text{x}n}$, $F \in \Re^{p\text{x}n}$, $L \in \Re^{n\text{x}q}$, $G \in \Re^{n\text{x}n}$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2, \tag{3.13}$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0, \tag{3.14}$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & C_1' - F' \\ * & X & A'Z & A'X + C_2'L' & C_1' \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I_p \end{bmatrix} > 0. \tag{3.15}$$

As manipulações matemáticas realizadas para obter as LMIs (3.13), (3.14) e (3.15) podem ser encontradas em Geromel et al. (2000). No caso em que as LMIs (3.13), (3.14) e (3.15)forem satisfeitas, a recuperação das matrizes do filtro são dadas por

$$A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad B_f = (U')^{-1}L, \quad C_f = F(VZ)^{-1}. \tag{3.16}$$

sendo $U \in \Re^{n \times n}$ e $V \in \Re^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias obtidas a partir da identidade

$$XZ^{-1} + U'V = I.$$

3.5.2.2 Projeto de filtro via abordagem dual

O projeto do filtro $\mathscr{H}_2$ dual possui custo garantido $\mathscr{H}_2$ dado por $\rho > 0$ que pode ser obtido das condições duais, a qual é dada pela existência de $A_f \in \Re^{n \times n}$, $B_f \in \Re^{n \times q}$, $C_f \in \Re^{p \times n}$ e $W \in \Re^{2n \times 2n}$.

Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema $\mathscr{H}_2$ com custo garantido para ρ se existirem matrizes $M \in \Re^{r \times r}$, $Z = Z' \in \Re^{n \times n}$, $X = X' \in \Re^{n \times n}$, $F \in \Re^{p \times n}$, $L \in \Re^{n \times q}$, $G \in \Re^{n \times n}$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2, \tag{3.17}$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0, \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ * & X & A'Z & A'X + C_2'L' & XB_1 + LD_{21} \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I_r \end{bmatrix} > 0. \tag{3.19}$$

As manipulações matemáticas podem ser encontradas em Geromel et al. (2000). No caso em que as LMIs (3.17), (3.18) e (3.19) forem satisfeitas, as matrizes do filtro são dadas por (3.16).

As matrizes do filtro $\mathscr{H}_2$ dual são idênticas às encontradas no caso primal. Os valores ótimos de norma $\mathscr{H}_2$ obtidos pelos métodos primal e dual são os mesmos para os casos precisamente conhecidos. Entretanto, para casos incertos, diferenças podem ocorrer dependendo do sistema em análise.

3.5.3 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_\infty$

O problema consiste em projetar um filtro que minimize o valor máximo do ganho de energia entre a entrada do sistema w e o erro de estimação e por ela provocado (SHAKED; THEODOR, 1992).

Os filtros $\mathscr{H}_\infty$ passaram a ter ampla aplicação em situações que requerem robustez, uma vez que são menos sensíveis a variações de parâmetros do que os estimadores de variância mínima. Como, por exemplo, quando o sistema original apresenta algum tipo de incerteza ou não linearidade ou mesmo quando as características estatísticas dos sinais envolvidos no problema não são precisamente conhecidas (SHAKED; THEODOR, 1992).

Neste trabalho, o projeto do filtro $\mathscr{H}_\infty$ considera estabilidade quadrática. O *bounded real lemma* (SCHERER; WEILAND, 2000), versão discreta, aplicado ao sistema aumentado, garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica $\tilde{A}$ e um limitante γ para a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e se existir uma matriz simétrica definida positiva P.

As condições são dadas pela existência de $A_f \in \Re^{nxn}$, $B_f \in \Re^{nxq}$, $C_f \in \Re^{pxn}$ e de uma matriz $P \in \Re^{2nx2n}$ simétrica definida positiva.

Existem A_f, B_f, C_f e D_f tais que a dinâmica do erro é estável com norma $\mathscr{H}_\infty$ menor do que $\gamma > 0$ se existirem matrizes $Z = Z' \in \Re^{nxn}$, $X = X' \in \Re^{nxn}$, $F \in \Re^{pxn}$, $L \in \Re^{nxq}$, $G \in \Re^{nxn}$ e $D_f \in \Re^{pxq}$ tais que

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZA & ZA & ZB_1 & 0 \\ * & X & XA + LC_2 + G & XA + LC_2 & XB_1 + LD_{21} & 0 \\ * & * & Z & Z & 0 & C_1' - C_2'D_f' - F' \\ * & * & * & X & 0 & C_1' - C_2'D_f' \\ * & * & * & * & I_p & D_{11}' - D_f'D_{21}' \\ * & * & * & * & * & \gamma^2 I_r \end{bmatrix} > 0_{4n+p+r}.$$

As manipulações matemáticas, como nos casos anteriores, podem ser encontradas em Geromel et al. (2000).

Caso as LMIs sejam afirmadas, as matrizes do filtro são dadas por D_f e

$$A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad B_f = (U')^{-1}L, \quad C_f = F(VZ)^{-1},$$

em que $U \in \Re^{nxn}$ e $V \in \Re^{nxn}$ matrizes não singulares arbitrárias que satisfaçam

$$XZ^{-1} + U'V = I. \tag{3.20}$$

3.6 Exemplo Simulado

Esta seção apresenta um exemplo de estimação utilizando a filtragem via LMI. Os algoritmos foram testados com um sistema linear de segunda ordem escolhido de forma aleatória, possuindo como restrição apenas a matriz A, a qual é *Schur*-estável. A entrada aplicada foi do tipo aleatória com média nula e considera-se que o sistema é descrito por um politopo com quatro vértices.

As matrizes dos vértices que formam o politopo são apresentadas por

$$A_{\{1\}} = \begin{bmatrix} 0,0103 & -0,4110 \\ 0,2041 & 0,6636 \end{bmatrix}, \quad A_{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0,2258 & -0,0440 \\ -0,2128 & 0,4582 \end{bmatrix},$$
$$A_{\{3\}} = \begin{bmatrix} -0,4414 & -0,1556 \\ -1,0549 & 0,1291 \end{bmatrix}, \quad A_{\{4\}} = \begin{bmatrix} 0,5094 & -0,4574 \\ -0,0301 & 0,5963 \end{bmatrix}.$$
$$B_{\{1\}} = \begin{bmatrix} 0,5356 \\ -0,3420 \end{bmatrix}, \quad B_{\{2\}} = \begin{bmatrix} -0,8926 \\ -0,8953 \end{bmatrix},$$
$$B_{\{3\}} = \begin{bmatrix} -0,5745 \\ 0,4998 \end{bmatrix}, \quad B_{\{4\}} = \begin{bmatrix} -0,9226 \\ -1,9979 \end{bmatrix}.$$
$$C_{\{1\}} = \begin{bmatrix} 0,8368 & 0,4745 \end{bmatrix}, \quad C_{\{2\}} = \begin{bmatrix} 1,9645 & 0,8846 \end{bmatrix},$$
$$C_{\{3\}} = \begin{bmatrix} 1,8512 & -1,8977 \end{bmatrix}, \quad C_{\{4\}} = \begin{bmatrix} 0,7934 & -0,3819 \end{bmatrix}.$$

Foram feitas simulações para os três tipos de filtros: $\mathscr{H}_2$ primal, $\mathscr{H}_2$ dual e o $\mathscr{H}_\infty$ e, então, foi possível visualizar o comportamento dos estados estimados para os filtros projetados.

3.6.1 Filtro $\mathscr{H}_2$

3.6.1.1 Filtro via abordagem primal

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $\|\mathscr{G}\|_2$ e possui valor de $4,1322$. As matrizes do filtro projetado são dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} 1,5285 & 1,1610 \\ -1,1461 & -0,9778 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0,0332 \\ 0,0686 \end{bmatrix},$$
$$C_f = \begin{bmatrix} 0,3230 & 0,6082 \\ -0,4390 & -0,4862 \end{bmatrix}.$$

O comportamento do erro de estimação, apresentado na Figura 5, é obtido a partir da simulação do problema de filtragem. Em que a curva em vermelho representa o erro do estado x_1 e a curva em azul o erro do estado x_2. A linha pontilhada indica o zero para a melhor referência.

As estimações geradas dos estados do sistema simulado foram plotadas e apresentadas nas figuras 6 e 7, em que os estados x_1 e x_2 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ pelas curvas na cor azul.

Figura 5 – Erros entre os estados x_1 (vermelho, –) e x_2 (azul, - -) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal para o exemplo simulado.

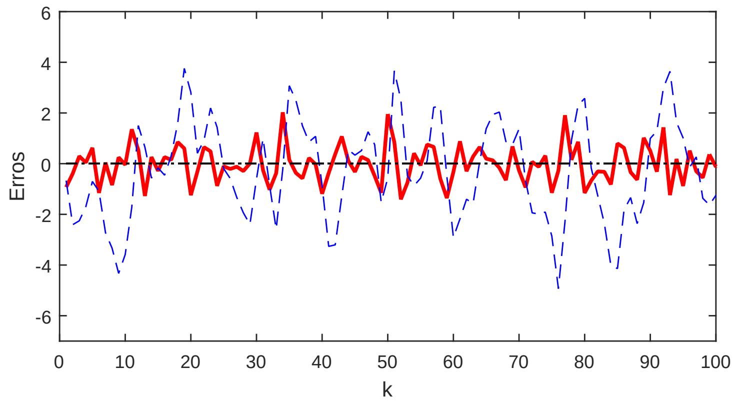


Figura 6 – Estados x_1 (vermelho,) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado ao exemplo simulado.

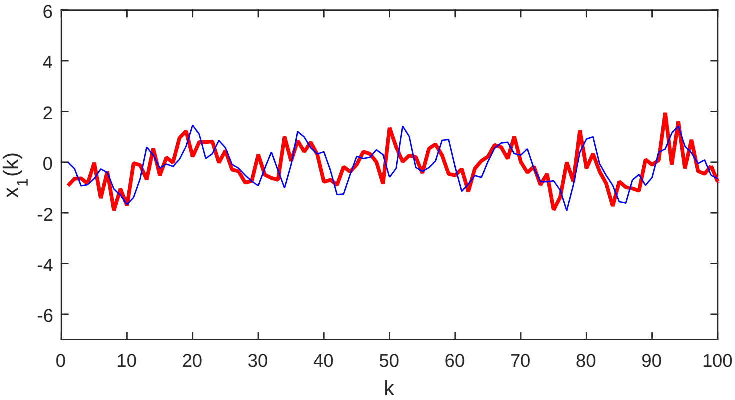
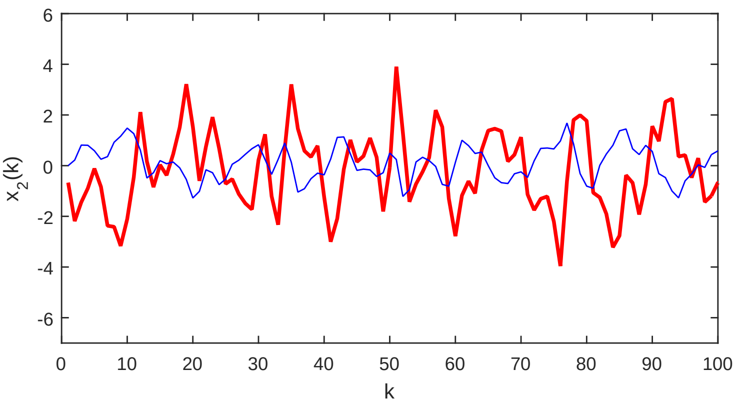


Figura 7 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado ao exemplo simulado.



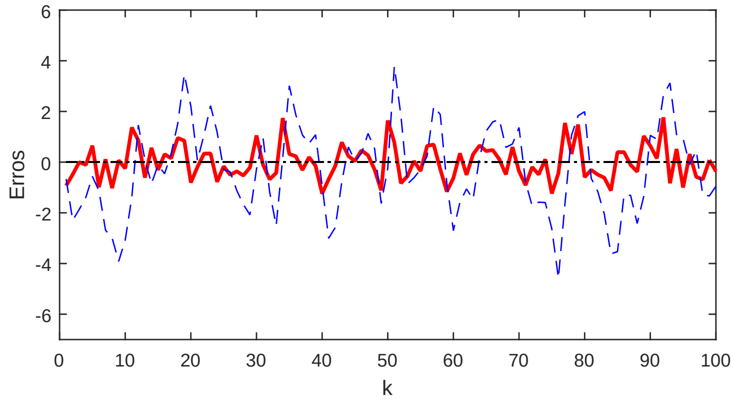
3.6.1.2 Filtro via abordagem dual

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $\|\mathscr{G}\|_2$ e possui valor de $5,5714$, As matrizes do filtro projetado são dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0,9003 & 0,2275 \\ -1,0110 & -0,8610 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0,0312 \\ -0,0179 \end{bmatrix},$$
$$C_f = \begin{bmatrix} 2,2805 & 4,7016 \\ -13,3267 & -16,8120 \end{bmatrix}.$$

Feita a simulação dos erros de cada um dos dois estados, obtém-se a Figura 8, a curva em vermelho representa o erro do estado x_1 e a curva em azul o erro do estado x_2. A linha pontilhada indica o zero para a melhor referência.

Figura 8 – Erros entre os estados x_1 (vermelho, - -) e x_2 (azul, –) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual para o exemplo simulado.



As estimações geradas foram plotadas e apresentadas nas figuras 9 e 10. Nessas figuras os estados x_1 e x_2 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ pelas curvas na cor azul.

Figura 9 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado ao exemplo simulado.

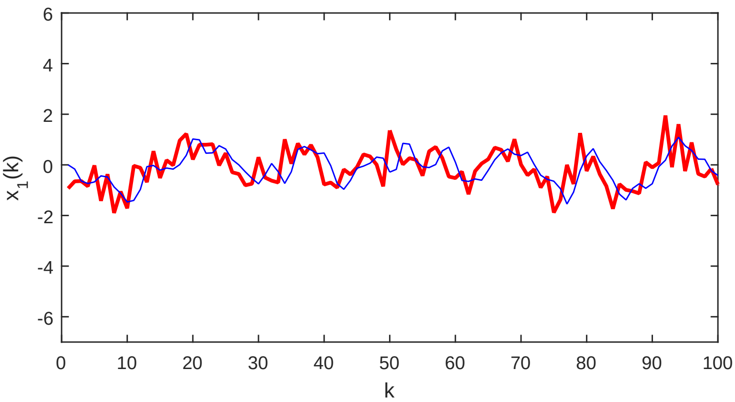
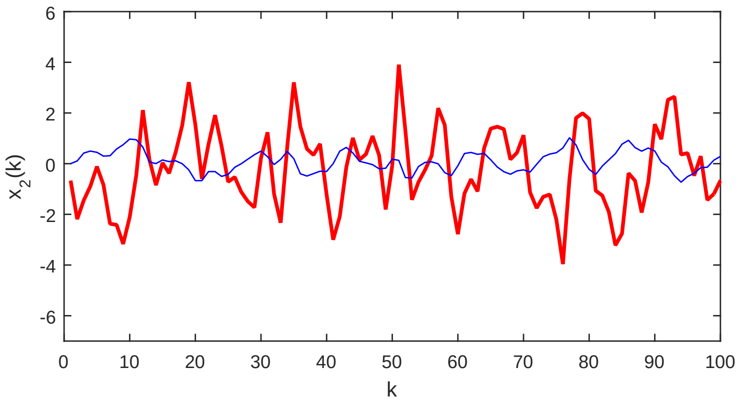


Figura 10 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado ao exemplo simulado.



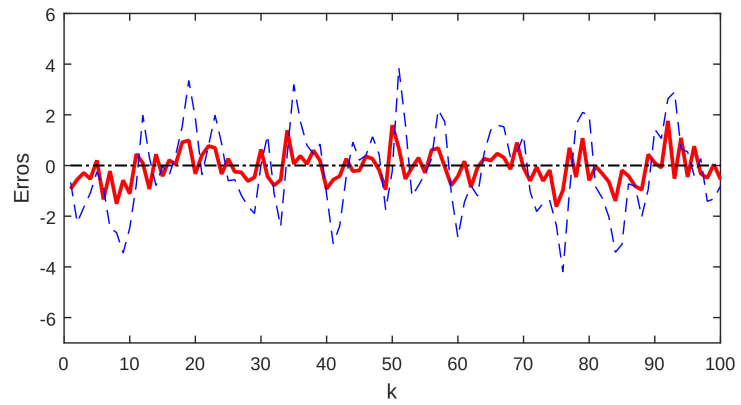
3.6.2 Filtro $\mathscr{H}_\infty$

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $\|\mathscr{G}\|_\infty$ e possui valor de $4,3543$, As matrizes do filtro projetado são dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} -0,7269 & -1,4280 \\ 0,2952 & 0,5777 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0,0030 \\ -0,0015 \end{bmatrix},$$
$$C_f = \begin{bmatrix} -19,4038 & -38,8097 \\ -59,4348 & -79,7079 \end{bmatrix}, \quad D_f = \begin{bmatrix} -0,3356 \\ 0,0428 \end{bmatrix}.$$

Realizando a simulação dos erros de cada um dos dois estados do sistema foi obtida a Figura 11. A curva em vermelho representa o erro do estado x_1 e a curva em azul o erro do estado x_2. A linha pontilhada indica o zero para a melhor referência.

Figura 11 – Erros entre os estados x_1 (vermelho, - -) e x_2 (azul, –) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ para o exemplo simulado.



As estimações geradas foram plotadas e apresentadas nas figuras 12 e 13. Nessas figuras os estados x_1 e x_2 são representados pelas curvas em vermelho e $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ pelas curvas na cor azul.

Figura 12 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado ao exemplo simulado.

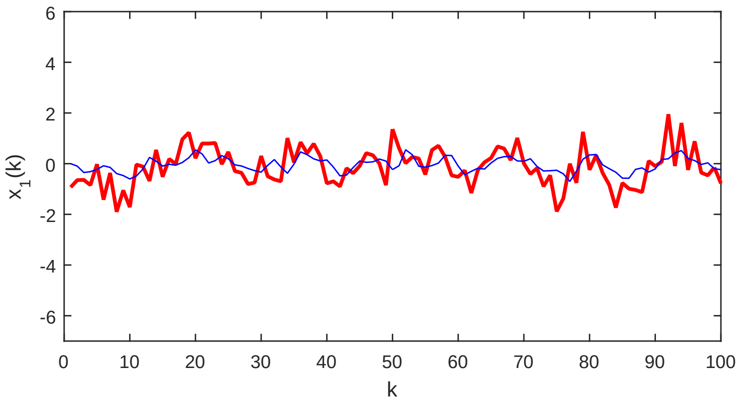
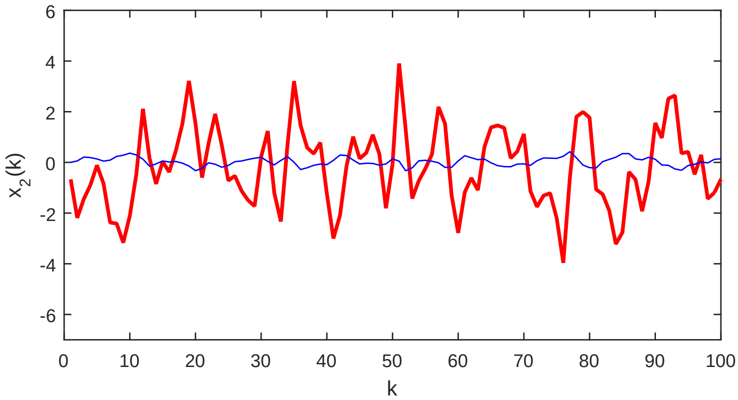


Figura 13 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado ao exemplo simulado.



Com o objetivo validar a técnica de estimação via LMI, foi realizada o cálculo do RMS do erro entre os estados reais e os estimados como apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Métricas para a estimação realizada pelos projetos dos filtros LMI para o sistema do exemplo simulado.

Filtro	RMS do erro	
	x_1	x_2
$\mathscr{H}_2$ (primal)	0,7931	2,2148
$\mathscr{H}_2$ (dual)	0,7428	1,9730
$\mathscr{H}_\infty$	0,7240	1,8513

Por meio das representações gráficas dos erros de estimação de ambos os estados do sistema testado, exibidas nas figuras 5, 8 e 11, foi observado que para o tempo simulado as estimações utilizando os filtros projetados possuem erros significativos — diferentes de zero, esse fato já era esperado em virtude das normas elevadas.

Avaliando as métricas encontradas, o projeto do filtro H_∞ apresentou melhores resultados ao realizar a média do RMS dos estados, como apresentados na Tabela 1, sendo possível observar esse comportamento ao comparar as figuras 6, 7, 9, 10, 12, 13, nas quais foram plotados os estados reais e os estimados. A escolha da matriz U, responsável pela recuperação das matrizes do filtro, é determinante para o desempenho da estimação dos estados.

4 Estimação de estados via filtro de partículas

4.1 Sistemas incertos em probabilidade

Os sistemas podem apresentar incertezas de parâmetros, que podem variar no tempo, e perturbações estocásticas (NIU; HO; LAM, 2005). As pertubações estocásticas ocorrem na forma de variações aleatórias, sendo que não é possível determinar, de forma exata, a próxima pertubação. Nesse caso, apenas é possível afirmar a maior probabilidade em tender para um determinado caminho (PAIM, 2009).

Existem razões para a utilização de modelos de sistemas incertos estocásticos, tais como o fato de nenhum sistema ser modelado de forma matematicamente perfeita. Como exemplo, pode-se citar os distúrbios nos sistemas dinâmicos que não são medidos, não podem ser controlados e nem modelados deterministicamente, assim como a imprecisão das informações adquiridas por sensores (MAYBECK, 1982).

4.2 Filtro de partículas

Os filtros de partículas surgiram em 1940 com o trabalho de Nicolas Metropolis e Norbert Wiener, os quais sugeriram métodos estatísticos que se aproximariam do filtro de partículas. Entretanto, somente em 1980, foram implementados computacionalmente (SIMON, 2006).

O filtro de partículas é estatístico possuindo um estimador baseado em probabilidades. É utilizado em sistemas altamente não lineares que, ao serem resolvidos pelo filtro de Kalman convencional, não apresentam boas estimativas, sendo baseados no método Monte Carlo sequencial para a solução do problema (SIMON, 2006).

Esse método é constituído por algoritmos numéricos utilizados em uma ampla gama de problemas matemáticos com o intuito de simular o comportamento de sistemas estocásticos (BESAG; CLIFFORD, 1991).

Por ser um filtro que trata de quaisquer distribuições de probabilidade, o custo computacional de sua implementação é elevado se comparado aos filtros de Kalman. Assim, dependendo da aplicação para a qual é utilizado, é preciso realizar um estudo prévio para avaliar o custo computacional necessário para a sua utilização.

4.2.1 Estimador Bayesiano de estados

Segundo Simon (2006), o estimador Bayesiano objetiva aproximar a função de distribuição de probabilidade (pdf, do inglês *probability density function*) condicional do vetor de estado, com relação à sequência de medidas das entradas do sistema dinâmico. A pdf condicional é descrita da forma $p(x(k)|y(k))$, apresentando uma dada entrada para o sistema ao qual o estado naquele instante é k. A condição inicial $x(0)$ do estimador, quando o instante é $k = 1$, é dada por

$$p(x(0)) = p(x(0)|y(0)),$$

sendo a saída inicial $y(0)$ obtida por meio das medições da saída do sistema.

O modelo não linear a ser estimado, em formato de espaço de estados, é descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), \nu(k)), \\ y(k) &= h(x(k), u(k), \eta(k)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

tal que k é o índice de tempo, $x(k)$ é o vetor de estados, $u(k)$ é o vetor de entrada e $\nu(k)$ é a representação do vetor de erros do ruído de processo, $y(k)$ é o vetor de medições da saída e $\eta(k)$ é o vetor de erros do ruído de medição. As funções f e h são as equações que descrevem o sistema não linear. Os erros são assumidos como ruídos brancos e gaussianos independentes às pdfs conhecidas.

No caso de um sistema linear e invariante no tempo, esse modelo também pode ser representado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_w\nu(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + D_w\eta(k). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para estimar $x(k)$, é necessário encontrar $p(x(k)|y(k))$. Entretanto, como a estimação ocorre de maneira recursiva, é necessário encontrar, inicialmente, a pdf condicional $p(x(k)|y(k-1))$, que é a pdf do estado $x(k)$ antes de todas as medições do tempo k. Uma das propriedades da função de densidade de probabilidade conjunta é o Teorema da probabilidade total

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy. \tag{4.3}$$

Outra propriedade necessária para o entendimento dos desenvolvimentos apresentados nesta seção é a regra de Bayes escrita no formato para densidade condicionais, dada por

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2) &= P[(X_1 \leq x_1)|(X_2 = x_2)], \\ &= \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Aplicando (4.3) na pdf dada por $p(x(k)|y(k-1))$, realizando a mudança de variáveis y por $x(k)|Y(k-1)$, x por $x(k-1)$ e, por fim, empregando (4.4), é possível escrever a função de densidade de probabilidade na forma

$$\begin{aligned} p(x(k)|Y(k-1)) &= \int p[(x(k), x(k-1))|Y(k-1)]dx(k-1), \\ &= \int p[x(k)|(x(k-1), Y(k-1))]p(x(k-1)|Y(k-1))dx(k-1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

A partir do modelo *a priori* (4.1), é conhecido que $x(k)$ é determinado apenas por $x(k-1)$ e $\nu(k-1)$. Logo, (4.5) é dada por

$$p(x(k)|Y(k-1)) = \int p(x(k)|x(k-1))p(x(k-1)|Y(k-1))dx(k-1). \tag{4.6}$$

Através de (4.6), é possível escrever $p(x(k)|Y(k-1))$ dependente de duas outras pdfs condicionais, $p(x(k)|x(k-1))$ e $p(x(k-1)|Y(k-1))$, sendo a primeira conhecida e a segunda possível de ser encontrada recursivamente devido ao conhecimento da condição inicial.

Para encontrar a pdf condicional a *posteriori*, $p(x(k)|Y(k))$, sabendo que $p(x(k))$ é escrito como

$$p(x(k)) = \frac{p(x(k)|Y(k-1))p(Y(k-1))}{p(Y(k-1)|x(k))},$$

então a pdf condicional a *posteriori* é dada por

$$\begin{aligned} p(x(k)|Y(k)) &= \frac{p(Y(k)|x(k))}{p(Y(k))}p(x(k)), \\ &= \frac{p[(y(k),Y(k-1))|x(k)]p(x(k)|Y(k-1))p(Y(k-1))}{p(y(k)|Y(k-1))p(Y(k-1)|x(k))}, \\ &= \frac{p(x(k),y(k),Y(k-1))p(x(k)|Y(k-1))p(Y(k-1))}{p(x(k))p(y(k)|Y(k-1))p(Y(k-1))p(Y(k-1)|x(k))}. \end{aligned}$$

Como $y(k)$ é uma função de $x(k)$, então $p[Y(k-1)|(x(k)|y(k))] = p(Y(k-1)|x(k))$. Assim

$$p(x(k)|Y(k)) = \frac{p(y(k)|x(k))p(x(k)|Y(k-1))}{p(y(k)|Y(k-1))}. \tag{4.7}$$

Todas as pdfs à direita de (4.7) são conhecidas, exceto $p(y(k)|Y(k-1))$, a qual pode ser encontrada realizado as seguintes manipulações

$$\begin{aligned} p(y(k)|Y(k-1)) &= \int p[(y(k),x(k))|Y(k-1)]dx(k), \\ &= \int p[y(k)|(x(k),Y(k-1))]p(x(k)|Y(k-1))dx(k), \\ &= \int p(y(k)|x(k))p(x(k)|Y(k-1))dx(k), \end{aligned} \tag{4.8}$$

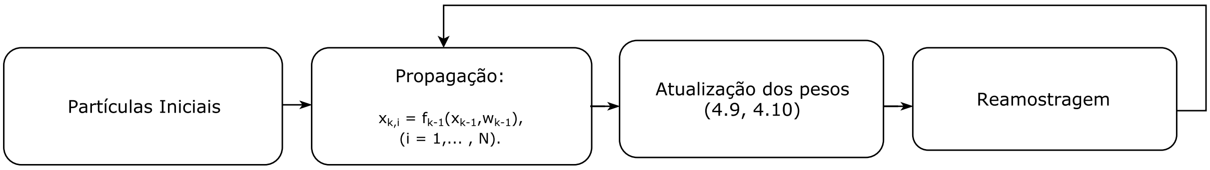
na qual as pdfs do lado direito de (4.8) são todas conhecidas. Então, é possível encontrar a pdf *a posteriori*, dada por

$$p(x(k)|Y(k)) = \frac{p(y(k)|x(k))p(x(k)|Y(k-1))}{\int p(y(k)|x(k))p(x(k)|Y(k-1))dx(k)}.$$

4.2.2 Filtro de partículas

O filtro de partículas foi criado para realizar a implementação do estimador bayesiano (CHING; BECK; PORTER, 2006). A estimação realizada por esse filtro gera

Figura 14 – Fluxograma do método Filtro de Partículas.



inicialmente uma quantidade N de vetores de estados, chamados de partículas, a cada etapa de estimação, sendo N um número escolhido pelo projetista.

O filtro gera as partículas aleatoriamente baseadas na pdf conhecida e então insere cada uma das partículas nas equações do modelo e, posteriormente, as atualiza. Quando a partícula é atualizada, atribui-se um peso a ela, o qual é baseado em uma função de densidade de probabilidade gaussiana devido aos ruídos serem consideradas brancos e gaussianos. O peso é calculado por

$$q_i = \frac{1}{(2\pi)^{0,5}|R|^{0,5}} \exp\left(\frac{-[y-\bar{y}]'R^{-1}[y-\bar{y}]}{2}\right), \tag{4.9}$$

assumindo o modelo (4.2). Os parâmetros dados pela pdf gaussiana são

$$\begin{aligned} p(y(k)|x(k),\nu(k)) &= \mathscr{N}(\bar{y},R) \\ &= \mathscr{N}(Cx(k)+Du(k),D_w'D_w), \end{aligned}$$

em que $R = D_w'D_w$ é a covariância, $\bar{y} = Cx(k)+Du(k)$ a média, ambas da pdf gaussiana e $i = 1,...,N$.

Após obter os pesos das partículas (4.9), efetua-se a normalização por meio da relação

$$q_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^{N} q_i}, \tag{4.10}$$

para, então, realizar a reamostragem das partículas.

A normalização (4.10) garante que a soma das probabilidades seja igual a 1.

De acordo com Gustafsson (2010), o filtro de partículas é utilizado pela repetição de dois passos: propagação e correção. A propagação consiste na geração de partículas com base nas informações anteriores, que foram utilizadas para encontrar a distribuição na qual as partículas foram geradas e, assim, é calculada a probabilidade *a priori*.

Na etapa de correção, calcula-se a probabilidade *a posteriori* por meio do uso do Teorema de Bayes. Essa distribuição permite a inferência sobre a variável que se deseja estimar. Então, é realizada a atribuição dos pesos a cada partícula, de forma que o peso seja maior para as partículas que estão mais próximas da realidade (AIUBE; BAIDYA; TITO, 2006).

Na Figura 14, é apresentado um fluxograma o qual representa de forma simplificada o algoritmo do método de estimação via filtro de partículas.

4.3 Exemplos Simulados

Esta seção apresenta exemplos de estimação utilizando a filtragem de partículas.

4.3.1 Sistema linear sem incertezas

Utilizando o *software* MATLAB foi implementado a estimação de estados via filtro de partículas, sendo testado um sistema linear de segunda ordem sem apresentar incertezas, dado por (4.11)

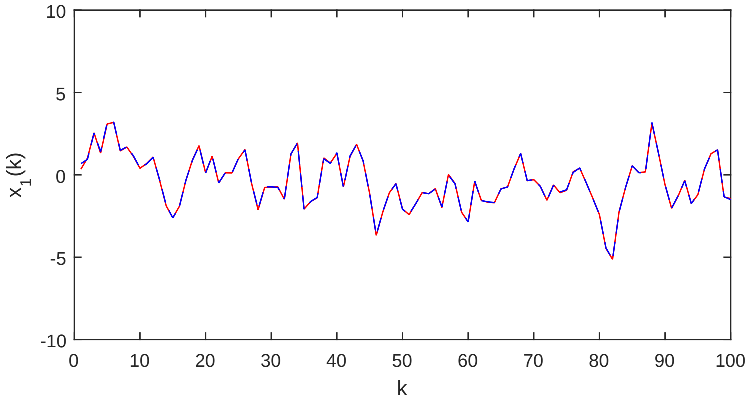
$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nu(k), \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \eta(k). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Tanto o ruído de processo ν quanto o de medição η são ruídos brancos com distribuição gaussiana e independente. A condição inicial declarada foi

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definiu-se um número de partículas igual a $N = 10^4$ e $k = 100$.

Figura 15 – Estado x_1 (curva em vermelho, –) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_1$ (curva em azul, - -) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado sem incertezas.



Na Figura 15, apresentam-se a curva do estado x_1 real na cor vermelha e o valor médio das partículas para o estado $\hat{x}_1$ obtidos por meio da filtragem de partículas na cor azul. O resultado encontrado foi satisfatório, devido à proximidade de ambas as curvas.

No que se refere à Figura 16, foram plotadas a curva do estado x_1 real na cor vermelha e da propagação de todas as partículas durante a filtragem na cor azul, sendo observado que a maior parte das partículas escolhidas pelo algoritmo estão sobre curva de estado $\hat{x}_1$.

Figura 16 – Estado x_1 (curva em vermelho, –) e o valor de todas as partículas do estado $\hat{x}_1$ (curva em azul, ●) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado sem incertezas.

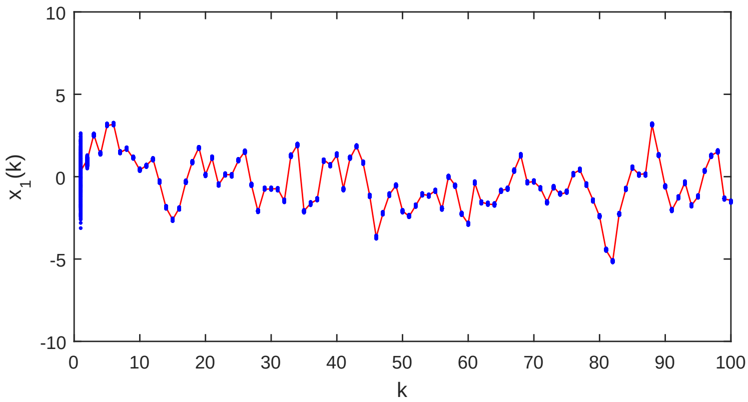


Figura 17 – Estado x_2 (curva em vermelho, –) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_2$ (curva em azul, - -) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado sem incertezas.

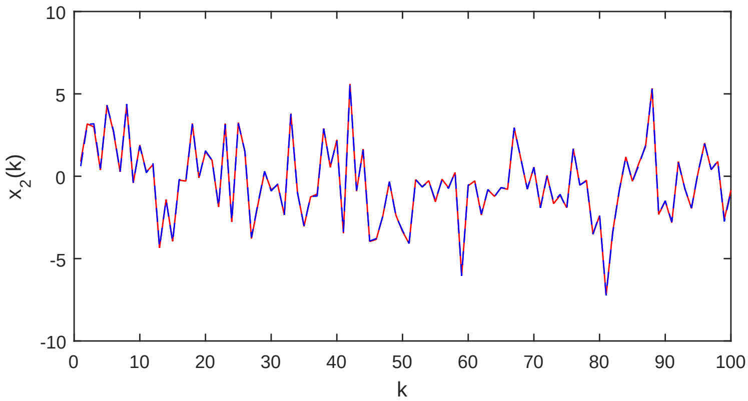
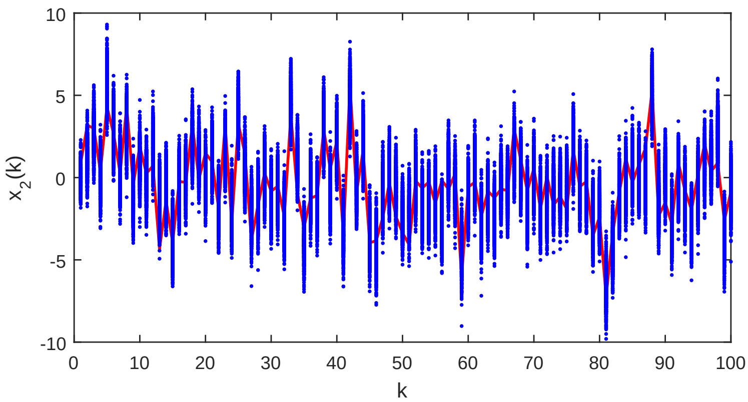


Figura 18 – Estado x_2 (curva em vermelho, –) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_2$ (curva em azul, ●) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado sem incertezas.



Na Figura 17, os resultados obtidos, como no caso do estado x_1, foram satisfatórios devido à estimação via filtragem de partículas ter aproximado do sistema real, sendo a curva de cor vermelha a representação do estado x_2 real e a curva de cor azul o valor médio das partículas estimadas.

Entretanto, quando gerado o gráfico da propagação de todas as partículas para este caso, apresentada na Figura 18, é notável que essas se dissiparam ao redor da curva de referência (estados reais). Contudo, a média dessas, como visto na Figura 17, foi adequada.

4.3.2 Sistema linear com incertezas

Para a implementação do estimador de estados via filtro de partículas para um modelo incerto, foram alterados os parâmetros do algoritmo anterior devido à inserção de incertezas ao sistema.

O modelo de sistema utilizado é dado por

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \nu(k),$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,1 \end{bmatrix} \eta(k).$$

Os ruídos de processo (ν) e de medição (η) foram sorteados aleatoriamente para cada partícula. A condição inicial declarada foi

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros incertos variam entre os limites, dados por

$$\alpha_1 = [0\ ,\ 0,5];$$
$$\alpha_2 = [0\ ,\ 0,2];$$
$$\alpha_3 = [0,1\ ,\ 1];$$
$$\alpha_4 = [0,1\ ,\ 1].$$

Calculando a matriz dinâmica $A(\alpha)$ e a matriz de entrada de controle $B(\alpha)$ nos extremos dos parâmetros incertos α_i, obtém-se um politopo com 16 vértices.

Por ser um sistema que apresenta mais parâmetros, usualmente são utilizadas mais amostras em relação ao sistema precisamente conhecido, entretanto devido à restrições computacionais foram utilizadas 10^4 partículas. Para esse caso, utilizou-se $k = 100$.

Para cada um dos vértices, foram sorteados aleatoriamente os valores de incertezas, as quais foram normalizadas para garantir as condições das incertezas politópicas.

Na Figura 19, representam-se a relação entre o estado x_1 real na cor vermelha e a estimação do valor médio das partículas para o estado $\hat{x}_1$ na curva em azul. A estimativa para o sistema incerto com um número de partículas inferior a 10^2, não apresentou resultados satisfatórios, sendo necessário a alteração da quantidade de amostras para 10^4. Na Figura 22, é ilustrado a propagação de todas as partículas durante a estimação, na qual é observado o afastamento das partículas em relação ao estado real.

Figura 19 – Estado x_1 (curva em vermelho, –) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_1$ (curva em azul, - -) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado com incertezas.

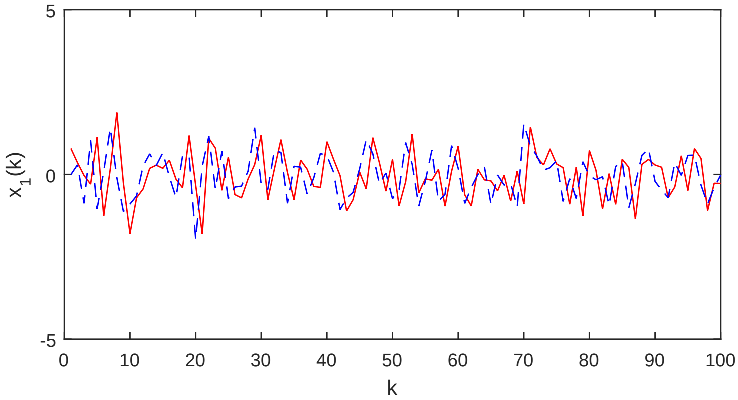


Figura 20 – Estado x_1 (curva em vermelho, –) e o valor de todas as partículas do estado $\hat{x}_1$ (curva em azul, •) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado com incertezas.

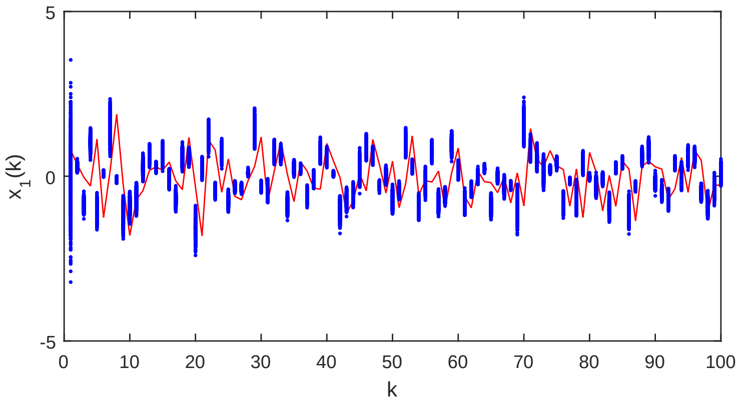
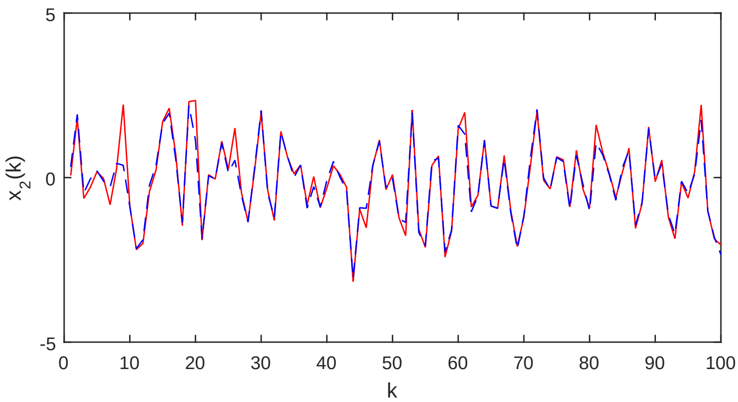
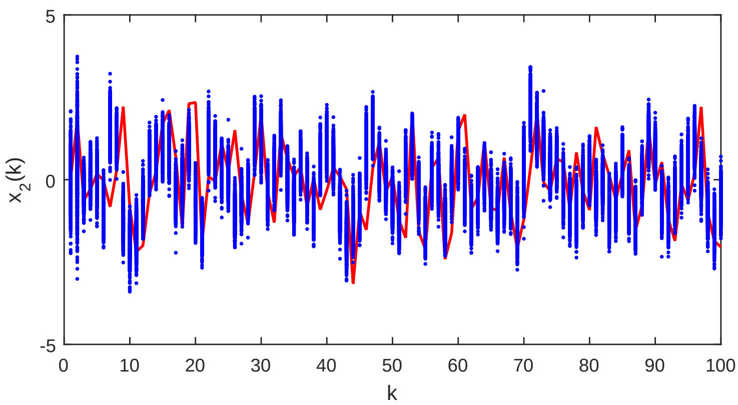


Figura 21 – Estado x_2 (curva em vermelho, –) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_2$ (curva em azul, - -) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado com incertezas.



Na Figura 21, é apresentada a simulação para o estado x_2, para o qual a estimação pela filtragem foi realizada de forma satisfatória, tendo uma aproximação alta em relação

Figura 22 – Estado x_2 (curva em vermelho, –) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_2$ (curva em azul, •) para a filtragem via filtro de partículas para o exemplo simulado com incertezas.



ao estado x_2 real. Analisando a Figura 22, a qual representa a propagação de todas as partículas realizada em comparação com o estado x_2 real é notável a distribuição das partículas ao redor do estado real na curva de cor vermelha, sendo comprovadas por meio da média das partículas obtidas na Figura 21.

Com o objetivo de avaliar o desempenho do método de estimação de estados via filtro de partículas, foram realizadas 100 estimações para cada conjunto de partículas e cada uma das amostras foram variadas de 10^2 a 10^4 para cada um dos casos de sistemas. As métricas tem como finalidade definir para qual caso, sistema incerto ou precisamente conhecido, a estimação possui um melhor desempenho, além de verificar quanto a estimação melhora ao aumentar o número de partículas utilizadas e o tempo de execução para cada caso.

Tabela 2 – Métricas para a estimação via filtro de partículas para um sistema conhecido.

Número de partículas	Variância		Média		Tempo de execução (s)
	x_1	x_2	x_1	x_2	
10^2	0,0187	0,0232	0,0641	0,1009	43,5107
10^3	0,0127	0,0038	0,0385	0,0586	101,5754
10^4	0,0117	0,0022	0,0357	0,0566	7340,7177

Tabela 3 – Métricas para a estimação via filtro de partículas para o sistema com incertezas.

Número de partículas	Variância		Média		Tempo de execução (s)
	x_1	x_2	x_1	x_2	
10^2	0,011748	0,01788	0,9032	0,5831	178,5712
10^3	0,0097	0,0154	0,8844	0,4323	1500,4749
10^4	0,0082	0,0126	0,8740	0,3409	19638,3453

Ao analisar os valores das métricas encontradas é notável o aumento do tempo de execução dos algoritmos quando são inseridas incertezas no sistema, além de ser possível visualizar uma melhora considerável das estimações quando o número de partículas utilizadas é ampliado.

Devido a limitações computacionais, o valor de partículas utilizadas para os casos em questão foram de no máximo 10^4, cuja variância para os estados estimados foi praticamente nula.

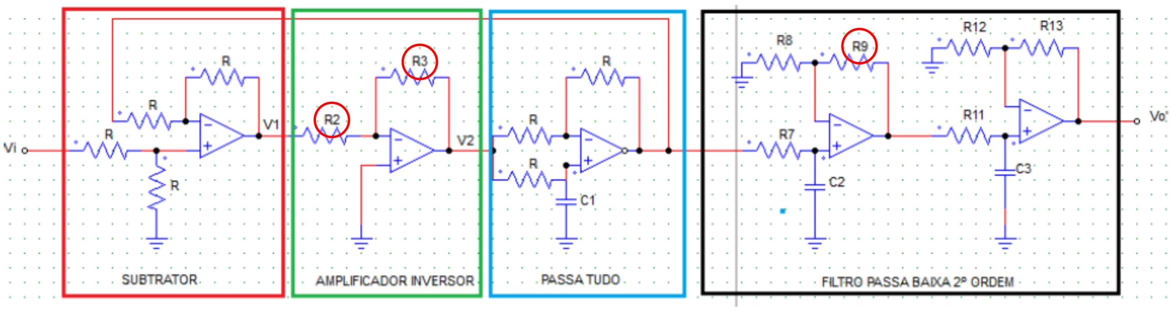
5 Aplicações das técnicas projetadas

5.1 Módulo didático

O módulo didático utilizado foi desenvolvido por graduandos e professores da Universidade Federal de Ouro Preto, *campus* João Monlevade e apresentado em congresso (KELES et al., 2017). O módulo tem como objetivo ser utilizado em disciplinas da área de controle da universidade, a fim de realizar simulações para sistemas com incertezas, dando uma abordagem de controle robusto.

A modelagem e a montagem são desenvolvidos em Keles et al. (2017). O modelo contém os quatro circuitos apresentados na Figura 23, sendo constituído por dois estágios. A planta principal que é composta pelos circuitos: subtrator, amplificador inversor e o filtro passa tudo; esse estágio contém dois dos parâmetros incertos e um estado medido. O segundo estágio denominado planta auxiliar, é constituído por um filtro passa baixa de segunda ordem que possui a terceira incerteza e outros dois estados a serem medidos.

Figura 23 – Planta do módulo didático.



Fonte: (KELES et al., 2017).

O sentido físico dos estados x_1, x_2, x_3 do sistema são representações das tensões nos capacitores V_{C1}, V_{C2}, V_{C3}, respectivamente. A tensão de entrada $u(t)$ é aplicada na entrada da planta principal e a saída total considerada é obtida pela saída da planta auxiliar.

Os parâmetros incertos do sistema são os resistores R_2 e R_3, responsáveis por determinar a estabilidade do sistema, e o potenciômetro R_9 que influência apenas o ganho do sistema. Para $R_3 < R_2$, o sistema é estável de fase não-mínima, sendo instável de fase não-mínima quando $R_3 > R_2$. Por fim, quando $R_3 = R_2$ o sistema opera na margem de estabilidade. Entretanto, como se trata de um sistema real, esse caso é irrealizável devido às características físicas reais dos componentes.

O modelo do circuito da planta é definido como (KELES et al., 2017)

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u, \\
y &= \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

em que

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{R_3 - R_2}{RC_1(R_2+R_3)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_7C_2}\left(\frac{2R_2}{R_2+R_3}\right) & \frac{-1}{R_7C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{11}C_3}\left(1 + \frac{R_0}{R_9R_8}\right) & \frac{-1}{R_{11}C_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{-R_3}{RC_1(R_2+R_3)} \\ \frac{R_3}{R_7C_2(R_2+R_3)} \end{bmatrix},
$$
$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(1 + \frac{R_{13}}{R_{12}}\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.
$$

A planta apresenta três incertezas, assim o sistema é descrito por um politopo de oito vértices. Sendo os vértices construídos com as variações dos parâmetros como apresentado em Keles et al. (2017).

Para as estimações realizadas com essa planta, os resistores R_2 e R_3 foram escolhidos para que o sistema seja estável. E os valores de R_9 foram variados de 100 a $1k$ ohms.

5.1.1 Filtros LMI

Utilizando o sistema do módulo didático (5.1), foram realizados projetos para os filtros $\mathscr{H}_2$ primal, $\mathscr{H}_2$ dual e $\mathscr{H}_\infty$ primal, com as LMIs apresentadas na Seção 3.5, em que B_1 e C_2 do sistema aumentado (3.11) são B e C da planta (5.1), respectivamente. A simulação foi feita no *software* MATLAB com o auxílio dos pacotes computacionais *SeDuMi* (STURM, 1999) e *Yalmip* (LOFBERG, 2004).

Inicialmente foi realizada uma simulação, da qual foram salvos os valores aleatórios gerados das incertezas. Esses valores foram utilizados em todos os projetos de filtro para manter os mesmos parâmetros.

Posteriormente, foi feita a simulação utilizando como entrada do sistema uma onda senoidal com amplitude de $2V$ e $1MHz$ de frequência e como referência da estimação foi utilizado o estado x_3, assim a matriz $C = [0\ 0\ 1]$. As matrizes dos filtros projetadas e suas respectivas normas são apresentados a seguir.

5.1.1.1 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_2$ via abordagem primal

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $\|\mathscr{G}\|_2$ e o valor de $0,6531$. As matrizes do filtro projetado são dadas por

$$
A_f = \begin{bmatrix} 0,8225 & -0,1504 & 0,1903 \\ 0,4895 & 1,8094 & -1,0536 \\ -0,3359 & 0,6908 & 0,1140 \end{bmatrix},
$$

$$B_f = \begin{bmatrix} -0,0277 \\ 0,1651 \\ 0,1353 \end{bmatrix},$$
$$C_f = \begin{bmatrix} -6,4476 & -5,1858 & 5,4263 \\ -5,2461 & -4,2693 & 5,0011 \\ -6,1455 & -8,0511 & 8,8765 \end{bmatrix}.$$

Para verificar as estimações geradas com a utilização do filtro projetado, foram plotados os estados reais juntamente com os estados estimados e apresentados nas figuras 24, 25 e 26. Nessas figuras os estados x_1, x_2 e x_3 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ e $\hat{x}_3$ pelas curvas na cor azul.

Figura 24 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado ao módulo didático.

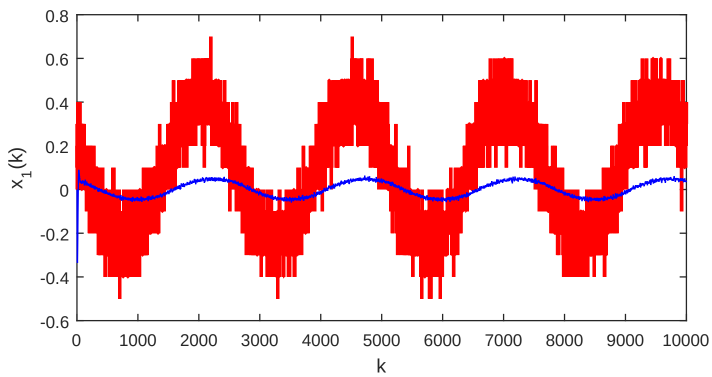


Figura 25 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado ao módulo didático.

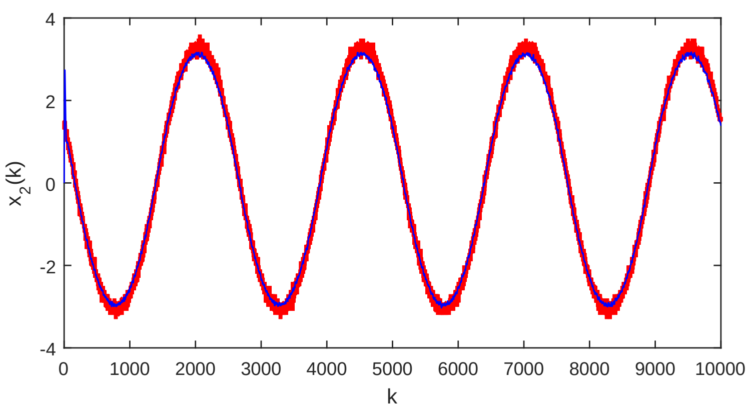
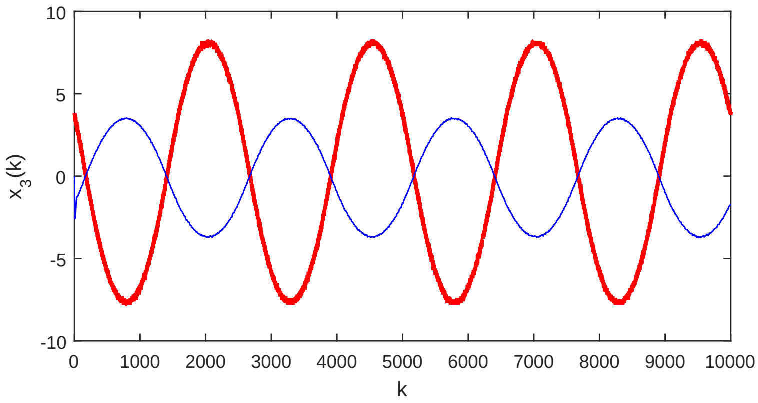


Figura 26 – Estados x_3 (vermelho) e $\hat{x}_3$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado ao módulo didático.



5.1.1.2 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_2$ via abordagem dual

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $\|\mathscr{G}\|_2$ e valor de $1,5767$. As matrizes do filtro projetado são dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} 2,3493 & -0,3170 & -0,1790 \\ 15,6161 & -0,4426 & -1,9929 \\ 3,1740 & -0,3714 & 0,5453 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0,0323 \\ 0,2616 \\ 0,1167 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} -42,9445 & 2,5681 & 6,3074 \\ -43,7187 & 2,5967 & 7,0061 \\ -78,6848 & 6,2614 & 10,6224 \end{bmatrix}.$$

Foram plotadas as estimações e apresentadas nas figuras 27, 28 e 29. Nessas figuras os estados x_1, x_2 e x_3 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ e $\hat{x}_3$ pelas curvas na cor azul.

Figura 27 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado ao módulo didático.

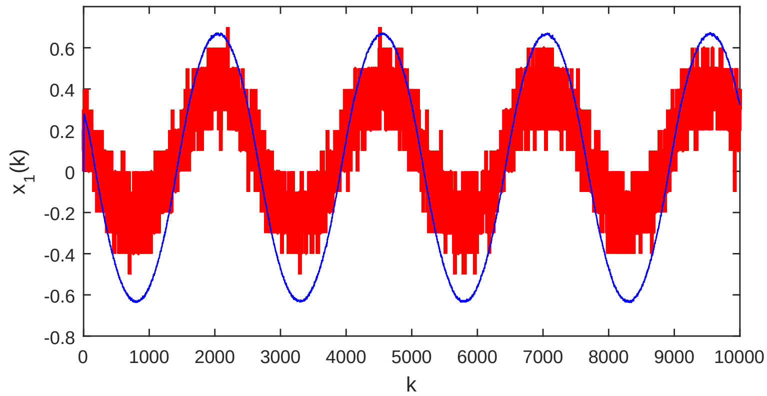


Figura 28 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado ao módulo didático.

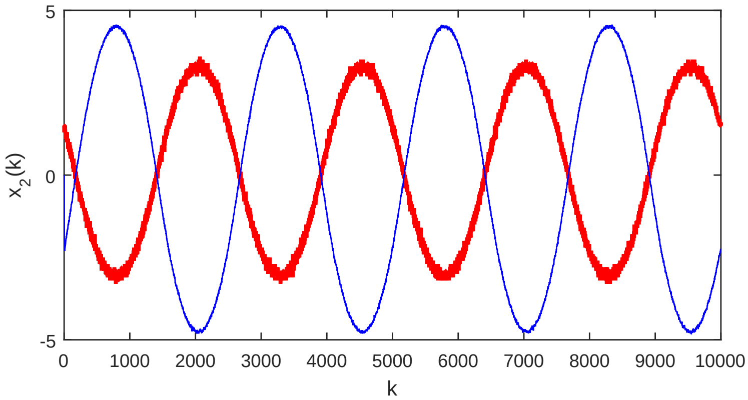
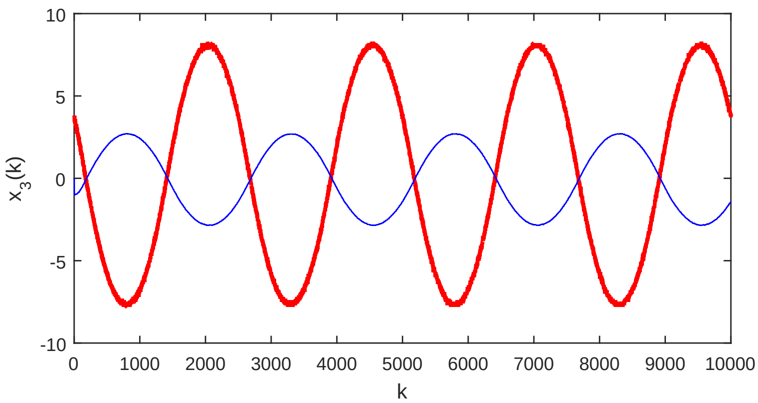


Figura 29 – Estados x_3 (vermelho) e $\hat{x}_3$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado ao módulo didático.



5.1.1.3 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_\infty$

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $\|\mathscr{G}\|_\infty$ e valor de $7,938$. As matrizes do filtro projetado são dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} -8,2725 & -0,3161 & 0,3959 \\ 468,1192 & 17,5278 & -21,2305 \\ 190,5600 & 6,9904 & -8,1971 \end{bmatrix},$$

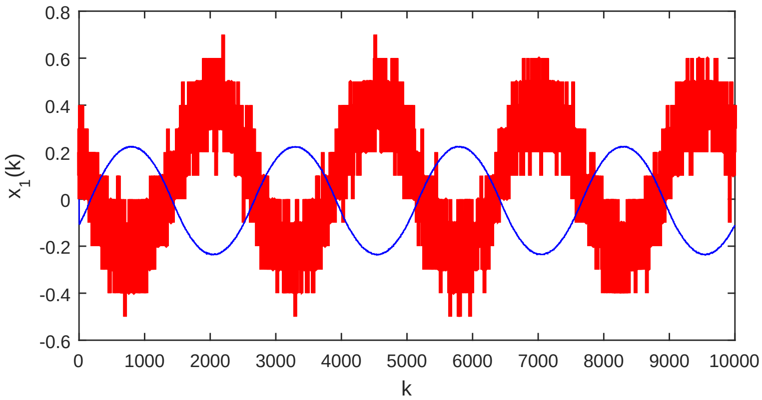
$$B_f = \begin{bmatrix} 0,0169 \\ -0,2448 \\ 0,1760 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 9412,0108 & 340,0540 & -441,0202 \\ -9125,0200 & -324,0020 & 415,0900 \\ 3558,8098 & 1281,0922 & -1641,0900 \end{bmatrix},$$

$$D_f = \begin{bmatrix} 3,2355 \\ 4,2970 \\ 1,0903 \end{bmatrix}.$$

As estimações geradas, foram plotadas e apresentadas nas figuras 30, 31 e 32. Nessas figuras os estados x_1, x_2 e x_3 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ e $\hat{x}_3$ pelas curvas na cor azul.

Figura 30 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado ao módulo didático.



Então, foram feitos os cálculos dos valores RMS (*Root Mean Square*) do erro entre os estados adquiridos e os estados estimados e apresentados na Tabela 4.

Pelos valores obtidos da métrica, foi possível verificar a maior eficiência ao projetar o filtro $\mathscr{H}_\infty$ para o módulo didático, uma vez que a média dos valores da métrica foi o menor encontrado comparado com os demais filtros LMI.

Figura 31 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado ao módulo didático.

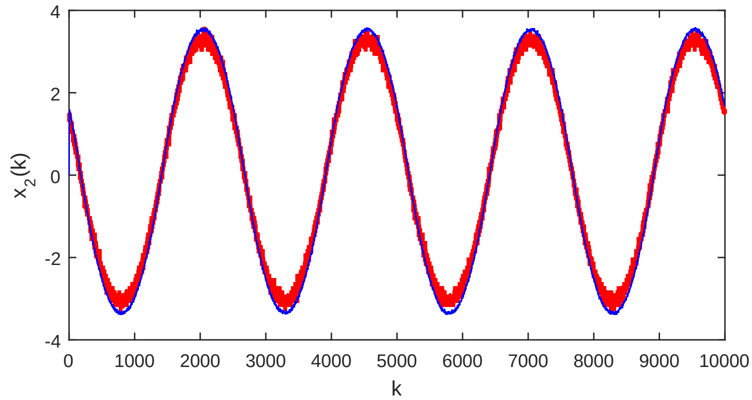


Figura 32 – Estados x_3 (vermelho) e $\hat{x}_3$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado ao módulo didático.

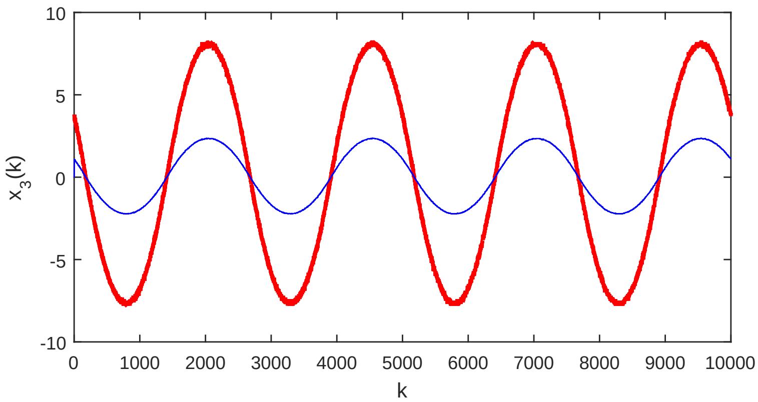


Tabela 4 – Métricas para a estimação realizada pelos projetos dos filtros LMI para o módulo didático.

Filtro	RMS do erro		
	x_1	x_2	x_3
$\mathscr{H}_2$ (primal)	0,2362	0,1528	8,2833
$\mathscr{H}_2$ (dual)	0,2660	5,6336	7,6874
$\mathscr{H}_\infty$	0,4146	0,2277	4,0389

5.1.2 Filtro de partículas

Com a mesma planta, foi testada a estimação via filtro de partículas. Foram realizadas simulações para o filtro, com as partículas variando de 10^3 a 10^5 e $k = 100$. Para tal, foram utilizados os dados dos estados coletados e fixados os parâmetros variantes, como as incertezas, os sinais de ruídos, tanto de medição como de processo.

As estimações de cada um dos estados, para uma quantidade de partículas igual a 10^5, são apresentadas nas figuras 33, 34 e 35. Nessas figuras os estados x_1, x_2 e x_3 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ e $\hat{x}_3$ pelas curvas na cor azul.

Figura 33 – Estado x_1 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_1$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para o módulo didático.

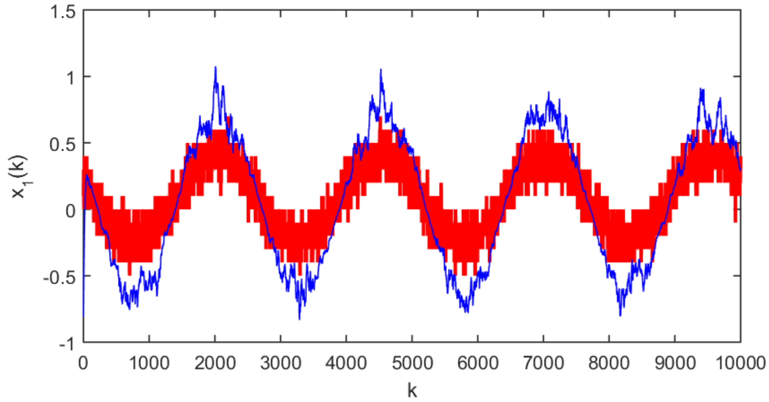


Figura 34 – Estado x_2 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_2$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para o módulo didático.

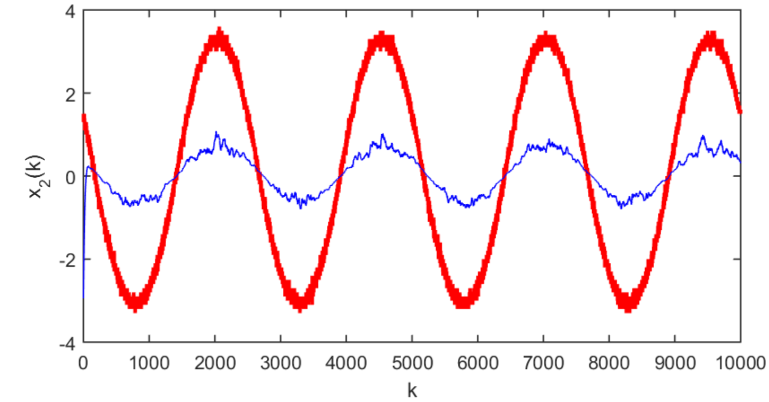
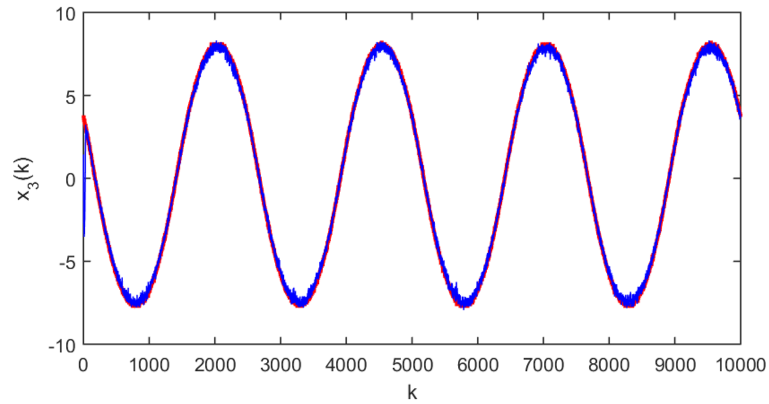


Figura 35 – Estado x_3 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_3$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para o módulo didático.



E então foram feitos os cálculos do RMS do erro, variação entre a saída real e a saída estimada, de cada um dos casos para cada um dos estados da planta, como apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Métricas para a estimação via filtro de partículas para o módulo didático.

Número de partículas	RMS do erro		
	x_1	x_2	x_3
10^3	0,1142	0,1391	0,0913
10^4	0,0187	0,0232	0,0641
10^5	0,0127	0,0038	0,0385

Por meio da análise dos dados apresentados na Tabela 5, o melhor resultado encontrado para a estimação em questão é no caso em que possui um maior número de partículas. Entretanto, com as limitações computacionais a melhor estimação encontrada foi para 10^5 partículas.

5.2 Câmara Termoeletricamente Controlada

A segunda planta utilizada no trabalho foi desenvolvida na Universidade Federal de Ouro Preto, *campus* João Monlevade, como projeto de estágio acadêmico. A mesma foi proposta e utilizada no artigo Pereira et al. (2018), no qual são apresentados o projeto e a identificação do modelo do sistema.

A planta consiste em uma câmara termoeletricamente controlada, apresentada na Figura 36, a qual possui um total de cinco sensores digitais de temperatura distribuídos ao longo de sua periferia, que utiliza um sistema de refrigeração baseado nos módulos Peltier, que apresentam como vantagem em relação aos convencionais serem mais ecológicos.

Assim, o sistema é constituído por módulos Peltier (TEC 12715) colocados entre dois dissipadores de calor que são responsáveis por aumentar a área superficial do módulo para aumentar a transferência de calor, possuindo dois ventiladores responsáveis por espalharem o calor no interior da caixa.

Essa planta possui um total de 5 estados e 13 vértices do politopo. O sentido físico dos estados x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 do sistema são representações das temperaturas captadas pelos sensores digitais de temperatura do tipo DS18B20.

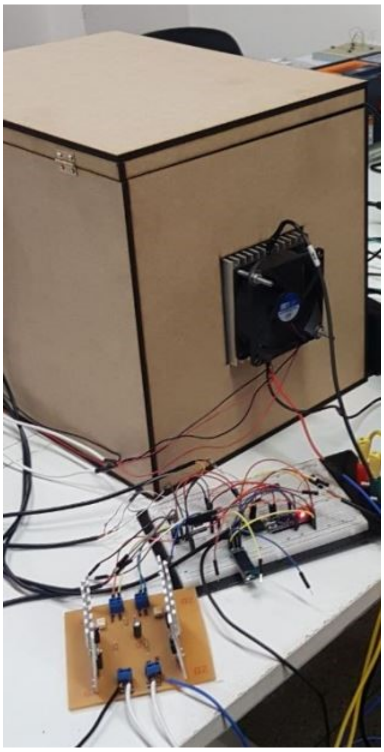
O modelo do circuito da planta é identificado em Pereira et al. (2018) e definido no formato

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu, \\ y &= Cx(k). \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2.1 Filtros LMI

Utilizando a planta da câmara termoeletricamente controlada (5.2), foram realizados projetos para os filtros $\mathscr{H}_2$ primal, $\mathscr{H}_2$ dual e $\mathscr{H}_\infty$ primal, com as LMIs apresentadas na

Figura 36 – Câmara Termoeletricamente Controlada.



Seção 3.5, tal como feito para na planta apresentada na Seção 5.1. As matrizes B_1 e C_2 do sistema aumentado (3.11) são B e C da planta (5.2), respectivamente.

Foi utilizado um sinal de entrada aleatório que variou de 0 a $12V$, as matrizes dos filtros projetados e suas respectivas normas são apresentados a seguir. Como referência da estimação foram utilizados os estados x_1 e x_5, com a qual foi obtida uma melhor estimação, assim a matriz C é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.2.1.1 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_2$ via abordagem primal

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $\|\mathscr{G}\|_2$ e valor de $22,0345$, e as matrizes do filtro são

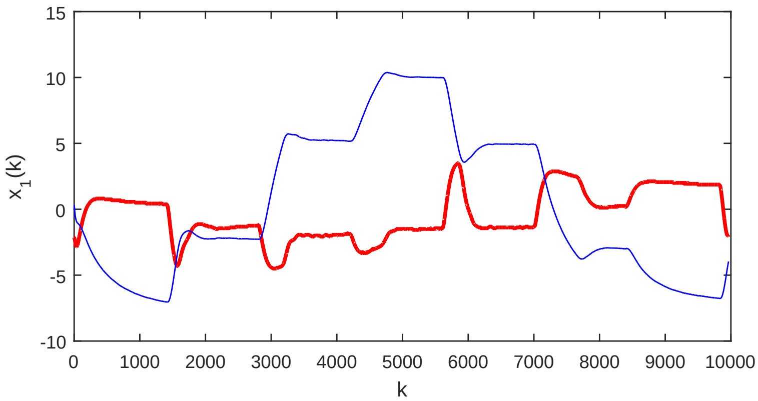
$$A_f = \begin{bmatrix} 0,1479 & -0,6691 & -0,7643 & -0,5819 & 0,0382 \\ 0,1408 & 1,2458 & 1,1995 & 0,7054 & -0,1978 \\ 0,8293 & 0,4462 & 0,9728 & 0,1355 & -0,1762 \\ -1,4045 & -1,0605 & -1,5001 & -0,1512 & 0,3991 \\ 0,5896 & -0,1504 & 0,0609 & -0,3090 & -0,0879 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0,0148 & -0,0829 \\ 0,0067 & 0,0121 \\ -0,1345 & 0,1558 \\ 0,1955 & -0,2740 \\ -0,1887 & 01790 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} -5,2828 & -10,8489 & -6,9364 & -10,4559 & -11,5319 \\ -8,4157 & -9,4896 & -5,3058 & -7,3527 & -5,5490 \\ -4,8470 & -7,7229 & -12,4274 & -10,3693 & -2,9667 \\ -2,8581 & -5,6357 & -6,0920 & -5,7943 & -4,9491 \\ -8,8624 & -9,7855 & -9,7848 & -9,3499 & -3,7527 \end{bmatrix}.$$

As estimações geradas com a utilização do filtro projetado, foram plotadas e apresentadas nas figuras 37, 38, 39, 40 e 41. Nessas figuras os estados x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$ e $\hat{x}_5$ pelas curvas na cor azul.

Figura 37 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado a câmara termoeletricamente controlada.



5.2.1.2 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_2$ via abordagem dual

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ dada por $\|\mathscr{G}\|_2$ foi encontrada com o valor de $19,8944$, e as matrizes do filtro são

Figura 38 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

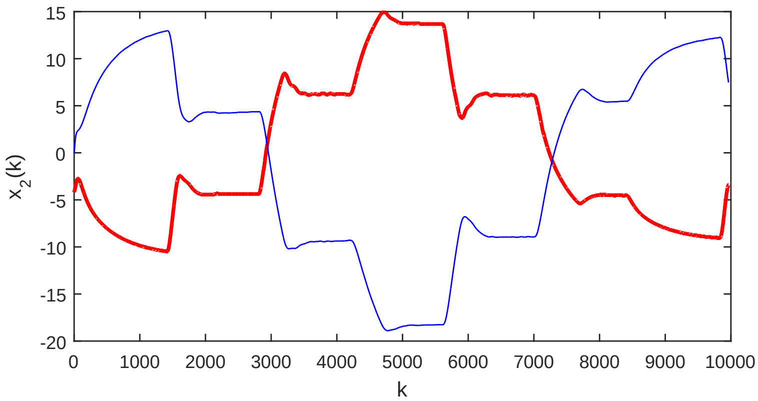


Figura 39 – Estados x_3 (vermelho) e $\hat{x}_3$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

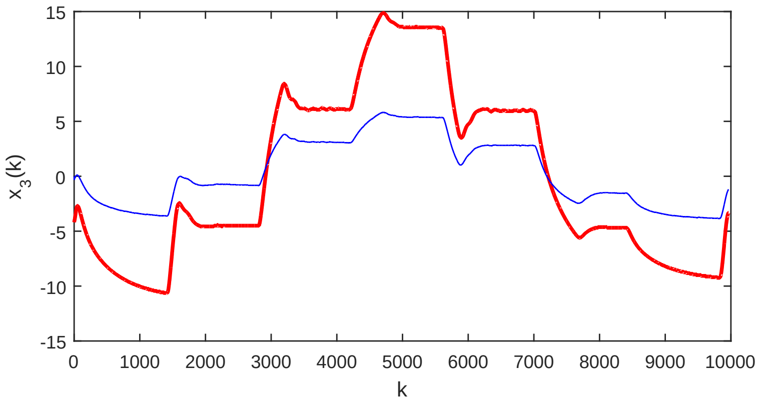
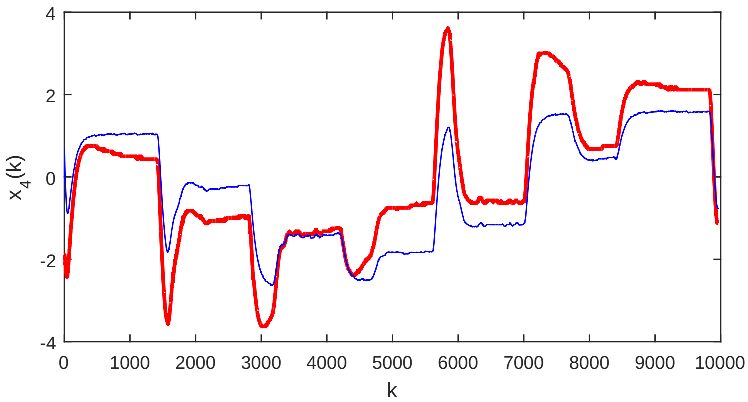
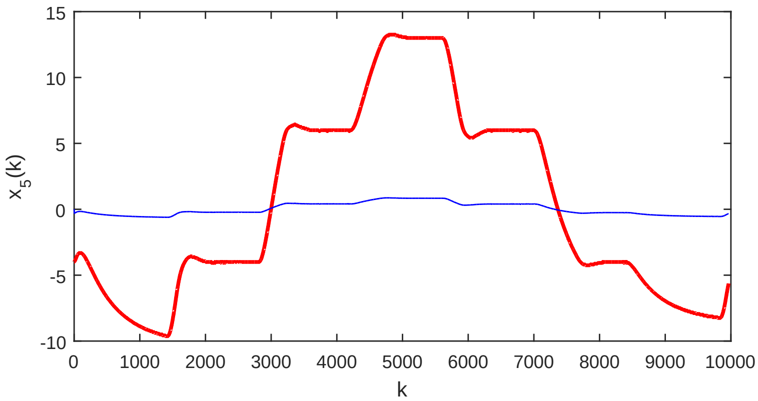


Figura 40 – Estados x_4 (vermelho) e $\hat{x}_4$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado a câmara termoeletricamente controlada.



$$A_f = \begin{bmatrix} 0,8187 & -1,0639 & -1,2930 & -0,7481 & -0,3540 \\ 1,8993 & 2,2781 & 0,9755 & 0,8182 & 0,8208 \\ 0,5620 & 0,2894 & 1,4621 & 0,2243 & -0,0118 \\ -1,6051 & -0,8678 & -1,2594 & 0,3312 & -0,1804 \\ -0,2179 & -0,6605 & 0,9648 & -0,1614 & -0,3277 \end{bmatrix},$$

Figura 41 – Estados x_5 (vermelho) e $\hat{x}_5$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem primal aplicado a câmara termoeletricamente controlada.



$$B_f = \begin{bmatrix} 0,1703 & -1,1417 \\ 0,1237 & 1,0486 \\ -0,1209 & 0,3977 \\ 0,2389 & -1,0958 \\ -0,8298 & 0,3560 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} -1,1590 & -1,5785 & -0,8508 & -1,2238 & -1,8086 \\ -14,9942 & -31,6602 & -30,2100 & -29,9033 & -12,0159 \\ -9,3392 & -24,0825 & -31,4396 & -27,8417 & -8,5773 \\ -8,8391 & -14,0276 & -18,0660 & 12,7977 & -5,6577 \\ -1,8231 & -1,8503 & -1,8875 & -1,6903 & -0,8541 \end{bmatrix}.$$

As estimações geradas com a utilização do filtro projetado, foram plotadas e apresentadas nas figuras 42, 43, 44, 45 e 46. Nessas figuras os estados x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$ e $\hat{x}_5$ pelas curvas na cor azul.

Em virtude dos filtros serem projetados para a aplicação em um planta com parâmetros incertos, os valores ótimos da norma $\mathscr{H}_2$ pelos métodos primal e dual foram diferentes, sendo que para o caso precisamente conhecido as normas apresentariam valores iguais, como apresentado na literatura (GEROMEL et al., 2000).

5.2.1.3 Projeto de Filtro $\mathscr{H}_\infty$

A norma encontrada para o sistema aumentado $\mathscr{G}$ é dado por $||\mathscr{G}||_\infty$ possuindo valor de $243,8648$, e as matrizes do filtro são

Figura 42 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

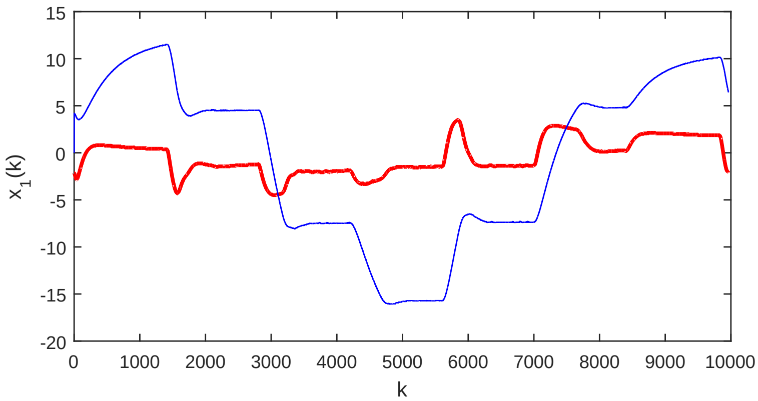


Figura 43 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

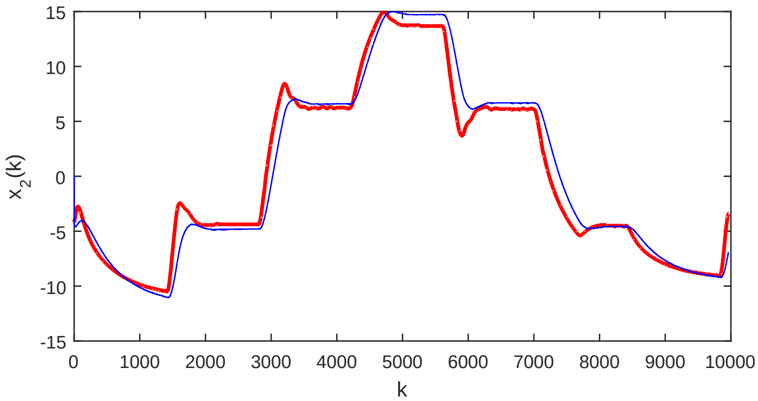
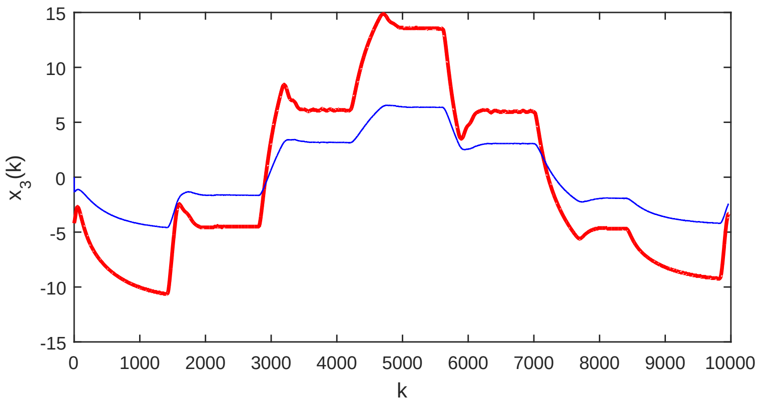


Figura 44 – Estados x_3 (vermelho) e $\hat{x}_3$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado a câmara termoeletricamente controlada.



$$A_f = \begin{bmatrix} -48,8773 & -107,3907 & -123,7905 & -110,0375 & -39,2167 \\ 47,2457 & 104,4559 & 118,0551 & 106,0012 & 38,3075 \\ 16,4677 & 36,5549 & 42,2328 & 37,0718 & 13,0469 \\ -45,9355 & -99,9747 & -115,1170 & -101,5615 & -36,1718 \\ 6,5263 & 13,5649 & 17,1788 & 15,7062 & 5,1682 \end{bmatrix},$$

Figura 45 – Estados x_4 (vermelho) e $\hat{x}_4$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

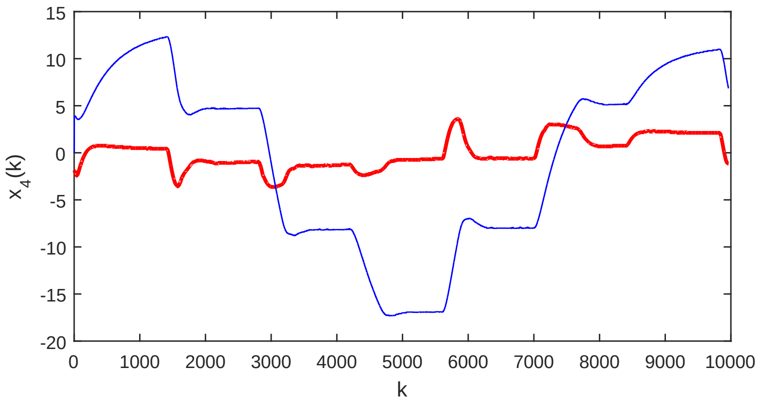
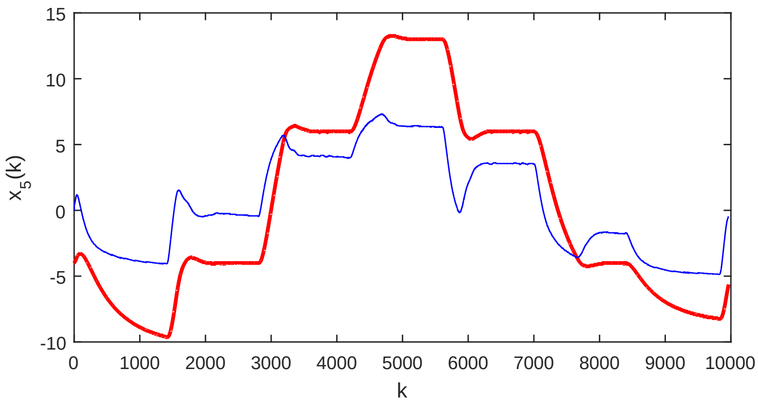


Figura 46 – Estados x_5 (vermelho) e $\hat{x}_5$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_2$ com abordagem dual aplicado a câmara termoeletricamente controlada.



$$B_f = \begin{bmatrix} -0,0822 & -0,4711 \\ 0,0815 & 0,4622 \\ 0,0263 & 0,1544 \\ -0,0754 & -0,4340 \\ 0,0087 & 0,0558 \end{bmatrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -1,1909 & -4,3887 & -5,3697 & -4,6310 & -1,7597 \\ 2,3243 & 6,5429 & 7,0473 & 6,6212 & 2,4281 \\ 0,2243 & 1,7361 & 1,1889 & 1,5251 & 0,9459 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$D_f = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 \\ 6,3347 & 27,9987 \\ 5,6165 & 36,0418 \\ 3,2026 & 15,3712 \\ 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}.$$

As estimações geradas foram plotadas e apresentadas nas figuras 47, 48, 49, 50 e 51. Nessas figuras os estados x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$ e $\hat{x}_5$ pelas curvas na cor azul.

Figura 47 – Estados x_1 (vermelho) e $\hat{x}_1$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

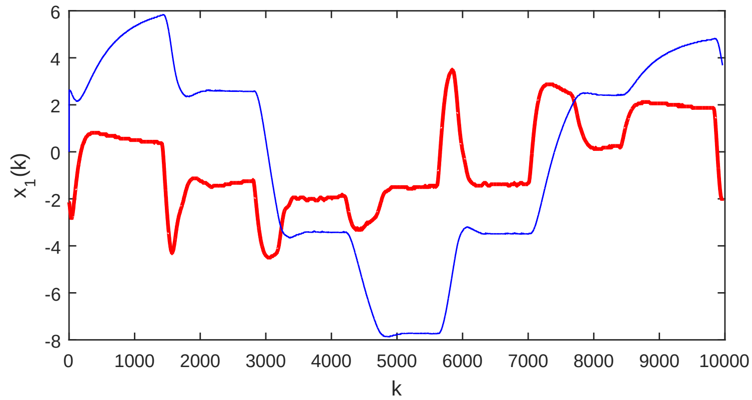


Figura 48 – Estados x_2 (vermelho) e $\hat{x}_2$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

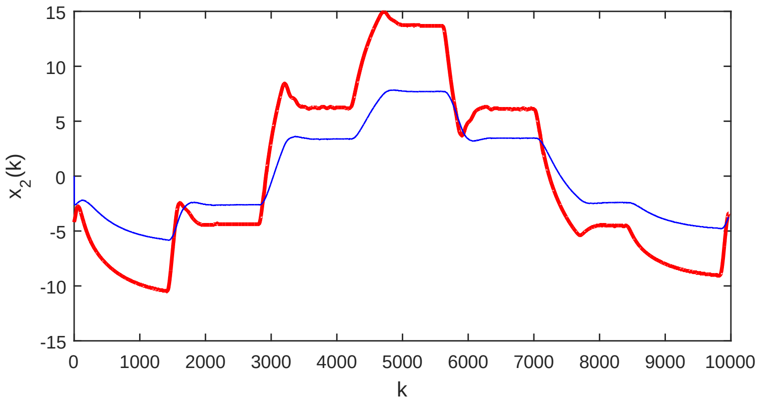


Figura 49 – Estados x_3 (vermelho) e $\hat{x}_3$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

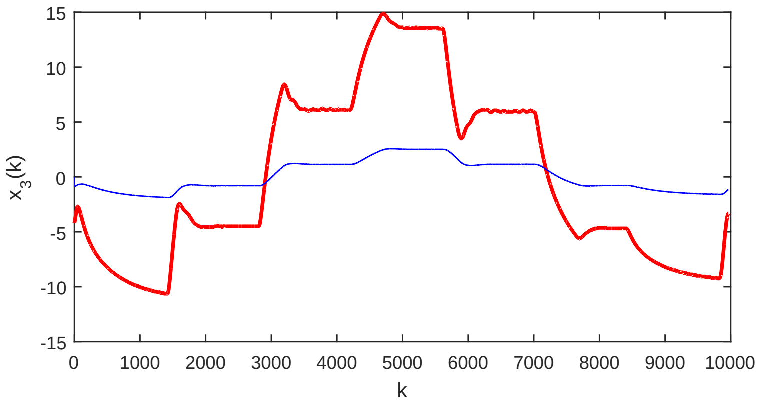


Figura 50 – Estados x_4 (vermelho) e $\hat{x}_4$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado a câmara termoeletricamente controlada.

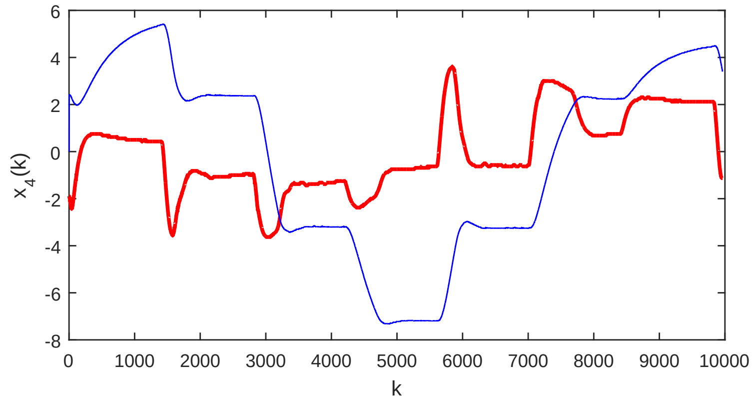
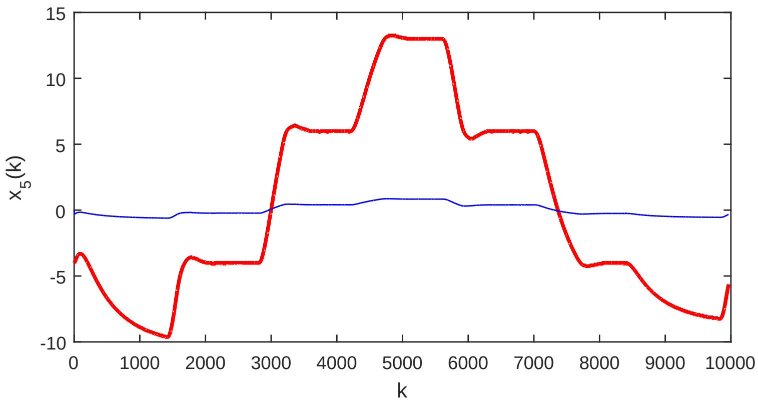


Figura 51 – Estados x_5 (vermelho) e $\hat{x}_5$ (azul) para a filtragem via LMI $\mathscr{H}_\infty$ aplicado a câmara termoeletricamente controlada.



Foi feito os cálculos dos valores RMS dos erros encontrados de cada um dos estados. Os valores obtidos dessa métrica é apresentada na Tabela 6.

Tabela 6 – Métricas para a estimação realizada pelos projetos dos filtros LMI para a câmara termoeletricamente controlada.

Filtro	RMS do erro				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mathscr{H}_2$ (primal)	6,8389	17,9834	4,7997	0,8519	1,4264
$\mathscr{H}_2$ (dual)	7,9672	1,4632	4,3241	8,8283	3,9411
$\mathscr{H}_\infty$	3,9100	3,7196	6,4536	3,7585	6,7299

Através dos valores apresentados na Tabela 6, foi possível verificar que o projeto do o filtro $\mathscr{H}_\infty$ para o módulo didático, apresentou maior eficiência ao uma vez que a média dos valores da métrica foi o menor encontrado comparado com os demais filtros LMI.

5.2.2 Filtro de partículas

Com a planta da câmara termoeletricamente, foi testada a estimação via filtro de partículas, estimação essa feita de forma *offline*, a qual não necessita ser feita diretamente na planta, utiliza apenas os dados colhidos da mesma. Foi utilizada como entrada do sistema simulado a mesma entrada aplicada durante a aquisição dos estados, essa obtenção foi realizado como em Pereira et al. (2018). Como referência da estimação foi utilizado o estado x_5, assim a matriz $C = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]$.

As estimações de cada um dos estados, para o número de partículas igual a 10^4, são apresentadas nas figuras 52, 53, 54, 55 e 56. Nessas figuras os estados x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são representados pelas curvas em vermelho com o traço mais espesso e $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$ e $\hat{x}_5$ pelas curvas na cor azul.

Figura 52 – Estado x_1 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_1$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para a câmara termoeletricamente controlada.

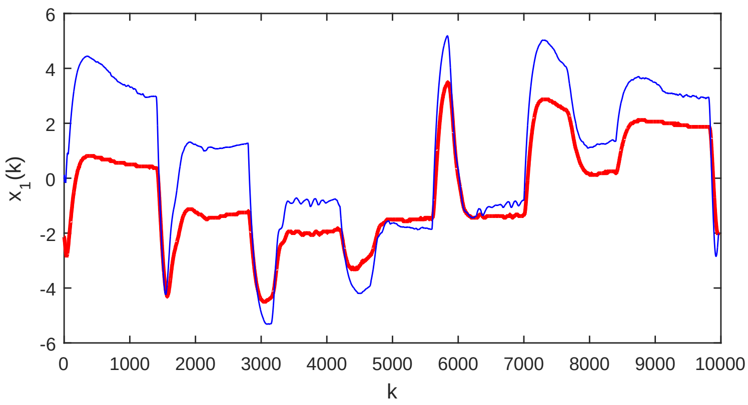


Figura 53 – Estado x_2 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_2$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para a câmara termoeletricamente controlada.

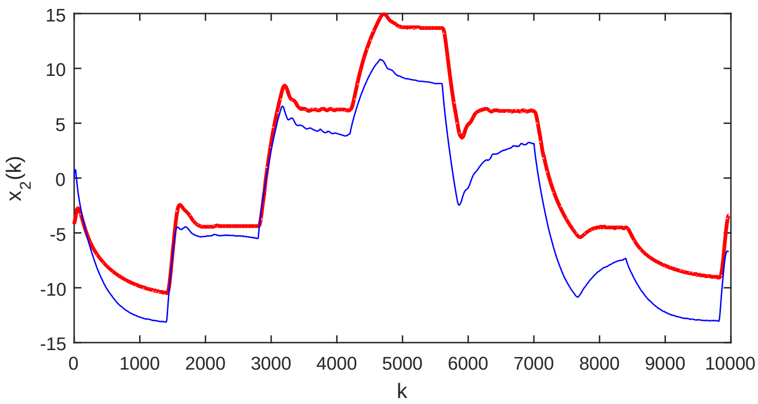


Figura 54 – Estado x_3 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_3$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para a câmara termoeletricamente controlada.

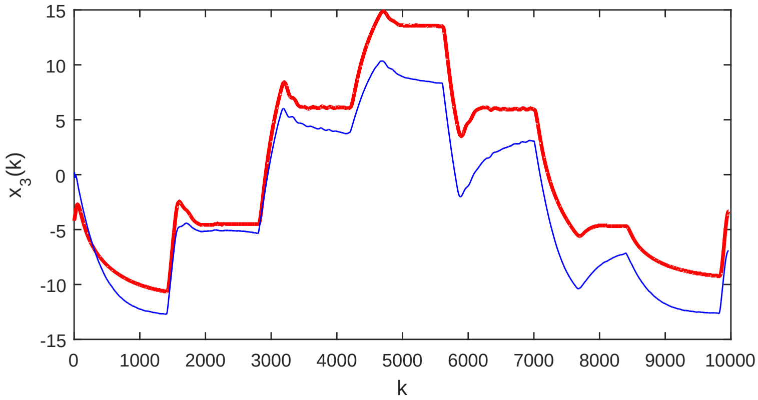


Figura 55 – Estado x_4 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_4$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para a câmara termoeletricamente controlada.

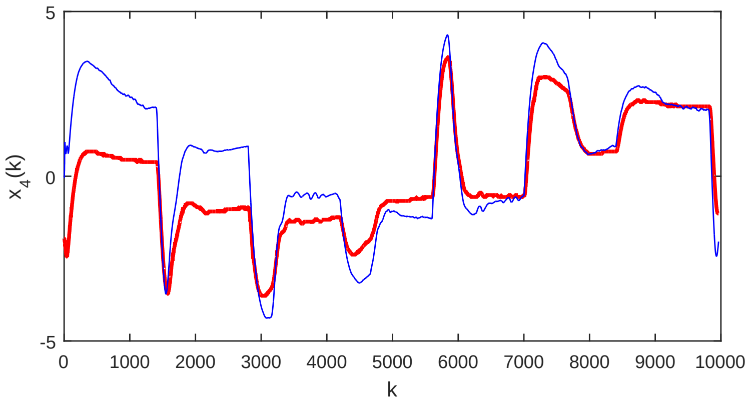
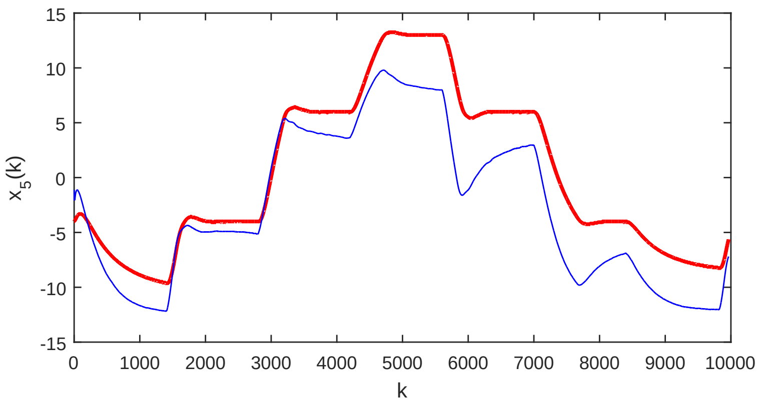


Figura 56 – Estado x_5 (curva em vermelho) e o valor médio das partículas do estado $\hat{x}_5$ (curva em azul) para a filtragem via filtro de partículas para a câmara termoeletricamente controlada.



Para verificar a eficiência da estimação obtida, foram realizadas simulações para o filtro de partículas, com as partículas variando de 10^2 à 10^4 e $k = 1000$. Para tal, foram fixados os parâmetros variantes, como as incertezas e os sinais de ruídos.

Então, foram feitos os cálculos do RMS do erro de cada um dos casos para cada um dos estados da planta como apresentada na Tabela 7, resultando em melhores estimações quando o número de partículas utilizado é maior.

Tabela 7 – Métricas para a estimação via filtro de partículas para a câmara termoeletricamente controlada.

Número de partículas	RMS do erro				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
10^2	0,4140	0,3779	0,2637	0,37901	0,0273
10^3	0,4123	0,3403	0,2512	0,4019	0,0202
10^4	0,3239	0,3807	0,2899	0,3469	0,0153

Durante os estudos percebeu-se que a variação da matriz U gera resultados diferentes para a estimação via LMI, podendo inclusive gerar sistemas defasados, como mostrado nas figuras 26, 28, 29, 30, por exemplo. Portanto fica evidente que a escolha da U é de extrema importância para realizar boas estimações.

Como sugestão para resolver esse problema é utilizar outra LMI independente da igualdade (3.20).

6 Conclusão e trabalhos futuros

Este trabalho investigou a estimação de estados por meio de duas abordagens: via filtro de partículas e LMI. A motivação para a realização da comparação entre esses dois métodos advêm do fato do filtro de partículas ser usado mesmo quando o sistema é instável. Em virtude disso foram realizadas, inicialmente, implementações para a estimação por filtro de partículas com exemplos escolhidos de forma a verificar o desempenho de ambas as técnicas tanto para sistemas lineares precisamente conhecidos quanto para sistemas incertos.

Os resultados encontrados para a estimação utilizando o método do filtro de partículas foram satisfatórios para o sistema linear sem incertezas, o qual foi escolhido de forma arbitrária e utilizado para testar a técnica. Como resultado foram obtidos estados estimados que seguiram os valores dos estados reais. Entretanto, para o caso do sistema incerto, no qual foram inseridas incertezas no sistema linear anterior, a estimação realizada apresentou uma distorção considerável.

O mesmo teste foi realizado para a estimação via LMI, no qual foi utilizado um sistema de segunda ordem gerado de forma aleatória para verificar os estados estimados, os resultados obtidos resultaram em erros elevados como já era esperado uma vez que os valores das normas foram altos.

Em seguida, os métodos implementados foram utilizados em duas plantas presentes no laboratório da universidade para verificar a estimação dos mesmos em sistemas reais. Em ambas as plantas, tanto no módulo didático quanto na câmara termoeletricamente controlada, a estimação que apresentou melhores resultados foi a realizada utilizando o filtro de partículas, no qual foram obtidos valores reduzidos do erro de estimação dos estados.

Cabe salientar que para o sistema da câmara termoeletricamente controlada, que possui um número maior de estados, os filtros LMI apresentaram a necessidade de utilizar mais estados medidos como referência em comparação ao filtro de partículas. Em virtude disso, a estimação por meio do filtro LMI possui um custo maior, caso seja utilizado na estimação de sistemas reais.

Ainda no que diz respeito aos filtros LMI, para utilizá-los é necessário sintonizar a matriz U, uma vez que essa é escolhida de forma aleatória, assim para cada matriz U encontrada são gerados diferentes filtros. Para os problemas utilizados, não foi possível encontrar um ajuste que levasse a uma estimação razoável para os estados dos sistemas, uma das possíveis causas desse baixo desempenho ocorre devido à não utilização da entrada no processo de estimação além da escolha de U.

Vale ressaltar ainda que se o sistema não for observável, não será possível obter uma estimação satisfatória para nenhum dos casos abordados no presente trabalho.

Possíveis trabalhos futuros podem ser realizados nas plantas apresentadas a fim de encontrar novos resultados da estimação de estados com o objetivo de comparar e encontrar qual o melhor método para os casos em questão, tais como a inserção de não linearidades nos sistemas e, então, utilizar o filtro de partículas para estimar os estados e verificar sua eficiência em relação ao sistema linear.

Outra alternativa, é utilizar técnicas para encontrar a matriz U de forma a gerar melhores valores para a estimação ou criar outra LMI para realizar a recuperação das matrizes dos filtros, que não necessitem das matrizes U e V.

Referências

ABREU, P. E. O. G. B. *Projeto de Sensores Virtuais e Estudo de Algoritmos para Estimação Online de Parâmetros em Dados com Excitação Intermitente*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016. 2

AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas – Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2004. 7

AIUBE, F. A. L.; BAIDYA, T. K. N.; TITO, E. A. H. Processos estocásticos dos preços das commodities: uma abordagem através do filtro de partículas. *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 60, n. 3, p. 215–233, 2006. 27

BARBOSA, K. A.; SOUZA, C. E. D.; TROFINO, A. Robust H_2 filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions. *Systems and Control Letters*, Elsevier, v. 54, 2005. 15

BESAG, J.; CLIFFORD, P. Sequential Monte Carlo p-values. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 78, n. 2, p. 301–304, 1991. 24

BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994. 8, 9

CHING, J.; BECK, J. L.; PORTER, K. A. Bayesian state and parameter estimation of uncertain dynamical systems. *Probabilistic engineering mechanics*, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 81–96, 2006. 1, 2, 26

FRAZAO, R. J. A. *Métodos alternativos para estimação de estado em sistemas de energia elétrica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, MA, Brasil, 2010. 4

GEROMEL, J. C. et al. H_2 and H_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 38, n. 5, p. 1353–1368, 2000. 16, 17, 46

GUSTAFSSON, F. Particle filter theory and practice with positioning applications. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, IEEE, v. 25, n. 7, p. 53–82, 2010. 27

HAYKIN, S. S. et al. *Kalman filtering and neural networks*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2001. 4

HESPANHA, J. P.; LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Overcoming the limitations of adaptive control by means of logic-based switching. *Systems and control letters*, Elsevier, v. 49, n. 1, p. 49–65, 2003. 2

IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust adaptive control*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. 7

KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of basic engineering*, v. 83, n. 3, p. 95–108, 1961. 7

KALMAN, R. E. et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960. 5

KELES, N. et al. Módulos didádicos para o ensino de análise e controle de sistemas dinâmicos. In: *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2017)*. [S.l.]: SBAI, 2017. 34, 35

LACERDA, M. J. *Contribuições ao problema de filtragem H_∞ para sistemas dinâmicos*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, 2014. 11, 12, 13, 14, 15

LEITE, V. J. et al. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista Sba: Controle & Automação*, SciELO Brasil, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004. 10, 11

LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE. *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*. [S.l.], 2004. p. 284–289. 35

LUENBERGER, D. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 11, n. 2, p. 190–197, 1966. 7

MARTINS, R. C. D. *Filtragem robusta via combinação convexa de filtros de Kalman*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, 2007. 13, 14

MAYBECK, P. S. *Stochastic models, Estimation, and Control*. [S.l.]: Academic press, 1982. v. 3. 24

NIU, Y.; HO, D. W.; LAM, J. Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay. *Automatica*, Elsevier, v. 41, n. 5, p. 873–880, 2005. 24

OGUNNAIKE, B. A.; RAY, W. H. *Process dynamics, modeling, and control*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1994. 4

OLIVEIRA, T. R. *Controle por modos deslizantes de sistemas incertos com direção de controle desconhecida*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 2006. 2

PAIM, A. Controle preditivo retroalimentado por estados estimados, aplicado a uma planta laboratorial. *Chemical Engineering Postgraduate Studies Program*, v. 161, 2009. 5, 6, 24

PEREIRA, A. M. F. et al. Tensor product model transformation simplification of Takagi-Sugeno control and estimation laws – an application to a thermoelectric controlled chamber. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2018. 42, 51

PERES, P. L. D. Controle H_2 e H_∞: Caracterização por desigualdades matriciais lineares. *Controle H_2/H_∞ Caracterização por Desigualdades Matriciais Lineares*, 1997. 8

RAY, W. H. *Advanced process control*. [S.l.]: McGraw-Hill Inc.,USA, 1980. 4, 5

SCHERER, C.; WEILAND, S. Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, v. 3, 2000. 9, 10, 15, 17

SCHMIDT, S. F. The Kalman filter-its recognition and development for aerospace applications. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012. 2

SEPPÄNEN, A. *State estimation in process tomography.* [S.l.]: University of Kuopio, 2005. 1, 2

SHAKED, U.; THEODOR, Y. H_∞ - optimal estimation: a tutorial. In: IEEE. *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on.* [S.l.], 1992. p. 2278–2286. 17

SIMON, D. *Optimal state estimation: Kalman, H_∞, and nonlinear approaches.* [S.l.]: John Wiley and Sons, 2006. 2, 5, 6, 7, 24

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design.* [S.l.]: Wiley New York, 2007. v. 2. 8

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. 35

WAN, E. A.; MERWE, R. V. D. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: IEEE. *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000.* [S.l.], 2000. p. 153–158. 7

WANG, Z.; WANG, J.; WU, Y. State estimation for recurrent neural networks with unknown delays: A robust analysis approach. *Neurocomputing*, Elsevier, 2016. 2