



Escola de Minas  
CECAU - Colegiado do Curso de  
Engenharia de Controle e Automação



Guilherme Henrique Machado de Lima

**Desenvolvimento de Módulos Didáticos para Controle de Motores de  
Corrente Contínua como Material de Suporte em Disciplinas de  
Controle**

Ouro Preto, 2025

Guilherme Henrique Machado de Lima

# **Desenvolvimento de Módulos Didáticos para Controle de Motores de Corrente Contínua como Material de Suporte em Disciplinas de Controle**

Trabalho apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. João Carlos Vilela de Castro

Ouro Preto

2025



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CONTROLE E  
AUTOMACAO



**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Guilherme Henrique Machado de Lima**

**Desenvolvimento de Módulos Didáticos para Controle de Motores de Corrente Contínua  
como Material de Suporte em Disciplinas de Controle**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação

Aprovada em 04 de setembro de 2025

Membros da banca

M.e João Carlos Vilela de Castro - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)  
Dra. Adrielle de Carvalho Santana - Convidada (Universidade Federal de Ouro Preto)  
Dr. Paulo Marcos de Barros Monteiro - Convidado (Universidade Federal de Ouro Preto)

João Carlos Vilela de Castro, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 09/09/2025



Documento assinado eletronicamente por **João Carlos Vilela de Castro, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/09/2025, às 14:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0973445** e o código CRC **19AC449E**.

**Referência:** Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.011369/2025-00

SEI nº 0973445

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163  
Telefone: 3135591533 - [www.ufop.br](http://www.ufop.br)

# Resumo

Nas disciplinas de controle, simulações de sistemas dinâmicos são essenciais para projetar controladores, utilizando modelos matemáticos e *softwares* numéricos. O bom resultado de um projeto depende de uma boa modelagem e de parâmetros corretos para execução. Nesse contexto, na disciplina de Teoria de Controle II do curso de Engenharia de Controle e Automação, os alunos aprendem sobre controle em tempo discreto e projetam controladores digitais, que são aplicados a motores de corrente contínua. No entanto, a implementação prática é dificultada por limitações de tempo e problemas na montagem de circuitos, além da falta de parâmetros precisos. A criação de módulos eletrônicos com circuitos oferece uma solução para esses desafios, permitindo que os alunos se concentrem no projeto e na análise dos controladores sem ter que se preocupar com eventuais falhas no circuito ou na modelagem. Por meio de ensaios em laboratório foi possível fazer uma identificação dos parâmetros iniciais do motor CC pela abordagem caixa branca. Esses valores encontrados foram posteriormente refinados utilizando um método de otimização numérica. Além disso, aplicou-se a abordagem caixa cinza, utilizando um método complementar baseado na série de Taylor para validação e comparação dos resultados. Os módulos criados apresentaram um bom resultado em sala de aula, facilitando a realização das atividades práticas. A identificação de parâmetros utilizando o método de otimização numérica se mostrou o mais adequado, apresentando valores mais próximos dos valores reais. Com os valores obtidos, torna-se possível minimizar eventuais erros no projeto do controlador. Dessa forma, a proposta apresentada mostrou-se eficiente tanto para a validação experimental quanto para o apoio às atividades didáticas.

**Palavras-chaves:** Módulo didático. Motor CC. Identificação de parâmetros. Sistemas de controle.

# Abstract

In control courses, simulations of dynamic systems are essential for designing controllers, using mathematical models and numerical softwares. The good result of a project depends on good modeling and correct parameters for execution. In this context, in the Control Theory II course of the Control and Automation Engineering program, students learn about discrete-time control and design digital controllers, which are applied to direct current motors. However, practical implementation is hindered by time limitations and problems in circuit assembly, in addition to the lack of precise parameters. The creation of electronic modules with circuits offers a solution to these challenges, allowing students to focus on the design and analysis of controllers without having to worry about possible failures in the circuit or in modeling. Through laboratory tests it was possible to make an identification of the initial parameters of the DC motor by the white-box approach. These values found were later refined using a numerical optimization method. In addition, the gray-box approach was applied, using a complementary method based on the Taylor Series for validation and comparison of the results. The modules created presented a good result in the classroom, facilitating the performance of practical activities. The identification of parameters using the numerical optimization method proved to be the most adequate, presenting values closer to the real ones. With the values obtained, it becomes possible to minimize possible errors in the controller design. In this way, the proposed approach proved to be efficient both for experimental validation and for supporting didactic activities.

**Key-words:** Didactic module. DC motor. Parameter identification. Control systems.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Componentes de um motor CC . . . . .	18
Figura 2 – Circuito equivalente de um motor CC . . . . .	20
Figura 3 – Esquemático do L293D, do motor e da alimentação 12V . . . . .	37
Figura 4 – Esquemático do Arduino . . . . .	37
Figura 5 – Design da PCI . . . . .	38
Figura 6 – Circuito de testes . . . . .	39
Figura 7 – Placas impressas na CNC . . . . .	40
Figura 8 – Placa soldada com os conectores . . . . .	40
Figura 9 – Motor CC ligado ao módulo de controle . . . . .	41
Figura 10 – Gráfico do motor em regime permanente . . . . .	43
Figura 11 – Circuito de ensaio para identificar a força contraeletromotriz . . . . .	44
Figura 12 – Gráfico da velocidade do motor em vazio . . . . .	47
Figura 13 – Gráfico da velocidade do motor em vazio com o valor de 63% da velocidade . . . . .	48
Figura 14 – Ponto em que o valor de velocidade alcança 63%do seu fundo de escala . . . . .	48
Figura 15 – Modelo Simulink de um motor CC . . . . .	51
Figura 16 – Placa de circuito impresso (PCB) fabricada por empresa especializada . . . . .	54
Figura 17 – Caso 1 - Dados experimentais . . . . .	55
Figura 18 – Caso 2 - Série de Taylor . . . . .	55
Figura 19 – Caso 3 - Otimização numérica . . . . .	56

# Lista de abreviaturas e siglas

CC	Corrente contínua
CA	Corrente alternada
CNC	Controle Numérico Computadorizado
CI	Circuito integrado
PI	Proporcional integral
CS	<i>Cuckoo Search</i>
PSO	<i>Swarm Optimization</i>
DE	<i>Differential Evolution</i>
MMQ	Método dos mínimos quadrados
CEMF	Força contraeletromotriz
GND	Aterramento (do inglês <i>Ground</i> )

# Lista de símbolos

$\Gamma$	Letra grega Gama
$\Lambda$	Lambda
$\zeta$	Letra grega minúscula Zeta
$\in$	Pertence
$\Delta$	Letra grega maiúscula Delta
$\sigma$	Letra grega minúscula Sigma
$\alpha$	Letra grega minúscula Alfa
$\omega$	Letra grega minúscula Ômega
$\Phi$	Letra grega maiúscula Fi
$\beta$	Letra grega maiúscula Beta
$\Sigma$	Somatório
$\tau$	Letra grega maiúscula Tau
$\partial$	Derivada parcial
$\int$	Integral

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>12</b>
1.1.1	Objetivos gerais:	12
1.1.2	Objetivos específicos	12
<b>1.2</b>	<b>Materiais e Métodos</b>	<b>13</b>
1.2.1	Materiais	13
1.2.2	Métodos	13
<b>1.3</b>	<b>Estrutura do trabalho</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Módulos didáticos em laboratórios de controle</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Abordagens para identificação de parâmetros para modelos de motores CC</b>	<b>16</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelo matemático de um motor de corrente contínua (CC)</b>	<b>17</b>
<b>2.4</b>	<b>Identificação de parâmetros em motores CC</b>	<b>21</b>
2.4.1	Modelagem de um motor CC pela abordagem caixa branca	22
2.4.2	Modelagem de um motor CC pela abordagem caixa cinza	24
2.4.3	Método dos mínimos quadrados	25
2.4.4	Modelagem e identificação de sistemas por série de Taylor	26
2.4.4.1	Estimativa sem o torque de perturbação	27
2.4.4.2	Estimativa com o torque de perturbação	29
<b>2.5</b>	<b>Representações matemáticas de sistemas dinâmicos</b>	<b>30</b>
2.5.1	Representação por função de transferência	30
2.5.2	Representação por espaço de estados	32
<b>3</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b>	<b>34</b>
<b>3.1</b>	<b>Projeto e fabricação do módulo didático</b>	<b>34</b>
3.1.1	Especificações técnicas do sistema	34
3.1.2	Circuito de acionamento	35
3.1.3	Projeto eletrônico	35
3.1.4	Projeto do circuito eletrônico do módulo	38
3.1.5	Fabricação das placas de circuito (PCB)	39
<b>3.2</b>	<b>Obtenção dos parâmetros para o modelo do motor CC pela abordagem caixa branca.</b>	<b>41</b>
3.2.1	Medição da corrente de armadura	42
3.2.2	Cálculo da resistência de armadura	43

3.2.3	Cálculo da indutância de armadura . . . . .	43
3.2.4	Constante de força contra eletromotriz . . . . .	44
3.2.5	Constante de torque . . . . .	45
3.2.6	Constante de atrito viscoso . . . . .	45
3.2.7	Momento de inércia . . . . .	47
<b>3.3</b>	<b>Obtenção do modelo pela abordagem caixa cinza utilizando o método da Série de Taylor . . . . .</b>	<b>49</b>
3.3.1	Preparação dos dados . . . . .	49
3.3.2	Implementação do Método . . . . .	50
3.3.3	Resultados . . . . .	50
<b>3.4</b>	<b>Refinamento dos parâmetros com métodos de otimização numérica</b>	<b>51</b>
3.4.1	Modelo Simulink . . . . .	51
3.4.1.1	Circuito elétrico . . . . .	51
3.4.1.2	Sistema mecânico . . . . .	52
3.4.2	Otimização . . . . .	52
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos futuros . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>59</b>

# 1 Introdução

Nas disciplinas de controle, simulações de sistemas dinâmicos são frequentemente usadas como etapas no projeto de controladores em malha fechada. Os modelos são importantes não somente para simulação, mas também para análise de estabilidade e para o próprio projeto do controlador em si, por isso um modelo matemático que represente o comportamento dinâmico do sistema é necessário. Em geral, a partir do modelo, e com o auxílio de *softwares* de computação numérica, como o GNU Octave, MATLAB®, R, Julia, dentre outros, estas simulações são executadas a fim de se estudar o comportamento do sistema ou até mesmo projetar controladores para o mesmo.

Nesse sentido, grande parte do sucesso no projeto de controladores está relacionado ao uso de um bom modelo. Além disso, uma parte do aprendizado do aluno está relacionado à realização de atividades práticas, onde o projeto simulado é colocado para funcionar na vida real. Na teoria é possível desprezar certas grandezas, desconsiderar um ruído ou uma perturbação, mas na prática é necessário considerar todos esses fatores para realização de uma atividade. Essa é uma forma de aproximar mais o aluno de todas as dificuldades que vão estar presentes na execução de um projeto.

O controlador é um dispositivo que regula o comportamento de um sistema ou dispositivo, que pode ser um hardware ou algum software. O controlador executa funções com base em sinais monitorados, gerando sinais que são usados para atuar no processo controlado, de forma a ajustar automaticamente seus sinais de saída para seguir um sinal de referência ou manter o sistema em um estado desejado.

No Curso de Engenharia de Controle e Automação é ofertada a disciplina de Teoria de Controle II. Essa disciplina aborda conceitos de controle de sistemas em tempo discreto, incluindo a discretização de sistemas contínuos, projeto de controladores digitais, e análise de estabilidade em sistemas discretos. Embora o embasamento teórico seja fundamental para a compreensão dos princípios e métodos envolvidos, é por meio da prática que os alunos conseguem visualizar e aplicar os conceitos em sistemas reais. E nas disciplinas de controle, a abordagem prática permite que os alunos utilizem esses conhecimentos em situações reais, enfrentando desafios típicos de sistemas de controle, como ruídos, atrasos e limitações dos sistemas físicos e computacionais.

A parte prática dessa disciplina envolve projetar controladores digitais, com uso de microcontroladores, para controlar sinais de algum sistema físico. Um sistema que é muito utilizado nessas práticas para esses fins é um motor de corrente contínua (CC). Em um dos trabalhos práticos atribuídos aos alunos, uma possibilidade é o projeto de um controlador em malha fechada para controlar alguma variável do motor, em geral a velocidade angular

ou posição, de forma a seguir algum sinal de referência.

No entanto, devido à natureza teórica da disciplina e ao tempo limitado, a implementação prática pode ser desafiadora. O foco da disciplina é analisar sistemas e projetar controladores a partir de um modelo matemático discretizado. A implementação subsequente, como a programação de um microcontrolador, muitas vezes se torna problemática devido à necessidade de montar todo o circuito para acionamento do motor. O desafio no ponto de vista da disciplina de controle, não está em montar o circuito para acionamento do motor, mas sim em entender e ajustar o seu comportamento.

Em toda aula prática um dos principais fatores a ser controlado é o tempo, assim, montar o circuito e resolver as questões propostas no período de uma aula pode ser um problema. Quando o circuito é montado incorretamente ou quando algum componente não funciona direito, um grande tempo da aula é destinado a achar falhas do circuito que não funciona. Outro problema comum é algum dispositivo estragar por algum manuseio físico inadequado, tendo um desfalque de equipamentos no laboratório. Isso levava muitas vezes a mais de uma aula para resolver, atrasando o calendário proposto, adiando ou diminuindo tempo de entrega dos relatórios, sendo um problema tanto para o professor que tem que mudar seu planejamento quanto para os alunos que ficam atrasados.

Outro problema está relacionado aos parâmetros do motor utilizado. Na disciplina um dos objetivos é projetar um controlador utilizando parâmetros para o modelo matemático. Para isso os parâmetros do motor são necessários, porém, devido à falta dos parâmetros corretos, utilizam-se parâmetros aproximados de motores que são parecidos. Isso pode acabar gerando inconsistências no trabalho final apresentado, com resultados bem diferentes dos esperados, o que de certa forma dificulta a correção, já que fica mais difícil saber se o que está dando errado foi a abordagem utilizada no trabalho ou os parâmetros passados.

Tendo isso em mente, a criação de módulos didáticos para a disciplina veio como uma solução, onde o circuito usado já estaria montado em uma placa de circuito impressa. Problemas de más conexões seriam sanados devido às trilhas do circuito impresso estarem interligadas diretamente pelo cobre. Os componentes do circuito não estariam mais sujeitos a serem danificados por um uso incorreto, por já estarem ligados às placas. Dessa forma os alunos têm mais tempo para focar no projeto, implementação e análise do controlador, não gastando tempo em atividades relacionadas à montagem.

Além do mais, de posse dos parâmetros corretos do motor o projeto por simulação que antecede a implementação real se torna mais adequado e preciso. Qualquer resultado ruim, caso exista, na maioria das vezes será devido à erros no projeto do controlador, e não à montagem ou má escolha de parâmetros.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho apresenta a criação de um módulo microcontrolado para acionamento e controle em malha fechada da velocidade ou posição de um motor CC nos quatro quadrantes de operação. A finalidade deste módulo é ser usado em trabalhos práticos da disciplina de Teoria de Controle II ou até mesmo em outras disciplinas ou atividades em que tal aplicação se mostre útil.

### 1.1.1 Objetivos gerais:

- Construir módulos didáticos para uso em trabalhos práticos de disciplinas de controle.
- Aplicar e colocar em prática os aprendizados adquiridos ao longo do curso de Engenharia de Controle e Automação.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Montagem e criação das placas, detalhando todo o esquemático do circuito, e os *softwares* e processos usados na utilização da CNC (Controle Numérico Computadorizado) para impressão das placas.
- Identificar os parâmetros dos motores utilizados.
- Modelar matematicamente o motor CC.
- Comparar métodos de identificação de parâmetros.

## 1.2 Materiais e Métodos

### 1.2.1 Materiais

Foram utilizados os seguintes materiais neste trabalho:

- Motor CC: É o componente eletromecânico cujo parâmetros serão encontrados, esse tipo de motor converte energia elétrica em energia mecânica rotacional.
- Osciloscópio: Dispositivo usado para visualização de sinais elétricos no tempo, ele é capaz de medir a resposta do motor, verificar formas de onda de tensão e corrente e identificar ruídos ou distorções.
- Arduino Nano: Um microcontrolador utilizado para controlar sinais de entrada e saída.
- Placas de circuito impresso: Placas onde serão montados os circuitos eletrônicos.
- Resistores: Usados na montagem de circuitos. Podem servir como divisores de tensão, ou circuitos de proteção.
- Circuito integrado (CI) L293D (ponte H): Circuito integrado utilizado para controle de motores CC, permite controlar a direção de rotação e a ativação do motor por meio de sinais lógicos.
- Fonte de tensão 12 V: Fonte que alimenta o motor CC e outros componentes do circuito.
- Controle Numérico Computadorizado (CNC): Equipamento utilizado para a fabricação das placas de circuito impresso, um sistema CNC pode cortar trilhas com alta precisão, permitindo a criação de layouts diversos.

### 1.2.2 Métodos

As placas foram confeccionadas utilizando uma CNC para a etapa de impressão, em seguida, os componentes foram soldados. Foram realizados ensaios em laboratório para determinar os parâmetros iniciais do motor CC. Com esses parâmetros iniciais foram utilizados métodos matemáticos para determinar os parâmetros corretos do motor analisado.

### 1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho será abordado como tendo duas partes. A primeira parte será direcionada a parte física do controlador, que envolve toda a criação do circuito eletrônico utilizado nas placas. Por sua vez, a segunda parte será focada no uso de técnicas de identificação, utilizando *softwares* e modelos matemáticos. O Capítulo 2 apresenta a revisão de literatura, abordando conceitos de modelagem e controle de motores CC, bem como diferentes métodos de identificação de parâmetros. O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento do módulo didático, incluindo o projeto eletrônico, a fabricação das placas de circuito impresso e a identificação dos parâmetros do motor. No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos pelos módulos didáticos fabricados, seguido da análise de dados dos parâmetros obtidos. Por fim, no Capítulo 5 apresentam-se a conclusão e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Revisão de literatura

Este capítulo apresenta uma revisão de publicações consultadas e que se mostraram pertinentes na realização desse trabalho. O capítulo apresenta também conceitos fundamentais para o entendimento do trabalho proposto.

### 2.1 Módulos didáticos em laboratórios de controle

Um controlador em malha fechada é um sistema de controle onde o sinal de saída é comparado a um sinal de referência, fazendo ajustes conforme o necessário. Nas disciplinas de Teoria de controle, o projeto destes controladores é estudado matematicamente.

Entretanto, uma parte importante do projeto prático consiste em implementar fisicamente o controlador em uma planta real. O uso de simulações computacionais auxilia no processo de aprendizagem, mas aplicar o sistema de controle em um sistema real, mesmo que em configurações simples, agrega ainda mais ao aprendizado. Porém, construir um sistema de controle em malha fechada do zero demanda tempo e dedicação, além de conhecimentos, que pode demandar do aluno tempo e conhecimento além do reservado a uma disciplina de controle de processos. Nesse sentido, módulos didáticos podem ajudar no processo de implementar controladores práticos sem demandar muito tempo, habilidade e conhecimento geral.

Esses módulos didáticos são de fácil utilização e podem ser construídos com baixo custo. Keles et al. (2017) seguem essa nessa proposta, criando módulos didáticos para o ensino de modelagem e controle de sistemas dinâmicos, com o objetivo de ajudar os alunos a compreender conceitos como estabilidade, linearidade, fase mínima e não mínima, e teorias de controle robusto, com o módulo consistindo em um circuito com resistores, capacitores e amplificadores operacionais, com realimentação que pode tornar o sistema instável ou estável dependendo dos parâmetros escolhidos, com o circuito sendo modelado em espaços de estados.

Silva et al. (2022) propõe um módulo capaz de realizar o acionamento controlado de um motor acoplado a outro que funciona como gerador, com a tensão gerada monitorada por um sistema supervisor. O módulo inclui o uso de microcontroladores Atmega328p, *bluetooth* para comunicação, e componentes eletrônicos (resistores, capacitores, diodos). O controlador utilizado foi o PI (Proporcional integral), para controlar a velocidade do motor acoplado a um gerador.

Independentemente da estratégia adotada, o foco permanece em promover uma melhor compreensão por parte do aluno durante as atividades laboratoriais. Nesse contexto, este trabalho propõe o desenvolvimento de um módulo didático inspirado nos trabalhos mencionados, mas com o propósito de construir um sistema voltado ao controle de velocidade angular ou de posição de um motor CC.

## 2.2 Abordagens para identificação de parâmetros para modelos de motores CC

Neste trabalho, além do desenvolvimento da parte física do módulo de controle, é necessário obter um modelo matemático que represente corretamente o comportamento dinâmico do motor CC. A partir desse modelo, é possível projetar controladores eficientes e prever o desempenho do sistema.

Para isso, é necessário a identificação precisa dos parâmetros elétricos e mecânicos do motor. Diversos trabalhos propõem métodos e estratégias para esse fim, desde abordagens clássicas até técnicas mais recentes.

Mamani et al. (2007) apresentam um método algébrico em malha aberta que permite determinar parâmetros do motor de forma direta, mostrando-se menos sensível a ruídos e mais eficiente computacionalmente que métodos tradicionais, como os mínimos quadrados recursivos.

Wu (2012) propõe uma técnica baseada na expansão em série de Taylor da resposta de velocidade, permitindo a identificação dos parâmetros a partir de dados simples de entrada e saída, sem necessidade de medições de corrente.

Fazdi e Hsueh (2023) realizam uma revisão abrangente dos métodos de identificação, destacando o uso crescente de algoritmos metaheurísticos, como *Cuckoo Search* (CS), *Particle Swarm Optimization* (PSO) e *Differential Evolution* (DE), como alternativas viáveis quando se busca maior precisão na modelagem de motores CC, especialmente na presença de não linearidades e incertezas.

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, utilizaram-se diferentes abordagens para identificar os parâmetros do motor. Por meio de ensaios em laboratório, os parâmetros iniciais foram encontrados. Um dos parâmetros iniciais, obtidos em laboratório, foi empregado na técnica de identificação por série de Taylor, anteriormente mencionada. Posteriormente, todos os parâmetros iniciais foram refinados por meio de otimização numérica, que utiliza o método dos mínimos quadrados. Esse método consiste em ajustar um modelo matemático aos dados experimentais, minimizando o erro quadrático entre os valores medidos e os valores previstos pelo modelo, utilizando *softwares* de modelagem matemática.

## 2.3 Modelo matemático de um motor de corrente contínua (CC)

De acordo com o guia técnico da Siemens (2006), elaborado pelo Eng. Flavio Honda, um motor CC é um motor que funciona à base de corrente contínua, podendo atuar também como um gerador. São usados em várias aplicações como por exemplo prensas, elevadores, máquinas CNC, além de também serem utilizados em aparelhos eletrodomésticos como ventiladores e liquidificadores, etc.

Conforme descrito por Umans (2014), o motor CC possui várias partes, como mostrado na Figura 1, que incluem:

- Enrolamento de armadura (induzido): É encontrado na parte girante do motor (rotor), é responsável por produzir o torque elétrico que movimenta quando atua como motor, ou produzir a energia de saída quando opera como gerador.
- Enrolamento de campo: É a parte fixa da máquina (estator), que também pode ser feita por ímãs permanentes. Essa parte cria o fluxo magnético que atravessa a armadura. Formando os pólos magnéticos norte e sul, o que cria um campo de excitação.
- Comutador: Tem a função de manter a corrente circulando sempre no mesmo sentido na armadura, fazendo com que o torque gerado esteja sempre no mesmo sentido. Quando opera como gerador, tem a função de manter a tensão sempre com a mesma polaridade.
- Escovas: Fazem o contato do enrolamento de armadura para que se possa injetar energia elétrica no enrolamento. Quando funciona como gerador, ela retira a energia elétrica do enrolamento.
- Eixo: Componente que transmite o movimento rotativo do motor para outras partes do sistema mecânico.

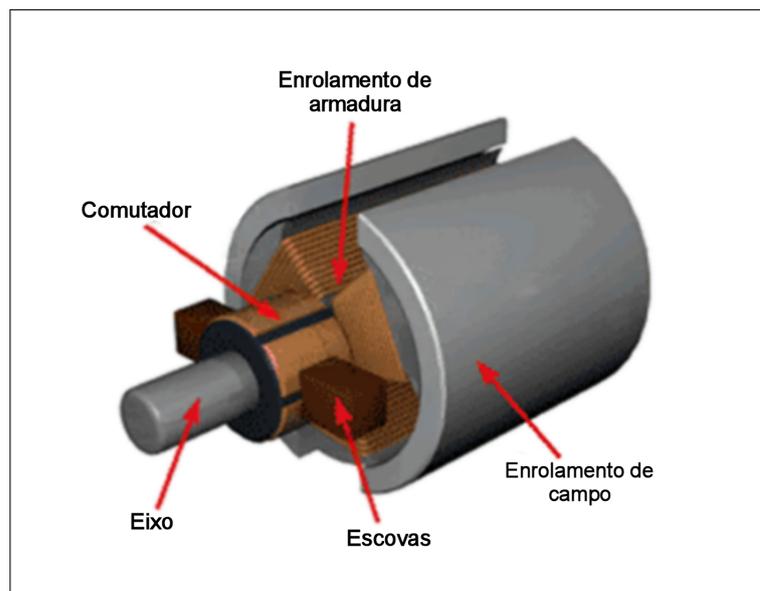


Figura 1 – Componentes de um motor CC, mostrando enrolamento de armadura, enrolamento de campo, comutador, escovas e eixo. Fonte: **Adaptado de Solo Motor Controllers (2023)**.

Os motores CC podem ser classificados de acordo com a forma como o campo magnético é gerado. Nos motores com campo eletromagnético, esse campo é produzido por enrolamentos de campo alimentados eletricamente. Segundo a Siemens (2006), esses motores se subdividem em quatro tipos principais:

- Motor CC de campo independente: O enrolamento de campo e o enrolamento de armadura são alimentados separadamente.
- Motor CC série: O enrolamento de campo e o de armadura estão conectados em série.
- Motor CC shunt (ou paralelo): O enrolamento de campo e o enrolamento de armadura estão conectados em paralelo.
- Motor composto: Combina características dos motores série e shunt.

Esses motores são robustos e permitem um controle preciso da velocidade e do torque, embora geralmente apresentem menor eficiência e maior tamanho devido às perdas nos enrolamentos de campo.

Em contrapartida, os motores CC com ímã permanente utilizam ímãs permanentes para gerar o campo magnético, substituindo os enrolamentos de campo. Essa configuração traz diversas vantagens, como maior eficiência energética devido à redução das perdas por aquecimento, menor tamanho e peso, resposta dinâmica mais rápida e menor necessidade

de manutenção (UMANS, 2014, p. 436). Esses motores são amplamente utilizados em aplicações como ventiladores, robôs móveis, impressoras, atuadores e sistemas automotivos.

Entre os subtipos de motores com ímã permanente, destacam-se o motor convencional, que é escovado e possui comutação mecânica, o motor CC sem escovas, que utiliza comutação eletrônica, e o motor síncrono de ímã permanente, que possui ímãs permanentes no rotor.

Neste trabalho, foi utilizado um motor de ímã permanente. Ribeiro e Prado (2015) realizaram uma comparação entre diferentes tipos de motores elétricos e destacaram as vantagens dos motores de ímã permanente, especialmente quanto à eficiência energética e ao custo. Devido às baixas perdas no rotor, esses motores apresentam alto rendimento, sendo adequados para aplicações que exigem controle preciso e baixo consumo de energia.

Os autores também ressaltam o desempenho desses motores, eles são mais fáceis para controlar velocidade e principalmente posição em malha fechada e possuem alta eficiência, especialmente em sistemas com restrições de espaço, já que suas dimensões reduzidas permitem alcançar um torque elevado e constante.

Esses motores possuem ímãs fixados no rotor, que podem ser dispostos na superfície ou no interior, os ímãs utilizados são classificados em três tipos: Alnicos, Ferrites e Ímãs de Terras Raras. Esses motores com ímãs internos tendem a oferecer maior desempenho em alta velocidade, enquanto os ímãs superficiais limitam a operação em velocidades acima da nominal.

Apesar das vantagens em desempenho e eficiência, os motores CC apresentam algumas desvantagens, uma delas é o custo inicial mais elevado, especialmente quando comparados, por exemplo, a motores de corrente alternada (CA), que são mais baratos em termos de aquisição. Porém, os motores CC com ímãs permanentes oferecem uma vantagem importante em termos de manutenção, já que não utilizam escovas nem comutadores, reduzindo a necessidade de intervenções periódicas. Uma outra desvantagem é a sensibilidade a altas velocidades, que pode causar danos aos ímãs permanentes quando não se realiza um controle adequado.

Muitos dos motores de ímã permanente não têm seus parâmetros totalmente caracterizados durante a fabricação, e durante o uso, o desgaste sofrido pelo motor ao longo do tempo pode mudar suas características, levando a possíveis discrepâncias no desempenho. Isso traz a necessidade da identificação desses parâmetros por meios de ensaios e testes, usando modelos matemáticos e algoritmos que possam nos dar os valores corretos desses parâmetros.

A definição desses parâmetros depende do modelo adotado para o motor. Basilio e Moreira (2002) mostram que o modelo matemático de um motor CC pode ser representado por um circuito elétrico acoplado à uma carga mecânica. A Figura 2 ilustra esse circuito,

onde  $R_a$  e  $L_a$  representam, respectivamente, a resistência de armadura e a indutância de armadura do motor. O momento de inércia é representado por  $J$ , o coeficiente de atrito viscoso é representado por  $f$ , e a tensão e corrente de armadura são representados por  $v_a(t)$  e  $i_a(t)$ . A força contraeletromotriz é representada por  $e(t)$ , e por fim,  $\omega(t)$  é a velocidade angular do motor. A partir desse modelo, pode-se usar métodos matemáticos e algoritmos para estimação dos parâmetros.

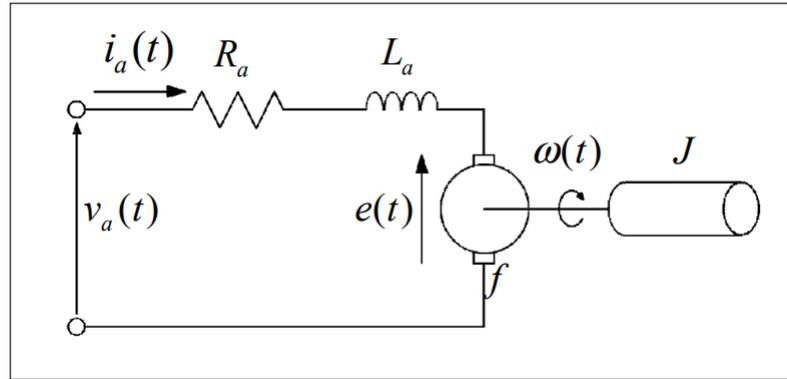


Figura 2 – Circuito equivalente de um motor CC. Fonte: **Basilio e Morreira (2002)**.

A partir do circuito da armadura representado na Figura 2, aplica-se a lei das tensões de Kirchhoff. Com isso, ao somar as quedas de tensão no circuito e isolar  $v_a(t)$ , obtém-se a seguinte equação:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + e(t) \quad (1)$$

De acordo com a segunda lei de Newton aplicada ao movimento rotacional, o produto do momento de inércia pela aceleração angular pode ser igualado à soma dos torques atuantes sobre o sistema, estes torques podem ser descritos como  $t_m(t)$ ,  $t_d(t)$  e  $f\omega(t)$  onde  $t_m(t)$  é o torque produzido pelo próprio motor e  $t_d(t)$  é o torque de distúrbio, que nesse estudo foi considerado nulo. E por fim,  $f\omega(t)$  representa o torque devido ao atrito viscoso que atua sobre o motor, sendo proporcional à velocidade angular  $\omega(t)$ . Essa relação pode ser traduzida na seguinte equação:

$$t_m(t) - t_d(t) - f\omega(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) \quad (2)$$

O torque criado pelo motor é o produto da corrente, do fluxo magnético e de uma constante. Como em motores de ímã permanente, o fluxo magnético pode ser considerado constante, o termo  $K\phi$  também é constante, podendo ser representado por  $K\phi = K_m$ , onde  $K_m$  é a constante de torque.

$$t_m(t) = K_m i_a(t) \quad (3)$$

Ao girar, o motor produz uma força contraeletromotriz (pela lei de Faraday), que é dada por  $K\phi\omega$ . No entanto, como o fluxo magnético é constante, considera-se novamente  $K_g = K\phi$ , sendo  $K_g$  a constante de força contraeletromotriz.

$$e(t) = K_g\omega(t) \quad (4)$$

Fazendo a substituição das equações, Eq. (3) na Eq. (2) e a Eq. (4) na Eq. (1):

$$K_m i_a(t) = f\omega(t) + J \frac{d}{dt}\omega(t) \quad (5)$$

$$v_a(t) - K_g\omega(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt}i_a(t) \quad (6)$$

As equações diferenciais ordinárias (5) e (6), juntas, representam o modelo matemático para o motor CC com imã permanente considerado. A partir dessas equações, pode-se obter outras representações para o modelo. Dentre elas, destacam-se, para fins de controle, a representação por funções de transferência e a representação por espaço de estados.

Uma vez determinada a estrutura do modelo matemático do motor, deve-se determinar os parâmetros desse modelo.

## 2.4 Identificação de parâmetros em motores CC

A modelagem e identificação de parâmetros de motores CC são fundamentais para o desenvolvimento de sistemas de controle precisos e eficientes. No entanto, obter um modelo matemático que represente com precisão o comportamento dinâmico do motor é difícil, especialmente devido às variações nos parâmetros físicos, desgaste dos componentes e presença de não linearidades.

Alves (2016) apresenta três abordagens distintas que podem ser aplicadas na modelagem de motores CC. A primeira abordagem é a do tipo “caixa branca”, na qual o modelo é construído a partir das leis físicas que regem o sistema, ou seja, a partir de leis definidas pela ciência ao longo dos anos que explicam comportamentos de sistemas dinâmicos, como por exemplo, em fenômenos elétricos, eletromagnéticos, mecânicos, dentre outros.

A segunda abordagem é do tipo “caixa preta”, onde nenhum conhecimento prévio acerca do sistema é utilizado, e a identificação do modelo é feita a partir de dados dos sinais de entrada e saída do processo o qual se deseja modelar, colhidos em laboratório e utilizando técnicas numéricas de identificação. Dados como tensão de entrada, corrente

de entrada e velocidade do motor são usados para que se chegue aos parâmetros que satisfaçam esses valores.

A terceira abordagem é classificada como sendo do tipo “caixa cinza”, onde o modelo é identificado por técnicas numéricas, mas com uso de informações do processo obtidas a partir de leis da física ou de algum conhecimento prévio a respeito do comportamento do sistema, ou seja, é uma combinação das abordagens anteriores.

Neste trabalho, para conseguir um modelo para os motores utilizados, foram utilizadas duas abordagens. A abordagem caixa branca foi utilizada ao se obter o modelo por meio de testes em laboratório. Posteriormente, os parâmetros do modelo obtido pela abordagem caixa branca foram refinados partir de otimização numérica.

A abordagem caixa cinza foi utilizada em um método baseado na expansão da resposta dinâmica em séries de Taylor, como apresentado em Wu (2012), cuja descrição detalhada será apresentada na Seção 2.4.4. Essa abordagem é aqui classificada como caixa cinza devido ao fato de se usar o conhecimento prévio da estrutura do modelo de um motor CC, ou seja, número de polos e zeros, sendo feita apenas a identificação dos parâmetros, como a indutância por exemplo, com base em dados amostrados. Os dados de entrada e saída foram colhidos, sendo respectivamente tensão e velocidade, posteriormente, esses dados foram utilizados em um algoritmo no *software* matemático para que fossem identificados os parâmetros do motor utilizado.

### 2.4.1 Modelagem de um motor CC pela abordagem caixa branca

Nessa abordagem utiliza-se de leis da física para se obter o modelo matemático do motor em função de parâmetros, como abordado na seção anterior. Para um motor específico, esses parâmetros são obtidos por dados colhidos em laboratório, por isso são realizados ensaios experimentais para que grandezas como resistência e indutância de armadura, constante de força contraeletromotriz, constante de torque, constante de atrito viscoso e momento de inércia possam ser determinadas.

Os parâmetros que serão determinados estão expressos nas equações (5) e (6). A resistência da armadura pode ser obtida por meio de um ensaio de rotor bloqueado. Essa medida pode variar com a posição angular do rotor, uma vez que, dependendo dessa posição, a área de contato entre as escovas e os segmentos do coletor podem ser maior ou menor, influenciando na resistência medida. Para isso o ensaio é feito tomando-se diversas medidas em posições aleatórias, considerando-se o valor final como o valor médio das medidas.

É aplicada uma tensão contínua aos terminais do motor e mede-se a corrente em regime permanente. A relação entre a tensão aplicada e a corrente de armadura permite determinar a resistência pela Eq. (7):

$$R_a = \frac{v_a(t)}{i_a(t)} \quad (7)$$

A indutância da armadura é determinada a partir da constante de tempo elétrica do circuito. Durante o ensaio de rotor bloqueado, mede-se, via osciloscópio, o tempo necessário para que a corrente atinja 63,2% de seu valor final. A constante de tempo ( $\tau_e$ ) está relacionada aos parâmetros elétricos do circuito pela expressão:

$$\tau_e = \frac{L_a}{R_a} \quad (8)$$

Portanto, isolando  $L_a$ , tem-se:

$$L_a = \tau_e \cdot R_a \quad (9)$$

A força contraeletromotriz é a tensão induzida nos enrolamentos da armadura do motor devido ao movimento relativo entre o rotor e o campo magnético. Ela é proporcional à velocidade angular, e em conformidade com a lei de Faraday e o princípio de Lenz, apresenta polaridade que se opõe à variação do fluxo magnético que a gerou. Quando o eixo é acionado por uma fonte mecânica externa, esse mesmo fenômeno é responsável pela geração de energia elétrica, caracterizando o funcionamento do motor como gerador.

A constante de força contraeletromotriz pode ser obtida a partir da tensão gerada nos terminais do motor durante a fase de desligamento de uma onda quadrada de tensão aplicada à armadura. Após cessar a alimentação e encerrada a etapa de “roda livre”, em que a corrente circula pelo diodo em antiparalelo do circuito de acionamento, o motor passa a operar momentaneamente como gerador, e a tensão medida corresponde aproximadamente à força contraeletromotriz. Essa constante, relaciona-se diretamente à velocidade angular por:

$$e(t) = K_g \cdot \omega \quad (10)$$

Dessa forma, obtém-se:

$$K_g = \frac{e(t)}{\omega} \quad (11)$$

Assumindo um motor linear e isotrópico, a constante de torque possui o mesmo valor de  $K_g$ , expressa em  $V \cdot s/rad$ .

O atrito viscoso pode ser determinado por meio de ensaios em vazio, onde se registra a tensão, corrente e velocidade em diferentes pontos de operação.

O torque devido ao atrito viscoso é dado pela Eq. (12):

$$T_f = f \cdot \omega \quad (12)$$

Considerando que em vazio, o torque eletromecânico ( $T_g$ ) se iguala aproximadamente ao torque de atrito, a equação resulta em:

$$T_g = \frac{e(t) \cdot i_a(t)}{\omega} \quad (13)$$

Portanto, isolando  $f$ :

$$f = \frac{e(t) \cdot i_a(t)}{\omega^2} \quad (14)$$

Por fim, o momento de inércia é obtido a partir do chamado *run down test*, onde o motor é desligado após atingir uma velocidade estável, e mede-se o tempo necessário para que sua velocidade caia a aproximadamente 36,8% do valor inicial. A constante de tempo mecânica ( $\tau_m$ ) está relacionada a  $J$  e  $f$  por:

$$\tau_m = \frac{J}{f} \quad (15)$$

Logo, o momento de inércia é dado por:

$$J = \tau_m \cdot f \quad (16)$$

O conjunto de ensaios, juntamente com as equações (5) e (6), permite a obtenção de um modelo matemático do motor CC, baseado no conceito de modelo caixa branca. Ao determinar parâmetros do motor, pode-se construir um modelo que reflete as características internas do motor analisado.

#### 2.4.2 Modelagem de um motor CC pela abordagem caixa cinza

Nessa abordagem, o motor é excitado com um sinal conhecido e dados do sinal de excitação e de saída são amostrados e gravados para identificação paramétrica. Porém, informações do modelo matemático do motor, como por exemplo, ordem do modelo, são usadas no momento de definir a estrutura do modelo.

Os parâmetros são então determinados por métodos de identificação, sendo talvez, o mais utilizado para isso, e que se usa aqui, o método dos mínimos quadrados a ser descrito na próxima seção.

### 2.4.3 Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é uma técnica matemática usada para ajustar uma curva a um conjunto de dados, minimizando o erro médio quadrático entre os valores amostrados e os valores previstos pela curva ajustada. Esse método é amplamente utilizado em diversas áreas para modelar fenômenos com base em dados experimentais. Neves (2015) faz um estudo acerca desse método, mostrando seu conceito e suas aplicações.

Por meio do método, busca-se obter uma função cuja curva não passe necessariamente pelos pontos amostrados, mas que, utilizando um processo de otimização, tenha como objetivo minimizar a distância entre os valores medidos e aqueles obtidos pelo modelo estimado.

O método tem como base o erro quadrático  $\Delta y_i^2$ , que ocorre quando se substitui o valor da medida  $y_i$  pelo valor previsto  $f(x_i)$ . Isso é conhecido como o quadrado do desvio simples, sendo  $i$  o número do índice correspondente a cada ponto individual do conjunto de dados. Pode-se escrever que ao  $i$ -ésimo ponto, associa-se o desvio quadrático denotado da seguinte forma:

$$\Delta y_i^2 = (y_i - f(x_i))^2 \quad (17)$$

O erro total definido como  $S$  está associado ao ajuste da soma dos desvios quadráticos individuais referente a cada ponto  $(x_i, y_i)$ . Em suma, representa a soma dos quadrados dos desvios verticais em cada ponto dos dados, ou seja, o desvio quadrático total.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (18)$$

A incerteza média associada é representada pela equação:

$$\sigma = \sqrt{\frac{S}{n}} \quad (19)$$

Sendo  $n$  o número total de pontos experimentais considerados no ajuste.

A otimização do ajuste no método dos mínimos quadrados se baseia em reduzir o erro quadrático médio  $\sigma$ , o que, na prática, significa minimizar a função  $S$ . O ajuste resulta em uma única função, com alguns parâmetros que podem variar. No caso mais simples, onde a função depende de apenas um parâmetro, pode ser escrita da forma:

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(\alpha; x_i))^2 \quad (20)$$

Para que o erro seja o menor possível, é necessário encontrar o valor de  $\alpha$  que satisfaça a condição:

$$\frac{d}{d\alpha}S(\alpha) = 0 \quad (21)$$

Esse critério indica a presença de um ponto crítico para  $S$ , ou seja, onde a derivada de  $S$  é nula. No entanto, como  $S$  é composto por termos quadráticos, pode-se demonstrar que esse ponto crítico é, na verdade, um ponto de mínimo. A condição que garante a existência desse mínimo é:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}S(\alpha) > 0 \quad (22)$$

Aplicando essa condição à equação acima, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha; x_i) \right)^2 - (y_i - f(\alpha; x_i)) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(\alpha; x_i) \right) > 0 \quad (23)$$

Essa expressão confirma que o extremo da função  $S(\alpha)$  é realmente um mínimo. Assim, o Método dos Mínimos Quadrados trabalha para minimizar o erro médio quadrático entre os valores reais  $y_i$  e os valores previstos pela função  $f(x_i)$  para todo  $0 \leq i \leq n$ , garantindo que a curva obtida seja uma boa representação dos dados observados.

Esse método é muito utilizado na identificação de sistemas, uma vez que permite ajustar modelos matemáticos aos dados experimentais. Ao minimizar a soma dos erros quadráticos, é possível estimar os parâmetros que melhor representam o comportamento real do sistema, mesmo na presença de ruídos ou incertezas nos dados. Sua aplicação é útil em processos de modelagem, especialmente quando se busca compreender e controlar sistemas físicos, dinâmicos e lineares, como motores elétricos, sistemas mecânicos e processos industriais.

Dessa forma, o MMQ se consolida como uma ferramenta eficaz e amplamente utilizada tanto em ambientes acadêmicos quanto em aplicações industriais, fornecendo modelos mais refinados para análise, simulação e projeto de controladores.

#### 2.4.4 Modelagem e identificação de sistemas por série de Taylor

Para fins de comparação e validação, neste trabalho utilizou-se uma técnica apresentada por WU (2012), baseada na expansão em série de Taylor da resposta de velocidade para estimar os parâmetros do motor. O modelo é baseado em equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do motor, conforme apresentado nas equações (5) e (6), com a diferença que agora, o atrito cinético e o torque de relutância não são mais considerados nulos, como mostra a Eq. (24):

$$J \frac{d\omega}{dt} = K_m i_a(t) + t_d(t) \quad (24)$$

Onde  $t_d$  é o torque de distúrbio, que é composto pelo torque de relutância, o torque de atrito cinético, e o torque de atrito viscoso:

$$t_d(t) = t_{cog} + \tau_f + f\omega(t) \quad (25)$$

Embora o torque de distúrbio normalmente se oponha ao movimento do motor, Wu (2012) adota uma convenção em que  $t_d$  entra positivamente na equação da dinâmica. Isso é feito para simplificar a modelagem, tratando todos os torques externos como uma força adicional cuja direção (se ajuda ou resiste) é indicada pelo sinal de  $t_d(t)$  no valor numérico, e não na equação.

Essas equações descrevem o sistema dinâmico de segunda ordem do motor, que calcula a velocidade angular do motor em função da tensão aplicada. No domínio de Laplace, a função de transferência da velocidade é descrita como:

$$\omega(s) = \frac{1/K_g}{t_m t_e s^2 + t_m s + 1} V_a(s) + \frac{(1/J)t_m(t_e s + 1)}{t_m t_e s^2 + t_m s + 1} T_d(s) \quad (26)$$

O estudo é feito em duas situações: a primeira situação é que o torque de perturbação é desprezível, enquanto na segunda, a perturbação precisa ser considerada.

#### 2.4.4.1 Estimativa sem o torque de perturbação

Quando a tensão de entrada é muito grande, o torque de distúrbio pode ser desprezado, o modelo então fica da seguinte forma:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{1/K_g}{t_m t_e s^2 + t_m s + 1} \quad (27)$$

Com a função fatorada:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{1/K_g}{t_m t_e (s + a)(s + b)} \quad (28)$$

onde:

$$a, b = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4t_e/t_m}}{2t_e} \quad (29)$$

Para uma entrada de tensão constante, a resposta da velocidade pode ser escrita conforme descrito na Eq. (30):

$$\omega(s) = \frac{V_a/K_g}{t_m t_e s(s+a)(s+b)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+a} + \frac{\alpha_3}{s+b} \quad (30)$$

onde:

$$\alpha_1 = \frac{V_a}{K_g}, \quad \alpha_2 = \frac{V_a}{K_g} \frac{b}{a-b}, \quad \alpha_3 = \frac{V_a}{K_g} \frac{a}{b-a}$$

Considerando os três termos na resposta ao degrau, a função  $\alpha_1$  é uma função de grau nulo no domínio do tempo, e  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são funções exponenciais no domínio do tempo. Dessa forma, pode-se expandir  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  usando a série de Taylor.

Expandindo o termo  $\alpha_2$ :

$$\frac{V_a}{K_g} \frac{b}{a-b} \left( 1 - at + \frac{1}{2} a^2 t^2 - \frac{1}{6} a^3 t^3 + \dots \right) \quad (31)$$

Expandindo o termo  $\alpha_3$ :

$$\frac{V_a}{K_g} \frac{a}{b-a} \left( 1 - bt + \frac{1}{2} b^2 t^2 - \frac{1}{6} b^3 t^3 + \dots \right) \quad (32)$$

Ao combinar os três termos, obtém-se a resposta total da velocidade:

$$\omega(t) = \frac{V_a}{K_g} \left( 1 + \frac{\beta_0}{2} t^2 + \frac{\beta_1}{6} t^3 + \frac{\beta_2}{24} t^4 + \dots \right) \quad (33)$$

onde:  $\beta_0 = ab$ ,  $\beta_1 = -ab(a+b)$ , e  $\beta_2 = ab(a^2 + ab + b^2)$

De acordo com a Eq. (29):

$$ab = \frac{1}{t_m t_e}, \quad a + b = \frac{1}{t_e} \quad (34)$$

Dessa forma, obtém-se:

$$t_m = -\frac{\beta_1}{\beta_0'}, \quad t_e = -\frac{\beta_0}{\beta_1'} \quad (35)$$

A Eq. (35) permite calcular as constantes de tempo mecânica e elétrica  $t_m$  e  $t_e$  usando os coeficientes da série de potências. Esses coeficientes podem ser obtidos por meio do ajuste de curvas dos dados da resposta em degrau da velocidade do motor, utilizando funções potenciais.

#### 2.4.4.2 Estimativa com o torque de perturbação

Considerando agora o torque de distúrbio no sistema, tem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{(1/J)t_m t_e (t_f s + 1)}{t_m t_e s^2 + t_m s + 1} \quad (36)$$

O torque de perturbação geralmente consiste no torque de relutância e no torque de fricção. O torque de relutância por ser muito complicado é descartado, mas o atrito cinético e o atrito viscoso são considerados e são assumidos como constantes. Dessa forma, com uma tensão constante nos terminais do motor e o torque de perturbação constante, obtém-se:

$$\omega(s) = \frac{1}{K_g} \frac{V_a}{s} + \frac{(1/J)t_m t_e (t_f s + 1)}{t_m t_e s^2 + t_m s + 1} T_d \quad (37)$$

Novamente, aplicando a expansão da fração parcial da resposta ao degrau no domínio do tempo, e expandindo os termos exponenciais no domínio do tempo usando a série de Taylor, obtém-se a resposta total:

$$\omega(t) = \beta_0 t + \beta_1 t^2 - \beta_2 t^3 + \beta_3 t^4 - \dots \quad (38)$$

Com base nesses coeficientes:

$$ab = \frac{18\beta_2^2 - 24\beta_3\beta_1}{3\beta_0\beta_2 + 2\beta_1^2} \quad (39)$$

$$a + b = \frac{6\beta_2 - \beta_0 ab}{2\beta_1} \quad (40)$$

Uma equação alternativa para  $a+b$  pode ser escrita como:

$$a + b = \frac{12\beta_3 + \beta_1 ab}{2\beta_2} \quad (41)$$

Dessa forma, os parâmetros do motor podem ser expressados como:

$$t_m = \frac{a + b}{ab} \quad (42)$$

$$t_e = \frac{1}{a + b} \quad (43)$$

$$\frac{T_d}{J} = \beta_0 \quad (44)$$

$$K_g = \frac{ab}{2\beta_1 V_0} \quad (45)$$

Wu (2012) continua o estudo realizando testes utilizando dois motores CC da marca Mabuchi, o RK370CA e FC130, que são motores muito semelhantes ao motor usado neste trabalho. Em sua análise o método de identificação baseado na expansão em série de Taylor se mostrou:

- Preciso: Pois teve seus valores consistentes com os valores fornecidos pelo fabricante.
- Rápido: A resposta foi obtida em milissegundos.
- Prático: Pois requer equipamento mínimo, sendo ideal para prototipagem rápida de controladores de motores CC.

Quando o autor compara os resultados com métodos de identificação de sistemas convencionais, como a resposta em frequência e a análise espectral, o método utilizado se mostrou superior, especialmente em termos de precisão para pequenos motores com constantes de tempo elétrica de valores pequenos.

## 2.5 Representações matemáticas de sistemas dinâmicos

A modelagem matemática de sistemas dinâmicos é uma etapa fundamental na análise, simulação e projeto de controladores. Por meio dessa modelagem, é possível compreender o comportamento do sistema em resposta a diferentes entradas e condições iniciais. Dentre as abordagens mais utilizadas para representar sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI), destacam-se a função de transferência e o espaço de estados. Cada uma dessas representações possui características específicas e aplicações adequadas, sendo escolhidas conforme a complexidade do sistema, os objetivos da análise ou as técnicas de controle a serem empregadas. A seguir, serão descritas as duas formas principais de representação matemática de sistemas dinâmicos, com suas respectivas vantagens e aplicações.

### 2.5.1 Representação por função de transferência

Uma função de transferência é um modelo matemático que relaciona a resposta de um sistema  $Y(s)$  a um sinal de entrada ou excitação  $U(s)$ . Sendo definida como a razão entre saída e entrada no domínio de Laplace, com condições iniciais nulas (NISE, 2013).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (46)$$

No contexto de sistemas eletromecânicos, como motores CC, a função de transferência permite analisar como a tensão aplicada influencia a velocidade angular do eixo, considerando os efeitos da resistência, indutância, inércia e atrito.

Ao transformar as equações lineares do domínio do tempo para o domínio de Laplace, as equações diferenciais se tornam equações algébricas em  $s$ , o que simplifica a análise do sistema (NISE, 2013). As equações (5) e (6) descrevem o sistema no domínio do tempo. Para obter a função de transferência, utiliza-se a transformada de Laplace nessas equações, assumindo condições iniciais nulas:

$$V_a(s) - K_g\Omega(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) \quad (47)$$

$$K_m I_a(s) = f \Omega(s) + J s \Omega(s) \quad (48)$$

Isolando  $I_a(s)$  na Eq. (47):

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_g\Omega(s)}{R_a + L_a s} \quad (49)$$

Substituindo na Eq. (48).

$$K_m \cdot \frac{V_a(s) - K_g\Omega(s)}{R_a + L_a s} = f \Omega(s) + J s \Omega(s) \quad (50)$$

Multiplicando ambos os lados por  $R_a + L_a s$ :

$$K_m (V_a(s) - K_g\Omega(s)) = (R_a + L_a s)(f + J s)\Omega(s) \quad (51)$$

Distribuindo os termos:

$$K_m V_a(s) - K_m K_g \Omega(s) = (R_a f + R_a J s + L_a f s + L_a J s^2) \Omega(s) \quad (52)$$

Organizando a Eq. (52) para evidenciar os termos em  $\Omega(s)$  e  $V_a(s)$ :

$$\Omega(s) [K_m K_g + R_a f + (R_a J + L_a f) s + L_a J s^2] = K_m V_a(s) \quad (53)$$

Obtém-se a função de transferência do sistema:

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a f) s + R_a f + K_m K_g} \quad (54)$$

## 2.5.2 Representação por espaço de estados

Segundo Nise (2013) pode-se obter um modelo na forma de espaço de estados escolhendo as seguintes grandezas como variáveis de estado: a corrente  $i_a(t)$ , a velocidade angular  $\omega(t)$  e a tensão de armadura  $v_a(t)$  que será usada como parâmetro de excitação, e escrevendo na seguinte forma matricial.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} v_a(t) \quad (55)$$

Para analisar o comportamento de um motor específico a partir do modelo da Eq. (55), são necessários seus parâmetros:  $R_a$ ,  $L_a$ ,  $J$ ,  $f$ ,  $K_g$  e  $K_m$ . Segundo Basilio et al. (2002), a identificação de  $R_a$  e  $L_a$  é imprecisa devido aos métodos de identificação usuais, que costumam ser imprecisos nas suas medições. A fim de diminuir essas imprecisões, os valores iniciais de  $R_a$  e  $L_a$  podem ser obtidos por meio da média de medição de vários valores. E como no modelo usual,  $f$  é constante, é necessário encontrar um valor médio que represente a faixa de operação linear do motor, já que o coeficiente de atrito viscoso  $f$  é variável em função da velocidade angular do motor.

Um encoder pode ser usado para medir a velocidade  $\omega(t)$  do motor. Sendo um sensor de medida de velocidade, a relação entre a leitura digital do encoder e a velocidade angular pode ser expressa como:

$$v_t(t) = K_g \omega(t) \quad (56)$$

A equação representa a saída do encoder, onde a tensão gerada é proporcional à velocidade angular  $\omega(t)$  do motor.

Por meio da Eq. (55), é possível separar as equações da parte elétrica e da parte mecânica:

$$L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + R_a i_a(t) = v_a(t) \quad (57)$$

$$J \frac{d}{dt} K_g \omega(t) + f K_g \omega(t) = K_m K_t i_a(t) \quad (58)$$

Definindo  $u_e(t)$  e  $u_m(t)$  como:

$$\begin{cases} u_e(t) = v_a(t) \\ u_m(t) = K_m K_t i_a(t), \end{cases} \quad (59)$$

Obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + R_a i_a(t) = u_e(t), \\ J \frac{d}{dt} \omega(t) + f \omega(t) = u_m(t), \end{cases} \quad (60)$$

Essas equações representam dois sistemas de primeira ordem desacoplados, assim pode-se definir um sistema elétrico (E) e um sistema mecânico (M), de modo análogo à formulação de espaço de estados apresentada por Nise (2013). As representações no modelo de espaços de estado são dadas da seguinte forma:

$$(E) \begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e u_e(t), \\ v_e(t) = C_e x_e(t), \end{cases} \quad (61)$$

onde:

$$x_e(t) = i_a(t), \quad A_e = -\frac{R_a}{L_a}, \quad B_e = \frac{1}{L_a}, \quad C_e = 1$$

$$(M) \begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t), \\ v_m(t) = C_m x_m(t), \end{cases} \quad (62)$$

onde:

$$x_m(t) = \omega(t), \quad A_m = -\frac{f}{J}, \quad B_m = \frac{1}{J} \quad \text{e} \quad C_m = 1$$

Pode-se notar que em ambos os sistemas suas entradas dependem de parâmetros que estão relacionadas diretamente com o motor. O sistema elétrico (E) é influenciado por uma grandeza externa  $v_a(t)$ , e o sistema mecânico (M) depende da corrente de armadura  $i_a(t)$ , essa corrente está relacionada diretamente ao torque do motor, que também depende dos parâmetros do sistema.

Sendo assim, qualquer variação interfere na resposta do motor, o que afeta a identificação correta de  $R_a$ ,  $L_a$ ,  $J$  e  $f$ . Com isso, é sugerido usar um método de identificação para sistemas discretos no tempo, como o método dos mínimos quadrados. Esse método é capaz de ajustar o modelo discreto para os sistemas (E) e (M) com base nas medições de entrada e saída ao longo do tempo.

## 3 Desenvolvimento

Este capítulo apresenta as etapas práticas de desenvolvimento deste trabalho, que foi organizado em duas etapas principais e complementares.

A primeira etapa, abordada na Seção 3.1, descreve todo o processo de concepção e fabricação do módulo didático. Esta parte cobre desde o projeto do circuito eletrônico e da placa de circuito impresso (PCB) até a montagem final da estrutura física utilizada nos ensaios.

A segunda frente, detalhada na Seção 3.2, foca na obtenção e validação de um modelo matemático para o motor CC. Esta etapa é crucial para a futura implementação de estratégias de controle, e explora diferentes técnicas para a identificação dos parâmetros para o modelo do motor CC do módulo confeccionado.

### 3.1 Projeto e fabricação do módulo didático

#### 3.1.1 Especificações técnicas do sistema

Esta seção descreve o projeto e a fabricação do módulo didático para o controle de um motor CC. O sistema é baseado em um microcontrolador Arduino que, por meio de um *chopper* de quatro quadrantes (ponte H) na forma de um circuito integrado, o L293D, gerencia a velocidade e o sentido de rotação do motor. A estrutura física do módulo foi confeccionada em uma máquina CNC, priorizando a funcionalidade e o baixo custo. As especificações técnicas do módulo são apresentadas na seção 3.1.1. Em seguida, a seção 3.1.2 descreve o circuito de acionamento, as seções 3.1.3 e 3.1.4 detalham o projeto eletrônico e a seção 3.1.5 aborda a fabricação das placas de circuito impresso (PCB).

- **Funções esperadas:**

- Acionamento de motor CC com controle de velocidade e sentido de rotação.
- Operação nos quatro quadrantes.
- Comunicação com microcontrolador para envio de comandos e leitura de sensores.
- Proteção contra sobrecorrente e curto-circuito nos terminais de saída.

- **Compatibilidade:**

- Microcontrolador Arduino Nano, com mapeamento de pinos digitais e analógicos.

- **Interface de potência:**

- CI L293D (ponte H) para controle bidirecional do motor CC.
- Alimentação do motor em 12 V (com fonte externa dedicada).
- Terminais para conexão direta do motor e alimentação.

- **Aspectos construtivos:**

- Layout compacto com conectores padronizados.
- Fixação por furos nas extremidades da placa.
- Montagem em placa de circuito impresso com trilhas otimizadas para fácil soldagem.

O módulo foi projetado para uso em ambiente acadêmico, permitindo para os alunos maior foco na implementação do controle, com redução de problemas relacionados à montagem e falhas de hardware.

### 3.1.2 Circuito de acionamento

O circuito de acionamento do módulo foi projetado para permitir o controle de motores CC em diferentes condições operacionais. O acionamento foi feito utilizando o L293D, que se trata de um CI (Circuito Integrado) que contém duas pontes H completas (ou quatro *half H-bridges*), com isso, o esquema de ligação foi feito para ser conectado ao CI. Foi utilizada uma estrutura com um *chopper* de quatro quadrantes, isso possibilita que seja feito o controle tanto do sentido da rotação quanto da frenagem do motor, dessa forma, o sistema consegue operar em todas as combinações de torque e velocidade, permitindo aceleração e desaceleração nos dois sentidos.

Para o controle da velocidade, foi empregada a técnica de modulação por largura de pulso (PWM — *Pulse Width Modulation*), amplamente utilizada por sua simplicidade e eficiência. Por meio da variação do ciclo de trabalho do sinal PWM aplicado ao circuito de potência, é possível regular a tensão média fornecida ao motor, controlando assim sua velocidade angular de forma contínua.

Apesar do CI utilizado não ser de alto desempenho, o circuito é suficiente para aplicações didáticas, permitindo experimentação com comandos básicos de aceleração, frenagem resistiva e reversão de direção.

### 3.1.3 Projeto eletrônico

O circuito foi projetado para ter um motor CC do modelo Mabuchi acoplado. Com o uso do programa KiCad foi montado o esquema do circuito proposto. A placa possui

o barramento de alimentação e o barramento do motor. No barramento de alimentação, os dois pinos de entrada são de uma fonte externa, os pinos 1 e 2, respectivamente. Foi usada uma fonte variável pela qual se podia controlar a corrente para garantir uma melhor segurança, e essa fonte foi configurada em 12 V. Já o barramento do motor se refere às entradas do motor, onde os sinais de controle e alimentação serão enviados.

No L293D, a saída de 5 V do Arduino está conectada ao pino 16 do CI. Este pino se refere a uma tensão fixa de 5 volts que vem do próprio Arduino. Essa tensão alimenta a lógica interna do driver, permitindo o controle das entradas (como PWM1, PWM2 e EN). A entrada VCC, que recebe os 12 V da fonte externa, está ligada ao pino 8, sendo essa fonte exclusiva para o acionamento da ponte H.

Os pinos 11 e 14 recebem A1 e A2 respectivamente. Esses são os pinos de armadura do motor. A corrente que flui entre os esses 2 pinos determina a direção de rotação do motor. Dependendo dos sinais de controle aplicados, o L293D permite que a corrente flua em diferentes sentidos, permitindo que o motor gire no sentido horário ou anti-horário.

Os pinos 10 e 15 recebem os sinais PWM1 e PWM2. O sinal PWM aplicado nesses pinos controla a velocidade do motor. A largura do pulso (ciclo de trabalho) do sinal PWM determina a quantidade de energia média que é fornecida ao motor, dessa forma, controlando sua velocidade.

Por exemplo:

- Um ciclo de trabalho de 100% (pulso alto constante) faz o motor operar em velocidade máxima.
- Um ciclo de trabalho de 50% faz o motor operar com metade de sua velocidade máxima.

O pino 9 recebe o sinal de *enable*, esse pino habilita a ponte H. Um sinal alto (*HIGH*) permite que os pinos A1 e A2 fiquem energizados e controlem o motor, já um sinal baixo (*LOW*) desabilita a ponte H, impedindo que o motor receba corrente, independentemente dos sinais aplicados nos pinos PWM.

Os pinos 2,7,4,5,12 e 13 são as conexões de terra (GND) do L293D, eles garantem que o circuito tenha um referência de tensão estável. É importante que o GND do L293D esteja conectado ao GND do Arduino e ao da fonte externa, para que todos os sinais de controle funcionem corretamente.

No Arduino, o sinal de *enable* conectado ao CI está associado ao pino digital D8, enquanto os pinos digitais D9 e D10 são responsáveis pelo envio do sinal PWM. Os pinos digitais D2 e D3 recebem os sinais E1 e E2, emitidos do encoder acoplado ao motor. O encoder tem como função converter o movimento rotativo do eixo em sinais elétricos,

permitindo a medição da velocidade e a detecção do sentido de rotação. O modelo adotado neste trabalho é do tipo encoder em quadratura, responsável por gerar dois sinais digitais (A e B), defasados em  $90^\circ$  entre si. Essa configuração possibilita não apenas a contagem de pulsos para determinação de posição e velocidade, mas também a identificação precisa da direção do movimento por meio da análise da sequência de transições dos sinais.

As conexões da placa foram feitas seguindo os esquemáticos das Figuras 3 e 4:

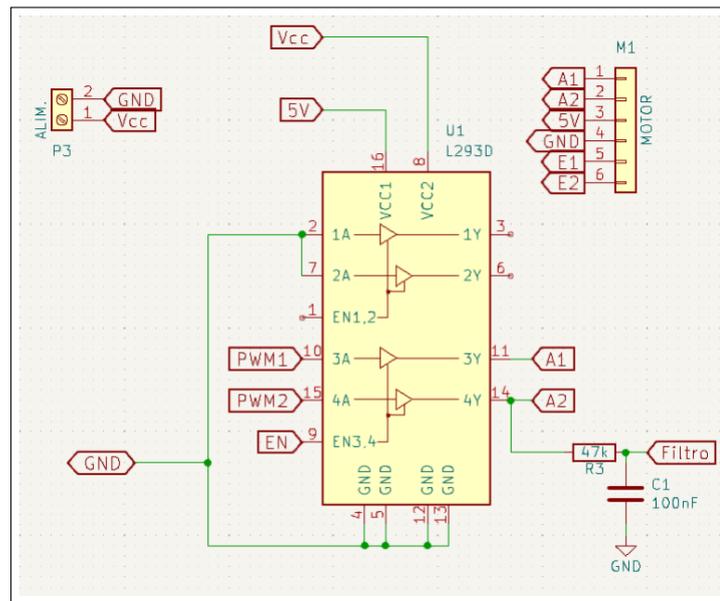


Figura 3 – Circuito equivalente de um motor CC. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

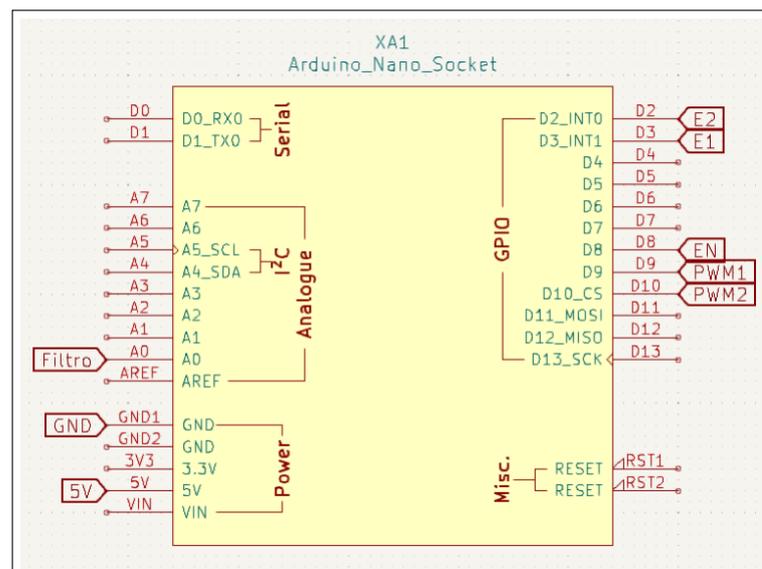


Figura 4 – Circuito esquemático do Arduino. Fonte: **Elaborado pelo autor.**



A Figura 6 mostra o circuito de teste ligado ao osciloscópio, com o motor em funcionamento.

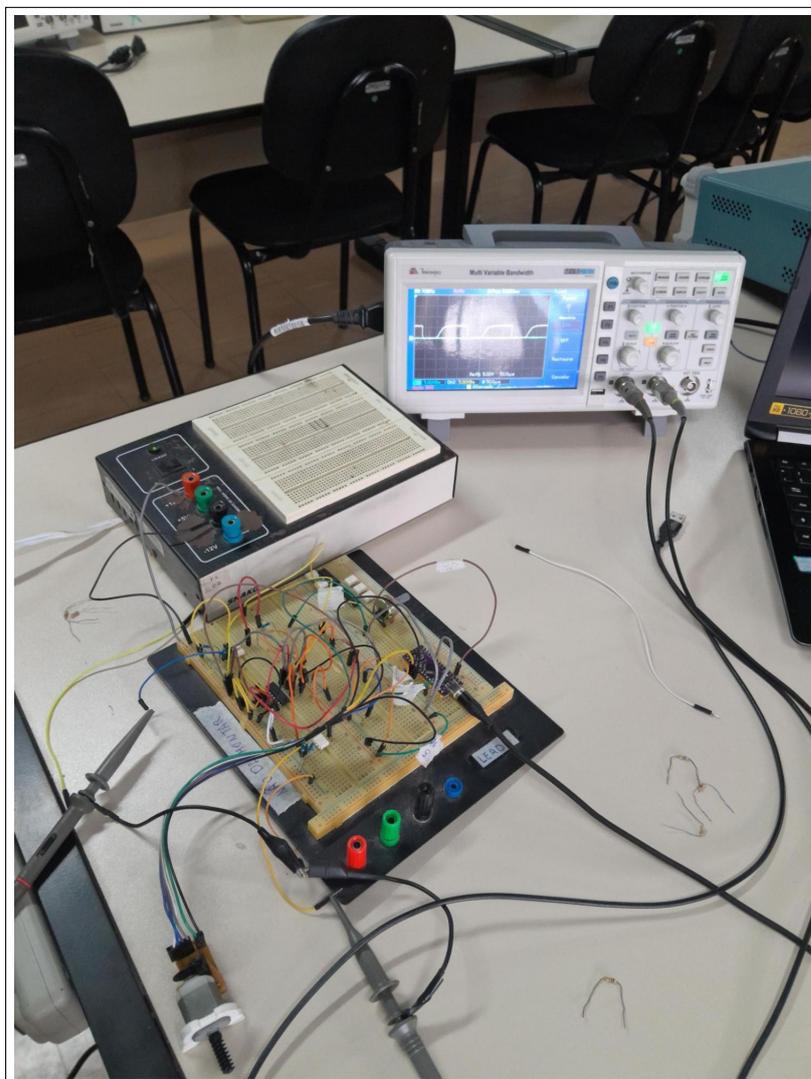


Figura 6 – Circuito de testes montado na protoboard. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

### 3.1.5 Fabricação das placas de circuito (PCB)

O módulo didático foi produzido em uma máquina CNC, que executa cortes de alta precisão a partir de um projeto digital. O objetivo foi criar uma estrutura funcional e de baixo custo.

Com os testes feitos se iniciou a parte de impressão das placas. A Figura 7 apresenta o processo de fabricação, desde o posicionamento da placa até o resultado com as trilhas gravadas, onde a parte superior mostra o layout do circuito, e a parte inferior mostra a CNC em funcionamento.

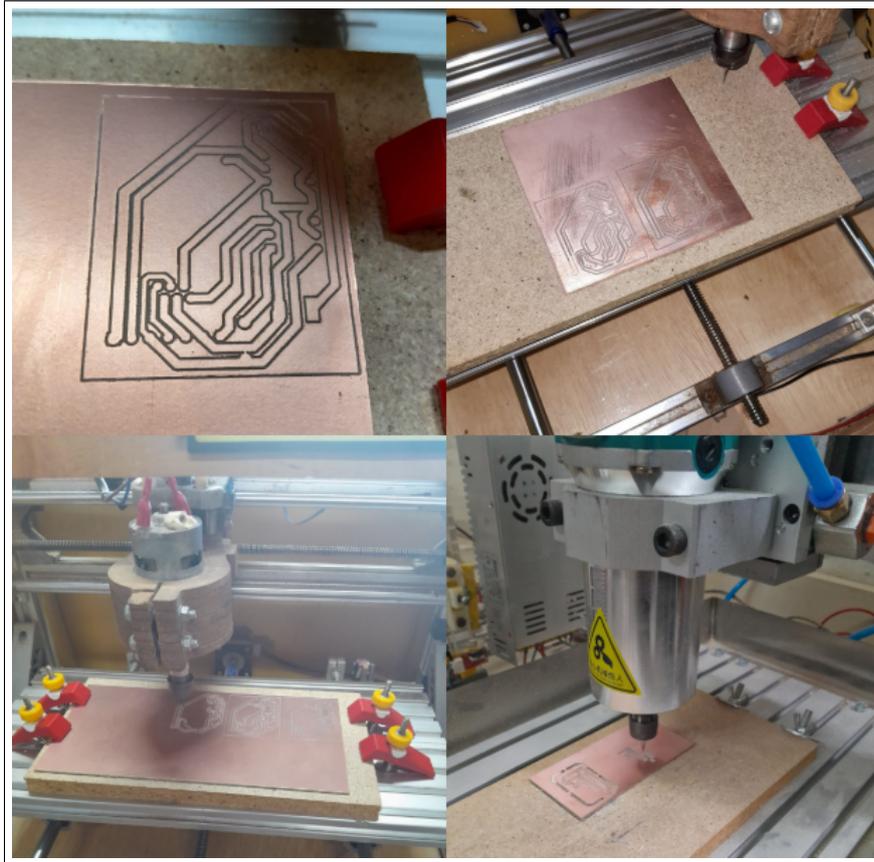


Figura 7 – Placa de cobre com trilhas impressas. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

Como apresentado na Figura 7, foram usadas duas CNCs na confecção, sendo uma própria para usinagem de metais e outros materiais mais resistentes, e uma outra menos potente para materiais menos resistentes. As placas confeccionadas foram soldadas em seguida para a criação dos módulos dos motores CC usados nas práticas. A Figura 8 apresenta as placas com os conectores e os dois fios de alimentação da placa já soldados.

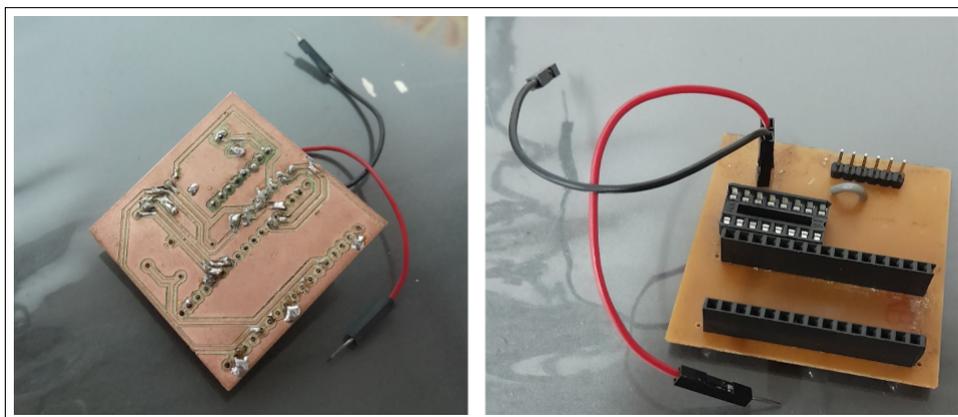


Figura 8 – Placa impressa com os conectores soldados, sendo a parte inferior (à esquerda) e superior (à direita) da placa. Fonte: **Elaborado pelo Autor.**

Os módulos construídos servem para o acionamento de pequenos motores CC. O circuito impresso controlado por um código via Arduino permite o controle e leitura da velocidade do motor, além de permitir controlar seu sentido de rotação. A placa impressa consiste em um conjunto de conectores para alocação do Arduino Nano, outro conector para alocação do CI L293D, um conjunto de pinos para a ligação do motor e dois cabos de alimentação, conforme pode ser visto na Figura 9.

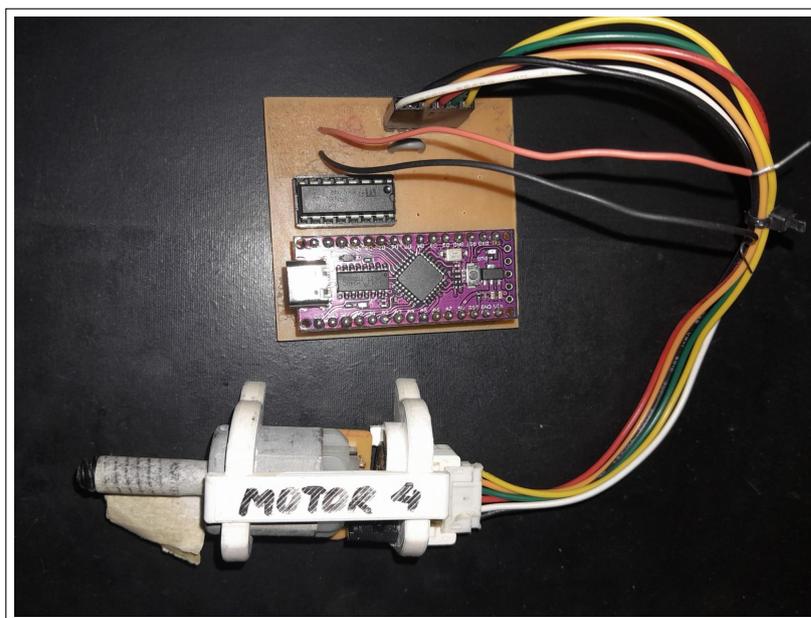


Figura 9 – Motor CC ligado ao módulo de controle. Fonte: **Elaborado pelo Autor.**

### 3.2 Obtenção dos parâmetros para o modelo do motor CC pela abordagem caixa branca.

Após a construção do módulo didático, detalhada na Seção 3.1, a próxima etapa do trabalho consistiu no levantamento experimental dos parâmetros do motor CC. Esse procedimento é necessário para a obtenção de um modelo matemático, que será disponibilizado para os alunos, servindo como base para o projeto de controladores em malha fechada. Todo o experimento foi realizado no Laboratório de Eletrônica Analógica e Digital (LEAD) usando os próprios módulos que foram construídos.

Por meio de um código simples feito via Arduino o motor era ligado e desligado, e os valores dos parâmetros medidos eram anotados. Para se ter uma melhor precisão no experimento foram usadas várias amostras para cada medida, onde no final uma média dos valores medidos foi obtida.

### 3.2.1 Medição da corrente de armadura

Para determinação dos parâmetros do controlador, diversas grandezas devem ser mensuradas. Dentre elas, destaca-se a corrente de armadura do motor. Portanto, o primeiro passo consistiu na medição da queda de tensão em um resistor *shunt* de  $1,2 \Omega$ , conectado em série com a armadura do motor em regime permanente. O resistor foi colocado utilizando uma protoboard como auxílio.

O próximo passo foi realizar o bloqueio do rotor, aplicando uma tensão de 5 V de alimentação e deixando tempo suficiente para o motor entrar em regime permanente. Isso é feito para que o motor se estabilize em um valor fixo de corrente sem qualquer tipo de oscilação. Essa corrente é o valor que o motor consegue suportar com uma carga máxima sendo aplicada. Usando um osciloscópio para uma melhor precisão e exatidão, a queda de tensão no resistor foi medida, conforme mostra a Tabela 1. A partir do valor da resistência, calculou-se a corrente de armadura do motor.

Tabela 1 – Amostras de tensão do motor e da resistência shunt

Amostras motor [V]	Amostras resistência shunt [mV]
6,96	220
6,80	276
6,80	228
6,96	216
6,88	208
6,80	272
6,64	226
6,80	232
6,88	266
6,56	224
6,64	278
6,72	212
6,48	206
6,48	226
<b>Média = 6,74</b>	<b>Média = 0,235</b>

Fonte: **Elaborado pelo autor.**

Utilizando o valor médio das amostras a corrente de armadura é obtida pela lei de ohm:

$$i_a = \frac{V_R}{R} = \frac{0,235}{1,2} = 0,195833333 \text{ A} \quad (63)$$

### 3.2.2 Cálculo da resistência de armadura

A resistência do rotor pode ser determinada a partir da tensão de alimentação do motor e da corrente em regime permanente com o rotor bloqueado, utilizando a Lei de Ohm:

$$R_a = \frac{V_a}{i_a} = \frac{6,742857143}{0,195833333} = 34,43 \Omega \quad (64)$$

### 3.2.3 Cálculo da indutância de armadura

Com base no gráfico obtido no osciloscópio mostrado na Figura 10, é possível determinar o tempo necessário para que a corrente de armadura, com o rotor bloqueado, atinja 63% do seu valor final. Dessa forma, pode-se medir a constante de tempo do sistema.

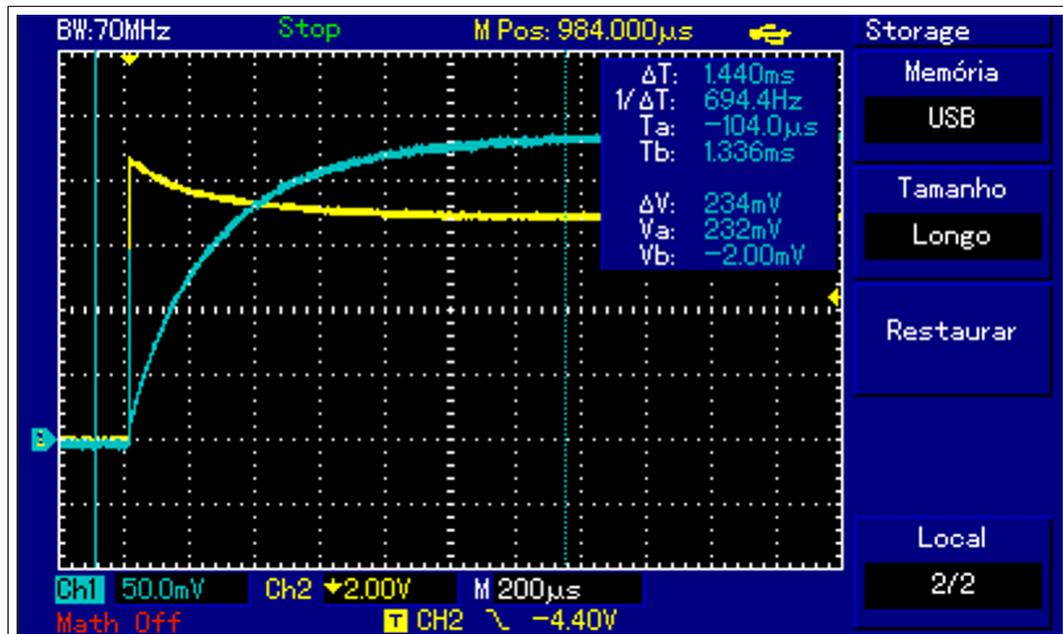


Figura 10 – Gráfico do motor em regime permanente. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

Conforme o gráfico o valor final da tensão ( $V_a$ ) é de 232 mV, fazendo 63% desse valor obtém-se o valor de 146,16 mV. Dessa forma há 35 pontos até o valor final do intervalo de tempo analisado, começando pelo instante de subida da tensão e dividindo-se o valor final pelo número de pontos obtém-se o valor de 146,16 mV no ponto de número 22.

Para a análise do tempo, quando se faz essa divisão com o valor de tempo final ( $T_b$ ), o valor do tempo nos 63% que corresponde ao ponto 22 possui o valor de 0,8398 ms, logo:

$$\tau = 0,8398 \text{ ms}$$

Com isso pode-se calcular o valor da indutância de Armadura:

$$L_a = \tau_e R_a = 0,0008398 \times 34,43 = 2,89143 \times 10^{-2} \text{ H} \quad (65)$$

Sendo  $\tau_e$  a constante de tempo elétrica do circuito de armadura.

### 3.2.4 Constante de força contra eletromotriz

A medida da velocidade é necessária para se encontrar o valor da constante de força contraeletromotriz, como de acordo com a Eq. (4). Para isso, a velocidade do motor foi obtida por meio do encoder do motor, utilizando um código de arduino e o programa de plotagem de gráficos chamado SerialPlot. Foram medidos valores de velocidade para diferentes tipos de tensão de entrada.

Para que o experimento fosse realizado, é necessário que o motor opere temporariamente na condição de gerador, o que foi obtido por meio da aplicação de uma onda quadrada de alimentação. No semiciclo em que o motor é desligado, a tensão ficará negativa em um curto período de tempo e logo se tornará positiva novamente. Neste instante, a corrente irá seguir pelo diodo de roda livre, momento que ocorre o pico de tensão negativa, e quando esta corrente acabar será quando o motor estará funcionando como um gerador, gerando assim a força contraeletromotriz. Foi utilizado um mini motor CC acoplado ao motor em análise. O mini motor atuou como acionador, fornecendo o movimento necessário para que o motor em teste operasse como gerador e produzisse a força contraeletromotriz, conforme ilustrado na Figura 11.

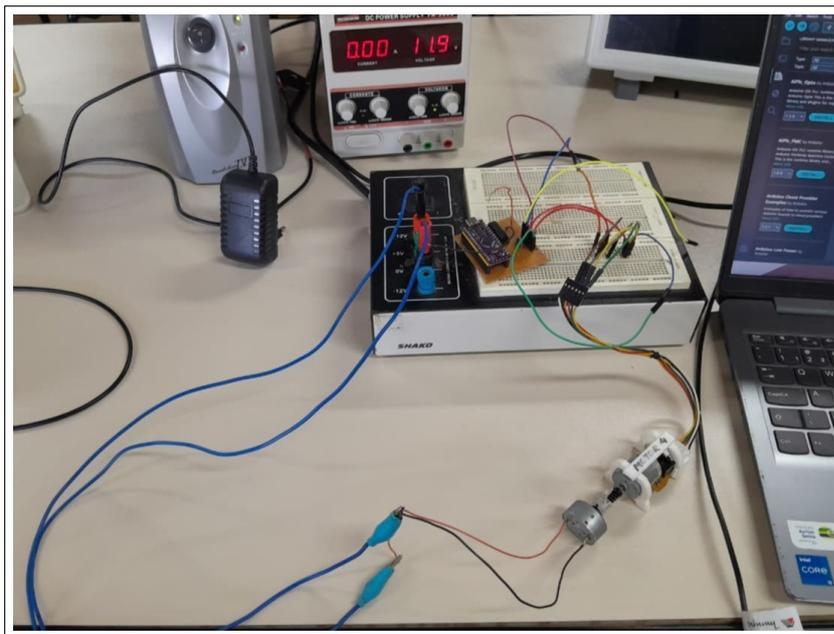


Figura 11 – Circuito de ensaio para identificar a força contraeletromotriz. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

A força contraeletromotriz foi medida utilizando um osciloscópio. A tensão nos terminais do motor foi registrada para diferentes valores de tensão de entrada, juntamente com a velocidade correspondente em cada instante. O valor da tensão gerada foi então dividido pelo valor da velocidade dada em rad/s, obtendo assim o valor da constante de força contraeletromotriz, conforme mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Valores de velocidade angular, força contraeletromotriz e constante  $K_g$

$\omega$ [rad/s]	$e(t)$ [V]	$K_g$ [V · s/rad]	
1268,64	14,8	0,011660636	
1175,77	13,4	0,011396787	
1005,05	12	0,011939704	
902,753	10,4	0,011520316	
693,768	9	0,012972636	
600,307	7,2	0,011993863	
562,841	6,8	0,012085564	
475,236	6	0,012626556	
377,359	4,8	0,012730209	
262,884	3,4	0,012712669	
146,048	1,8	0,012324715	
679,150	8,109	0,012080326	<b>Média</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o valor da média de  $K_g$ , obtém-se:

$$K_g = 1,2080326 \times 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{s/rad}$$

### 3.2.5 Constante de torque

Com o valor da força contra eletromotriz calculada, a constante de torque  $K_m$  pode ser considerada de mesmo valor, isso acontece pois a constante de torque e a constante de força contra eletromotriz são aproximadamente as mesmas.

### 3.2.6 Constante de atrito viscoso

Quando o motor roda em vazio com a velocidade constante, o valor do torque devido ao atrito viscoso e ventilação possui a seguinte relação:

- $\sum m \cdot a = 0 \Rightarrow T_m + T_g \Rightarrow T_m \approx T_g;$

Onde  $T_m$  é o torque desenvolvido pelo motor e  $T_g$  é o torque resistivo devido ao atrito viscoso e ventilação.

- Considerando  $K_g \approx K_m$ :

$$\frac{T_g}{i_a} \approx \frac{e(t)}{\omega}$$

$$T_f \approx T_g = \frac{e(t)i_a}{\omega} \quad (66)$$

Dessa forma o atrito viscoso pode ser relacionado ao torque pela seguinte fórmula:

$$T_f = f\omega \quad (67)$$

Fazendo a substituição e utilizando os valores de  $e(t)$ ,  $i_a$  e  $\omega$ , é possível calcular a constante de atrito viscoso:

$$f = \frac{e(t)i_a}{\omega^2} \quad (68)$$

Mantendo o valor de  $i_a$  calculado na Eq. (63) e utilizando os dados da Tabela 2, pode-se calcular o valor de  $f$  para cada instante de velocidade e tensão, conforme é mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores de tensão de entrada, velocidade angular  $[\omega]$ , tensão gerada  $[e(t)]$  e constante de atrito viscoso  $[f]$

Tensão de entrada [V]	$\omega$ [rad/s]	$e(t)$ [V]	$f$ [V · s/rad]
12,5	1268,64	14,8	1,80083E-06
11,6	1175,77	13,4	1,89822E-06
10,4	1005,05	12	2,32644E-06
9,2	902,753	10,4	2,49909E-06
8,2	693,768	9	3,66185E-06
7,2	600,307	7,2	3,91266E-06
6,5	562,841	6,8	4,20363E-06
5,3	475,236	6	5,20259E-06
4,3	377,359	4,6	6,32608E-06
3,2	262,884	3,2	9,06793E-06
2,1	146,048	1,8	1,65265E-05

Fonte: Elaborado pelo autor.

Fazendo a média dos valores obtidos de  $f$ , obtém-se:

$$f = 5,22053 \times 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s/rad} \quad (69)$$

### 3.2.7 Momento de inércia

Em um procedimento parecido com o utilizado para a obtenção da constante de tempo elétrica para o cálculo da indutância, pode-se obter o valor do momento de inércia  $J$ . Nesse procedimento, conhecido como *run down test*, o motor é alimentado em vazio até atingir sua velocidade final ( $\omega_0$ ). Em seguida, mede-se a constante de tempo, removendo a tensão de armadura, encontrando assim a constante de tempo do sistema mecânico  $\tau_m$ .

Os gráficos das Figuras (12), (13) e (14) foram gerados no programa SerialPlot, e a partir deles foi possível analisar a desaceleração do motor, permitindo a determinação de seu momento de inércia.

Pelo gráfico obtido, a velocidade começa a decair em 462.376 rpm no ponto 856.

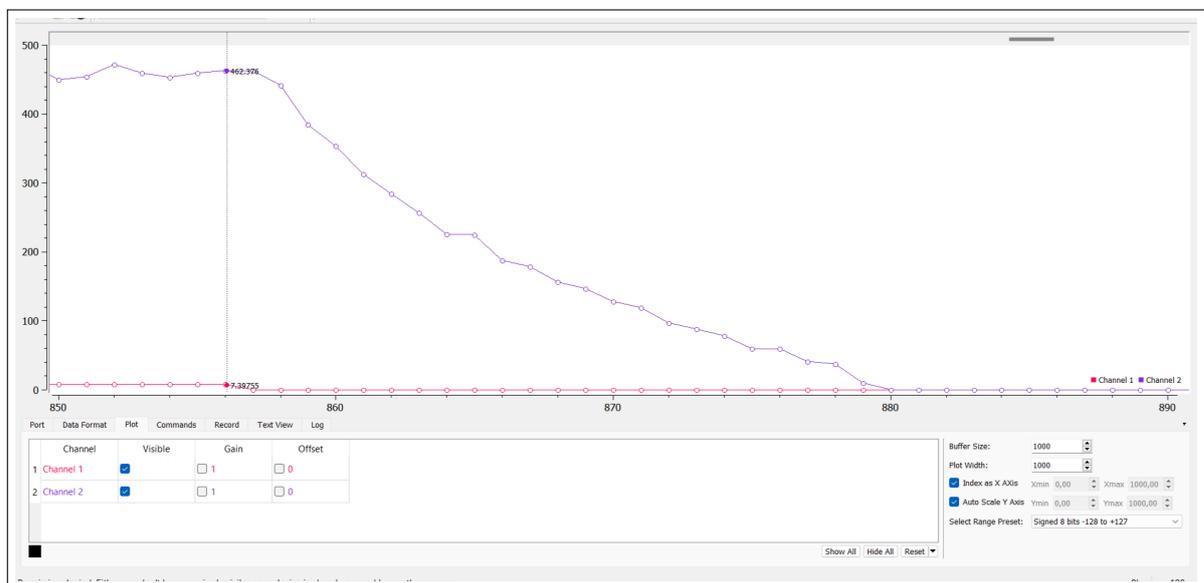


Figura 12 – Gráfico da velocidade do motor em vazio. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

Tirando 63% do valor da velocidade obtém-se o novo ponto em 861.814:

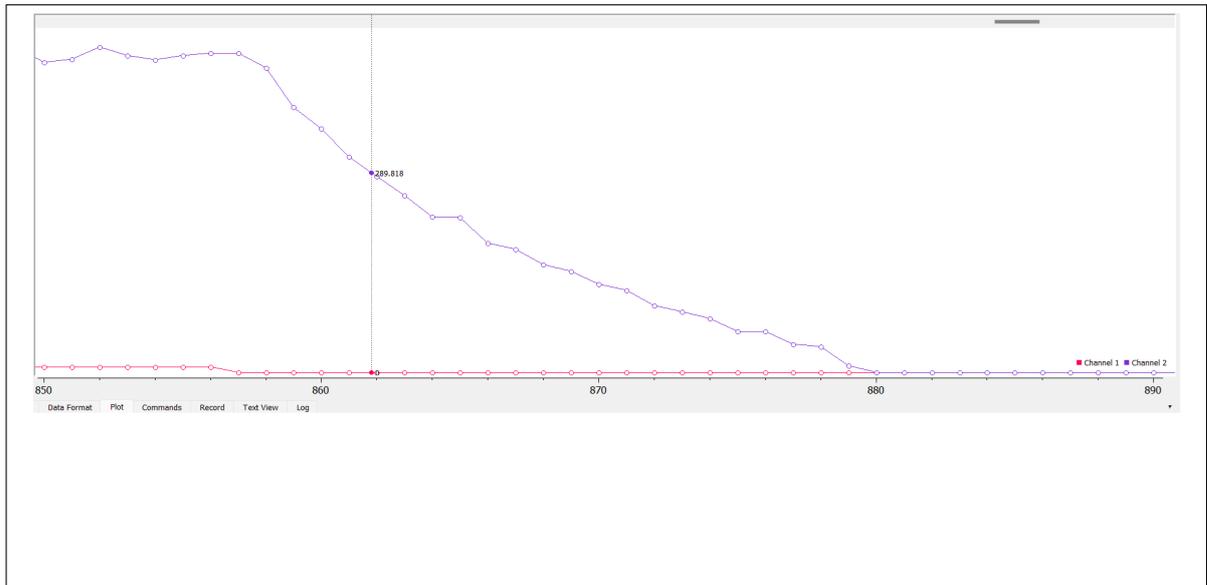


Figura 13 – Gráfico da velocidade do motor em vazio, com o valor de 63% da velocidade a partir do ponto de decaimento. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

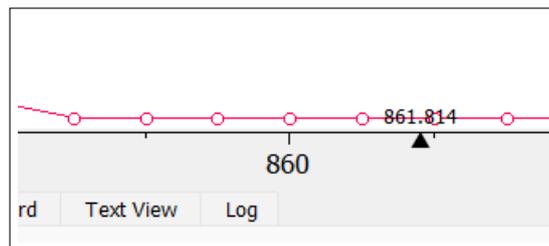


Figura 14 – Destaque da figura 11 mostrando o ponto em que o valor de velocidade alcança 63% do seu fundo de escala. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

Fazendo a diferença dos pontos final (ponto dos 63%) e inicial:

$$861,814 - 856 = 5,814 \quad (70)$$

O período de amostragem utilizado é igual a 5 milissegundos, dessa forma a constante de tempo do sistema mecânico pode ser calculada:

$$\tau_m = 5,814 \times 5 \times 10^{-3} = 0,02907 \text{ s} \quad (71)$$

Sendo a função de transferência da parte mecânica:

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + f} \quad (72)$$

Pode-se relacionar  $f$  com  $J$  da seguinte maneira:

$$\tau_m = \frac{J}{f} \quad (73)$$

Isolando  $J$ :

$$J = \tau_m \cdot f = 0,02907 \times 5,22053 \times 10^{-6} = 1,51795 \times 10^{-7} \text{V} \cdot \text{s}^2/\text{rad} \quad (74)$$

Os parâmetros obtidos a partir dos ensaios estão listados na Tabela 4:

Tabela 4 – Parâmetros do motor CC a partir dos ensaios experimentais

Parâmetro	Valor
Resistência de armadura [ $\Omega$ ]	34,43
Indutância de armadura [H]	$2,8914 \times 10^{-2}$
Constante de força contraeletromotriz [V·s/rad]	$1,2080 \times 10^{-2}$
Constante de torque [V·s/rad]	$1,2080 \times 10^{-2}$
Coefficiente de atrito viscoso [V·s/rad]	$5,2205 \times 10^{-6}$
Momento de inércia [V·s <sup>2</sup> /rad]	$1,518 \times 10^{-7}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3 Obtenção do modelo pela abordagem caixa cinza utilizando o método da Série de Taylor

Seguindo o método utilizado por WU (2012) na seção 2.4.3, a modelagem por série de Taylor foi aplicada diretamente aos dados experimentais coletados. Esta seção descreve a preparação dos dados, a implementação prática do método e os resultados obtidos, incluindo a estimativa dos parâmetros físicos do motor a partir dos coeficientes ajustados.

#### 3.3.1 Preparação dos dados

Os dados utilizados foram obtidos experimentalmente e organizados em uma planilha estruturada. No método foram usadas duas variáveis: tensão aplicada ( $V$ ) e velocidade ( $\omega$ ). A frequência de amostragem dos dados foi de 10 ms (100 Hz), sendo a análise limitada aos primeiros 150 ms para garantir que a resposta estivesse dentro do regime transitório inicial.

Antes da aplicação do método, os dados de velocidade foram corrigidos para remover o *offset* inicial e suavizados utilizando um filtro de média móvel de ordem 5, a fim de reduzir o impacto de ruídos de medição.

### 3.3.2 Implementação do Método

A velocidade angular  $\omega(t)$  foi modelada como uma série de Taylor de até quarta ordem:

$$\omega(t) = \beta_0 t + \beta_1 t^2 - \beta_2 t^3 + \beta_3 t^4 \quad (75)$$

Os coeficientes  $\beta_i$  foram obtidos por meio do método dos mínimos quadrados, utilizando os dados experimentais. Com esses coeficientes, foi possível determinar os parâmetros físicos do sistema, que foram então aplicados nas equações correspondentes ao método. Toda a implementação foi realizada no ambiente MATLAB, incluindo o ajuste polinomial e o processamento dos dados.

### 3.3.3 Resultados

A aplicação do método resultou nos seguintes coeficientes da série de Taylor:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 3,563684 \times 10^2 \\ \beta_1 &= -5,857105 \times 10^3 \\ \beta_2 &= -4,412043 \times 10^4 \\ \beta_3 &= -1,231818 \times 10^5 \end{aligned}$$

A partir destes coeficientes, os parâmetros do sistema foram estimados. O valor de  $R = 34,43 \Omega$ , determinado anteriormente em laboratório, foi utilizado aqui como um dado necessário para a aplicação da técnica da série de Taylor.

Os seguintes parâmetros foram obtidos, conforme apresentado na Tabela 5:

Tabela 5 – Parâmetros do motor CC a partir da série de Taylor

Parâmetro	Valor
Resistência de armadura [ $\Omega$ ]	34,43
Indutância de armadura [H]	$5,769 \times 10^{-2}$
Constante de força contraeletromotriz [V·s/rad]	$1,1318 \times 10^{-2}$
Constante de torque [V·s/rad]	$1,1318 \times 10^{-2}$
Coefficiente de atrito viscoso [V·s/rad]	$5,751 \times 10^{-6}$
Momento de inércia [V·s <sup>2</sup> /rad]	$2,686 \times 10^{-7}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.4 Refinamento dos parâmetros com métodos de otimização numérica

Utilizando os parâmetros iniciais encontrados em laboratório, os parâmetros do motor são encontrados pelo MATLAB, pela ferramenta de identificação de parâmetros. Essa ferramenta é usada para estimar os valores de parâmetros desconhecidos de um modelo, de modo que a saída simulada do modelo se ajuste aos dados colhidos no experimento utilizando o método dos mínimos quadrados.

#### 3.4.1 Modelo Simulink

O modelo utilizado na identificação foi de um motor CC com excitação independente, que inclui tanto a parte elétrica quanto a parte mecânica. Seu objetivo é simular qual seria a velocidade de saída com base na tensão de entrada, conforme representado no diagrama de blocos apresentado na Figura 15.

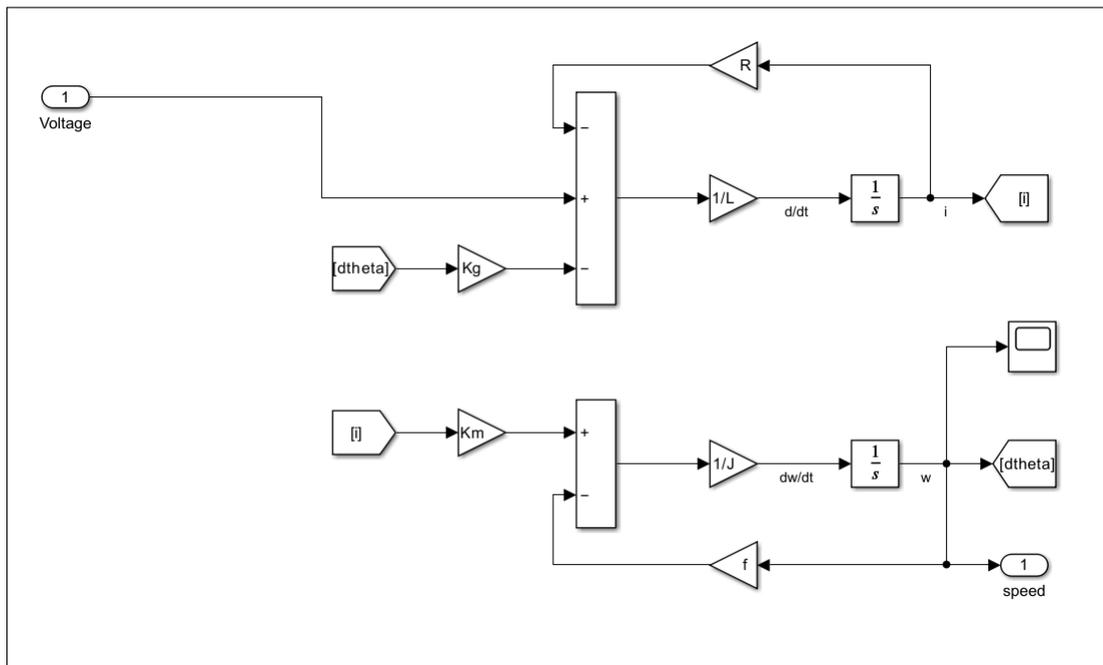


Figura 15 – Modelo Simulink de um motor CC. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

##### 3.4.1.1 Circuito elétrico

Na Figura 14, a parte superior do diagrama de blocos corresponde à parte elétrica, que modela a corrente no enrolamento do motor, sendo sua equação característica:

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_e \omega(t) \quad (76)$$

Os componentes da parte superior do bloco são:

- *Voltage* é a tensão aplicada ao motor.

- $K_g * dtheta$  é o termo de força contraeletromotriz (CEMF =  $K_g \cdot \omega$ ).
- O bloco  $\frac{1}{L}$  converte a tensão resultante em  $\frac{di}{dt}$ , e o bloco  $\frac{1}{s}$  integra para obter a corrente  $i(t)$ .
- O bloco de soma calcula  $V - Ri - K_g\omega$ .
- $i$  é a corrente de saída do circuito, que entra como torque no bloco de baixo.

#### 3.4.1.2 Sistema mecânico

A parte inferior do diagrama de blocos da Figura 14 corresponde ao modelo mecânico do motor, que descreve sua rotação em função do torque aplicado. Sua equação característica é dada por:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) = K_m i(t) \quad (77)$$

Os componentes da parte inferior do bloco são:

- $i * K_m$  faz a conversão de corrente elétrica em torque.
- O bloco de soma calcula o torque aplicado menos o torque de atrito viscoso.
- O bloco  $\frac{1}{J}$  converte o torque resultante em  $\frac{d\omega}{dt}$ , e o bloco  $\frac{1}{s}$  integra para obter a velocidade angular  $\omega(t)$ .
- $dtheta$  integra  $\omega$  para obter o deslocamento angular.
- A saída correspondente da parte mecânica é a velocidade (*speed*).

A parte elétrica do bloco define qual corrente será aplicada na parte mecânica para que o torque seja gerado, esse torque por sua vez gera a velocidade que será aplicada no motor.

#### 3.4.2 Otimização

A otimização foi executada considerando um intervalo de tempo de 0 a 5 segundos. Esse período representa o tempo total durante o qual o comportamento do sistema é analisado.

Para resolver as equações do modelo Simulink, foi utilizado um solver com passo de tempo variável e seleção automática do método numérico. Essa escolha permite que o próprio Simulink ajuste o tamanho dos passos ao longo da simulação, deixando de acordo com a variação do sistema, que pode ser mais rápida ou mais lenta. Em momentos em

que o sistema muda de forma mais brusca, o passo de tempo diminui para garantir maior precisão. Já em trechos mais estáveis, o passo aumenta, o que fazendo a simulação ser mais rápida e eficiente.

Os parâmetros foram limitados no seu intervalo mínimo e máximo a fim de melhorar a resposta e o tempo da simulação. A resistência foi mantida no valor fixo de 34,41  $\Omega$ , isso foi feito para melhorar as estimativas. Já os demais parâmetros foram configurados para valores entre 0 e 1, por se tratar de valores menores.

Os parâmetros encontrados estão listados a seguir na Tabela 6:

Tabela 6 – Parâmetros do motor CC a partir de otimização numérica

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Resistência de armadura [ $\Omega$ ]	34,43
Indutância de armadura [H]	$5,0775 \times 10^{-2}$
Constante de força contraeletromotriz [V·s/rad]	$8,9309 \times 10^{-2}$
Constante de torque [V·s/rad]	$8,9309 \times 10^{-2}$
Coefficiente de atrito viscoso [V·s/rad]	$1,5829 \times 10^{-6}$
Momento de inércia [V·s <sup>2</sup> /rad]	$7,7152 \times 10^{-7}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4 Resultados

Durante o desenvolvimento do trabalho, foram confeccionados seis módulos didáticos, os quais foram utilizados em aulas práticas da disciplina de Teoria de Controle II, possibilitando que os alunos aplicassem na prática os conceitos de modelagem e projeto de controladores estudados em sala. Essas versões foram adequadas para confirmar a proposta, e mostraram que o módulo pode ser utilizado de forma efetiva em sala de aula. Posteriormente, visando maior durabilidade e robustez dos módulos didáticos, os circuitos foram fabricados profissionalmente por uma empresa especializada, conforme é mostrado na Figura 16. Dessa forma, garantiu-se um melhor acabamento, maior confiabilidade e vida útil estendida para o uso contínuo dos módulos no laboratório.

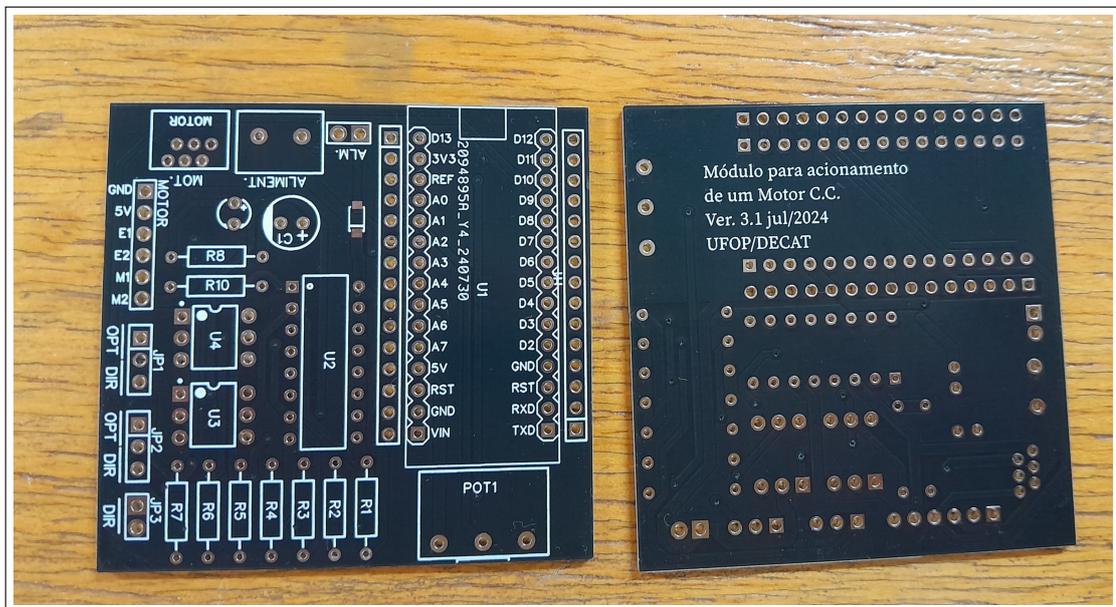


Figura 16 – Placa de circuito impresso (PCB) fabricada por empresa especializada.

Fonte: **Elaborado pelo autor.**

As Figuras 17, 18 e 19 correspondem às abordagens utilizadas no desenvolvimento do trabalho. A Figura 16 apresenta o modelo obtido a partir dos dados experimentais, a Figura 17 corresponde ao modelo identificado pela série de Taylor, e a Figura 18 mostra o modelo após o refinamento dos parâmetros determinados experimentalmente. Os parâmetros estimados foram comparados a dados que usam a velocidade real medida do motor. Essa comparação foi feita utilizando a função *lsim* (*Linear Simulation*), que simula a resposta no tempo de um sistema linear a qualquer sinal de entrada definido. Nos gráficos, a linha azul indica os resultados simulados, enquanto a linha verde indica os valores reais medidos.

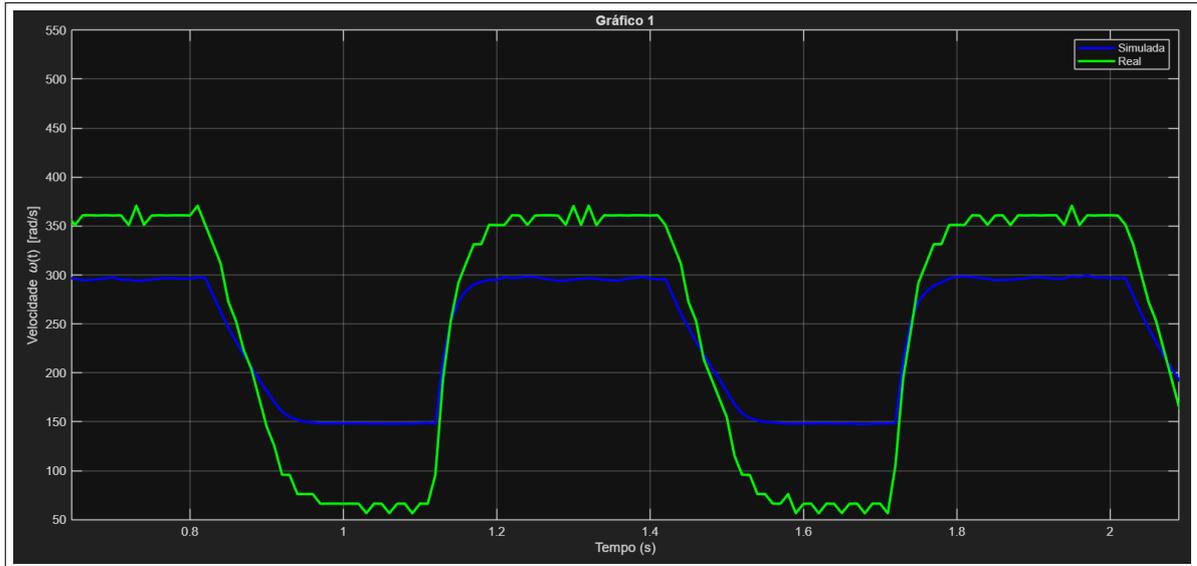


Figura 17 – Caso 1: modelo com parâmetros obtidos somente por ensaios, conforme seção 3.2. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

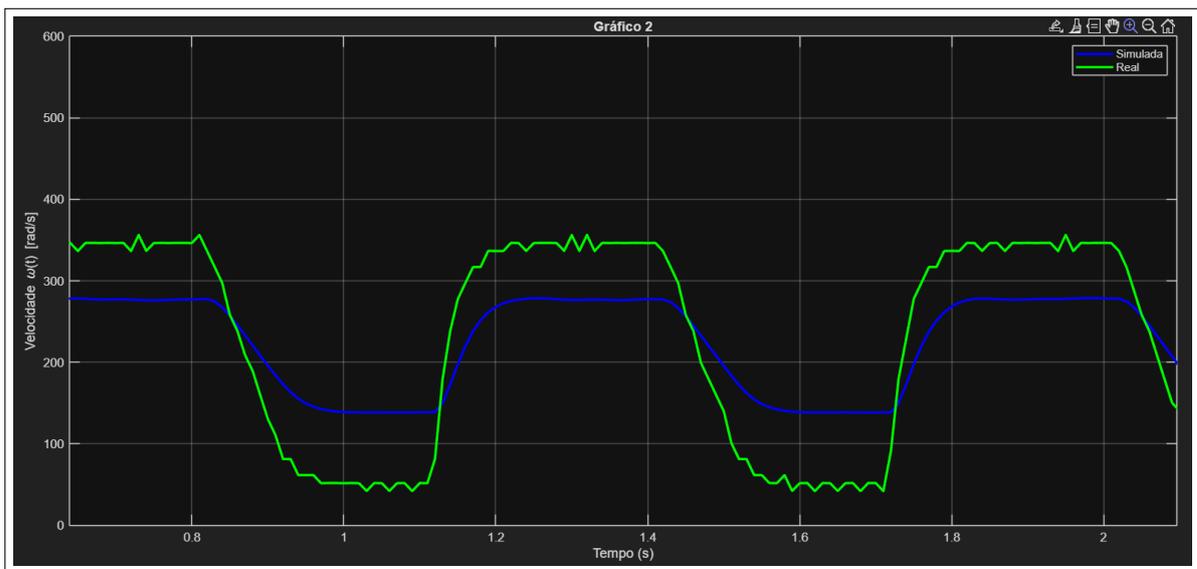


Figura 18 – Caso 2: modelo com parâmetros obtidos pelo método de identificação usando séries de Taylor, conforme seção 3.3. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

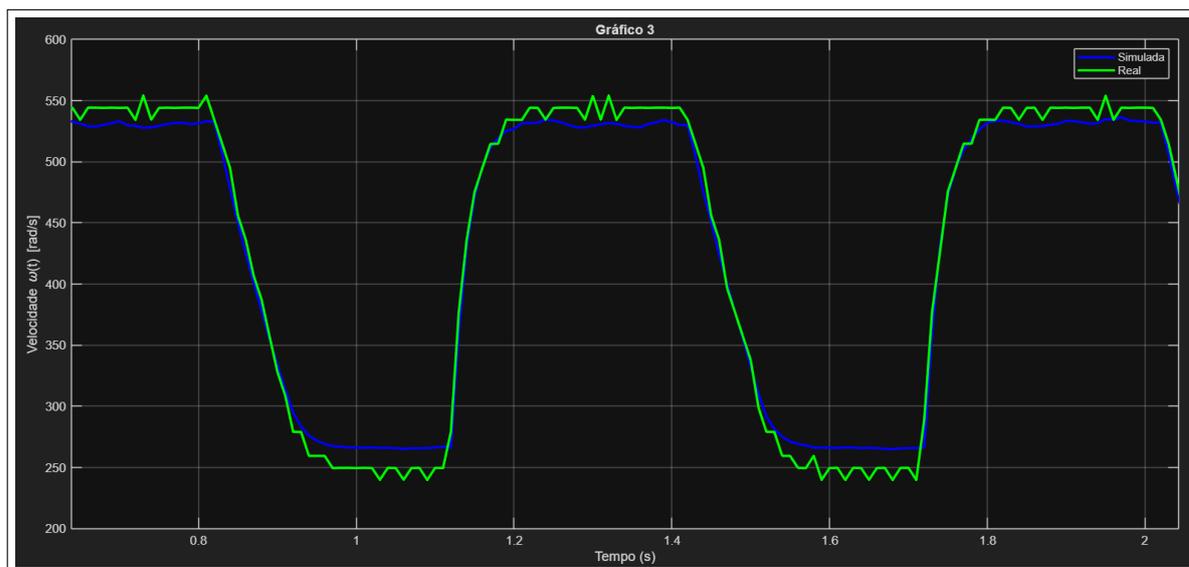


Figura 19 – Caso 3: modelo com parâmetros do caso 1 refinados por método de otimização a partir de dados experimentais. Fonte: **Elaborado pelo autor.**

Os gráficos obtidos na simulação apresentam um comportamento de um sistema de primeira ordem. Isso é devido a constante de tempo mecânica ter um valor menor que a constante de tempo elétrica. Essa característica resulta em uma boa estabilidade no regime permanente. Entretanto, a resposta não é totalmente fiel ao sistema real, que chega a exibir um *overshoot*, ou seja, uma ultrapassagem temporária do valor desejado.

O Caso 1 possui uma boa resposta ao degrau. O início do regime transiente está coerente com o sistema real, entretanto o sistema apresenta uma amplitude de sinal bem abaixo do esperado, e possui também um atraso de fase no fim do regime transiente. Isso indica que os parâmetros físicos encontrados não estão coerentes com os reais.

O Caso 2 apresenta um atraso na resposta tanto no começo quanto no final do regime transiente, indicando uma menor frequência de corte do modelo obtido. Possui também uma amplitude menor quando comparado ao primeiro caso, dando indícios que os parâmetros encontrados também estão incorretos e não representam esse sistema. Por mais que ele apresente menos oscilações, seus parâmetros resultam em uma representação deteriorada do modelo, em comparação com os outros casos. Um dos motivos pode ser o número de iterações utilizadas na série de Taylor, que foi limitada a 4 iterações nessa identificação.

O Caso 3 foi o que teve a melhor resposta, apresentou um valor de amplitude maior que se aproxima dos dados reais e não possui defasagem no início e fim do regime transiente. Essa diferença de amplitude no gráfico pode ser resultado de não linearidades, já que o motor na realidade não apresenta um comportamento totalmente linear, o que acaba gerando o overshoot.

## 5 Conclusão

Este trabalho demonstrou a criação de um módulo didático funcional para o acionamento de um motor CC. O objetivo proposto de disponibilizar módulos didáticos para uso no ensino de Teoria de controle foi alcançado. O módulo foi usado pelos alunos e apresentou boa funcionalidade, não apresentando qualquer falha por conexões ou componentes que não funcionam.

Entretanto, por se tratar de um protótipo, não ficou tão robusto em termos de acabamento. O módulo em si não teve uma proteção em seu entorno, o que pode implicar em uma possível falha no circuito vinda de alguma queda por exemplo.

A identificação dos parâmetros não apresentou um resultado fiel ao real, foram usadas mais de uma técnica para identificação afim de melhorar a precisão e confiabilidade dos valores obtidos, e por mais que duas das técnicas tenham apresentado gráficos com comportamentos quase parecidos, ainda estavam longe do comportamento ideal.

A técnica por otimização se mostrou a melhor na comparação de resultados, chegando mais próxima do valor ideal. Com os valores obtidos, é possível projetar um controlador capaz de atender às necessidades do motor, resultando em um erro menor. Assim, o módulo já cumpre bem sua proposta, pois possíveis erros de projeto que surgirem não estarão relacionados aos parâmetros do motor, mas sim às escolhas de controle feitas pelos alunos.

No geral o trabalho se mostrou com bons resultados, proporcionando aos alunos uma ferramenta prática e funcional para as aplicações práticas da teoria vista em sala de aula.

### 5.1 Trabalhos futuros

Apesar dos resultados alcançados, o módulo pode ser aprimorado. Assim, sugerem-se alguns trabalhos futuros, como:

- Criação de uma proteção para o módulo, de forma que o aluno não tenha qualquer contato com a ligação do circuito, interagindo apenas com o motor. Uma tampa de acrílico pode ser uma boa opção para permitir a visualização do circuito sem possibilitar a interação física com seus componentes.
- Utilização de mais iterações na modelagem pela série de Taylor, a fim de ajustar o método para obter valores de parâmetros mais confiáveis e próximos dos valores reais.

- Aplicação de modelagem não linear para obter maior precisão na determinação dos parâmetros.
- Adaptação do módulo para funcionamento com outros tipos de motores, como servomotor e motor de passo.

## 6 Referências

- BASILIO, João Carlos; MOREIRA, Marcos Vicente. **Experimentos para estimação dos parâmetros de motores CC**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Engenharia – Depto. de Eletrotécnica. Rio de Janeiro, 2002. Disponível em: [https://www.academia.edu/50979929/Experimentos\\_Para\\_Estima%C3%A7%C3%A3o\\_Dos\\_Par%C3%A2metros\\_De\\_Motores\\_De\\_Corrente\\_Cont%C3%ADnua#:~:text=Experimentos%20Para%20Estima%C3%A7%C3%A3o%20Dos](https://www.academia.edu/50979929/Experimentos_Para_Estima%C3%A7%C3%A3o_Dos_Par%C3%A2metros_De_Motores_De_Corrente_Cont%C3%ADnua#:~:text=Experimentos%20Para%20Estima%C3%A7%C3%A3o%20Dos). Acesso em: 10 set. 2024.
- KELES, Natalia A.; SILVA, Marina A.; CAMPOS, Vítor C. S.; BRAGA, Marcio F. **Módulos didáticos para o ensino de análise e controle de sistemas dinâmicos**. In: XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2017, Porto Alegre. Anais... Porto Alegre: [s.n.], 2017. Disponível em: [https://www.sba.org.br/Proceedings/SBAI/SBAI2017/SBAI17/papers/paper\\_557.pdf](https://www.sba.org.br/Proceedings/SBAI/SBAI2017/SBAI17/papers/paper_557.pdf). Acesso em: 10 set. 2024.
- RIBEIRO, Dhiego dos Santos; PRADO, Cláudio Castro. **Motores de ímãs permanentes**. Trabalho de conclusão de curso (Pós-Graduação em Engenharia de Sistema Eletromecânico, Automação e Controle Industrial) – Instituto Nacional de Telecomunicações, 2015. Orientador: Prof. Cláudio Castro Prado. Disponível em: [https://www.academia.edu/19151259/Motores\\_de\\_Im%C3%A3s\\_Permanentes\\_TCC\\_Inatel\\_Dhiego\\_dos\\_Santos\\_Ribeiro](https://www.academia.edu/19151259/Motores_de_Im%C3%A3s_Permanentes_TCC_Inatel_Dhiego_dos_Santos_Ribeiro). Acesso em: 10 set. 2024.
- FAZDI, Mohamad Farid; HSUEH, Po-Wen. **Parameters Identification of a Permanent Magnet DC Motor: A Review**. Electronics, v. 12, n. 2559, 2023. DOI: 10.3390/electronics12122559. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/371366454\\_Parameters\\_Identification\\_of\\_a\\_Permanent\\_Magnet\\_DC\\_Motor\\_A\\_Review](https://www.researchgate.net/publication/371366454_Parameters_Identification_of_a_Permanent_Magnet_DC_Motor_A_Review). Acesso em: 25 set. 2024.
- SOUSA, Humberto P. V. O. de; NUNES, Rhuan da S.; SILVA, A. Karoline G. da; ARAGÃO, F. Aldinei P.; ALBUQUERQUE, Leonardo T. **Módulo Didático para Acionamento e Controle de Velocidade de um Motor CC para Práticas Interdisciplinares em Cursos de Engenharias**. In: XXIV CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA 2022, 16 a 19 de outubro de 2022. Anais... [S.l.: s.n.], 2022. Disponível em: [https://www.sba.org.br/open\\_journal\\_systems/index.php/cba/article/view/3524](https://www.sba.org.br/open_journal_systems/index.php/cba/article/view/3524). Acesso em: 25 set. 2024.
- WU, Wei. **DC Motor Parameter Identification Using Speed Step Responses**. Modelling and Simulation in Engineering, v. 2012, Article ID 189757, 5 p. 2012. DOI: 10.1155/2012/189757. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/224162462\\_DC\\_Motor\\_Parameter\\_Identification\\_Using\\_Speed\\_Step\\_Responses](https://www.researchgate.net/publication/224162462_DC_Motor_Parameter_Identification_Using_Speed_Step_Responses). Acesso em: 25 set. 2024.

MAMANI, G.; BECEDAS, J.; FELIU-BATLLE, V.; SIRA-RAMÍREZ, H. **Open-Loop Algebraic Identification Method for a DC Motor**. In: PROCEEDINGS OF THE EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2007, Kos, Greece. Anais... 2007. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7068846>. Acesso em: 25 set. 2024.

SIEMENS. **Motores de corrente contínua: guia rápido para uma especificação precisa**. Edição 01.2006. São Paulo: Siemens Ltda, Unidade Automação e Controle – Acionamentos e Motores Elétricos, 2006. Disponível em: <https://www.docsity.com/pt/docs/motores-de-corrente-continua-guia-rapido-de-especificacao/5028302/>. Acesso em: 10 set. 2024.

UMANS, Stephen D. **Máquinas elétricas de Fitzgerald e Kingsley** [recurso eletrônico]. 7. ed. Tradução de Anatólio Laschuk. Porto Alegre: AMGH, 2014. ISBN 978-85-8055-374-1.

ALMEIDA, Renato Neves de. **O método dos mínimos quadrados: estudo e aplicações para o ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em: <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/28052015Renato-Neves-de-Almeida.pdf#:~:text=implementa%C3%A7%C3%A3o%20do%20m%C3%A9todo%20estudado,%20mas%20a>. Acesso em: 27 set. 2024.

ALVES, Rangel Resende. **Desenvolvimento de software de identificação de sistemas não lineares utilizando algoritmo de Golub-Householder**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia de Automação Industrial) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Araxá, 2016. Orientador: Prof. Me. Luís Paulo Fagundes. Disponível em: <https://www.eng-automacao.araxa.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/152/2018/01/TCC-vers%C3%A3o-final-Rangel-R-Alves.pdf>. Acesso em: 28 mai. 2025.

NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Disponível em: [https://www.academia.edu/36296704/Nise\\_Engenharia\\_de\\_Sistemas\\_de\\_Control\\_6\\_Edi%C3%A7%C3%A3o](https://www.academia.edu/36296704/Nise_Engenharia_de_Sistemas_de_Control_6_Edi%C3%A7%C3%A3o). Acesso em: 29 mai. 2025.

SOLO MOTOR CONTROLLERS. **Brushed motor vs brushless motor**. Disponível em: <https://www.solomotorcontrollers.com/....> Acesso em: 8 set. 2025.