

William Júnio de Lima

**ESTUDO DE AUTOVALORES E
AUTOVETORES EM SISTEMAS FÍSICOS**

Ouro Preto - MG

2025

William Júnio de Lima

ESTUDO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES EM SISTEMAS FÍSICOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Cláudia Raquel Martins Corrêa

Ouro Preto - MG

2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

L732e Lima, William Junio de.
Estudo de autovalores e autovetores em sistemas físicos.
[manuscrito] / William Junio de Lima. - 2025.
23 f.

Orientadora: Profa. Dra. Cláudia Raquel Martins Corrêa.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto.
Centro de Educação Aberta e a Distância. Graduação em Matemática .

1. Matemática aplicada. 2. Álgebra Linear. 3. Autovalores. 4.
Operadores hermitianos. 5. Hilbert, Espaço de. I. Corrêa, Cláudia Raquel
Martins. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 512.643.5

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
CENTRO DE EDUCACAO ABERTA E A DISTANCIA - CEAD
COLEGIADO DO CURSO DE MATEMATICA -
MODALIDADE A DISTANCIA



FOLHA DE APROVAÇÃO

William Junio de Lima

Estudo de Autovalores e Autovetores em Sistemas Físicos

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em 12 de julho de 2025

Membros da banca

Doutora em Modelagem Matemática e Computacional - Cláudia Raquel Martins Corrêa - Orientadora (Universidade Federal de Ouro Preto)

Doutorado em Educação - Milton Rosa - Leitor Crítico - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Doutorado em Educação - Daniel Clark Orey - Leitor Crítico - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Cláudia Raquel Martins Corrêa, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 12/07/2025



Documento assinado eletronicamente por **Milton Rosa, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 15/08/2025, às 11:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0960895** e o código CRC **780A6D6E**.

Resumo

Este trabalho ressalta a Álgebra Linear como sua linguagem intrínseca para entender que a Mecânica Quântica, utilizando conceitos matemáticos como o Espaço de Hilbert para descrever estados físicos como vetores, e operadores Hermitianos para representar observáveis, cujos autovalores reais correspondem aos resultados mensuráveis. A aplicação desses conceitos, especificamente a análise dos autovalores e autovetores do Hamiltoniano, foi crucial para entender o acoplamento éxciton-cavidade e analisar a força desse acoplamento. Essa abordagem matemática precisa é fundamental para a caracterização e o avanço da computação quântica.

Palavras-chaves: Álgebra Linear, autovalores e autovetores, sistemas físicos.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	8
3	METODOLOGIA: CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES PARA UM PONTO QUÂNTICO E CAVIDADE	12
3.1	Representação Matricial do Hamiltoniano	13
3.2	Cálculo dos Autovalores (Energias dos Polaritons)	14
3.3	Cálculo dos Autovetores (Composição dos Polaritons)	16
3.4	Incorporando Defasamento e Perdas	16
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO: INFORMAÇÕES EXTRAÍDAS DO COMPORTAMENTO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES .	20
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	24
	REFERÊNCIAS	25

1 Introdução

A base da tecnologia da informação contemporânea reside no controle do fluxo de cargas em dispositivos eletrônicos. No entanto, um paradigma emergente propõe uma mudança radical: o processamento de informação fundamentado nos princípios da Mecânica Quântica¹. Em contraste com o bit clássico, restrito aos estados 0 ou 1, a unidade fundamental da Computação Quântica é o *qubit*. Esse sistema de dois níveis é capaz de existir em uma *superposição de estados quânticos*, permitindo a representação desse novo estado como uma combinação linear de 0 e 1. A verdadeira potência dessa abordagem se manifesta na interação e emaranhamento entre múltiplos qubits, um fenômeno que habilita algoritmos quânticos com potencial para acelerar o processamento de dados em níveis inatingíveis para computadores convencionais [1].

Um ponto quântico (PQ) é uma nanoestrutura semicondutora que confina portadores de carga em todas as três dimensões espaciais. Esse confinamento resulta em níveis de energia discretos, análogos aos observados em átomos isolados, o que lhes rendeu a denominação de “átomos artificiais” [2]. Essa analogia permite a exploração de fenômenos da “Física Atômica” em um ambiente de estado sólido controlável. A flexibilidade dos pontos quânticos (PQs) reside na sua capacidade de ajustar a escala energética em uma ampla faixa de parâmetros, tornando-os ferramentas ideais para investigações teóricas e experimentais da interação luz-matéria em um cenário controlado e com alto grau de precisão. A eficiência e o controle desse acoplamento entre o emissor quântico e os modos da cavidade são pré-requisitos para que esses sistemas se tornem candidatos viáveis à Computação Quântica.

Em sua essência, nanocavidades são estruturas que confinam o campo eletromagnético em volumes de escala nanométrica. A introdução intencional de defeitos ou ausência de furos durante o processo de fabricação delimita a região de confinamento, embora essa confinção não seja perfeita. Consequentemente, fótons inseridos na cavidade podem ser

¹ Teoria que descreve o comportamento físico de sistemas microscópicos (elétrons, átomos e fótons, por exemplo).

perdidos a uma determinada taxa, que é inversamente proporcional ao fator de qualidade da cavidade.

Quando um PQ é integrado a uma cavidade, os modos fotônicos podem interagir com os éxcitons do PQ. Existem dois regimes distintos de interação luz-matéria em cavidade: o acoplamento fraco, onde os emissores excitados decaem irreversivelmente, e o acoplamento forte, caracterizado por uma troca coerente de energia entre o emissor e um único modo do campo eletromagnético quantizado. A assinatura experimental unânime do acoplamento forte nesses relatos é o anticruzamento entre o éxciton do PQ e os modos da cavidade. A partir dessa conquista, inúmeros outros progressos foram alcançados nessa área, incluindo a localização precisa dos PQs no interior das cavidades [3, 4] e o controle de seus estados por meio de campos elétricos [5], o que, ao longo do tempo, consolidou o campo da eletrodinâmica quântica de cavidades.

A análise completa do fenômeno de acoplamento luz-matéria é alcançada através do estudo aprofundado do espectro de emissão, como o de Foto-Luminiscência, que revela as complexidades introduzidas por processos dissipativos e de decoerência. No entanto, uma análise mais direta, focada nos autovalores e autovetores do Hamiltoniano do sistema, apesar de ser um modelo simplificado, é crucial. Esta abordagem oferece informações fundamentais sobre a assinatura intrínseca da força de acoplamento, como a divisão de energia dos polaritons ou estados vestidos, permitindo a distinção fundamental entre os regimes de acoplamento forte e fraco [6, 7].

Um foco central na Ótica Quântica tem sido a interação entre *emissores quânticos*² e a luz. O presente estudo dedica-se a utilizar conceitos de autovalores e autovetores, da Álgebra Linear, para entender a interação radiação-matéria em sistemas físicos sintetizados artificialmente em estado sólido, especificamente PQs integrados a *cavidades fotônicas*³. Uma vantagem inerente aos sistemas de estado sólido é a capacidade de personalizar suas características ópticas durante o processo de fabricação.

A Mecânica Quântica é uma das principais teorias da Física Contemporânea. O

² Sistemas que emitem luz em comprimentos de onda específicos, com potencial para aplicações em tecnologias como comunicação quântica e telas de alta definição.

³ Estruturas que confinam a luz, funcionando como ressonadores de luz.

estudo desta área da Física exige grande parte do conhecimento matemático baseado em Álgebra Linear. A Álgebra Linear não é apenas uma ferramenta auxiliar na Mecânica Quântica, mas sim sua própria linguagem matemática fundamental. Desde a descrição do estado de um sistema quântico como um vetor em um espaço de Hilbert complexo, até a representação das grandezas físicas observáveis, como energia, momento e posição — por operadores lineares (ou matrizes), a estrutura da teoria é intrinsecamente linear. Os possíveis resultados de uma medição são os autovalores desses operadores, e os estados em que o sistema possui um valor bem definido de uma grandeza são seus autovetores correspondentes. Fenômenos essenciais como a superposição de estados, onde um sistema pode existir simultaneamente em múltiplos estados antes da medição, e o emaranhamento, que descreve correlações quânticas profundas entre partículas, são expressos elegantemente através de combinações lineares de vetores de estado, solidificando a Álgebra Linear como o pilar sobre o qual toda a Mecânica Quântica é construída [8].

Este trabalho visa estudar a compreensão da interação luz-matéria em sistemas de ponto quântico acoplado a uma cavidade, explorando os regimes de acoplamento fraco e forte, através das ferramentas da Álgebra Linear, em particular a análise de autovalores e autovetores. Esta compreensão é crucial para o avanço da eletrodinâmica quântica de cavidades no estado sólido e para o desenvolvimento de futuras tecnologias quânticas.

2 Fundamentos Teóricos

A teoria quântica se baseia em duas construções: *funções de onda* e *operadores*. O estado de um sistema é representado por sua *função de onda*, e as *observáveis* são representadas por operadores. Matematicamente, as funções de onda satisfazem as condições que definem os vetores abstratos e os operadores agem sobre eles como **transformações lineares**. Portanto, a Linguagem natural da mecânica quântica é a **álgebra linear** [8].

A Mecânica Quântica é baseada em conceitos e teorias matemáticos com níveis de compreensão medianos e mais avançados. Em particular, a Álgebra Linear e a Probabilidade são requisitos nos quais estão contidos os postulados que fundamentam a teoria da Mecânica

Quântica. A representação de sistemas físicos na Mecânica Quântica é feita através de Espaços Vetoriais Complexos, denominados **Espaços de Hilbert**. O estado de um sistema físico é um vetor (abstrato) pertencente a um espaço de Hilbert. Além desses conceitos matemáticos a Mecânica Quântica realiza uma associação entre as grandezas físicas e operadores auto-adjuntos denominados **Operadores Hermitianos** e também associa os valores que tais grandezas podem assumir com os autovalores desse operador.

Nesta seção, são apresentados os conceitos matemáticos necessários para a compreensão do comportamento da luz e sua interação com a matéria através dos princípios da Mecânica Quântica. Os conceitos mais básicos de Álgebra linear, como espaços vetoriais, base e dimensão e também transformações lineares não serão apresentados e podem ser vistos em [9, 10]. Em todos os conceitos e resultados apresentados, são considerados espaços vetoriais de dimensão finita.

Inicialmente, é apresentada uma notação específica, introduzida por Paul Dirac, chamada “*bra-ket*” considerada padrão na Mecânica Quântica, utilizada na maioria dos textos didáticos para diferenciar os números complexos e as funções de onda¹.

Denota-se um vetor do espaço dos estados de um sistema físico pelo símbolo $| \rangle$ denominado “*ket*”:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

É possível verificar que o conjunto de todos os vetores $|a\rangle \in \mathbb{C}^n$ forma um espaço vetorial complexo.

A notação $\langle |$ denominada “*bra*” representa uma função linear²: $\langle | : V \rightarrow \mathbb{C}$, que corresponde a transposição complexa de um ket: $\langle a| = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ (o asterisco representa o complexo conjugado).

¹ Utilizada para descrever o estado de um sistema, fornecendo uma distribuição de probabilidade para encontrar a partícula em várias posições (quando medida)[11].

² Esta função é chamada Funcional Linear pertencente ao espaço dual V^* (espaço de todos os funcionais lineares).

Aplicando um bra $\langle b|$ em um ket $|a\rangle$, obtém-se um produto escalar, também chamado de produto interno.

Definição 1. : Seja V um espaço vetorial complexo. Um **produto interno** em V é uma relação $\langle | \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\forall |a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tem-se:

1. $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$
2. $\langle a|(\beta|b\rangle + \alpha|c\rangle) = \beta\langle a|b\rangle + \alpha\langle a|c\rangle$
3. $\langle a|a\rangle \geq 0$ e $\langle a|a\rangle = 0 \Leftrightarrow |a\rangle = 0$

A **norma** do vetor $|a\rangle$ é definida por: $\| |a\rangle \| := \sqrt{\langle a|a\rangle}$

Definição 2. : Uma sequência $|a_n\rangle$ em um espaço vetorial V **converge** para $|a\rangle \in V$ se, e somente se, $\| |a_n\rangle - |a\rangle \| \rightarrow 0$.

Definição 3. : Uma sequência $|a_n\rangle$ em um espaço vetorial V é dita **Sequência de Cauchy** se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > N$, tem-se $\| |a_n\rangle - |a_m\rangle \| < \epsilon$.

Definição 4. : Um espaço vetorial complexo H é chamado **Espaço de Hilbert** se for um espaço vetorial com produto interno tal que toda sequência de Cauchy converge em H .

Definição 5. : Consideremos um operador linear $T : V \rightarrow V$, sendo V um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Dizemos que T é operador auto adjunto ou **Hermitiano** se vale $\langle a|T|b\rangle^* = \langle b|T^\dagger|a\rangle$ para quaisquer vetores $|a\rangle, |b\rangle \in V$, ou seja, se $T^\dagger = T$.

A notação de adaga \dagger é utilizada para denotar o operador adjunto.

Apesar de serem conceitos básicos da Álgebra Linear, são apresentados aqui os conceitos de autovalores e autovetores por representarem a parte mais importante deste trabalho.

Definição 6. : Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, sendo V um espaço vetorial complexo, definimos um **autovalor** de T como um número complexo λ tal que $T|a\rangle = \lambda|a\rangle$ para um vetor não nulo $|a\rangle$. Neste caso, $|a\rangle$ é chamado **autovetor** de T associado ao autovalor λ .

Também são apresentados importantes resultados sobre operadores auto-adjuntos.

Teorema 1. : Autovetores correspondentes a autovalores distintos de um operador hermitiano são ortogonais entre si.

Demonstração. Para simplificar a notação, usaremos $T|v\rangle = Tv$ e $\lambda|v\rangle = \lambda v$.

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador hermitiano e sejam λ_i e λ_j autovalores distintos de T com autovetores correspondentes $|a_i\rangle$ e $|a_j\rangle$ respectivamente.

Tem-se $\langle a_i|Ta_j\rangle = \langle a_i|\lambda_j a_j\rangle = \lambda_j \langle a_i|a_j\rangle$ e

$\langle Ta_i|a_j\rangle = \langle \lambda_i a_i|a_j\rangle = \langle a_j|\lambda_i a_i\rangle^* = \lambda_i \langle a_i|a_j\rangle$

Como $\langle a_i|Ta_j\rangle = \langle Ta_i|a_j\rangle$, segue que $\lambda_j \langle a_i|a_j\rangle = \lambda_i \langle a_i|a_j\rangle$, o que implica

$(\lambda_i - \lambda_j) \langle a_i|a_j\rangle = 0$.

Logo $\langle a_i|a_j\rangle = 0$. □

Teorema 2. : Os autovalores de um operador hermitiano são reais. O que é consistente com a ideia de que observáveis físicos devem ter valores reais.

Demonstração. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador hermitiano e seja λ um autovalor de T .

Se $|a\rangle$ é um autovetor associado ao autovalor λ e $|b\rangle \in V$ tem-se:

$$\langle Tb|a\rangle = \langle b|Ta\rangle = \langle b|\lambda a\rangle = \lambda \langle b|a\rangle$$

.

Como $\langle Tb|a\rangle^* = \langle a|Tb\rangle = \langle Ta|b\rangle = \langle \lambda a|b\rangle = \lambda^* \langle b|a\rangle$, então $\lambda = \lambda^*$ e, portanto, λ é um número real. □

Teorema 3. (*Teorema Espectral*): Seja $T : V \rightarrow V$ um operador hermitiano em um espaço de Hilbert V de dimensão finita. Existe uma base ortonormal³ $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\} \subset V$ constituída por autovetores de T .

O Teorema Espectral é um dos mais importantes na Mecânica Quântica. Sua demonstração pode ser realizada usando o método de Indução⁴ e não será apresentada. Ela pode ser encontrada em diversos textos de Álgebra Linear, em particular em [10].

³ Conjunto de vetores unitários ortogonais entre si.

⁴ Técnica de demonstração de afirmações envolvendo números naturais.

Na Mecânica Quântica, os operadores matemáticos que agem sobre o espaço de Hilbert correspondem a *observáveis físicos*⁵ (como energia, momento, posição). É usual denotar com chapéu um operador que representa um observável. Por exemplo, o Hamiltoniano, que é o operador matemático que representa a energia total do sistema físico e governa sua evolução temporal, geralmente é denotado por \hat{H} . Ele encapsula todas as interações e energias (cinética e potencial) presentes no sistema. Seus autovalores representam os possíveis valores de energia que podem ser medidos, enquanto seus autovetores correspondentes representam os estados estacionários do sistema [8]. No contexto da interação entre um ponto quântico e uma cavidade, o Hamiltoniano se manifesta como o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. Este modelo descreve a ressonância de um éxciton (no ponto quântico) com um modo de fóton (na cavidade), incorporando suas energias individuais e, crucialmente, o termo de acoplamento que quantifica a força da interação entre eles.

Para um Hamiltoniano \hat{H} de um sistema, a equação de Schrödinger independente do tempo é:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

onde $|\psi\rangle$ é um autovetor (estado próprio) do Hamiltoniano e E é o autovalor (energia) correspondente.

3 Metodologia: Cálculo de Autovalores e Autovetores para um Ponto Quântico e Cavidade

Para calcular os autovalores e autovetores de um sistema de PQ e cavidade, utilizaremos o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings que descreve a parte coerente da

⁵ Grandezas físicas que podem ser medidas ou observadas.

interação. Consideraremos o espaço de Hilbert de uma única excitação, que é o mais relevante para a formação dos polaritons no regime de acoplamento forte.

3.1 Representação Matricial do Hamiltoniano

A interação fundamental entre um éxciton em um PQ e um modo de cavidade pode ser descrita por um Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings, que é um modelo padrão na Óptica Quântica. Para um sistema de PQ de dois níveis¹ acoplado a um único modo de cavidade, o Hamiltoniano é dado por:

$$H = \hbar\omega_x\sigma^\dagger\sigma + \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar g(a^\dagger\sigma + \sigma^\dagger a)$$

onde:

- $\hbar\omega_x$ é a energia de transição do éxciton no ponto quântico, sendo \hbar a constante de Plank reduzida²
- $\sigma^\dagger = |X\rangle\langle G|$ e $\sigma = |G\rangle\langle X|$ são os operadores de levantamento e abaixamento para o éxciton, respectivamente. Os estados $|G\rangle$ e $|X\rangle$ representam os estados fundamental e excitado do ponto quântico, respectivamente.
- $|X\rangle$: Estado em que o éxciton no ponto quântico está excitado e não há fótons na cavidade. Este estado é o $|0, e\rangle$ na notação padrão de número de fótons e estado do átomo.
- $|C\rangle$: Estado em que o éxciton no ponto quântico está no estado fundamental e há um fóton na cavidade. Este estado é o $|1, G\rangle$ na mesma notação.
- $\hbar\omega_a$ é a energia do fóton no modo da cavidade.
- a^\dagger e a são os operadores de criação e destruição, respectivamente para fótons no modo da cavidade.

¹ Sistema cujo espaço vetorial possui dimensão dois.

² Abreviação de $\frac{h}{2\pi}$, também denominada constante de Dirac.

³ A notação $|\rangle\langle|$ é chamada produto externo.

- $\hbar g$ é a força de acoplamento dipolar entre o modo da cavidade e o éxciton. Este termo descreve a taxa de troca de energia entre o éxciton e o fóton.

Este Hamiltoniano descreve a parte coerente da dinâmica do sistema. Em um sistema ideal sem perdas, a diagonalização deste Hamiltoniano resultaria nos estados de polariton, cujas energias se anticruzam à medida que a dessintonia é variada.

Para analisar a dinâmica de uma única excitação, considera-se uma base de estados que consiste em $\{|X\rangle, |C\rangle\}$. A matriz do Hamiltoniano H é construída nesta base $\{|X\rangle, |C\rangle\}$.

Sobre a ação de H no estado $|X\rangle$, como $|X\rangle$ representa o éxciton excitado e zero fótons: $\sigma^\dagger\sigma|X\rangle = |X\rangle$ (já que $|X\rangle$ é o estado excitado), $a^\dagger a|X\rangle = 0$ (não há fótons), $a^\dagger\sigma|X\rangle = a^\dagger|G\rangle = |C\rangle$ (cria um fóton na cavidade, destrói o éxciton) e $\sigma^\dagger a|X\rangle = 0$ (não há fótons para a destruir). Portanto, $H|X\rangle = \hbar\omega_x|X\rangle + \hbar g|C\rangle$.

Por sua vez, sobre a ação de H no estado $|C\rangle$, como $|C\rangle$ representa o éxciton no estado fundamental e um fóton na cavidade: $\sigma^\dagger\sigma|C\rangle = 0$ (já que o éxciton está no estado fundamental), $a^\dagger a|C\rangle = |C\rangle$ (um fóton), $a^\dagger\sigma|C\rangle = 0$ (o éxciton já está no estado fundamental) e $\sigma^\dagger a|C\rangle = \sigma^\dagger|G\rangle = |X\rangle$ (cria um éxciton, destrói o fóton). Portanto, $H|C\rangle = -\hbar\omega_x|C\rangle + \hbar\omega_a|C\rangle + \hbar g|X\rangle = (\hbar\omega_a - \hbar\omega_x)|C\rangle + \hbar g|X\rangle$. Assim, a matriz do Hamiltoniano H na base $\{|X\rangle, |C\rangle\}$ (onde a primeira linha/coluna corresponde a $|X\rangle$ e a segunda a $|C\rangle$) é:

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_x & \hbar g \\ \hbar g & \hbar\omega_a \end{pmatrix}$$

Na próxima seção, serão calculados os polaritons que são os autovalores e os autovetores deste hamiltoniano.

3.2 Cálculo dos Autovalores (Energias dos Polaritons)

Para simplificar os cálculos e as expressões neste trabalho, será adotada a convenção de que a constante de Planck reduzida (\hbar) é igual a 1. Essa escolha corresponde à utilização de unidades naturais, onde as unidades de medida são escaladas de forma que \hbar (cujo

valor usual é de aproximadamente $1,054 \times 10^{-34}$ joule-segundos) se torne adimensional e unitária. Tal abordagem simplifica consideravelmente as equações fundamentais da Mecânica Quântica, eliminando a necessidade de incluir essa constante em diversas formulações e focando na inter-relação das quantidades físicas.

$$H = \begin{pmatrix} \omega_x & g \\ g & \omega_a \end{pmatrix}$$

A equação característica (polinômio característico) para esta matriz é:

$$\begin{aligned} (\omega_x - \lambda)(\omega_a - \lambda) - (g)^2 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda(\omega_x + \omega_a) + \omega_x\omega_a - g^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

As soluções da equação 3.1 são:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{(\omega_x + \omega_a) \pm \sqrt{(\omega_x + \omega_a)^2 - 4(\omega_x\omega_a - g^2)}}{2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{(\omega_x + \omega_a) \pm \sqrt{(\omega_x^2 + 2\omega_x\omega_a + \omega_a^2 - 4\omega_x\omega_a + 4g^2)}}{2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{\omega_x + \omega_a}{2} \pm \frac{\sqrt{(\omega_x - \omega_a)^2 + 4g^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esta expressão é crucial para discernir o comportamento do sistema sob diferentes condições. O termo sob a raiz quadrada determina a natureza das oscilações de Rabi: se for real, indicam oscilações coerentes e minimamente amortecidas. Estes são os dois níveis de energia dos polaritons. A divisão de energia entre os dois estados de polariton, também chamada de divisão de Rabi, é $\Omega = \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\omega_x - \omega_a)^2 + 4g^2}$. Na ressonância ($\omega_x - \omega_a = 0$), a divisão é $2g$, que é a conhecida frequência de Rabi no vácuo.

3.3 Cálculo dos Autovetores (Composição dos Polaritons)

Para cada autovalor, calculamos o autovetor correspondente. Um autovetor $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ satisfaz $(H - \lambda I)\psi = 0$.

Para λ_1 :

$$\begin{pmatrix} \omega_x - \lambda_1 & g \\ g & \omega_a - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considerando a primeira linha:

$$\begin{aligned} (\omega_x - \lambda_1)\psi_1 + g\psi_2 &= 0 \\ \psi_2 &= -\frac{(\omega_x - \lambda_1)}{g}\psi_1 \end{aligned}$$

Usando a condição de normalização $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$, obtém-se

$$\psi_{11} = -\frac{2g}{\sqrt{4g^2 + (\omega_a - \omega_x + \sqrt{(\omega_x - \omega_a)^2 + 4g^2})^2}} \quad (3.3)$$

$$\psi_{12} = -\frac{\sqrt{4g^2 + (\omega_a - \omega_x)(\omega_a - \omega_x + \sqrt{4g^2 + (\omega_a - \omega_x)^2})}}{\sqrt{2}\sqrt{(\omega_x - \omega_a)^2 + 4g^2}} \quad (3.4)$$

Analogamente para λ_2 :

$$\psi_{21} = \frac{\sqrt{4g^2 + (\omega_a - \omega_x)(\omega_a - \omega_x + \sqrt{4g^2 + (\omega_a - \omega_x)^2})}}{\sqrt{2}\sqrt{(\omega_x - \omega_a)^2 + 4g^2}} \quad (3.5)$$

$$\psi_{22} = \frac{2g}{\sqrt{4g^2 + (\omega_a - \omega_x + \sqrt{(\omega_x - \omega_a)^2 + 4g^2})^2}} \quad (3.6)$$

Estes são os autovetores do sistema acoplado.

3.4 Incorporando Defasamento e Perdas

É crucial reiterar que os cálculos acima são para um sistema ideal, sem dissipação ou bombeio. No cálculo do espectro de emissão, quando os termos de perdas e ganhos

(como Γ_x , P_x , Γ_c , P_c) são incluídos através da equação mestre de Lindblad, o problema da evolução temporal e da função espectral se torna mais complexo [12]. Não é mais uma simples diagonalização de um hamiltoniano hermitiano.

Porém, segundo Hennessy et al (2007), a determinação da força de acoplamento e a caracterização dos regimes de operação do sistema (forte ou fraco) pode ser realizada de forma particularmente eficiente e direta através da análise dos autovalores e autovetores da matriz M descrita na equação 3.7, que representa o hamiltoniano, mas com perdas e bombeios, observados experimentalmente, incluídos [4]. Os autovalores de M fornecem intrinsecamente as frequências ressonantes e as taxas de decaimento associadas aos estados acoplados do sistema.

$$M = \begin{bmatrix} \omega_a - i\Gamma_a & g \\ g & \omega_x - i\Gamma_x \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde Γ_x e Γ_a representam as taxas de dissipação inerentes a cada subsistema. Γ_x denota a taxa de decaimento do éxciton do ponto quântico para o ambiente, incluindo processos radiativos e não radiativos. Γ_a , por sua vez, representa as perdas por falta de qualidade da cavidade no aprisionamento da luz em seu interior. Na análise experimental do processo de emissão, ambos os parâmetros são cruciais pois caracterizam a prevalência dos processos dissipativos sobre o acoplamento coerente, influenciando diretamente a dinâmica e as propriedades espectrais observadas no sistema [6]. Esta metodologia da Álgebra Linear que será adotada aqui oferece uma alternativa computacionalmente mais leve e analiticamente mais transparente em comparação com o cálculo completo do espectro de emissão do sistema, que muitas vezes exige simulações extensivas.

Seguindo a metodologia do capítulo anterior nesta matriz M , são obtidos os autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\omega_a + \omega_x) - i(\Gamma_a + \Gamma_x) \pm \sqrt{((\omega_a - \omega_x) - i(\Gamma_a - \Gamma_x))^2 + 4g^2}}{2} \quad (3.8)$$

O regime de acoplamento forte se estabelece quando $g > (\Gamma_x - \Gamma_a)/4$. Essa condição garante que o termo sob a raiz quadrada, na equação 3.8, seja positivo, resultando em um valor puramente real para a parte oscilatória dos autovalores. Nesse regime, a transferência de energia coerente entre o emissor e a cavidade é predominante, superando os canais

de decaimento. A característica espectral distintiva é um anticruzamento entre o modo confinado na cavidade e o emissor quando ambos se encontram em ressonância. A Fig. 3.1 mostra o anticruzamento resultante como função da dessintonia $\omega_x - \omega_a$, representado pelas linhas cheias em vermelho. As linhas pontilhadas na figura representam os estados desacoplados, que se cruzariam em $\omega_x = \omega_a$, enquanto as linhas sólidas em vermelho, que são assíntotas às linhas desacopladas, revelam a repulsão entre os estados acoplados, os polaritons. A separação mínima de energia entre os estados polaritônicos ocorre na ressonância ($\omega_a = \omega_x$), e é conhecida como o *splitting* de Rabi, que, para as perdas consideradas, é dado por:

$$Spl_{Rabi} = \lambda_1 - \lambda_2 = 2\sqrt{g^2 - (\Gamma_x - \Gamma_a)^2/4}, \quad (3.9)$$

onde a separação máxima possível atinge $2g$.

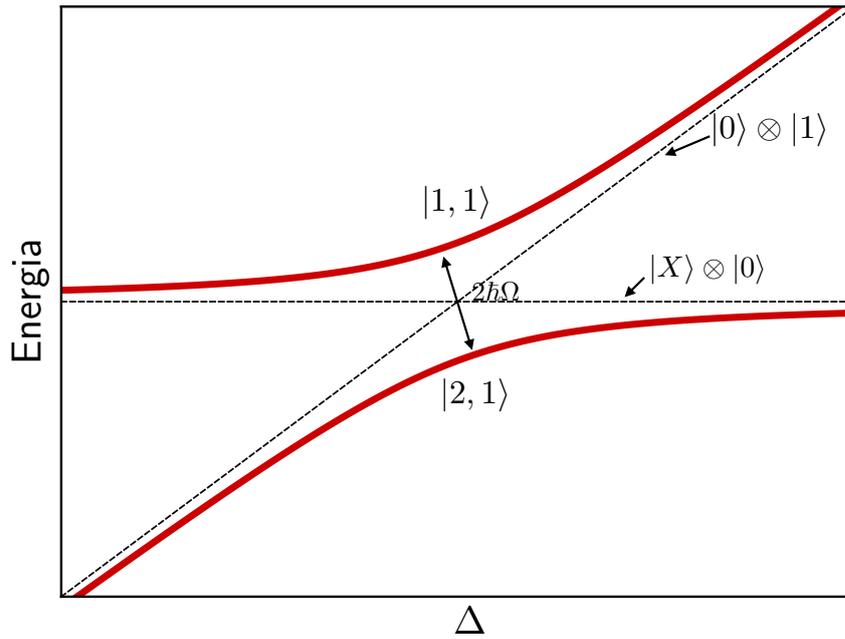


Figura 3.1 – Anticruzamento do sistema PQ-cavidade obtido com o modelo de Jaynes-Cummings. A energia dos estados de polaritons (linhas sólidas em vermelho) e os estados desacoplados (linhas tracejadas) é analisada como função da diferença entre as frequências do ponto quântico e da cavidade, $\Delta = \omega_x - \omega_a$

Inversamente ao regime de acoplamento forte, no regime de acoplamento fraco, os processos dissipativos prevalecem sobre o acoplamento coerente. Esse regime é categorizado pela relação $g < (\Gamma_x - \Gamma_a)/2$, que implica em um termo negativo sob a raiz quadrada da equação 3.8, levando a um quociente imaginário para os autovalores. Embora o emissor

ainda esteja acoplado à cavidade, o principal efeito observado é um aumento em sua taxa de emissão espontânea, conhecido como Efeito Purcell.

A interação entre luz e matéria em escalas nanométricas tem sido um campo de intensa pesquisa, levando a avanços significativos na compreensão de fenômenos quânticos fundamentais e no desenvolvimento de novas tecnologias. Particularmente, sistemas compostos por pontos quânticos semicondutores acoplados a microcavidades oferecem uma plataforma única para investigar a dinâmica de acoplamento entre um emissor quântico zero-dimensional e um modo de campo eletromagnético quantizado. A capacidade de controlar e manipular essa interação é fundamental para aplicações em computação quântica, processamento de informação quântica e optoeletrônica.

A divisão de Rabi (que agora pode ser uma quantidade complexa) é então definida como $\Omega = \sqrt{g^2 - (\tilde{\omega}_x - \tilde{\omega}_a)^2/4}$, onde $\tilde{\omega}_x = \omega_x - i\Gamma_x$ e $\tilde{\omega}_a = \omega_a - i\Gamma_a$. A parte real de $\lambda_{1,2}$, na equação 3.8, dá as posições dos picos observados no espectro, enquanto a parte imaginária está relacionada às larguras de linha. A análise da função espectral $S(\omega)$, observada na referência [6] e não apresentada aqui, é muito mais complexa e exige a solução numérica da equação mestre ou o uso de formulações analíticas complexas que consideram o estado estacionário da matriz densidade.

Apesar da complexidade do problema completo, o conceito dos autovalores e autovetores do Hamiltoniano puramente coerente (como calculados acima) permanece fundamental para entender a natureza das quasipartículas (polaritons) e o fenômeno de anticruzamento. A relação entre a constante de acoplamento g e as perdas efetivas Γ_x e Γ_a é o que dita a transição entre o regime de acoplamento forte e o regime de acoplamento fraco. A definição formal desses regimes, onde a frequência de Rabi na ressonância é puramente real ou puramente imaginária, é diretamente inferível da natureza dos autovalores. Adicionalmente, a análise dos autovetores revela a composição dos estados acoplados (os polaritons), explicitando a proporção de caráter fotônico e excitônico, e como essa proporção evolui com a sintonia das frequências.

4 Resultados e Discussão: Informações Extraídas do Comportamento dos Autovalores e Autovetores

A análise dos autovalores e autovetores, considerando tanto os termos do Hamiltoniano quanto os termos de perdas e bombeios, fornece informações cruciais sobre a interação entre o ponto quântico e a cavidade. Neste capítulo serão explorados os resultados obtidos com a metodologia aplicada no capítulo anterior.

A principal assinatura do acoplamento forte é o anticruzamento no espectro de emissão, que corresponde à divisão das energias dos poláritons (os autovalores) à medida que a dessintonia entre o éxciton e a cavidade é variada. Esta situação está representada na figura 4.1.

No caso, os autovalores λ_1 e λ_2 da equação 3.8 demonstram claramente a divisão de energia. Na ressonância ($\delta = 0$), a divisão é $2\hbar g$, a frequência de Rabi de vácuo. Esta frequência $2\hbar g$ representa a taxa máxima de troca de energia entre o éxciton e o fóton. Laucht et al. [6] extraíram um $\hbar g = 59 \mu eV$ para o melhor ajuste de seus dados, que é a metade da divisão de Rabi de vácuo. A presença de defasamento e as taxas de bombeio (P_x, P_a) e decaimento (Γ_x, Γ_a) podem fazer com que os picos no espectro de emissão se fundam, mesmo que o sistema ainda esteja no regime de acoplamento forte. Isso é claramente demonstrado nas Fig. 2c e Fig. 3c do artigo de Laucht et al. [6], onde a divisão observada (círculos abertos) diminui significativamente com o aumento da potência de excitação ou da temperatura, enquanto a divisão teórica (quadrados pretos preenchidos) permanece inalterada ou é afetada de forma diferente.

Já os autovetores, ou autoestados, são representados pelas curvas de probabilidade de ocupação dos autoestados em azul e em vermelho nas partes b) e c) da figura 4.1. Tais curvas representam as projeções de cada parte $|\psi_{11}\rangle$ e $|\psi_{12}\rangle$ sobre o autovetor $|\psi_1\rangle$.

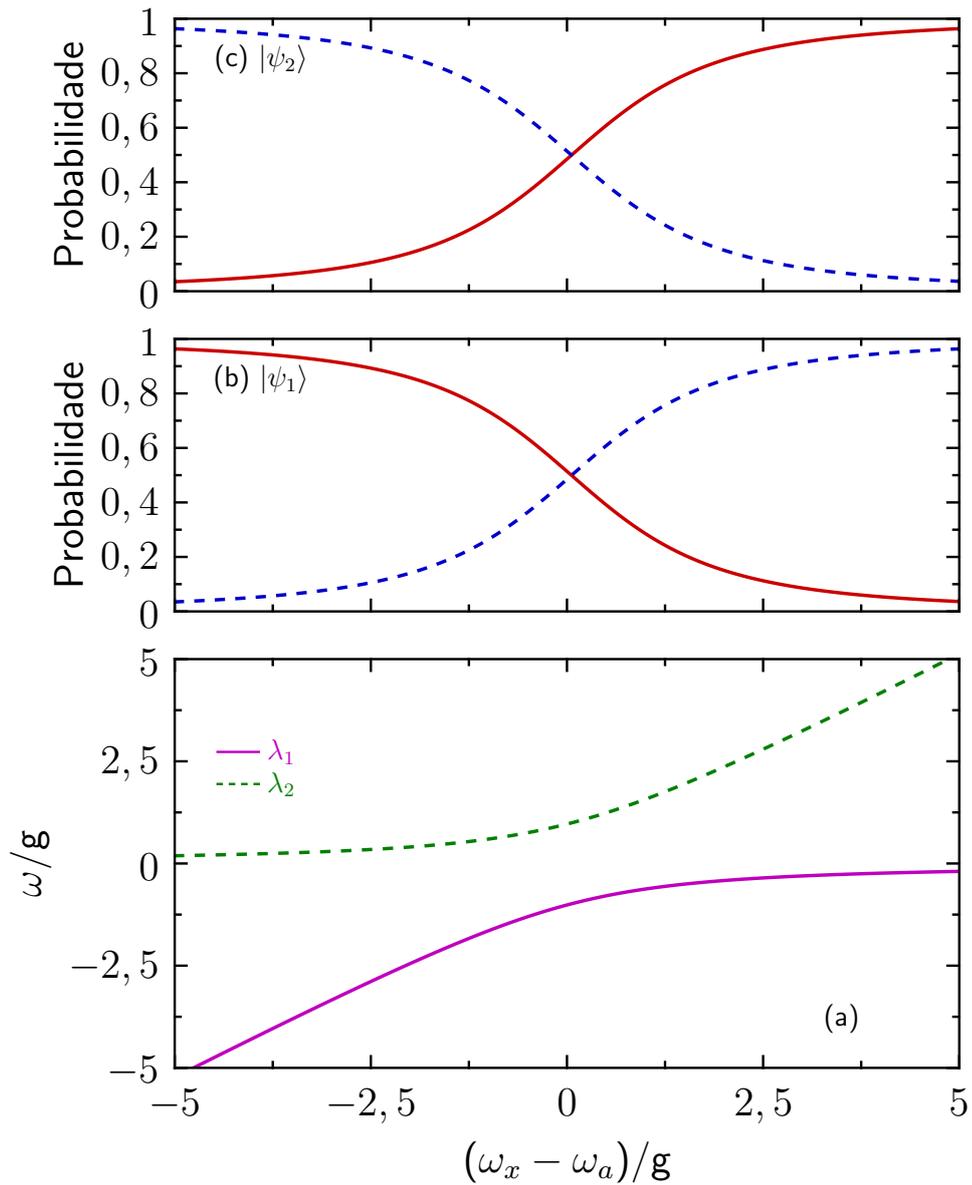


Figura 4.1 – (a) Comportamento dos autovalores e autovetores como função da dessintonia entre os componentes do sistema ponto quântico-cavidade. Em (a) temos representados os autovalores e em b) e c) os respectivos autovetores. Parâmetros: $\Gamma_a = 0.5g, \Gamma_x = 0.02g, P_a = 10^{-5}g, P_x = 10^{-5}g$.

Analogamente para o autovetor $|\psi_2\rangle$. Elas descrevem a mistura éxciton-fóton nos estados de polariton. Longe da ressonância, os autovetores se aproximam dos estados puros de éxciton ou fóton. Na ressonância, os autovetores indicam uma mistura igual (50% éxciton, 50% fóton), o que significa que a energia é trocada eficientemente entre os dois subsistemas. Essa mudança na composição é o que permite a sintonização do caráter do polariton de “quase-fóton” para “quase-éxciton”, impactando propriedades como a polarização e a vida

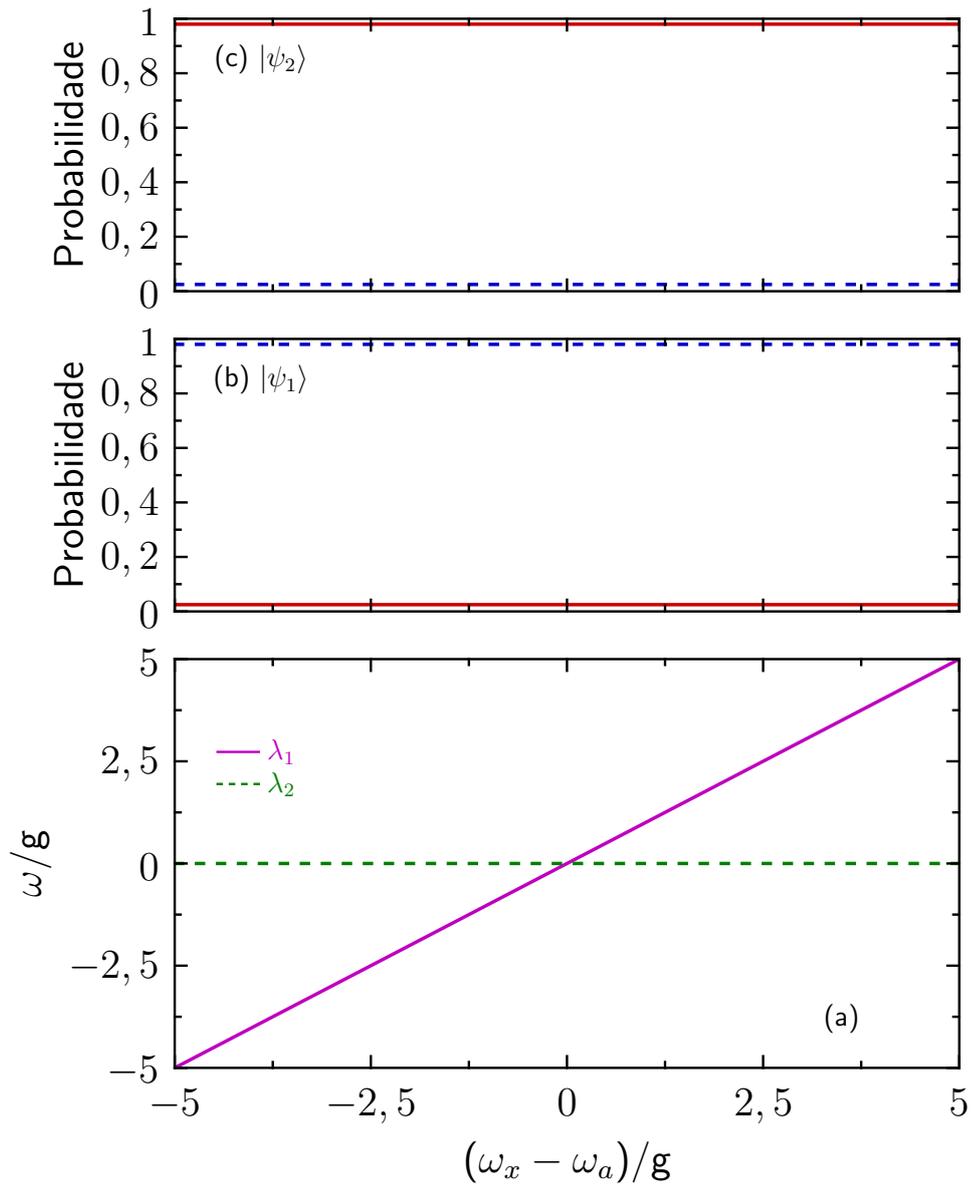


Figura 4.2 – (a) Comportamento dos autovalores e autovetores como função da dessintonia entre os componentes do sistema ponto quântico-cavidade. Em (a) temos representados os autovalores e em b) e c) os respectivos autovetores. Parâmetros: $\Gamma_a = 5g$, $\Gamma_x = 0.02g$, $P_a = 10^{-5}g$, $P_x = 10^{-5}g$.

útil.

O gráfico da figura 4.2 mostra que as energias dos autovalores se cruzam. Isso é um indicativo claro de que o sistema se encontra no regime de acoplamento fraco. Neste cenário, os processos dissipativos, como as perdas de fótons na cavidade (Γ_a) e o decaimento do éxciton no ponto quântico (Γ_x), dominam a interação coerente entre luz e matéria, representada pela taxa de acoplamento g . Essencialmente, a energia é dissipada para o ambiente mais rapidamente do que pode ser coerentemente trocada entre o éxciton e o

fóton. Em vez de formar as quasipartículas híbridas de polaritons, que seriam uma mistura dos estados de éxciton e fóton, as excitações se comportam de forma mais independente, passando uma pela outra na ressonância sem uma hibridização significativa de energia. Isso é confirmado observando os autovetores, ou autoestados, representados pelas curvas de probabilidade de ocupação dos autoestados em azul e em vermelho nas partes b) e c) da figura 4.2. Tais curvas representam as projeções de cada parte $|\psi_{11}\rangle$ e $|\psi_{12}\rangle$ sobre o autovetor $|\psi_1\rangle$. Analogamente para o autovetor $|\psi_2\rangle$. Seja na ressonância ou longe dela, os autovetores se aproximam dos estados puros de éxciton ou fóton indicando que o acoplamento é muito fraco ou quase nulo.

Em um estudo mais aprofundado utilizando o espectro de emissão, a principal manifestação do acoplamento fraco, mesmo que o emissor ainda esteja interagindo com a cavidade, é o fenômeno conhecido como Efeito Purcell [6]. Nele, a cavidade atua otimizando o ambiente fotônico para o éxciton, o que pode resultar em um aumento substancial na sua taxa de emissão espontânea quando a cavidade e o éxciton estão em ressonância. Diferente do acoplamento forte, onde dois picos espectrais distintos (os polaritons) seriam observados e se anticruzariam com a variação da dessintonia, no regime de acoplamento fraco, tipicamente seria observado um único pico de emissão. Este pico central refletiria a predominância dos processos dissipativos sobre a formação de estados coerentemente mistos.

A extração das propriedades dos autovalores (energias) e a análise da composição dos autovetores (mistura éxciton-fóton) a partir do ajuste de modelos teóricos completos aos dados experimentais são fundamentais para quantificar e compreender os mecanismos de defasamento em sistemas de polaritons de ponto quântico-microcavidade.

O uso de autovalores e autovetores, embora não substitua a análise completa do espectro de emissão, emerge como uma ferramenta eficiente e complementar na caracterização da força de acoplamento entre pontos quânticos e cavidades. Essa abordagem baseada na Álgebra Linear permite quantificar diretamente os regimes de acoplamento forte e fraco através da observação do anticruzamento ou cruzamento de energias, fornecendo informações cruciais sobre a taxa de troca de energia e a formação de polaritons, o que é

inestimável para o avanço no controle e engenharia de dispositivos quânticos.

5 Conclusão e Perspectivas Futuras

Este trabalho reafirma a indispensável premissa de que a Álgebra Linear constitui a linguagem intrínseca da Mecânica Quântica. Conforme delineado, o estado de um sistema físico é elegantemente descrito por um vetor no Espaço de Hilbert, uma estrutura dotada de produto interno onde toda sequência de Cauchy converge. As observáveis físicas, por sua vez, são associadas a operadores Hermitianos, garantindo que os valores mensuráveis dessas grandezas, que correspondem aos autovalores desses operadores, sejam intrinsecamente reais. Esta fundamentação matemática, que abrange conceitos desde a notação bra-ket até as propriedades dos operadores auto-adjuntos, provou ser o pilar essencial para a investigação da interação luz-matéria.

Ao aplicarmos essas poderosas ferramentas ao sistema de ponto quântico-cavidade, o operador Hamiltoniano revelou-se central. A análise de seus autovalores e autovetores permitiu desvendar as complexidades do acoplamento entre o éxciton e o modo da cavidade. A distinta assinatura de um anticruzamento nos autovalores forneceu a evidência crucial do regime de acoplamento forte, quantificando a formação de polaritons e a taxa de troca coerente de energia. Em contraste, a ausência de tal divisão de energia, ou um comportamento de cruzamento, demarcou o regime de acoplamento fraco, onde a dissipação supera a coerência intrínseca.

Em síntese, a abordagem rigorosa baseada na Álgebra Linear não apenas forneceu uma compreensão quantitativa e qualitativa dos regimes de acoplamento fraco e forte, mas também validou a profundidade com que os conceitos matemáticos abstratos se manifestam em fenômenos físicos concretos. A clareza e precisão oferecidas pela análise de autovalores e autovetores são, portanto, inestimáveis para a caracterização precisa desses sistemas, pavimentando o caminho para o controle e a engenharia de dispositivos quânticos.

Referências

- 1 DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, v. 439, n. 1907, p. 553–558, 1992. Citado na página 6.
- 2 BAYER, M. et al. Hidden symmetries in the energy levels of excitonic ‘artificial atoms’. *Nature*, v. 405, n. 6789, p. 923–926, 2000. Citado na página 6.
- 3 BADOLATO, A. et al. Deterministic coupling of single quantum dots to single nanocavity modes. *Science*, v. 308, n. 5725, p. 1158–1161, 2005. Citado na página 7.
- 4 HENNESSY, K. et al. Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot-cavity system. *Nature*, v. 445, p. 896–899, fev. 2007. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 17.
- 5 LAUCHT, A. et al. Electrical control of spontaneous emission and strong coupling for a single quantum dot. *New Journal of Physics*, v. 11, p. 023034–023044, 2009. Citado na página 7.
- 6 LAUCHT, A. et al. Mutual coupling of two semiconductor quantum dots via an optical nanocavity. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 82, p. 075305, Aug 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.82.075305>>. Citado 5 vezes nas páginas 7, 17, 19, 20 e 23.
- 7 GONZALEZ-TUDELA, A. et al. Anticrossing in the pl spectrum of light-matter coupling under incoherent continuous pumping. *Sup. and Microst.*, v. 47, p. 16–18, Jan 2010. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749603609001219>>. Citado na página 7.
- 8 GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. 2. ed. Porto Alegre: Pearson Universidades, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 12.
- 9 COELHO, F.; LOURENÇO, M. L. Um curso de Álgebra linear. *Editora da Universidade de São Paulo*, São Paulo, 2003. Citado na página 9.
- 10 L., L. E. *Álgebra Linear*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.
- 11 BIANCHINI, C. P.; GAMBERI, G. P.; SANTOS, R. M. Introdução à computação quântica com ibm/qis-kit. Citado na página 9.
- 12 LAUSSY, F. P.; VALLE, E. del; TEJEDOR, C. Strong coupling of quantum dots in microcavities. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 101, p. 083601, Aug 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.083601>>. Citado na página 17.