

**Universidade Federal de Ouro Preto**  
**Instituto de Ciências Exatas e Biológicas**  
**Departamento de Física**

**Investigando a Conversão entre Fótons e Fótons Escuros em  
Guias de Onda por uma Abordagem Baseada na Teoria  
Clássica de Campos**

**Brenner Misson Mota dos Anjos**

**Ouro Preto – MG**

**2025**

**Brenner Misson Mota dos Anjos**

**Investigando a Conversão entre Fótons e Fótons Escuros em Guias de Onda por uma Abordagem Baseada na Teoria Clássica de Campos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Física (DEFIS), Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

**Ouro Preto – MG**

**2025**



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Brenner Misson Mota dos Anjos**

**"Investigando a Conversão entre Fótons e Fótons Escuros em Guias de Onda por uma Abordagem Baseada na Teoria Clássica de Campos"**

Monografia apresentada ao Curso de **BACHARELADO** em **FÍSICA** da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de **BACHAREL** em **FÍSICA**

Aprovada em 10 de abril de 2025

### Membros da banca

Doutor - André Herkenhoff Gomes - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto/Minas Gerais  
Doutor - Armando de Oliveira Brizola - Universidade Federal de Ouro Preto/Minas Gerais  
Doutor - Thiago Escobar Colla - Universidade Federal de Ouro Preto/Minas Gerais

André Herkenhoff Gomes, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 10/04/2025



Documento assinado eletronicamente por **Andre Herkenhoff Gomes, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 04/06/2025, às 12:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0890089** e o código CRC **B49D1040**.

## RESUMO

O fóton escuro é uma partícula hipotética proposta como candidata à matéria escura. Sua possível existência acarretaria no surgimento de novos fenômenos envolvendo a luz, sendo o mais marcante a possível conversão de fótons em fótons escuros e vice-versa. Neste trabalho, propõe-se o estudo teórico de tal fenômeno no contexto guias de ondas utilizando-se do formalismo da teoria clássica de campos. O cenário estudado é o da conversão dos fótons em fótons escuros em um guia e a posterior reconversão em fótons em um segundo guia, isolado e inicialmente vazio. Para guias de onda típicos, estimou-se que a detecção ou não de um sinal eletromagnético no segundo guia é capaz de investigar a existência de fótons escuros com massa da ordem de  $10^{-9}$ – $10^{-5}$  eV e constante de acoplamento cinético da ordem de  $10^{-5}$ . Embora comparáveis em sensibilidade a outras técnicas de detecção presentes na literatura, tais valores situam-se em regiões já excluídas por outros experimentos. Tal conclusão indica a necessidade de possíveis ajustes e refinamentos na nossa análise teórica, bem como de avanços experimentais na tecnologia de guias de onda, para que sejamos capazes de sugerir tal aparato como uma alternativa viável na tentativa de detecção desta partícula, até então, hipotética.

## ABSTRACT

The dark photon is a hypothetical particle proposed as a candidate for dark matter. Its possible existence would lead to the emergence of new phenomena involving light, the most notable being the possible conversion of photons into dark photons and vice versa. In this work, we propose a theoretical study of this phenomenon in the context of waveguides using the formalism of classical field theory. The studied scenario involves the conversion of photons into dark photons in one waveguide and their subsequent reconversion into photons in a second, isolated, and initially empty waveguide. For typical waveguides, it is estimated that the detection or non-detection of an electromagnetic signal in the second waveguide can probe the existence of dark photons with a mass on the order of  $10^{-9}$ – $10^{-5}$  eV and a kinetic coupling constant on the order of  $10^{-5}$ . Although comparable in sensitivity to other detection techniques present in the literature, these values lie in regions already excluded by other experiments. This conclusion indicates the need for potential adjustments and refinements in our theoretical analysis, as well as experimental advancements in waveguide technology, so that we may be able to suggest such an apparatus as a viable alternative in the attempt to detect this, as of yet, hypothetical particle.

## SUMÁRIO

1. Introdução	1
2. Objetivos	3
3. Revisão de Literatura	3
3.1. O modelo do fóton escuro	3
3.2. Limites experimentais	5
3.3. Estratégias de detecção	7
4. Metodologia	9
4.1. Formalismo lagrangeano para campos	9
4.2. Lagrangiana do eletromagnetismo	10
4.3. Transformação de calibre	12
4.4. Lagrangiana do modelo com fóton e o fóton escuro	13
5. Resultados e Discussão	15
5.1. Guia de ondas retangular	15
5.2. Análise da onda eletromagnética incidente no primeiro guia	17
5.3. Potência inserida no primeiro guia	18
5.3.1. Modo TE	18
5.3.2. Modo TM	19
5.4. Análise do fóton escuro produzido no primeiro guia	20
5.5. Análise da onda eletromagnética transmitida ao segundo guia	23
5.6. Potência transmitida no segundo guia	24
5.6.1. Modo TE	24
5.6.2. Modo TM	25
5.6.3. Sensibilidade aos parâmetros associados ao fóton escuro	25
5.7. Discussão	26
6. Conclusões	27
7. Referências Bibliográficas	28

## 1. INTRODUÇÃO

A matéria escura é uma forma hipotética de matéria que interage fracamente com a matéria ordinária. Ela surge como modelo para resolver diversos problemas astrofísicos, como, por exemplo, o comportamento anômalo das curvas de rotações de galáxias.

O comportamento anômalo das galáxias, [1], surge quando analisamos a velocidade da matéria visível (estrelas e gás de poeira) em diferentes distâncias do centro da galáxia. O comportamento esperado, segundo a gravitação newtoniana e a relatividade geral, era que a velocidade das estrelas diminuísse à medida que se afastassem do centro. Conseqüentemente, a velocidade das galáxias seguiria o mesmo comportamento, entretanto, não é o que ocorre: à medida que se afasta do centro a velocidade tende a uma constante, como mostra o gráfico (1).

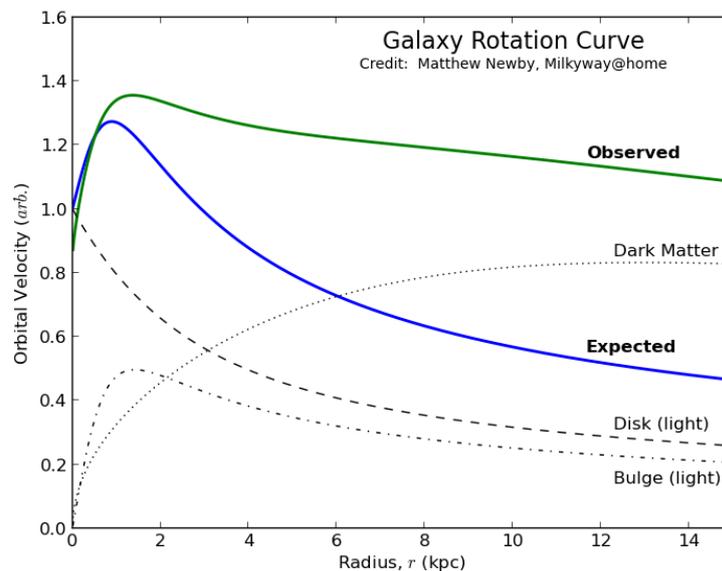


Figura 1: Velocidade orbital de galáxias em função do raio.

A curva verde representa o comportamento observado, enquanto a curva azul representa o comportamento esperado. A análise das velocidades orbitais das estrelas em galáxias espirais mostra que tais galáxias giram mais rapidamente do que seria esperado com base na massa visível observada. Essa discrepância sugere a presença de uma matéria adicional [2], até então não detectada, a matéria escura. Essa matéria adicional, preenchendo as galáxias e seus arredores, criaria um campo gravitacional extra que manteria a elevada velocidade das estrelas mesmo nas regiões periféricas, corrigindo assim a anomalia nas curvas de rotações das galáxias.

Outro fenômeno que aponta para a necessidade de matéria adicional no Universo é o das lentes gravitacionais. As lentes gravitacionais são descritas pela relatividade geral, nas quais

ondas eletromagnéticas são desviadas de seu caminho devido à presença de corpos massivos que distorcem a estrutura do espaço-tempo. Por causa desse fenômeno, há a possibilidade de observar objetos cosmológicos que, a princípio, seriam indetectáveis. No entanto, o grau de distorção observado para alguns desses objetos diverge do previsto [3], novamente sugerindo a existência de uma matéria adicional que curvaria o espaço-tempo.

Por mais útil que seja o modelo da matéria escura, pouco se sabe sobre sua composição. Foram propostos alguns candidatos à partícula da matéria escura, como as WIMPs<sup>1</sup>. As WIMP são partículas hipotéticas massivas provenientes de teorias de supersimetria [4] e que não absorvem ou emitem fótons, quando muito exibindo uma interação fraca ou indireta com o eletromagnetismo [5]. Além disso, o modelo das WIMPs previa uma coincidência chamada “milagre WIMP” [6]. Prevê-se que no Universo primordial, as WIMPs, caso existam, estariam em equilíbrio térmico com o plasma quente. Conforme o Universo se expandia e esfriava, a taxa de interações diminuía levando a um freeze-out, ou seja a abundância de WIMPs “congelava”. O “milagre WIMP” surge ao considerarmos a massa das WIMPs na faixa 100GeV – 1TeV e a interação com seções de choque da ordem da força nuclear fraca. O “freeze-out” deixaria uma abundancia remanescente que coincide com a densidade de matéria escura estimada hoje. Devido a essas características, as WIMPs se tornaram, por muito tempo, as principais candidatas à matéria escura. Entretanto, com o passar do tempo, elas se tornaram candidatas menos favorecidas, por diversas razões. As WIMPs até então não foram detectadas em experimentos dedicados à busca direta, mesmo com uma alta sensibilidade dos detectores. Algumas discrepâncias observadas em formação de estruturas em pequenas escalas, como o problema do *cusp-core* [7], sugerem que a matéria escura deva ter propriedades diferentes das previstas para as WIMPs. Além disso, as WIMPs surgiram de teorias de supersimetria, sem comprovação experimental. Neste sentido, alguns outros candidatos à matéria escura, como o áxion e o fóton escuro, ganharam maior notoriedade, e agora mostram-se como mais promissores para explicarem problemas astrofísicos que as WIMPs não resolveram.

A detecção de uma dessas partículas candidatas a matéria escura poderia pôr fim à misteriosa natureza da matéria escura. Em particular, a detecção do fóton escuro poderia explicar medições recentes que aparentemente estão em conflito com previsões vindas de modelos convencionais ou de outros tipos de matéria escura como, por exemplo, o aumento da energia de nuvens de hidrogênio presentes no espaço [8]. A análise do espectro de emissão das nuvens de poeira presentes no Universo, o espectro de Lyman-alfa, devido à radiação absorvida por

---

<sup>1</sup> Do inglês *Weakly Interacting Massive Particle*.

pulsares, apresenta um alargamento diferente do esperado. Esse alargamento está associado a um acréscimo de energia que, possivelmente, provem da matéria escura. Especula-se que a matéria escura, em sua fraca interação com a matéria ordinária, pode vir a se converter em fótons, e conseqüentemente, aumentar a energia dessas nuvens.

O modelo do fóton escuro poderia explicar certas inconsistências em resultados de experimentos de espalhamento inelástico profundo [9]. Em experimentos deste tipo, partículas com altas energias (elétrons, por exemplo) são lançadas contra partículas mais pesadas (prótons e núcleons em geral), de modo que a interação revele estruturas internas dessas partículas pesadas. Quando há discrepâncias entre o observado e a teoria, modelos além do modelo padrão de partículas surgem de forma a explicar tais discrepâncias. Neste sentido, o modelo do fóton escuro poderia mediar interações, de forma sutil, entre o elétron incidente e os quarks dentro do próton, através da criação de um novo canal de interação. Esse canal alteraria sutilmente as probabilidades de espalhamento sob certas condições de energia e ângulo, de forma que corrige as discrepâncias entre os resultados experimentais e as previsões baseadas no modelo padrão.

## 2. OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é estudar o modelo teórico do fóton escuro e sua interação com o fóton. O objetivo específico é investigar um cenário hipotético no qual a propagação da luz no interior de guias de onda é afetada pela interação com o fóton escuro, e avaliar a sensibilidade de tal configuração como via de detecção indireta do fóton escuro.

## 3. REVISÃO DE LITERATURA

### 3.1. O modelo do fóton escuro

A teoria por trás do modelo do fóton escuro foi proposta inicialmente por Bob Holdom em 1986 [10], na qual se explora a ideia de uma nova simetria no Universo, denominada  $U(1)'$ , em adição às simetrias conhecidas do Modelo Padrão. Associado à essa nova simetria existiria um novo bóson de calibre<sup>2</sup> capaz de interagir com as partículas do Modelo Padrão por meio de uma “mistura cinética” com o fóton, a qual descreveremos em breve. Inicialmente, o objetivo da hipótese do fóton escuro era explicar o surgimento de simetrias adicionais em teorias de grande

---

<sup>2</sup> Bósons de calibre são partículas mediadoras de força — um exemplo é o fóton.

unificação. Posteriormente, a partir dos anos 2000, esse modelo ganhou relevância na busca por uma descrição da matéria escura [11].

A forma na qual descrevemos partículas e campos, em interação ou livres, é por meio do formalismo lagrangiano<sup>3</sup>. Em teorias efetivas de baixa energia, o fóton escuro livre é descrito pela lagrangiana de Proca — originalmente proposta por Alexandru Proca em 1936 para generalizar as equações de Maxwell ao incluir campos vetoriais massivos. Esta é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 A'_\mu A'^\mu, \quad (1)$$

Nesta expressão,  $A'_\mu$  é o quadripotencial associado ao fóton escuro e  $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$ . Note que se o termo de massa for nulo ( $m_{\gamma'} = 0$ ), a lagrangiana torna-se análoga à do fóton convencional. Em modelos mais completos, utilizando a teoria quântica de campos [12], supõe-se a existência de um campo de Higgs escuro que rompe espontaneamente a simetria  $U(1)'$  e gera o termo de massa para o fóton escuro [13], de forma análoga à obtenção de massa para os bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$  no Modelo Padrão. Em baixas energias, a invariância de calibre é explicitamente quebrada devido ao termo  $A'_\mu A'^\mu$  e o modelo deixa de exibir a simetria  $U(1)'$ .

O fóton escuro interage com as partículas do Modelo Padrão por meio indireto, através do acoplamento cinético com o fóton, descrito por um termo adicional na lagrangiana dado por

$$\frac{1}{2}\chi F'^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2)$$

onde  $\chi$  é o parâmetro desta “mistura” cinética e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Esse acoplamento funciona como uma ponte entre o setor visível (as partículas do Modelo Padrão) e o setor oculto (associado à matéria escura). Para uma descrição completa da dinâmica entre o fóton e o fóton escuro, esse termo é adicionado à lagrangiana do fóton escuro, juntamente com a lagrangiana do fóton

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\chi F^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\mu - A^\mu J_\mu, \quad (3)$$

onde  $J_\mu$  é a quadricorrente elétrica, a qual contém somente as partículas do Modelo Padrão. Esse modelo exibe a simetria  $U(1)$  tradicional do eletromagnetismo, mas não exibe a simetria  $U(1)'$  associada ao fóton escuro.

Devido ao acoplamento cinético, os campos  $A^\mu$  (fóton) e  $A'^\mu$  (fóton escuro) estão misturados, o que introduz dificuldade na hora de interpretar certas características desses campos ou mesmo identificar a qual campo corresponde qual partícula. Assim, é necessário desacoplar os campos por meio de uma redefinição nos quadripotenciais. Uma possibilidade é redefinir o quadripotencial do fóton escuro:

$$A'^\mu \rightarrow A'^\mu + \chi A^\mu. \quad (4)$$

<sup>3</sup> Fazemos uma revisão do formalismo lagrangiano na Seção 4.4.1.

Assim, a lagrangiana (3) fica:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 \left( A'^{\mu}A'_{\mu} + 2\chi A'^{\mu}A_{\mu} + \chi^2 A^{\mu}A_{\mu} \right) - A^{\mu}J_{\mu}. \quad (5)$$

Essa transformação elimina o acoplamento cinético  $\frac{1}{2}\chi F'^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , e permite uma interpretação física mais clara dos campos. Nesta descrição, o fóton aparentemente comporta-se como se fosse massivo, ainda que o modelo exiba simetria de calibre U(1). Contudo, a redefinição que fizemos introduz o termo  $m_{\gamma'}^2\chi A'^{\mu}A_{\mu}$ , o qual indica que os campos não estão em um estado de massa bem definido. Portanto, o modelo prevê um fenômeno de oscilações de estado de fóton e fóton escuro. Devido a tais oscilações, esse tipo de redefinição na lagrangiana é frequentemente utilizada no estudo de fótons e fótons escuros em experimentos de cavidades ressonantes [14], sobre os quais falaremos mais na próxima seção.

Outra possibilidade de redefinição dos potenciais consiste em redefinir o potencial do fóton:

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} + \chi A'^{\mu}. \quad (6)$$

Isso leva à seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 A'^{\mu}A'_{\mu} - J_{\mu}A^{\mu} - \chi J_{\mu}A'_{\mu}. \quad (7)$$

Nesta forma, os campos ficam desacoplados, preservando de modo explícito a simetria U(1) do campo eletromagnético, e mantendo inalterado o acoplamento  $J_{\mu}A^{\mu}$  entre o fóton e a matéria. Entretanto, surge um novo acoplamento  $\chi J_{\mu}A'^{\mu}$  entre a matéria comum e o fóton escuro, que pode ser interpretado como a atribuição de uma “carga escura” às partículas conhecidas. Como essa transformação efetivamente atribui uma carga escura às partículas do Modelo Padrão, ela é frequentemente utilizada para descrever processos em experimentos de aceleradores de partículas como BaBar, Belle II e LHCb que buscam sinais do fóton escuro [15].

### 3.2. Limites experimentais

Há dois modelos principais para o fóton escuro: um no qual ele é uma partícula sem massa, e outro no qual ele é massivo [16]. Se o fóton escuro tiver massa ( $m_{\gamma'}$ ), este parâmetro precisa ser determinado experimentalmente. Atualmente, os experimentos, como o ATLAS, estão investigando a presença de fótons escuros com massas que variam de 0 a 40 GeV, com limites de exclusão sendo estabelecidos sobre a taxa de decaimento do bóson de Higgs em um par de fóton e fóton escuro [17]. Experimentos com cavidades ressonantes excluem valores da ordem de  $1,68 \times 10^{-15}$  eV até  $24,86 \mu\text{eV}$  [14] e experimentos com caixas de radiobindagem também excluem a faixa de  $41 \mu\text{eV}$  até  $74 \mu\text{eV}$  [18].

Assim como a matéria escura, o fóton escuro interage fracamente com a matéria ordinária, e pode se converter no fóton. Logo, a presença do fóton escuro adiciona o chamado termo de acoplamento cinético na lagrangiana para a interação do fóton com o fóton escuro. A constante que mensura a intensidade desse acoplamento cinético ( $\chi$ ) é outro parâmetro a ser determinado. Diversos experimentos foram realizados com o objetivo de estabelecer limites para a massa e a constante de acoplamento cinético do fóton escuro, conforme apresentado na Figura 2.

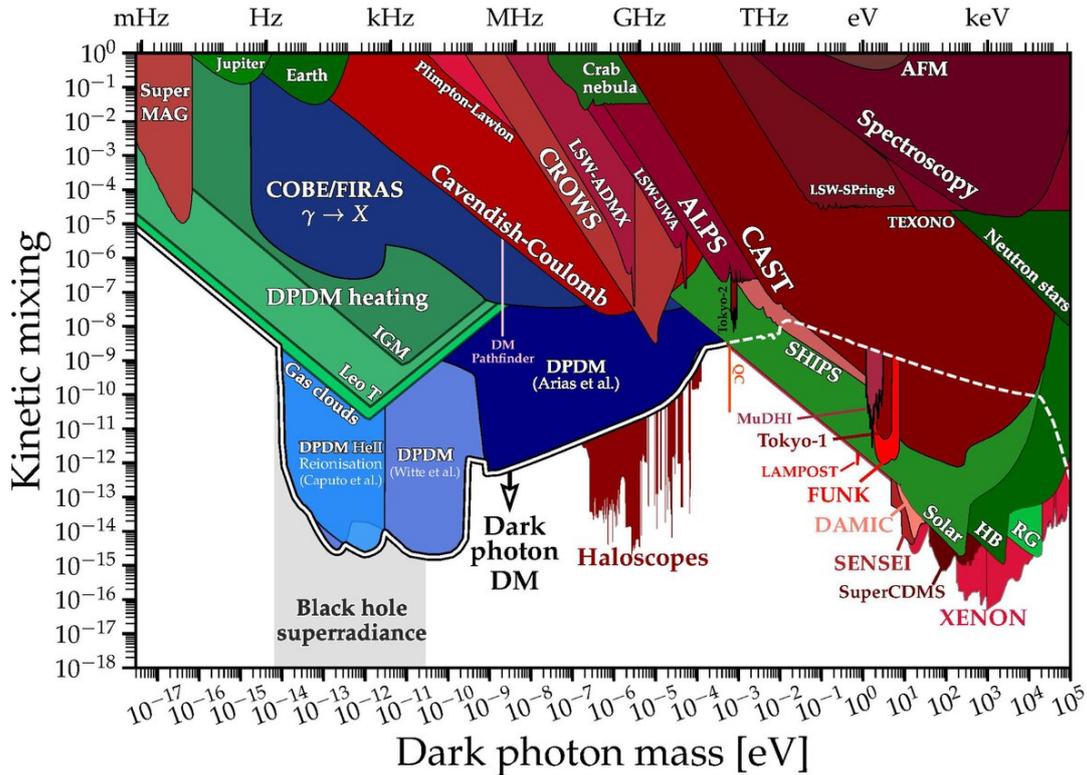


Figura 2: Experimentos realizados para detectar o fóton escuro e correspondentes limites experimentais sobre a massa do fóton escuro (eixo horizontal) e a constante de acoplamento cinético (eixo vertical).

Na Figura 2, o eixo vertical representa os valores da constante de acoplamento (adimensional), enquanto o eixo horizontal representa os valores da massa<sup>4</sup> do fóton escuro em eV. Cada segmento colorido da Figura 2 corresponde a um experimento realizado, e as arestas e arcos indicam as faixas já cobertas por esses experimentos, ou seja, os valores de massa e constante de acoplamento que já foram testados. A faixa branca que contorna os segmentos representa as atuais estimativas para os possíveis valores da massa e constante de acoplamento do fóton escuro, onde espera-se que a constante de acoplamento, dependendo do valor da massa do fóton

<sup>4</sup> Neste trabalho, usamos o sistema de unidades naturais, onde  $c = \hbar = 1$ , de modo que, por exemplo, massa e energia são expressas na mesma unidade (múltiplos de elétron-volt, eV).

escuro, esteja entre  $10^{-15}$  e  $10^{-5}$  [19].

Fótons escuros leves, com massa na faixa de  $10^{-15}$  eV

Para modelos com massa intermediária, na faixa de 1 eV – 1 MeV, o fóton escuro teria energia suficiente para decair em plásmons e fônons em meios materiais [20]. Em ambientes estelares, as condições de altas temperaturas e densidade formam plasmas de partículas carregadas, como elétrons, que se movem livremente. Nessas situações, podem surgir oscilações do plasma, que pode ser modelado como uma quase-partícula chamada plásmon (oscilações coletivas de elétrons) [21]. Para a faixa de massa considerada, o fóton escuro poderia interagir fracamente com a matéria ordinária e com o fóton por meio do acoplamento cinético<sup>5</sup>. Nos plasmas estelares, os plásmons são excitados e, através do acoplamento cinético entre a matéria e o fóton escuro, poderiam se converter em fótons escuros e estes, por interagirem fracamente com a matéria ordinária, escapariam do interior das estrelas, levando consigo a energia dos plásmons. Esse processo afeta os tempos de resfriamento e pode ser observado em discrepâncias na evolução de estrelas com baixa massa [22].

Finalmente, em modelos com massas altas, na faixa de 1 MeV – 1 TeV, o fóton escuro pode decair em partículas conhecidas do Modelo Padrão [23]. Isso ocorre devido a mistura cinética entre o fóton e o fóton escuro que cria uma pequena interação entre o fóton escuro e partículas carregadas, como elétrons e múons. A interação com a matéria comum pode ser interpretada como uma espécie de carga oculta para as partículas [24], além da sua carga elétrica e por causa dela. Por isso, os fótons escuros com massa suficiente (1 MeV – 1 TeV) poderiam decair em partículas do modelo padrão, como um par elétron-pósitron [25]. Essa pequena interação com a matéria comum e o fóton é o que mantém o fóton escuro, de fato, “escuro” ou seja, com uma fraca interação com a matéria ordinária. Porém, é o que abre possibilidade para um processo de decaimento, pois se o acoplamento for nulo, não haverá canal para processos de decaimento e, se fosse muito grande, o fóton escuro deixaria de ser “escuro” já que sua interação com o fóton seria mais evidente.

### 3.3. Estratégias de detecção

As implicações da natureza do fóton escuro remetem à pergunta: como detectar o fóton escuro ou provar sua interação com o fóton? Algumas estratégias envolvem tanto experimentos controlados quanto observações astrofísicas, cada uma explorando diferentes aspectos de sua possível existência.

<sup>5</sup> O chamado acoplamento cinético do fóton com o fóton escuro será discutido na Seção 4.4.4.

No contexto observacional, sinais astrofísicos também podem indicar a presença do fóton escuro. Linhas espectrais anômalas provenientes de raios gamma, caracterizadas por picos de energia e frequências específicas, podem revelar a influência do fóton escuro sobre as ondas eletromagnéticas [26]. Bem como sua possível influencia nas distorções  $\mu$  e  $y$  da radiação cósmica de fundo (CMB<sup>6</sup>) para uma faixa de massa específica [27]. Essas distorções no espectro do CMB ocorreram na época do Universo primitivo, e estudos recentes utilizam o modelo do fóton escuro como uma possível causa de tais distorções. Outro fenômeno relacionado ao CMB se refere às anisotropias, ou seja, flutuações da temperatura média do CMB causadas por diferenças de densidade no Universo primordial. Alguns estudos feitos considerando fótons escuros leves (na faixa 1 feV – 1 peV) apontam que o fóton escuro poderia se comportar como uma radiação escura que, no Universo primordial, contribuiria de forma significativa como fonte de energia. Dessa forma, devido à expansão acelerada do Universo, haveria a criação de regiões mais frias e quentes no Universo, o que se revelaria como uma anisotropia na distribuição de temperaturas do CMB [28].

Outro fator observacional importante é o resfriamento anômalo de algumas estrelas no Universo [29]. O fóton escuro é empregado como uma possível causa deste resfriamento, pois poderia estar sendo produzido nos núcleos estelares e “levando” parte da energia, afetando assim o resfriamento de algumas estrelas. Isso poderia ser um indicativo relevante para a existência do fóton escuro [30].

No contexto experimental, uma possibilidade envolve a utilização de aceleradores de partículas, nas quais se buscam tanto processos de decaimento visível quanto invisível [31]. Para uma determinada faixa de massa, o fóton escuro, após ser produzido, pode decair ou não em partículas conhecidas do Modelo Padrão, com energias e momentos que sugerem a presença de uma partícula intermediária, ou resultar em um déficit energético que pode ser detectado pelos instrumentos [32].

Diversas outras abordagens experimentais têm sido propostas, incluindo, em particular, experimentos de menor porte. Por exemplo, citamos experimentos com cavidades ressonantes para detecção direta (haloscópios). As cavidades ressonantes consistem em estruturas metálicas de alta condutividade, fechadas ou quase fechadas, que são projetadas para amplificar um sinal fraco em frequências específicas por meio do confinamento das ondas eletromagnéticas [33]. Com tais aparatos, busca-se, por exemplo, evidenciar conversões do fóton escuro em fóton. Na busca pelo fóton escuro, a cavidade deve ser sintonizada para uma faixa de frequências

---

<sup>6</sup> Do inglês *cosmic microwave background*.

específicas, de forma a conter a frequência correspondente à desconhecida massa do fóton escuro. Na presença de fótons escuros, estes se converteriam em fótons que contribuiriam com a energia armazenada, desta forma surgindo um pico na densidade de energia medida pelos detectores à frequência ressonante correspondente a frequência do fóton escuro [14].

Alternativamente ao haloscópio, pode-se adaptar um experimento do tipo LSW<sup>7</sup> na busca por fótons escuros. O LSW adaptado consiste em duas cavidades ressonantes, uma emissora e outra detectora [34]. Neste caso, o experimento consiste em confinar ondas eletromagnéticas em uma das cavidades (emissora), regulada na faixa de frequências correspondentes à massa desconhecida do fóton escuro, e buscar sinais de ondas eletromagnéticas na outra cavidade (detectora). A detecção desse tipo de sinal indicaria a ocorrência da conversão de fótons em fótons escuros na cavidade emissora, e posterior conversão de fótons escuros em fótons na cavidade receptora [35].

Neste trabalho, será abordado um modelo do eletromagnetismo que inclui o fóton escuro massivo. Consideraremos a situação hipotética da propagação em um guia de ondas para fazer um estudo teórico de fenômenos decorrentes da interação entre o fóton e o fóton escuro.

## 4. METODOLOGIA

### 4.1. Formalismo lagrangeano para campos

A abordagem que escolhemos para o nosso estudo teórico do fóton escuro consiste em utilizar a mecânica lagrangiana para campos relativísticos. Para isso, deve-se expandir o conceito da lagrangiana de partículas, em sua abordagem discreta, para o contínuo, e interpretá-la como o caso de campos. A nova representação  $\mathcal{L}$  para a lagrangiana de campos difere da lagrangiana de partícula  $L$ , pois agora atua como uma densidade lagrangiana [36]. Sua dependência passa a ser pelos campos,  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ , onde  $\phi = \phi(x^\mu)$  é um campo escalar que depende da posição relativa ao espaço-tempo,  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ . A escolha do sinal negativo na parte temporal ou espacial da métrica é ambígua, e neste trabalho a escolha será na parte espacial, por exemplo,  $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ .

Para chegar às equações de Euler-Lagrange, primeiro define-se a ação:

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x, \quad (8)$$

cuja integração é feita sobre todo o espaço e em intervalo de tempo fixo. Pela variação infinitesimal no campo  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ , a ação varia também, mas pelo princípio da mínima ação

<sup>7</sup> Do inglês *light-shining-through-wall*, traduzido livremente como “luz brilhando através da parede”.

essa variação se anula, o que resulta em:

$$\delta S = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \partial_\mu \phi \right] d^4 x = 0, \quad (9)$$

ou, após manipulações simples,

$$\int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] d^4 x = 0. \quad (10)$$

Nos extremos da curva de  $\phi$  por  $x^\mu$ , tem-se  $\delta \phi = 0$ , de modo que após aplicar a lei de Gauss o termo de superfície se anula. Por fim, as equações de Euler-Lagrange para campos relativísticos, válidas para qualquer  $\delta \phi$ , são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (11)$$

As equações de Euler-Lagrange podem ser generalizadas para campos vetoriais de modo imediato:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0. \quad (12)$$

## 4.2. Lagrangiana do eletromagnetismo

O eletromagnetismo por si só já leva em conta a relatividade especial, pois intrinsecamente os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  se relacionam relativisticamente via transformações de Lorentz [37]. Pela relação de transformação das componentes, é possível identificar uma entidade tensorial que se transforma da seguinte forma:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (13)$$

sendo  $\Lambda_\alpha^\mu$  o tensor da transformação de Lorentz e  $F^{\alpha\beta}$  o tensor eletromagnético em unidades (SI)

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Entretanto, outra forma de reorganizar os termos no tensor e manter as mesmas transformações de Lorentz dos campos é dada por:

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

Basicamente, na troca de  $\frac{\vec{E}}{c} \mapsto \vec{B}$  e  $\vec{B} \mapsto -\frac{\vec{E}}{c}$  obtém-se o chamado tensor  $G^{\mu\nu}$ , dual de  $F^{\mu\nu}$ , sendo a relação entre ambos dada por:

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (16)$$

sendo  $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ , o símbolo de Levi-Civita.

Os campos podem ser expressos em termos de potenciais  $\vec{A}$  e  $\phi$ , da seguinte forma:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (18)$$

Assim como os campos, o tensor eletromagnético pode ser expresso em termos das derivadas do quadripotencial:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (19)$$

sendo  $A^\mu$  o quadripotencial elétrico e  $\partial^\mu$  o operador de derivação quadridimensional para o espaço-tempo plano:

$$A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z \right), \quad (20)$$

$$\partial^\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (21)$$

Daqui em diante, ao longo do trabalho e para fins de simplificação, será usado o sistema de unidades naturais, onde  $c = 1$  e  $\hbar = 1$ .

A lagrangiana para o campo eletromagnético em notação covariante, escrita em unidades naturais é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu J_\mu. \quad (22)$$

Utilizando as equações (12), temos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (23)$$

$J^\nu$  é chamado de quadricorrente e suas componentes são:

$$J^\nu = (\rho, J_x, J_y, J_z), \quad (24)$$

sendo  $\rho$  a densidade de cargas e  $J^i$  a densidade de corrente. Ao expandir os termos de (23), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (26)$$

que são as duas equações de Maxwell não-homogêneas. As outras duas equações podem ser obtidas pelo tensor dual (16). Ao aplicar  $\partial_\mu$  no tensor dual  $G^{\mu\nu}$ , obtém-se:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (27)$$

sendo essa equação tensorial correspondente às equações de Maxwell homogêneas,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (28)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (29)$$

Outra forma de obter as equações homogêneas é pela identidade de Bianchi [37], que pode ser obtida a partir de (27):

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (30)$$

### 4.3. Transformação de calibre

Podemos expressar as equações de Maxwell não-homogêneas em termos dos potenciais  $\vec{A}$  e  $\phi$  usando (17) e (18), o que resulta em:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = -\rho, \quad (31)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = -\vec{J}. \quad (32)$$

Para os potenciais  $\vec{A}$  e  $\phi$  é possível impor condições extras, contanto que não alteremos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , pois  $\vec{A}$  e  $\phi$  não possuem realidade física.

Para verificar que é possível mudar os potenciais sem mudar os campos, vejamos a seguinte transformação:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} - \vec{\nabla} \lambda, \quad (33)$$

$$\phi \mapsto \phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (34)$$

Para o campo magnético, temos

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \lambda) = \vec{B} \quad (35)$$

e, para o campo elétrico, temos

$$\vec{E}' = \nabla \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \nabla \left( \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial (\vec{A} + \nabla \lambda)}{\partial t} = \vec{E} + \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \nabla \lambda}{\partial t} = \vec{E}. \quad (36)$$

Portanto, podemos fazer essa mudança nos potenciais escolhendo qualquer função escalar  $\lambda$ , desde que não altere  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Essas mudanças nos potenciais são chamadas de transformação de calibre, e dizemos que os potenciais possuem uma liberdade de calibre.

Essas transformações de calibre podem ser feitas para eliminar  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  ou  $\frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ , simplificando (31) e (32) no processo. Em particular, se escolhermos um  $\vec{A}$  tal que  $\frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , então conseguimos obter:

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho, \quad (37)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{J}. \quad (38)$$

Em notação covariante:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu. \quad (39)$$

Essas são as equações de ondas com fontes para os potenciais. No caso onde não há cargas ou correntes, fica:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0. \quad (40)$$

A mudança em  $A^\mu$  que satisfaça  $\frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  é chamada de calibre de Lorenz. Ao longo do trabalho, utilizaremos apenas o calibre de Lorenz.

#### 4.4. Lagrangiana do modelo com fóton e o fóton escuro

Apesar de estarmos considerando uma teoria clássica de campos (o eletromagnetismo), estaremos estudando o campo eletromagnético, cuja quantização dá origem a noção de fótons, e o que seria um “campo eletromagnético escuro”, cuja quantização traria o fóton escuro. Por simplicidade de escrita, utilizaremos os termos fóton e fóton escuro ao falarmos dos respectivos campos mas os abordaremos de maneira clássica.

O fóton escuro, bem como sua interação com o fóton, é modelado pela seguinte lagrangiana quando assumimos a ausência de fontes materiais ( $J^\mu = 0$ ):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \chi F^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\mu, \quad (41)$$

sendo  $\chi$  a constante de acoplamento cinético e  $m_{\gamma'}^2$ , a massa do fóton escuro. Pela forma da lagrangiana, entende-se que  $F^{\mu\nu}$  está associado ao fóton e que  $F'_{\mu\nu}$  está associado ao fóton escuro.

Devido ao chamado acoplamento cinético entre  $F^{\mu\nu}$  e  $F'_{\mu\nu}$ , não é imediata a interpretação direta de tais campos como fóton ou fóton escuro. Logo, para poder analisar o comportamento

das ondas individualmente, é necessário eliminar  $\frac{1}{2}\chi F^{\mu\nu} F'_{\mu\nu}$ , o que pode ser feito de diferentes formas [24]. Em particular, será usada neste trabalho a seguinte redefinição de campos:

$$A'^{\mu} \rightarrow A'^{\mu} + \chi A^{\mu}. \quad (42)$$

Ao inserir essa redefinição na equação (41), as equações são desacopladas e temos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 \left( A'^{\mu}A'_{\mu} + 2\chi A'^{\mu}A_{\mu} + \chi^2 A^{\mu}A_{\mu} \right). \quad (43)$$

Em particular, desde o início o termo  $\frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 A'^{\mu}A'_{\mu}$  é o que torna o fóton escuro massivo e, conseqüentemente, remove a simetria de calibre do “eletromagnetismo escuro”. Além disso, devido a  $\frac{1}{2}\chi^2 m_{\gamma'}^2 A^{\mu}A_{\mu}$ , o próprio fóton passa a se comportar de modo massivo, mas ainda conservando a simetria de calibre do eletromagnetismo. No entanto, o termo  $\chi m_{\gamma'}^2 A'^{\mu}A_{\mu}$  sugere a possibilidade de oscilação entre estados de fóton e fóton escuro, revelando que nenhuma das partículas está em um estado de massa bem definida.

Pela utilização das equações de Euler-Lagrange (12), obtemos as equações de Maxwell não-homogêneas para o fóton:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} + \chi^2 m_{\gamma'}^2 A^{\nu} = -\chi m_{\gamma'}^2 A'^{\nu}. \quad (44)$$

Vemos que o fóton escuro, no lado direito da equação, agora serve de fonte para o fóton. Escrever  $F^{\mu\nu}$  em termos de  $A^{\mu}$  fornece a equação de onda do fóton em termos dos potenciais:

$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + \chi^2 m_{\gamma'}^2)A^{\nu} = -\chi m_{\gamma'}^2 A'^{\nu}. \quad (45)$$

Tomando agora  $A'^{\mu}$  como campo de interesse, das equações de Euler-Lagrange obtêm-se o análogo das equações de Maxwell não-homogêneas para o fóton escuro:

$$\partial_{\mu}F'^{\mu\nu} + m_{\gamma'}^2 A'^{\nu} = -\chi m_{\gamma'}^2 A^{\nu}. \quad (46)$$

Agora vemos que o fóton, no lado direito, atua como fonte para o fóton escuro. Queremos reescrever essa equação em termos dos potenciais do fóton escuro. Primeiro, aplicamos  $\partial_{\nu}$  em (46), obtendo:

$$\partial_{\nu}\partial_{\mu}F'^{\mu\nu} + m_{\gamma'}^2\partial_{\nu}A'^{\nu} = -\chi m_{\gamma'}^2\partial_{\nu}A^{\nu}. \quad (47)$$

Nesta equação temos a contração entre o tensor simétrico  $\partial_{\nu}\partial_{\mu}$  com o antissimétrico  $F'^{\mu\nu}$ , a qual é nula. O termo  $\chi m_{\gamma'}^2\partial_{\nu}A^{\nu}$ , conforme abordado na última seção, é nulo, pois estamos usando o calibre de Lorenz para o fóton. A equação (47) fica:

$$m_{\gamma'}^2\partial_{\nu}A'^{\nu} = 0. \quad (48)$$

Logo, esta é a condição a qual os potenciais do fóton escuro devem obedecer de forma a manter a equação (46) consistente. Finalmente, utilizando (48) em (46), temos a equação de onda para o potencial do fóton escuro:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_{\gamma'}^2) A^{\nu} = -\chi m_{\gamma'}^2 A^\nu. \quad (49)$$

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nessa seção apresentamos os resultados do nosso estudo a respeito dos fenômenos envolvidos na interação entre o fóton e o fóton escuro no contexto da propagação no interior de guias de onda. Um guia de ondas é uma estrutura que pode ter diversos formatos e cuja função é guiar ondas de um ponto a outro, sejam elas eletromagnéticas ou sonoras, dependendo do guia.

Esquemáticamente, consideraremos dois guias metálicos paralelos um ao outro, como na Figura 3. Em um dos guias são introduzidas ondas eletromagnéticas harmônicas que estarão sob condições de contorno impostas pelo guia. O esperado é que neste guia alguns fótons convertam-se em fótons escuros e o atravessem; logo após, se reconvertam em fótons normais no segundo guia. Então, em uma situação experimental, caso fossem detectadas ondas eletromagnéticas no segundo guia, haveria uma evidência da conversão de fótons escuros em fótons.

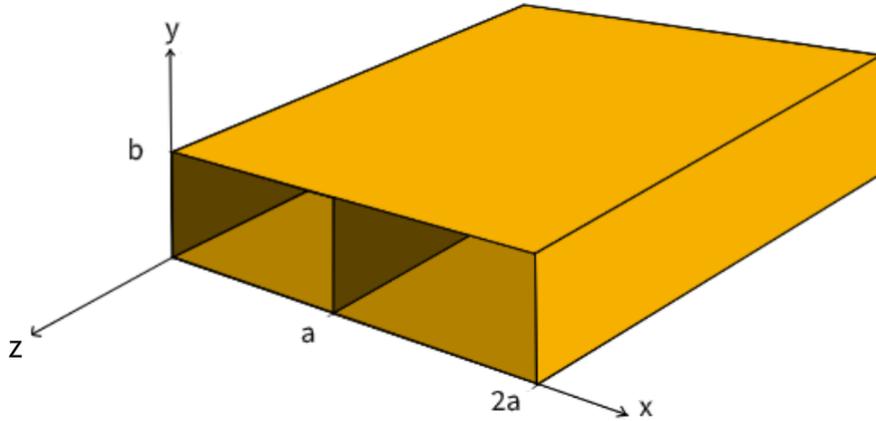


Figura 3: Guia de ondas retangular.

### 5.1. Guia de ondas retangular

Para o estudo da dinâmica envolvendo o fóton e o fóton escuro, consideramos um guia de ondas retangular duplo nesta seção, como mostra a Figura 3. O guia de ondas possui dimensões:

$x$  se estendendo de 0 até  $2a$ , com largura  $a$  para cada guia;  $y$  se estendendo de 0 até  $b$ ; e  $z$  se estendendo de  $-\infty$  até  $\infty$ .

O guia de ondas utilizado é considerado um condutor perfeito, de forma que as componentes  $\vec{E}_{\parallel}$  paralelas às paredes e as componentes  $\vec{B}_{\perp}$  perpendiculares às paredes serão nulas nas paredes internas do guia. Logo, as condições de contorno que o campo eletromagnético deve satisfazer são:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\parallel}(0, y, z, t) &= 0 \\ \vec{E}_{\parallel}(a, y, z, t) &= 0 \\ \vec{E}_{\parallel}(2a, y, z, t) &= 0 \\ \vec{E}_{\parallel}(x, 0, z, t) &= 0 \\ \vec{E}_{\parallel}(x, b, z, t) &= 0 \\ \vec{B}_{\perp}(0, y, z, t) &= 0 \\ \vec{B}_{\perp}(a, y, z, t) &= 0 \\ \vec{B}_{\perp}(2a, y, z, t) &= 0 \\ \vec{B}_{\perp}(x, 0, z, t) &= 0 \\ \vec{B}_{\perp}(x, b, z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Da mesma forma, para os potenciais:

$$\left. \begin{aligned} A^{\mu}(0, y, z, t) &= 0 \\ A^{\mu}(a, y, z, t) &= 0 \\ A^{\mu}(2a, y, z, t) &= 0 \\ A^{\mu}(x, 0, z, t) &= 0 \\ A^{\mu}(x, b, z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Em um dos guias são introduzidas ondas eletromagnéticas por uma fonte harmônica com um fator de qualidade infinito — isto é, não consideraremos perdas dissipativas. Processo esquematizado pela Figura 4. Nessa figura, o gerador de ondas está representado pelo paralelepípedo cinza e está posicionado no primeiro guia. Como o efeito a ser analisado é a conversão dos fótons escuros em fótons, usou-se a representação de círculos rosas para o fóton, ao invés de ondas.

Alguns fótons se convertem em fótons escuros no primeiro guia, atravessando suas paredes em direção ao segundo guia. No segundo guia, alguns desses fótons escuros são convertidos de volta em fótons. Este processo está ilustrado na Figura 5. A seta rosa na figura representa o fóton escuro atravessando as paredes do guia e a branca representa a conversão entre fóton e fóton escuro. O fóton escuro está representado pelo círculo cinza e o fóton pelo círculo rosa.

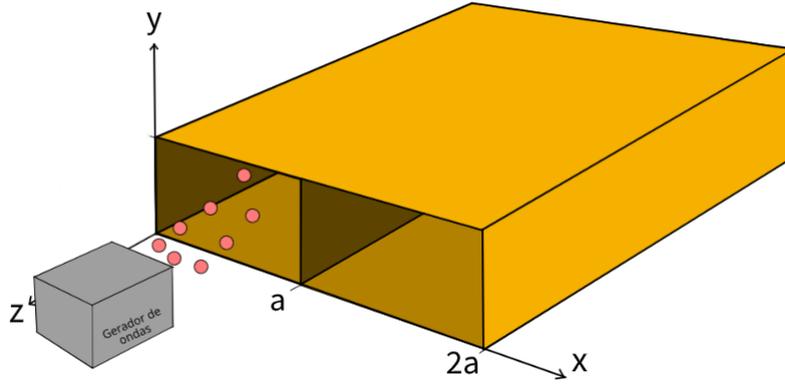


Figura 4: Gerador de ondas emitindo fótons, representados pelas bolinhas rosas, no interior do guia de ondas da esquerda.

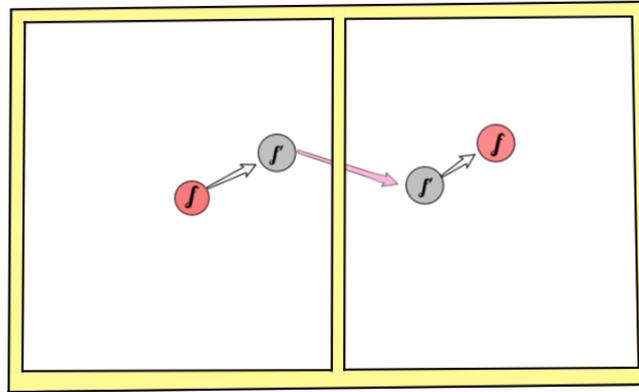


Figura 5: Conversão do fóton em fóton escuro.

## 5.2. Análise da onda eletromagnética incidente no primeiro guia

O primeiro passo, então, é encontrar as soluções para a onda incidida no primeiro guia. Após isso, encontrar a solução para o fóton escuro e, por fim, a solução para o fóton convertido a partir do fóton escuro no segundo guia. Inicia-se pela análise da lagrangiana completa da dinâmica do fóton e do fóton escuro, dada por (41).

No primeiro guia, incidem ondas eletromagnéticas por uma fonte externa e desconsideramos a contribuição do fóton escuro. Logo, em (45), temos:

$$\left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \chi^2 m_{\gamma'}^2 \right) A_{(1)}^\mu = 0, \quad (52)$$

onde adicionamos o subscrito (1) para enfatizar que esse é o potencial da onda eletromagnética no primeiro guia. A solução para (52) que respeita as condições de contorno (51) é dada por:

$$A_{(1)}^\mu = A_0^\mu \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (53)$$

Nessa expressão, temos que a relação de dispersão é satisfeita por:

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \chi^2 m_{\gamma'}^2, \quad (54)$$

Na qual

$$k_x = \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

$$k_y = \frac{m\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (56)$$

Além disso,  $a$  é a largura do primeiro guia e  $b$  é sua altura. O termo  $e^{i(k_z z - \omega t)}$  representa a propagação em  $z$ , e o termo constante  $A_0^\mu = (\phi_0, A_{0x}, A_{0y}, A_{0z})$  representa a amplitude inicial de cada componente de  $A_{(1)}^\mu$ .

### 5.3. Potência inserida no primeiro guia

Com as soluções para os potenciais, podemos calcular os campos elétrico e magnético das ondas eletromagnéticas e, então, determinar a potência inserida no primeiro guia. Ressaltamos que, em um guia de ondas qualquer, as ondas eletromagnéticas se propagam em dois modos linearmente independentes [37]: o modo transversal elétrico (TE), onde  $E_z = 0$ , e o modo transversal magnético (TM), onde  $B_z = 0$ . A seguir, consideramos os dois casos separadamente.

#### 5.3.1. Modo TE

Para o modo TE, temos:

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0. \quad (57)$$

Uma escolha possível para satisfazer (57) é utilizar a liberdade de calibre para ajustar  $A_z = 0$  e  $\phi = 0$ . Com isso, utilizando as equações (17) e (18), obtemos para o campo elétrico:

$$\vec{E}(x, y, z) = -i\omega (A_{0x}\hat{x} + A_{0y}\hat{y}) \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (58)$$

O campo magnético é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{B} = & i(A_{0y}\hat{x} - A_{0x}\hat{y}) k_z \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ & + A_{0x} k_y \hat{z} \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ & - A_{0y} k_x \hat{z} \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (59)$$

Com esses campos, pode-se determinar o vetor de Poynting e a potência da onda eletromagnética produzida no primeiro guia.

A potência de uma onda eletromagnética confinada em um guia de ondas retangular é dada por:

$$P = \int_0^a \int_0^b \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} dx dy, \quad (60)$$

sendo  $P$  a potência,  $\langle \vec{S} \rangle$  a média temporal do vetor de Poynting, e  $\hat{n}$  o versor correspondente ao elemento de área ( $dA = dx dy$ ), que neste caso será  $\hat{z}$ . De forma efetiva, só necessitamos calcular  $\langle S_z \rangle$ .

O vetor de Poynting para uma onda descrita no formalismo complexo é dado por:

$$\vec{S} = \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*), \quad (61)$$

ou seja, a parte real do produto vetorial entre o campo elétrico  $\vec{E}$  e o complexo conjugado do campo magnético  $\vec{B}^*$ . Explicitamente:

$$\vec{S} = S_x \hat{x} + S_y \hat{y} + S_z \hat{z} = \text{Re}(E_y B_z^* - E_z B_y^*) \hat{x} + \text{Re}(-E_x B_z^* + E_z B_x^*) \hat{y} + \text{Re}(E_x B_y^* - E_y B_x^*) \hat{z}. \quad (62)$$

Para o modo TE, a componente  $S_z$  fica:

$$S_z = \omega k_z [(A_{0y})^2 - (A_{0x})^2] \text{sen}^2(k_x x) \text{sen}^2(k_y y), \quad (63)$$

que será igual à sua média temporal, ou seja,  $S_z = \langle S_z \rangle$ .

Por meio de (63), podemos agora expressar a potência (60) para as ondas eletromagnéticas no modo transversal elétrico (TE).

$$P_{\text{ins.}} = \omega k_z \int_0^a \int_0^b [(A_{0y})^2 - (A_{0x})^2] \text{sen}^2(k_x x) \text{sen}^2(k_y y) dx dy. \quad (64)$$

Em que  $P_{\text{ins.}}$  é a potência das ondas eletromagnéticas inserida no primeiro guia de ondas. Como  $(A_{0y})^2 - (A_{0x})^2$  é constante, já que não há atenuação no sistema, podemos resolver (64) facilmente. O resultado é:

$$P_{\text{ins.}} = \frac{\omega k_z ab (A_{0y}^2 - A_{0x}^2)}{4}. \quad (65)$$

### 5.3.2. Modo TM

Para o modo TM a componente  $B_z$  do campo magnético deve ser nula, logo:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0. \quad (66)$$

Podemos utilizar a liberdade de calibre para ajustar  $A_x = A_y = 0$ , de forma a satisfazer (66). O campo elétrico no modo transversal magnético é:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \phi_0 k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \hat{x} \\ &+ \phi_0 k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \hat{y} \\ &+ i(-k_z \phi_0 + \omega A_{0z}) \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \hat{z}.\end{aligned}\quad (67)$$

O campo magnético no modo transversal magnético é dado por:

$$\vec{B}(y, z) = A_{0z} \left[ -k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \hat{x} + k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \hat{y} \right]. \quad (68)$$

Similarmente ao que foi feito em (63), a componente  $z$  do vetor de Poynting para o modo TM é:

$$S_z = \langle S_z \rangle = \phi_0 A_{0z} \left[ k_x^2 \cos^2(k_x x) \sin^2(k_y y) + k_y^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \right]. \quad (69)$$

Com isso, a potência para o modo TM será:

$$P_{\text{ins.}} = \int_0^a \int_0^b \phi_0 A_{0z} \left[ k_x^2 \cos^2(k_x x) \sin^2(k_y y) + k_y^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \right] dx dy. \quad (70)$$

Similar a (64), os termos  $\phi_0 A_{0z}$  são constantes, logo:

$$P_{\text{ins.}} = \frac{\phi_0 A_{0z} a b (k_x^2 + k_y^2)}{4}. \quad (71)$$

#### 5.4. Análise do fóton escuro produzido no primeiro guia

Como suposição básica, propõe-se que o momento do fóton escuro convertido a partir do fóton seja grande em comparação com sua massa  $m_{\gamma'}$  para que, no caso de propagação livre, tenha-se:

$$\omega' = E' = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + m_{\gamma'}^2} \approx |\vec{p}'| \approx |\vec{p}| = E = \omega, \quad (72)$$

onde usamos  $E' = \hbar\omega'$  e a relação de de Broglie,  $|\vec{p}'| = \frac{\hbar}{\lambda'}$ , mas no sistema de unidades naturais ( $c = 1$  e  $\hbar = 1$ ). Portanto, pela conservação da energia e do momento linear, o fóton e o fóton escuro deverão ter a mesma frequência. Essa aproximação atesta que o momento linear deve ser aproximadamente conservado sempre que a aproximação  $p' \gg m_{\gamma'}$  for boa, isto é, em situações onde a energia cinética do fóton escuro é muito maior que sua energia de repouso.<sup>8</sup> Isso implica

<sup>8</sup> Porém, se considerarmos o caso real, aparentemente, não há conservação do momento ou da energia. Entretanto, conforme discutido em [38], a oscilação do fóton em fóton escuro é um fenômeno quântico mediado pela interação do fóton com a matéria e da matéria com o fóton escuro. É a troca de momento e energia com a matéria que garante que o fenômeno de oscilação entre fóton e fóton escuro respeita a lei de conservação do momento e energia.

que a nossa análise vale para valores de massa do fóton escuro suficientemente pequenos em comparação com a frequência da onda eletromagnética inserida no primeiro guia:

$$m_{\gamma'} \ll \omega. \quad (73)$$

A versão dessa aproximação no contexto confinado do guia de onda é discutida no final desta seção.

Com esta suposição e solução do fóton no primeiro guia, o próximo passo é analisar o fóton escuro produzido no primeiro guia. O fóton escuro tem seu potencial determinado por (49):

$$\left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_{\gamma'}^2 \right) A'^{\mu} = \chi m_{\gamma'}^2 A_{(1)}^{\mu}. \quad (74)$$

Utilizando a solução (53) para  $A_{(1)}^{\mu}$  na equação acima, temos

$$\left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_{\gamma'}^2 \right) A'^{\mu} = \chi m_{\gamma'}^2 A_0^{\mu} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (75)$$

Propõe-se uma solução para esta equação do tipo

$$A'^{\mu} = \chi m_{\gamma'}^2 A_0^{\mu} F'(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (76)$$

de forma que o fóton escuro possua a mesma frequência que o fóton e amplitude inicial atenuada pelo fator  $\chi m_{\gamma'}^2 \ll 1$  em comparação com a do fóton.

Substituindo (76) em (75), temos:

$$\left( \nabla_{\perp}^2 - k_z^2 - m_{\gamma'}^2 + \omega^2 \right) \chi m_{\gamma'}^2 A_0^{\mu} F'(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)} = \chi m_{\gamma'}^2 A_0^{\mu} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (77)$$

Simplificando,

$$\left( \nabla_{\perp}^2 + \kappa^2 \right) F'(x, y) = \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y). \quad (78)$$

O termo  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  é o laplaciano nas coordenadas transversas ao eixo do guia de onda e

$$\kappa^2 = \omega^2 - k_z^2 - m_{\gamma'}^2. \quad (79)$$

A equação (78) se divide em duas quando consideramos que o fóton escuro também penetra no segundo guia e qualquer região fora do primeiro guia, uma vez que seu campo não recebe condições de contorno como (51) que o confinam no primeiro guia. Uma vez que fora do primeiro guia não há, inicialmente, ondas eletromagnéticas, temos:

$$\left( \nabla_{\perp}^2 + \kappa^2 \right) F'(x, y) = \begin{cases} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y), & 0 \leq x \leq a \text{ e } 0 \leq y \leq b, \\ 0, & x \geq a \text{ e } y \geq b. \end{cases} \quad (80)$$

As soluções para (80) serão:

$$F' = \begin{cases} \frac{1}{\kappa^2 - k_x^2 - k_y^2} \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_x x), & 0 \leq x \leq a \text{ e } 0 \leq y \leq b, \\ [\alpha_1 \text{sen}(k'_x x) + \alpha_2 \cos(k'_x x)] [\alpha_3 \text{sen}(k'_y y) + \alpha_4 \cos(k'_y y)], & x \geq a \text{ e } y \geq b. \end{cases} \quad (81)$$

Em (81) na região  $x \geq a$  e  $y \geq b$  temos uma solução proveniente do método de separação das variáveis, onde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$  são constantes a determinar e  $k'_x$  e  $k'_y$  são as componentes do vetor de onda do fóton escuro nas regiões externas ao primeiro guia. Ao impormos a continuidade das soluções e das derivadas em (81) nos pontos  $x = 0, x = a, y = 0$  e  $y = b$ , obtemos as condições  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$  e  $k'_x = k_x$  e  $k'_y = k_y$ , ou seja, os vetores de onda do fóton e do fóton escuro devem ser iguais e dados por (55) e (56). Também encontramos  $\alpha_1 \alpha_3 = 1/(\kappa^2 - k_x^2 - k_y^2)$ . Logo,  $F'$  é o mesmo tanto dentro quanto fora do primeiro guia.

Portanto, a solução (76) para o quadripotencial do fóton escuro fica:

$$A'^{\mu} = \frac{\chi m_{\gamma'}^2}{\kappa^2 - k_x^2 - k_y^2} A_0^{\mu} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (82)$$

Utilizando a definição (79) para  $\kappa$  e, sem seguida, a relação de dispersão do fóton (54), podemos simplificar a expressão acima ao identificar:

$$\begin{aligned} \kappa^2 - k_x^2 - k_y^2 &= (\omega^2 - k_z^2 - m_{\gamma'}^2) - k_x^2 - k_y^2 \\ &= (\omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) - m_{\gamma'}^2 \\ &= \chi^2 m_{\gamma'}^2 - m_{\gamma'}^2 \\ &= (\chi^2 - 1) m_{\gamma'}^2. \end{aligned} \quad (83)$$

Desta forma, (82) fica:

$$A'^{\mu} = \frac{\chi}{\chi^2 - 1} A_0^{\mu} \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (84)$$

Essa solução vale tanto dentro do primeiro guia como fora dele, como era de se esperar, uma vez que o fóton escuro não fica confinado no primeiro guia. Em particular, usaremos essa solução para o segundo guia na próxima seção.

Para conferência, podemos aplicar a solução (82) para  $A'^{\mu}$  na sua equação diferencial (75) e, inclusive, obter a relação de dispersão do fóton escuro:

- Para a solução de (75) correspondente ao intervalo  $0 \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ :

$$\left( \omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - m_{\gamma'}^2 \right) \frac{\chi}{\chi^2 - 1} = \chi m_{\gamma'}^2. \quad (85)$$

Logo, de (83) vemos que (85) é trivialmente satisfeita.

- Para a solução de (75) correspondente ao intervalo  $x \geq a$  e  $y \geq b$ :

$$\omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 - m_{\gamma'}^2 = 0. \quad (86)$$

Esta é a relação de dispersão do fóton escuro.

Desta forma, comparando as equações (85) e (86), temos que a consistência mútua exige que  $m_{\gamma'}^2$  e  $\chi m_{\gamma'}^2$  seja muito menor que  $\omega^2$  e  $\vec{k}^2$ , o que é verdade no geral considerando os limites experimentais em  $\chi$  ilustrados na Figura 2. Fora isso, estamos assumindo que o fóton e o fóton escuro propagam-se com a mesma frequência, o que impõe que ambos têm a mesma relação de dispersão, de modo que a consistência entre (54) e (86) exige que

$$(m_{\gamma'}^2 \text{ e } \chi m_{\gamma'}^2) \ll (\omega^2 \text{ e } \vec{k}^2). \quad (87)$$

Essas considerações são consistentes com a aproximação  $\omega_{\text{fóton}} \approx \omega_{\text{fóton escuro}}$ , discutida no início desta seção, para levar em conta a conservação da energia e momento linear na conversão entre fóton e fóton escuro.

### 5.5. Análise da onda eletromagnética transmitida ao segundo guia

O próximo passo consiste em encontrar a equação para a onda eletromagnética convertida a partir dos fótons escuros que chegam ao segundo guia ( $a \leq x \leq 2a$ ).

A equação para o quadripotencial no segundo guia é dada por (45):

$$(\nabla^2 - \partial_t^2 - \chi^2 m_{\gamma'}^2) A_{(2)}^\mu = \chi m_{\gamma'}^2 A'^\mu, \quad (88)$$

ou, usando (84) para  $A'^\mu$ ,

$$(\nabla^2 - \partial_t^2 - \chi^2 m_{\gamma'}^2) A_{(2)}^\mu = \frac{\chi^2 m_{\gamma'}^2}{(\chi^2 - 1)} A_0^\mu \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (89)$$

Agora, para o potencial do fóton no segundo guia, propõe-se a solução

$$A_{(2)}^\mu = \frac{\chi^2 m_{\gamma'}^2}{(\chi^2 - 1)} A_0^\mu \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) a(t) e^{ik_z z}, \quad (90)$$

Aplicando em (89), temos :

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) a(t) = -e^{-i\omega t}, \quad (91)$$

em que  $\omega_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \chi^2 m_{\gamma'}^2$ , é a frequência que satisfaz a relação de dispersão do fóton (54) e é a frequência do fóton escuro que se converte em fóton.

Introduziremos agora um termo de dissipação em (91) para levar em conta a possível perda de energia promovida pela conversão do fóton escuro em fóton:

$$\left(\partial_t^2 - \frac{\omega_0}{Q}\partial_t + \omega_0^2\right)a(t) = -e^{-i\omega t}, \quad (92)$$

sendo  $Q$  o fator de qualidade do sistema. Em um cenário ideal, em que não há dissipações, o fator de qualidade é infinito, de forma que (92) torna-se igual a (91). Para a solução de (92), temos:

$$a(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega^2 - i\frac{\omega_0\omega}{Q} - \omega_0^2)}, \quad (93)$$

Com isso, conseguimos obter a solução para o fóton no segundo guia de ondas:

$$A_{(2)}^\mu = \frac{\chi^2 m_{\gamma'}^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0\omega}{Q})(\chi^2 - 1)} A_0^\mu \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (94)$$

ou, levando em conta os limites experimentais sobre  $\chi$  na Figura 2 para tomar  $\chi^2 - 1 \approx 1$ ,

$$A_{(2)}^\mu = -\frac{\chi^2 m_{\gamma'}^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0\omega}{Q}} A_0^\mu \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (95)$$

## 5.6. Potência transmitida no segundo guia

### 5.6.1. Modo TE

Notamos que, a menos do fator multiplicativo

$$-\frac{\chi^2 m_{\gamma'}^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0\omega}{Q}}, \quad (96)$$

a solução (95) para o fóton no segundo guia é a mesma que a solução (53) para o fóton no primeiro guia. Logo, a expressão para a potência no modo transversal elétrico (TE) transmitida ao segundo guia de ondas será como a expressão (64) para a potência inserida no primeiro guia, mas incluindo o módulo quadrado do fator multiplicativo:

$$P_{\text{transm.}} = \frac{\chi^4 m_{\gamma'}^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}} \omega k_z \int_a^{2a} \int_0^b \left[ (A_{0y})^2 - (A_{0x})^2 \right] \text{sen}^2(k_x x) \text{sen}^2(k_y y) dx dy. \quad (97)$$

Em que  $P_{\text{transm.}}$  é a potência transmitida no segundo guia de ondas. Resolvendo a integral, temos:

$$P_{\text{transm.}} = \frac{\chi^4 m_{\gamma'}^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}} \frac{\omega k_z ab (A_{0y}^2 - A_{0x}^2)}{4}. \quad (98)$$

### 5.6.2. Modo TM

A potência para o modo transversal magnético (TM) transmitida ao segundo guia será como a inserida no primeiro guia dada em (70), mas incluindo o módulo quadrado do mesmo fator multiplicativo discutido no caso anterior:

$$P_{\text{transm.}} = \frac{\chi^4 m_{\gamma'}^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}} \int_a^{2a} \int_0^b \phi_0 A_{0z} [k_x^2 \cos^2(k_x x) \sin^2(k_y y) + k_y^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y)] dx dy. \quad (99)$$

Logo:

$$P_{\text{transm.}} = \frac{\chi^4 m_{\gamma'}^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}} \frac{\phi_0 A_{0z} ab(k_x^2 + k_y^2)}{4}. \quad (100)$$

### 5.6.3. Sensibilidade aos parâmetros associados ao fóton escuro

Desta forma, podemos relacionar a potência inserida no primeiro guia com a potência transmitida no segundo guia. Para ambos os modos (TE e TM), a razão entre a potência inserida e transmitida será:

$$\frac{P_{\text{transm.}}}{P_{\text{ins.}}} = \frac{\chi^4 m_{\gamma'}^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}}. \quad (101)$$

Como tomamos inicialmente a frequência do fóton e do fóton escuro como sendo aproximadamente iguais — veja a discussão junto à equação (72) — podemos escrever  $\omega \approx \omega_0$ . Desta forma, a expressão (101) simplifica para:

$$\frac{P_{\text{transm.}}}{P_{\text{ins.}}} = \frac{Q^2 \chi^4 m_{\gamma'}^4}{\omega_0^4}. \quad (102)$$

Levando em conta parâmetros realistas para os guias de ondas, consideraremos o fator de qualidade  $Q = 10.000$  e usamos  $P_{\text{ins.}} \sim 10^4 \text{ W}$  para a potência inserida e  $P_{\text{transm.}} \sim 10^{-15} \text{ W}$  para a sensibilidade de detecção da potência transmitida. Sendo assim, podemos avaliar valores para a frequência da onda admitida pelo primeiro guia, estimar a massa do fóton escuro que pode ser acessada pela nossa análise e obter a correspondente estimativa para  $\chi$ .

Por meio da hipótese (87), nós assumimos que  $m_{\gamma'} \ll \omega_0$ . Propomos quantificar essa hipótese de modo a estabelecer para quais valores da massa do fóton escuro nossa análise se aplica:

$$m_{\gamma'} \sim 10^{-2-n} \omega_0, \quad (103)$$

onde  $n \geq 0$ . Assim, a equação (102) fornece a seguinte estimativa sobre a constante de acoplamento cinético:

$$\chi \sim 10^{-5+n}. \quad (104)$$

Claramente, a maior sensibilidade ao parâmetro  $\chi$  é para o caso do seu valor ser tão pequeno quanto  $10^{-5}$ , de modo que  $m_{\gamma'} \sim 10^{-2}\omega_0$ . Tomando  $n = 0$ , então a região de sensibilidade para fótons escuros de diferentes massas é determinada pela frequência  $\omega_0$  admitida pelo guia. Para o guia WR-2300 [39], frequências da ordem  $\omega_0 = 0,2 \text{ GHz} \approx 1,4 \times 10^{-7} \text{ eV}$  são admitidas, de modo que experimentos com tais guias são sensíveis a fótons escuros com massa da ordem  $m_{\gamma'} \sim 10^{-9} \text{ eV}$ . Para o guia WR-1 [40], consideraremos o valor  $\omega_0 = 1.100 \text{ GHz} \approx 0,8 \times 10^{-3} \text{ eV}$ , de modo que a sensibilidade é para fótons escuros com  $m_{\gamma'} \sim 10^{-5} \text{ eV}$ .

### 5.7. Discussão

Ao comparar os valores obtidos para a massa e a constante de acoplamento com o espaço de parâmetros do fóton escuro que já foram explorados experimentalmente (Figura 2), constatamos que as regiões sensíveis à nossa análise ( $m_{\gamma'} \sim 10^{-9}-10^{-5} \text{ eV}$  e  $\chi \sim 10^{-5}$ ) estão excluídas experimentalmente. Inicialmente, nosso intuito não foi necessariamente acessar regiões inexploradas do espaço de parâmetros, mas sim estabelecer uma relação matemática que correlacionasse os parâmetros do fóton escuro com grandezas experimentais mensuráveis. Nesse contexto, evidencia-se que a exploração de regiões ainda inexploradas requer ajustes tanto na formulação teórica quanto nos parâmetros experimentais.

No âmbito teórico, uma abordagem possível consiste em revisar a restrição  $m_{\gamma'} \ll \omega_0$ . Essa modificação implicaria na alteração da igualdade apresentada na Equação (72), tendo em vista não desprezar a massa do fóton escuro frente à sua frequência na relação de dispersão. Ademais, é pertinente considerar os aspectos quânticos envolvidos na conversão do fóton em fóton escuro. Nesse processo, o fóton interage com a matéria, emitindo um fóton escuro que, ao interagir fracamente com a matéria, pode decair de volta em um fóton. Possivelmente, uma análise mais aprofundada deste mecanismo possibilitaria a inclusão de termos adicionais que aumentariam ou delimitariam a sensibilidade em relação ao parâmetro  $\chi$  de acoplamento entre fóton e fóton escuro.

Quanto aos parâmetros experimentais, observamos que tanto a massa do fóton escuro quanto a constante de acoplamento são proporcionais à razão entre a potência transmitida e a potência inserida e inversamente proporcional ao fator de qualidade  $Q$  do segundo guia. Guias de onda com fatores de qualidade mais elevados proporcionam, assim, maior sensibilidade na detecção

de  $\chi$ . Paralelamente, o incremento na potência inserida, no guia permite a identificação de sinais mais fracos e, juntamente com um aumento na sensibilidade de detecção de sinais transmitidos, melhoraria a relação (potência transmitida/potência inserida) e, conseqüentemente, aumentaria a sensibilidade em  $\chi$ .

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, realizamos um estudo teórico sobre o *fóton escuro* – uma partícula candidata à matéria escura – utilizando a mecânica lagrangiana para campos, no âmbito da teoria clássica de campos.

Para investigar o comportamento do fóton escuro em interação com o fóton, propusemos, como cenário hipotético, a incidência de ondas eletromagnéticas em guias de onda retangulares. Considerando que o fóton escuro interage fracamente com a matéria e pode se converter em fóton, supusemos que, em um dos guias, o fóton se converta em fóton escuro, o qual atravessaria as paredes e alcançaria um segundo guia. Neste segundo guia, o fóton escuro reconverteria em fóton. Assim, a detecção de um fóton no segundo guia configuraria uma possível evidência experimental de uma partícula até então não observada, candidata à matéria escura.

Para abordar o fóton escuro no primeiro guia, adotamos a aproximação de que as frequências do fóton ( $\omega_0$ ) e do fóton escuro ( $\omega$ ) são iguais para levar em conta a conservação da energia e do momento linear, o que vimos equivaler à hipótese  $m_\gamma \ll \omega$ . Com essa aproximação, simplificamos as equações e propusemos soluções para o campo (quadripotencial), tanto no interior quanto no exterior do primeiro guia. Ao impor a continuidade do quadripotencial e de suas derivadas nas interfaces, constatamos que a coerência das soluções exige que  $m_\gamma^2$ , e o produto  $\chi m_\gamma^2$ , sejam muito menores que  $\omega^2$  e  $\vec{k}^2$ , o que está de acordo com a aproximação adotada.

No segundo guia de ondas, propusemos um modelo que incorpora um fator dissipativo para levar em conta a perda de energia no processo de conversão fóton escuro-fóton, o que permitiu obter soluções analíticas para a potência do fóton produzido. A partir de parâmetros realistas para guias retangulares operando na faixa de gigahertz, estimamos limites para a massa do fóton escuro ( $m_\gamma \sim 10^{-9}-10^{-5}$  eV) e para a constante de acoplamento cinético ( $\chi \sim 10^{-5}$ ). Esses valores, embora consistentes com as aproximações do modelo e comparáveis em sensibilidade a outras técnicas de detecção mostradas na literatura, situam-se em regiões já excluídas por outros experimentos.

Embora a análise realizada, dentro dos limites e aproximações assumidos, tenha se mostrado

satisfatória, é evidente que para acessar as regiões inexploradas e estabelecer novas restrições sobre parâmetros do fóton escuro, ou mesmo para a detecção do fóton escuro, por meio do procedimento experimental estabelecido, torna-se necessária a realização de ajustes e refinamentos na nossa análise teórica e avanços experimentais.

Em síntese, este estudo contribuiu para a compreensão da dinâmica de conversão fóton-fóton escuro em sistemas confinados, explicitando os desafios e limitações entre modelos teóricos e implementações experimentais.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] K. Freese, “Dark matter in galaxies and clusters,” <<https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept17/Freese/Freese2.html>>.
- [2] R. Massey, T. Kitching, and J. Richard, “The dark matter of gravitational lensing,” *Rep. Prog. Phys.* **73**, 086901 (2010).
- [3] “Shining a light on dark matter,” (), <<https://science.nasa.gov/mission/hubble/science/science-highlights/shining-a-light-on-dark-matter>>.
- [4] M. Schumann, “Direct detection of WIMP dark matter: Concepts and status,” *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **46**, 103003 (2019).
- [5] “WIMPs – Weakly Interacting Massive Particles,” (), <<https://svs.gsfc.nasa.gov/10955>>.
- [6] E. Siegel, “The ‘WIMP miracle’ hope for dark matter is dead,” <<https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2019/02/22/the-wimp-miracle-is-dead-as-dark-matter-experiments-come-up-empty-again>>.
- [7] A. Del Popolo, “Cusp-core problem in cosmology,” <[http://www.cosmo-ufes.org/uploads/1/3/7/0/13701821/cusp\\_core1\\_cons.pdf](http://www.cosmo-ufes.org/uploads/1/3/7/0/13701821/cusp_core1_cons.pdf)>.
- [8] M. Schirber, “Dark matter as an intergalactic heat source,” <<https://physics.aps.org/articles/v15/180>>.
- [9] K. Jackson, “Dark photons could explain high-energy scattering data,” <<https://physicsworld.com/a/dark-photons-could-explain-high-energy-scattering-data/>>.
- [10] B. Holdom, “Two  $U(1)$ ’s and  $\epsilon$  charge shifts,” *Physics Letters B* **166** (1986).
- [11] C. Boehm and P. Fayet, “Scalar dark matter candidates,” *Nuclear Physics B* **683**, 219–263 (2004).
- [12] D. Carcamo, J. Gamboa, and M. Pino, “Higgs model coupled to dark photons,” *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1550030 (2015).
- [13] T. Ferber, A. Grohsjean, and F. Kahlhoefer, “Dark Higgs bosons at colliders,” *Prog. Part. Nucl.*

- Phys.* **136**, 104105 (2024).
- [14] J. Jaeckel and A. Ringwald, “A cavity experiment to search for hidden sector photons,” *Phys. Lett. B* **659**, 509 (2008).
- [15] M. Graham, C. Hearty, and M. Williams, “Searches for dark photons at accelerators,” *Annu. Rev. Nucl. Part. S.* **71**, 37–58 (2021).
- [16] M. Fabbrichesi, E. Gabrielli, and G. Lanfranchi, *The Physics of the Dark Photon: A Primer* (Springer, 2020).
- [17] “Using the Higgs boson to search for dark photons,” <<https://atlas.cern/Updates/Briefing/Higgs-Dark-Photon>>.
- [18] S. Adachi, R. Fujinaka, Y. Muto, *et al.* (DOSUE-RR Collaboration), “Search for dark photon dark matter in the mass range  $41 - 74 \mu\text{eV}$  using millimeter-wave receiver and radioshielding box,” *Phys. Rev. D* **109**, 012008 (2024).
- [19] T. Noumi, S. Sato, and J. Tokuda, “Phenomenological motivation for gravitational positivity bounds: A case study of dark sector physics,” *Phys. Rev. D* **108**, 056013 (2023).
- [20] S. Knapen, T. Lin, M. Pyle, and K. M. Zurek, “Detection of light dark matter with optical phonons in polar materials,” *Phys. Lett. B* **785**, 386 (2018).
- [21] “Plasmon,” <<https://www.chemeurope.com/en/encyclopedia/Plasmon.html>>.
- [22] H. An, M. Pospelov, and J. Pradler, “New stellar constraints on dark photons,” *Phys. Lett. B* **725**, 190 (2013).
- [23] R. Essig, J. A. Jaros, W. Wester, *et al.*, “Dark sectors and new, light, weakly-coupled particles,” [arXiv:1311.0029 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1311.0029) (2013).
- [24] J. Jaeckel, “A force beyond the standard model — status of the quest for hidden photons,” [arXiv:1303.1821 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1303.1821) (2013).
- [25] S. D. McDermott, H. H. Patel, and H. Ramani, “Dark photon decay beyond the Euler-Heisenberg limit,” *Phys. Rev. D* **97**, 073005 (2018).
- [26] M. Ackermann, M. Ajello, A. Albert, *et al.* (FERMI-LAT Collaboration), “Fermi LAT search for dark matter in gamma-ray lines and the inclusive photon spectrum,” *Phys. Rev. D* **86** (2012).
- [27] J. Chluba, B. Cyr, and M. C. Johnson, “Revisiting dark photon constraints from CMB spectral distortions,” [arXiv:2409.12115 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/2409.12115) (2024).
- [28] A. Aramburo-Garcia, K. Bondarenko, A. Boyarsky, *et al.*, “Dark photon constraints from CMB temperature anisotropies,” [arXiv:2405.05104 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/2405.05104) (2024).
- [29] S. Chakraborty, A. G., and M. Vanvlasselaer, “Anomaly induced cooling of neutron stars: A

- standard model contribution,” [arXiv:2306.15872 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2306.15872) (2024).
- [30] G. Alonso-Álvarez, F. Ertas, J. Jaeckel, F. Kahlhoefer, and L. J. Thormaehlen, “Hidden photon dark matter in the light of XENON1T and stellar cooling,” *J. Cosmol. Astropart. P.* **11**, 029 (2020).
- [31] D. Banerjee, V. Burtsev, D. Cooke, *et al.* (NA64 Collaboration), “Search for invisible decays of sub-gev dark photons in missing-energy events at the CERN SPS,” *Physical Review Letters* **118**, 011802 (2017).
- [32] O. Moreno, “First results from the Heavy Photon Search Experiment,” Conference presentation (UCLA Dark Matter 2018).
- [33] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II*, <[https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II\\_23.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_23.html)>.
- [34] A.D. Spector, “Light-shining-through-walls experiments,” in *The Search for Ultralight Bosonic Dark Matter*, edited by D. F. J. Kimball and K. van Bibber (Springer, 2023).
- [35] C. Contreras-Martinez, B. Giaccone, O. Melnychuk, A. Netepenko, Y. Pischalnikov, S. Posen, and V. Yakovlev, “PI Loop Resonance Control for Dark Photon Experiment at 2 K using a 2.6 GHz SRF Cavity,” [arXiv:2307.10433 \[physics.acc-ph\]](https://arxiv.org/abs/2307.10433) (2023).
- [36] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Livraria da Física, 2013).
- [37] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica* (Pearson, 2011).
- [38] A. Berlin, R. T. D’Agnolo, S. A. R. Ellis, and J. I. Radkovski, “Signals of millicharged dark matter in light-shining-through-wall experiments,” [arXiv:2305.05684 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2305.05684) (2023).
- [39] “WR2300 | WG0.0 | R3 - Rectangular Waveguide Size,” (), <<https://www.everythingrf.com/tech-resources/waveguides-sizes/wr2300>>.
- [40] “WR1 - Rectangular Waveguide Size ,” (), <<https://www.everythingrf.com/tech-resources/waveguides-sizes/wr1>>.