UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIEL SOUZA DE OLIVEIRA

Uma introdução a sistemas dinâmicos : uma abordagem pedagógica para o ensino básico

Ouro Preto
2025

GABRIEL SOUZA DE OLIVEIRA

Uma introdução a sistemas dinâmicos : uma abordagem pedagógica para o ensino básico

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática, Licenciatura da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciando em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalvez Ferreira

Ouro Preto
2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

O482i Oliveira, Gabriel Souza de.
Uma introdução a Sistemas Dinâmicos [manuscrito]: uma abordagem pedagógica para o Ensino Básico. / Gabriel Souza de Oliveira. - 2025.
41 f.: il.: color., gráf..

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática - Educação. 3. Sistemas dinâmicos. I. Ferreira, Geraldo César Gonçalves. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 517.938:373.5

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Gabriel Souza de Oliveira

Uma introdução a Sistemas Dinâmicos: uma abordagem pedagógica para o Ensino Básico

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática

Aprovada em 10 de abril de 2025

Membros da banca

Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Gil Fidelix de Souza - Universidade Federal de Ouro Preto
Gilberto de Oliveira Santana - Universidade Federal de Ouro Preto

Geraldo César Gonçalves Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 10/06/2025

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

Resumo

Neste trabalho serão introduzidas algumas noções elementares do estudo de sistemas dinâmicos, e será discutido como este tema pode ser introduzido para alunos do ensino básico. A presente monografia aborda os conceitos fundamentais sobre sistemas dinâmicos, abordando o tema de uma maneira didática, e discute como estes conceitos podem ser explorados e serem acessíveis a alunos da educação básica. Foram utilizados recursos como software gráfico para uma abordagem mais didática do conteúdo. Ao final do trabalho, é discutida e oferecida uma abordagem didática do conteúdo para uma turma ao final do ensino médio, por meio de uma iniciação científica por exemplo.

Abstract

This project introduces some elementary notions in the study of dynamical systems and discusses how this topic can be introduced to students in basic education. The present monograph addresses the fundamental concepts of dynamical systems, approaching the subject in a didactic way, and discusses how these concepts can be explored and made accessible to basic education students. Graphic software resources were used to provide a more didactic approach to the content. At the end of this project, a didactic approach to the content is discussed and proposed for a class at the end of high school, through a scientific initiation, for example.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos é uma área de grande importância para o mundo hoje. As aplicações deste tema são diversas, podendo auxiliar no estudo de economia, de previsões climáticas, ou até mesmo no estudo e análise de redes sociais. Os sistemas dinâmicos descrevem fenômenos que evoluem ao longo do tempo, e podem mostrar padrões complexos de fenômenos, como auxiliar em uma análise mais aprofundada em dados sobre um crescimento populacional, por exemplo.

No ensino básico, a introdução à esse tema oferece uma oportunidade para conectar os conteúdos estudados em matemática com problemas no mundo real, e esta aplicação de conceitos nesses problemas estimula o pensamento crítico. Uma outra noção valiosa a ser despertada nos alunos é a noção da variação dos dados de um problema com o tempo.

Apesar de serem comumente estudados no ensino superior, acredita-se que conceitos fundamentais podem ser abordados já nos anos finais do ensino fundamental ou no ensino médio, por meio de situações contextualizadas e exploratórias.

Esta pesquisa tem como objetivo principal investigar como a introdução de ideias elementares de sistemas dinâmicos pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais conectado com a realidade dos estudantes. Além disso, busca-se identificar estratégias pedagógicas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático por meio da observação e análise de padrões e variações ao longo do tempo.

A metodologia adotada é de caráter qualitativo, com base em análise de propostas didáticas. A escolha do tema justifica-se pela necessidade de promover uma educação matemática mais significativa, interdisciplinar e que dialogue com os desafios contemporâneos vivenciados pelos estudantes e de despertar e melhorar diversas percepções matemáticas e lógicas em meio aos alunos.

Nos capítulos seguintes, serão apresentados os fundamentos teóricos sobre sistemas dinâmicos, suas possíveis aplicações no ensino básico, e uma proposta de abordagem pedagógica.

Órbitas

Antes de adentrar este assunto, precisamos definir alguns conceitos necessários para o estudo de sistemas dinâmicos. Entre estes, está o conceito de iteração de uma função. Iteração se baseia no processo de repetir uma ou um conjunto de ações. Quando nos referimos a iteração de uma função, na matemática, o processo de iteração se baseia em aplicar novamente a função, onde após calcular o valor da função a partir de um ponto inicial, aplicamos novamente a função a partir do resultado que obtemos anteriormente. Por exemplo, dada a função $f(x) = 5x - 7$, se calcularmos o valor desta função a partir de um valor inicial $x = 2$, obtemos $f(2) = 5 \cdot 2 - 7 = 10 - 7 = 3$. Iterar esta função neste ponto se baseia em utilizar o nosso valor encontrado ao aplicar a função, agora como o nosso valor inicial a ser aplicado na função. Desse modo, realizando esse processo, calculamos $f(3) = 5 \cdot 3 - 7 = 15 - 7 = 8$. Ao analisarmos o comportamento de uma função após iterações, abrimos um novo leque de possibilidades, onde podem aparecer padrões de comportamento nos valores encontrados, ou a falta de padrões e um comportamento caótico.

O processo de iteração de uma função se baseia, em outras palavras, em compor esta função com ela mesma, repetidas vezes. Ainda utilizando o exemplo anterior, podemos escrever este processo como $f(2) = 3$ sendo a primeira iteração de $f(x)$ utilizando o valor inicial 2, $f(f(2)) = 8$ é a segunda iteração da função a partir do valor 2, e de maneira análoga, $f(f(f(2))) = 33$ seria sua terceira iteração. Neste trabalho, representamos $f(f(x))$ como $f^2(x)$, $f(f(f(x)))$ como $f^3(x)$, e assim por diante, ou seja, representamos a n-ésima iteração da função como $f^n(x)$. Isto não se relaciona com elevar uma função a uma potência, e sim compor uma função com ela mesma n vezes, a não ser que o contrário seja explicitado.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos definir a sequência de pontos $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$, sendo $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ ... \ , x_n = f(x_{n-1}), \ ... \ $, ou ainda, $x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \ ... \ , x_n = f^n(x_0), \ ... \ $, ou seja, o índice "$n$" em x_n representando o número de aplicações da função em um valor inicial x_0. Então, definimos tal sequência a partir de iterações sucessivas de uma função $f(x)$ sobre este ponto. Chamamos então esta sequência de órbita de x_0 sobre f.

Definição 2.1. *(Iteração). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, define-se a órbita de x_0 sobre f como a sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ dada pela relação*

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

A partir desta definição, vamos buscar estudar os comportamentos de algumas órbitas. Alguns exemplos simples de órbitas são:

Exemplo 2.1. *Dado $f(x) = 2x - 1$ e $x_0 = 2$, temos a seguinte órbita:*

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2, \\
x_1 &= 2 \cdot 2 - 1 = 3, \\
x_2 &= 2 \cdot 3 - 1 = 5, \\
x_3 &= 2 \cdot 5 - 1 = 9, \\
x_4 &= 2 \cdot 9 - 1 = 17, \\
x_5 &= 2 \cdot 17 - 1 = 33, \\
x_6 &= 2 \cdot 33 - 1 = 65, \\
x_7 &= 2 \cdot 65 - 1 = 129, \\
x_8 &= 2 \cdot 129 - 1 = 257, \\
x_9 &= 2 \cdot 257 - 1 = 513, \\
x_{10} &= 2 \cdot 513 - 1 = 1025.
\end{aligned}
$$

Vale notar que os valores obtidos a partir desta órbita crescem a medida que aumentamos o número de iterações, para estas dez iterações.

Exemplo 2.2. *Vamos observar agora a órbita da função* $g(x) = \sqrt{x}$ *a partir do ponto inicial* $x_0 = 16$*:*

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 16, \\
x_1 &= \sqrt{16} = 4, \\
x_2 &= \sqrt{4} = 2, \\
x_3 &= \sqrt{2}, \\
x_4 &= \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}.
\end{aligned}
$$

Note que neste caso, os valores observados desta órbita decrescem a medida que o número de iterações cresce.

Exemplo 2.3. *Por último, vamos verificar o que acontece com a função* $h(x) = x^2 - 2$ *partindo do ponto inicial* $\sqrt{2}$*:*

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt{2}, \\
x_1 &= (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0, \\
x_2 &= 0^2 - 2 = -2, \\
x_3 &= (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2, \\
x_4 &= 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2, \\
x_5 &= 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2.
\end{aligned}
$$

Note que neste exemplo, a órbita se mantém fixa após assumir um valor 2 para x. Isto ocorre porque uma solução de $x^2 - 2 = x$ é $x = 2$, então quando esse valor surge em uma órbita desta função, a órbita mantém esse valor, pois ao aplicarmos tal valor na função, temos que $h(2) = 2$. Note ainda que o mesmo ocorre para $x = -1$, que é outra solução da equação acima

Uma órbita pode ter diversos comportamentos possíveis, a depender do ponto inicial e do sistema que está sendo trabalhado. Iremos explorar alguns dos principais comportamentos a seguir.

Tipos de órbitas

3.1 Ponto fixo

Existem vários tipos diferentes de órbitas que descrevem o seu comportamento em um sistema. Um destes tipos é o *ponto fixo*. Um ponto fixo x_0 é um ponto que satisfaz $f(x_0) = x_0$. Note que o valor obtido para ser utilizado na função na próxima iteração é o próprio x_0, ou seja, a partir do momento que encontramos este valor, este se mantém constante na órbita, pois $f(x_0) = x_0$, $f^2(x_0) = f(f(x_0)) = x_0$, e desse modo, tal que $f^n(x_0) = x_0$ para todo n natural. Para a função $f(x) = x^2 - 2$ por exemplo, o ponto $x = 2$ é um ponto fixo, pois $f(2) = 2$, ou seja, a órbita desta função a partir deste ponto é a sequência constante $2, 2, 2, 2, ...$. Generalizando, a órbita de um ponto fixo x_0 é a sequência constante $x_0, x_0, x_0, ...$. Vamos definir esse conceito:

Definição 3.1. *(Ponto Fixo). Um ponto x^* é um ponto fixo de $f : I \to \mathbb{R}$ se $f(x^*) = x^*$*

Observação 3.1. *Como foi mencionado, temos que $f^n(x^*) = x^*$. Uma demonstração disso é que, dado um ponto fixo x^*, temos que $f(x^*) = x^*$, e caso tenhamos $f^{n-1}(x^*) = x^*$, por consequência, $f^n(x^*) = f(f^{n-1}(x^*)) = f(x^*) = x^*$. Portanto, reforçamos e definimos a noção de ponto fixo, e a órbita de um ponto fixo.*

Exemplo 3.1. *Para uma função $f(x) = 2x$, o seu único ponto fixo é o ponto $x_0 = 0$, que satisfaz $f(x) = x$, ou ainda, $2x = x$, pois $f(0) = 0$. A órbita deste ponto nesta função é:*

$$0, 0, 0, 0, ...$$

Exemplo 3.2. *Para a função $g(x) = x^2 - 7x + 15$, temos dois pontos fixos, estes são 3 e 5. Note então que $g(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 15 = 9 - 21 + 15 = 3$, e $g(5) = 5^2 - 5 \cdot 7 + 15 = 25 - 35 + 15 = 5$. Note então que a órbita do ponto 5 é:*

$$5, 5, 5, 5, ...$$

De maneira análoga, a órbita do ponto inicial 3 nesta função é $3, 3, 3, 3, ...$. Como comentado anteriormente, podemos encontrar os pontos fixos desta função encontrando os valores que satisfazem $g(x) = x$, em que subtraindo x em ambos os membros e analisando a função g acima, encontramos a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$, ou seja, os pontos fixos de $g(x)$ são as soluções desta equação quadrática, em que podemos resolvê-la utilizando a fórmula quadrática (fórmula de Bhaskara) e encontrar as raízes 3 e 5.

Uma maneira gráfica de encontrar os pontos fixos de uma função, é observar a interseção do gráfico da função com a reta diagonal $y = x$, no plano (x, y). Na imagem abaixo, por exemplo, vemos o gráfico da função $f(x) = \cos x$, onde este intercepta a reta $y = x$ aproximadamente no ponto $x_0 \approx 0.739085$.

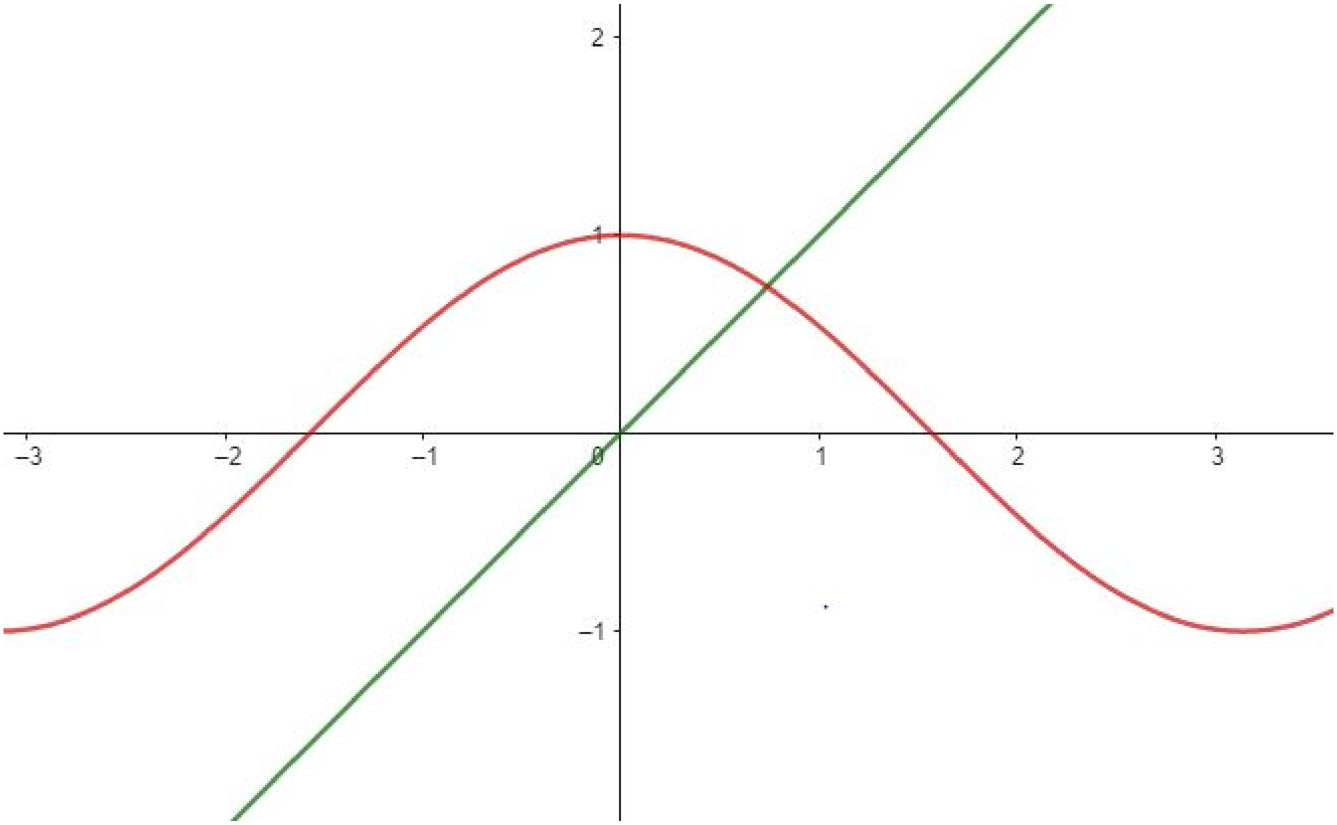

Figura 1: Gráfico da função $f(x) = \cos x$

No ponto de interseção entre o gráfico de $f(x) = cosx$, e da reta $y = x$, este ponto x_0 é um ponto fixo da função, onde $f(x_0) = x_0$.

3.2 Órbita periódica

Outro tipo importante de órbita é a *órbita periódica*, ou *ciclo*. Isto acontece quando, partindo de um ponto x_0 em uma função $f(x)$, existe algum momento em sua órbita tal que $f^n(x_0) = x_0$. Em outras palavras, o valor de x_0 aparece novamente em sua órbita (não necessariamente a seguir, como é o caso do ponto fixo). Um exemplo deste comportamento pode ser visto observando a função $f(x) = x^2 - 1$, a partir do ponto inicial 0. Note que $f(0) = 0 - 1 = -1$. Iterando novamente a função, temos que $f(-1) = 1 - 1 = 0$. Note então que quando esta função assume valor inicial 0, $f^2(0) = 0$. Por consequência, $f^3(0) = -1$, e $f^4(0) = 0$. Desse modo, a órbita de 0 nesta função é:

$$0, -1, 0, -1, 0, ...$$

Exemplo 3.3. *Olhando para $f(x) = 2x$ mod 1, esta função duplica o valor de sua entrada x, e retorna apenas a parte fracionária do resultado $2x$. Nesta função, $\frac{1}{3}$ forma um ciclo de período 2, pois $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, e $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ (pois $\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$, e $\frac{4}{3}$ módulo 1 resulta em $\frac{1}{3}$, lembrando que o módulo equivale a tomar o resto da divisão por 1, neste caso). Então, a órbita de $\frac{1}{3}$ nesta função é:*

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, ...$$

Nesta mesma função, um outro ponto inicial que também gera um ciclo é o ponto $\frac{1}{7}$, onde $f(\frac{1}{7}) = \frac{2}{7}$, e $f(\frac{2}{7}) = \frac{4}{7}$, e por fim, $f(\frac{4}{7}) = \frac{1}{7}$ (retirando a parte inteira de $\frac{8}{7}$, temos $\frac{1}{7}$). Assim, temos um ciclo de período 3, em que a órbita de $\frac{1}{7}$ neste caso é:

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \ldots$$

Um ponto importante a se destacar é a repetição que ocorre em uma órbita, quando um valor aparece novamente gerando um período. Generalizando esse conceito, quando temos $f^n(x_0) = x_0$, temos um período n, e sabemos que $f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0))$, e como $f^n(x_0) = x_0$, então $f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_0)$, ou seja, quando o ponto x_0 aparece novamente na órbita, sabemos que o termo seguinte é o $f(x_0)$, como anteriormente apareceu na órbita. Então, exemplificando, tal órbita de um ponto que gera um ciclo de período n é:

$$x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \ldots,\ f^{n-1}(x_0),\ x_0,\ f(x_0),\ \ldots$$

Definição 3.2 (Órbita Periódica)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$. O ponto x_0 tem período $n \geq 1$ se $f^n(x_0) = (x_0)$.*

Desse modo, a órbita periódica de x_0 reinicia seu ciclo em $f^n(x_0)$, e por consequência, reinicia seu ciclo em $f^{2n}(x_0)$, e também $f^{3n}(x_0)$. Note então que se contarmos dois períodos como um só, teremos que a órbita é periódica, porém, não analisamos o menor período possível desta órbita. Podemos tomar como exemplo o caso apresentado anteriormente da função $f(x) = x^2 - 1$ e o ponto inicial 0. Nesta função, teremos uma órbita de período 4 no ponto 0, pois ao aplicarmos a função quatro vezes sob o ponto 0, notamos que $f^4(0) = 0$, porém, o menor período que podemos encontrar é um período de tamanho 2. A este menor período que podemos encontrar de uma órbita, chamaremos de *período primo*. Generalizando essa ideia, se temos uma função f em um ponto x_0, e neste ponto temos um ciclo de tamanho n, também teremos uma órbita periódica de tamanho $2n$, $3n$, e assim por diante, com todos os múltiplos de n.

Observação 3.2. *Para encontrar órbitas periódicas, podemos realizar um processo semelhante ao de encontrar um ponto fixo. Na função $f(x) = x^2 - 1$ por exemplo, se quisermos encontrar um ciclo de período 2, precisamos encontrar um valor de x que satisfaça $f^2(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x$, ou seja, f composta com ela mesma resultando em x. Isto resulta em $f^2(x) = x^4 - 2x^2 - x = 0$, uma equação de quarto grau. Para encontrar ciclos maiores, temos que resolver equações ainda mais complexas, aumentando o nível de dificuldade.*

Observação 3.3. *Um ponto fixo também gera um ciclo periódico, por definição, visto que a órbita de um ponto fixo x_0 é sempre $x_0, x_0, x_0, \ldots$, então $f^n(x_0)$ sendo este um ponto fixo, resulta em x_0, e portanto, gerando sempre um ciclo de período n qualquer. Desse modo, um ponto fixo x_0 sempre vai ser uma das soluções de uma equação que descreve um ciclo, ou seja, solução de $f^n(x_0) = x_0$.*

3.3 Órbitas eventualmente fixas ou periódicas

Até agora, vimos órbitas fixas e periódicas que iniciam sua órbita já fixas, ou a partir de um período. Porém, este não é o único caso possível de se encontrar. Utilizamos como exemplo a função $f(x) = x^2 - 2$ para falar de pontos fixos, onde o ponto $x_0 = 2$ é um ponto fixo desta função. Agora, vamos olhar para o ponto $x_0 = -2$, note que $f(-2) = (-2)^2 - 2 = +4 - 2 = +2$. Desse modo, a imagem de -2 nesta função resulta em $+2$, e como a imagem de $+2$ nesta função é $+2$, pois este é um ponto fixo, e solução de $f(x) = x$ para esta função f, então a partir do momento em que $+2$ aparece na órbita deste ponto x_1, a sua órbita continua fixa a partir deste ponto. Exemplificando, a órbita de -2 nesta função seria a seguinte:

$$-2, 2, 2, 2, ...$$

Observação 3.4. *Isto acontece pois a partir do momento em que um ponto fixo aparece em uma órbita, o termo seguinte desta órbita é a imagem deste ponto pela função, mas a imagem de um ponto fixo na função é o próprio ponto fixo. Assim, neste exemplo, nesta órbita que não se inicia a partir de um ponto fixo e encontra um ponto fixo em sua órbita, chamamos tal órbita de eventualmente fixa.*

Definição 3.3. *Órbita eventualmente periódica Seja $f : I \to \mathbb{R}$. O ponto x^* tem uma órbita eventualmente periódica se $f^n(x^*) = f^k(x^*)$, com $n \neq k$, em que $x^* \neq f^n(x^*)$.*

Exemplo 3.4. *A partir desta mesma função, os pontos $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ também são eventualmente fixos, onde suas respectivas órbitas são:*

$$\sqrt{2}, 0, -2, -2, ... \qquad e \qquad \sqrt{3}, 1, -1, -1, ...$$

De maneira análoga, órbitas que começam um eventual ciclo a partir de um determinado ponto, chamamos de *eventualmente periódicas.* Vamos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 3.5. *O ponto -1 na função $-x^2 + 1$ tem uma órbita eventualmente periódica, em que $f(-1) = -((-1)^2) + 1 = -1 + 1 = 0$, iterando novamente a função, temos $f(0) = -(0^2) + 1 = 1$, e por fim, $f(1) = -(1^2) + 1 = -1 + 1 = 0$. Como reencontramos 0 na órbita do ponto -1, o próximo termo de sua órbita a partir do 0 é a imagem de 0 na função, ou seja, o ponto -1 aparece novamente nesta órbita após o 0. A órbita do ponto -1 nesta função então, é:*

$$-1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$$

Note então que esta órbita não se inicia em um ciclo de período 2, mas ao entrar em um ciclo de período 2, se mantém no mesmo.

3.4 Outras Órbitas

Os comportamentos de órbitas vistas anteriormente possuem certa regularidade, e "simplicidade". Nem sempre o comportamento de órbitas é fácil de descrever. Tomando como exemplo a função $f(x) = x^2 - 2$, olhamos para o ponto inicial $x_0 = 0.5$.

Exemplo 3.6. *Neste ponto, temos a seguinte órbita:*

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5, \\
x_1 &= -1.7500, \\
x_2 &= 1.0625, \\
x_3 &= -0.8711, \\
x_4 &= -1.2412, \\
x_5 &= -0.4594,
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
x_{98} &= -1.5252, \\
x_{99} &= 0.3263, \\
x_{100} &- -1.8935.
\end{aligned}$$

O comportamento desta órbita não se estabiliza como visto anteriormente, pois embora ela aparente permanecer presa no intervalo $(-2, 2)$, esta tranzita neste intervalo sem um padrão de comportamento.

Como foi apresentado anteriormente, o comportamento de órbitas depende do ponto inicial e do sistema trabalhado. Vamos observar a seguir o comportamento de algumas órbitas em um sistema bem característico.

Função de duplicação (doubling function)

Uma função em específico possui diversas características que podemos estudar, A função de duplicação, que denotaremos como $D(x)$, possui domínio igual ao intervalo $[0, 1)$, em outras palavras, $0 \leq x < 1$. Esta função pode ser definida pela seguinte lei:

$$D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \\ 2x - 1 & \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Esta função possui diversas propriedades que podemos destacar e estudar. Note que seu conjunto imagem é $[0, 1)$, assim como seu domínio, desse modo, temos que $D : [0, 1) \to [0, 1)$. Nesta função, o valor de x está definido no intervalo citado, e caso x seja menor do que $\frac{1}{2}$, esta função nos retorna $2x$ duplicando assim o valor de entrada. Note que para $0 \leq x < \frac{1}{2}$, temos que $2x \in [0, 1)$. Para o caso $\frac{1}{2} \leq x < 1$, temos que $2x \in [1, 2)$, e portanto, $2x - 1 \in [0, 1)$. Assim, quando a função iria nos retornar um valor com uma parcela inteira ao duplicar a entrada, esta parte inteira é retirada Vamos dar dois exemplos de órbitas nesta função:

Exemplo 4.1. *Para um valor inicial* $x_0 = 1/7$*, temos que* $D(1/7) = 2/7$*, e continuando,* $D(2/7) = 4/7$*, e* $D(4/7) = 1/7$*. Desse modo, essa órbitas seria:*

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, ...$$

Note então que essa órbita é uma órbita periódica.

Exemplo 4.2. *Outro exemplo de uma órbita nesta função é a órbita de* $3/8$*, onde esta órbita, partindo deste ponto inicial, é:*

$$\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, ...$$

Note agora que a órbita de $3/8$ *é eventualmente fixa, pois estando o* 0 *presente nesta órbita, e sendo* $f(0) = 0$*, todos os pontos desta órbita a partir do* 0 *serão* 0*.*

Exemplo 4.3. *Para um valor inicial* $x_i = \frac{5}{18}$*, vamos observar a órbita deste ponto na doubling function:*

$$\frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}, ...$$

Podemos ver que o valor $\frac{5}{9}$ *se repete na órbita deste ponto, portanto, se trata de uma órbita eventualmente periódica (de período primo* 6*).*

Até este momento foram trabalhados alguns dos principais conceitos sobre sistemas dinâmicos, mas uma importante ferramenta para o estudo e o ensino deste tema é a análise gráfica destes sistemas. Na sessão a seguir iremos explorar como podemos observar sistemas dinâmicos graficamente, bem como observar alguns exemplos já trabalhados.

Análise Gráfica

5.1 Introdução

Ao longo desta sessão, iremos verificar como podemos estudar o comportamento de órbitas de funções através de seus gráficos. Suponha que nós tenhamos o gráfico da função F e queremos encontrar a órbita de um ponto x_0. Nós podemos traçar a reta diagonal $y = x$ no gráfico de F. Os pontos de interseção desse gráfico com a reta $y = x$ nos dão os pontos fixos de F, pois nestes pontos, $F(x) = x$.

Para encontrar a órbita de um ponto x_0, nós partimos do ponto (x_0, x_0) que está na reta diagonal $y = x$, esboçamos uma reta vertical a partir deste ponto e encontramos a interseção do gráfico com esta reta. Ao marcarmos o ponto desta interseção, temos um ponto de coordenadas $(x_0, F(x_0))$. Note que podemos encontrar este ponto apenas traçando uma reta vertical a partir do ponto $(x_0, 0)$, ou seja, encontrando o valor x_0 no eixo x, encontramos o valor da função correspondente a este valor de x.

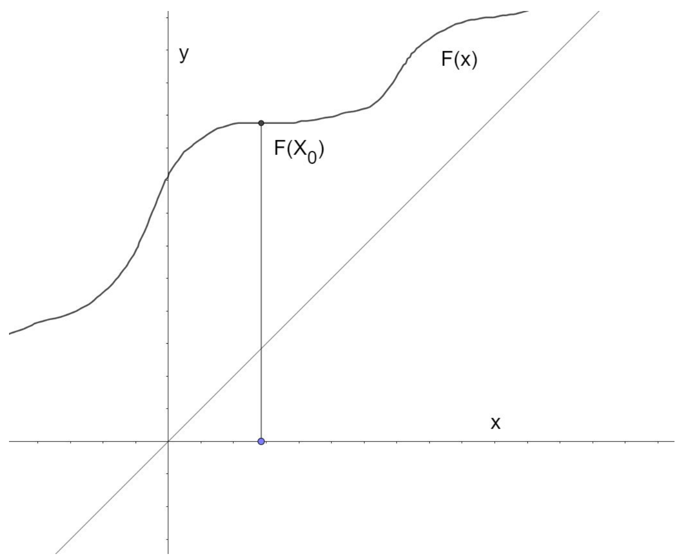

Figura 2: Valor de $F(x_0)$ no gráfico de uma função $F(x)$

Agora, a partir deste ponto, esboçamos uma reta horizontal até a diagonal $y = x$. Ao fazermos isso a partir do ponto $(x_0, F(x_0))$, encontramos um ponto com a mesma ordenada $F(x_0)$, porém, como este ponto está na reta $y = x$, este ponto terá como valor da coordenada da abscissa o mesmo valor de sua ordenada, ou seja, coordenadas $(F(x_0), F(x_0))$. A partir deste ponto, traçamos novamente uma reta vertical e marcamos a interseção desta reta com o gráfico da função. A partir de $(F(x_0), F(x_0))$, traçando esta reta vertical, encontramos um novo ponto onde sua ordenada vale a aplicação de F em seu valor de abcissa, que é $F(x_0)$. Desse modo, as coordenadas desse novo ponto obtido serão $(F(x_0), F(F(x_0)))$, ou, $(F(x_0), F^2(x_0))$.

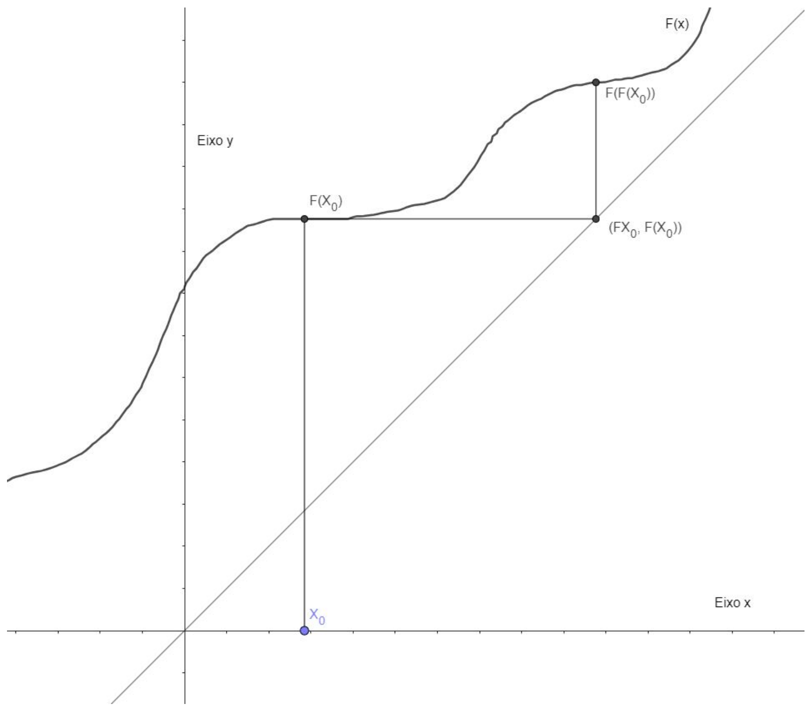

Figura 3: Valor de $F(F(x_0))$ no gráfico de uma função $F(x)$

Repetindo o mesmo processo de traçar uma reta horizontal a partir deste ponto, encontrar sua interseção com a reta $y = x$, e traçar uma vertical que intercepte o gráfico, obteremos um ponto de coordenadas $(F^2(x_0), F^3(x_0))$, e repetindo este processo, observamos onde estão localizados os pontos das iterações de x_0 em uma função $F(x)$.

Ao realizarmos este processo, estaremos observando graficamente a órbita de x_0, enquanto acabamos por formar uma espécie de escada ou teia de aranha com os segmentos criados durante o processo.

É interessante observar como o gráfico de funções se comporta quando tratamos de funções com algumas peculiaridades, como o caso de uma órbita periódica.

Exemplo 5.1. *Vamos observar o gráfico da função* $F(x) = x^2 - 1$*. Quando consideramos o ponto* $x_0 = 0$*, podemos observar que* $F(x_0) = 0^2 - 1 = -1$*, e além disso,* $F(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$*. Portanto, a órbita do ponto* x_0 *é uma órbita periódica de período* 2*. Observando esta órbita graficamente, utilizando os meios anteriormente descritos, temos a seguinte imagem:*

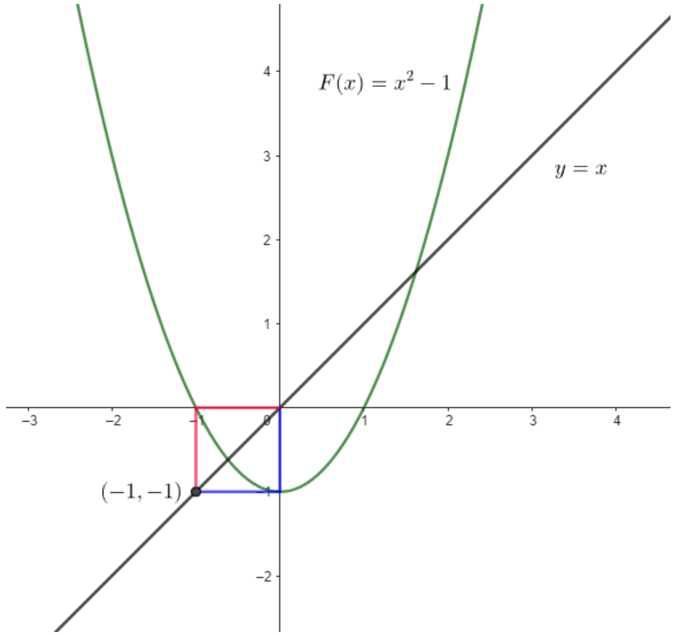

Figura 4: Valor de $F(x_0)$ no gráfico de uma função $F(x)$

De maneira simplificada, quando utilizamos os recursos anteriormente descritos para observar a órbita do ponto $x_0 = 0$ *nesta função, permanecemos transitando entre os valores* 0 *e* -1.

Podemos olhar também para o gráfico da "doubling function", e analisar por exemplo a órbita de um ponto $x_0 = 0,6$.

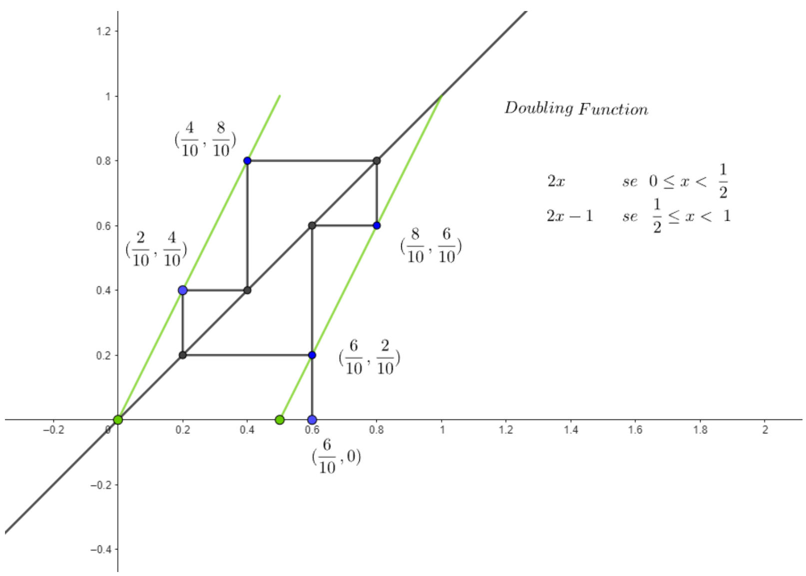

Figura 5: Valor de $F(x_0)$ no gráfico de uma função $F(x)$

O gráfico da doubling function é representado por dois segmentos no plano cartesiano, dado que sua lei é condicional. Como podemos ver, temos uma órbita de período primo 4 *a partir do ponto* $x_0 = 0,6$, *que transita entre as duas metades do domínio desta função.*

Exemplo 5.2. *Uma questão que surge ao observar pontos fixos e órbitas periódicas é a seguinte: O que acontece com a órbita de um ponto próximo a um ponto fixo ou a uma órbita periódica? Vamos observar um exemplo do que pode acontecer.*

Dada a função $F(x) = x^2 - 1$, vimos que ela tem uma órbita periódica de período 2 contendo os pontos 0 e -1. Esta função tem dois pontos fixos, que podem ser identificados resolvendo a equação $x^2 - 1 = x$, nos resultando em:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dado que $x_1 \approx -0,618$, vamos analisar o que acontece com a órbita de $x_0 = -0,7$, que está entre o ponto -1 (órbita periódica) e x_1 (ponto fixo).

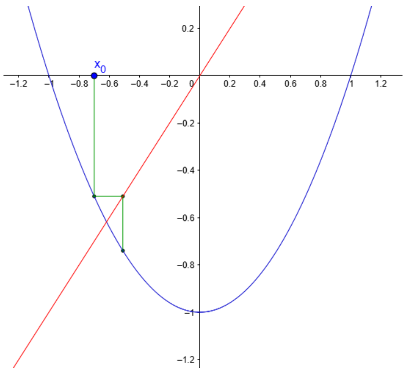

Figura 6: Após 2 iterações

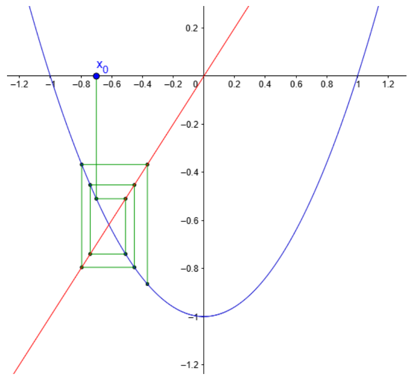

Figura 7: Após 6 iterações

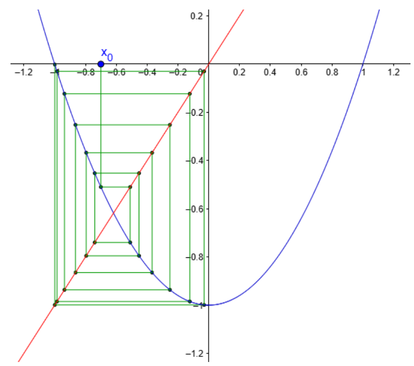

Figura 8: Após 13 iterações

Como podemos ver, utilizando o auxílio de um software, a órbita deste ponto se distancia do ponto fixo da função, e se aproxima cada vez mais da órbita periódica -1 e 0. Este comportamento não é padrão, mas nos dá uma ideia de que o ponto fixo repeliu esta órbita, e os pontos da órbita periódica atraíram esta órbita. Este comportamento será melhor analisado em um momento posterior.

5.2 Exemplos anteriores

Vamos observar o gráfico de algumas órbitas comentadas anteriormente.

Exemplo 5.3. *Para a função $f(x) = x^2 - 2$, partindo do ponto inicial $x_0 = \sqrt{2}$, por exemplo, vimos que a órbita deste ponto é $(\sqrt{2}, 0, -2, 2, 2, ...)$, e portanto, é uma órbita eventualmente fixa.*

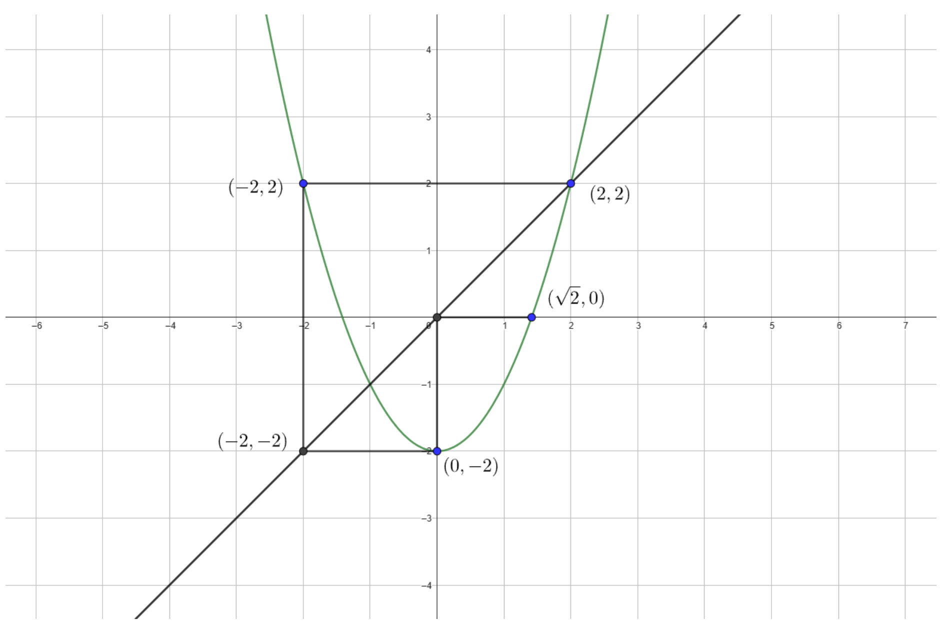

Figura 9: Órbita de $x_0 = \sqrt{2}$ na função $f(x) = x^2 - 2$

Normalmente, marcamos no plano cartesiano um ponto de coordenadas $(x_0, 0)$ *para representar* x_0*, e em seguida, podemos encontrar um ponto que represente* x_1 *traçando uma reta vertical que passa por* x_0*, e toca o gráfico da função, encontrando assim um ponto de coordenadas* $(x_0, f(x_0))$*. Entretanto, como a imagem de* $x_0 = \sqrt{2}$ *nesta função é* 0*, este ponto inicial* $(\sqrt{2}, 0)$ *representa tanto nosso* x_0*, como* x_1*.*

Em seguida, podemos repetir os passos descritos anteriormente neste trabalho para determinar a órbita de $\sqrt{2}$ *nesta função. Traçando uma reta horizontal a partir de* $(\sqrt{2}, 0)$*, e encontrando a reta* $y = x$*, e em seguida traçando uma reta vertical que encontra o gráfico de* f*, obtemos o ponto* $(0, -2)$*, como esperado, já que* $f(0) = -2$*.*

Repetindo o processo, encontramos o ponto $(-2, 2)$*, e como* $f(2) = 2$*, podemos observar que logo em seguida, somos direcionados no gráfico a um ponto no gráfico que intercepta a reta* $y = x$*, ou seja,* $f(x) = x$*. A partir deste ponto, as etapas de traçar uma reta vertical ou horizontal que intercepte a diagonal* $y = x$*, e em seguida, o gráfico da função, respectivamente não irão nos levar a outro ponto, e sim ao mesmo lugar, o que ilustra a ideia de ponto fixo.*

Exemplo 5.4. *Um outro exemplo que podemos analisar é da função* $f(x) = -x^2 + 1$*. Iremos tomar como ponto inicial* $x_0 = \sqrt{2}$*.*

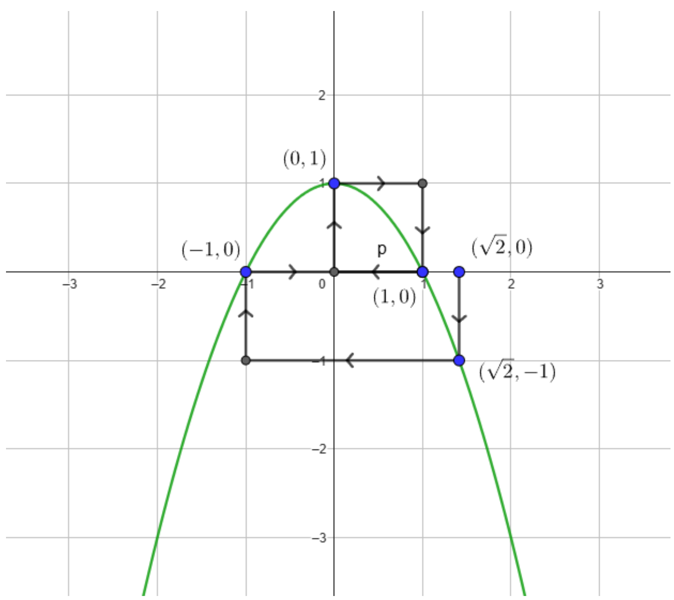

Figura 10: Órbita de $x_0 = \sqrt{2}$ na função $f(x) = -x^2 + 1$

Para este exemplo, podemos ver que a órbita deste ponto é $(\sqrt{2}, -1, 0, 1, 0, ...)$*, ou seja, é uma órbita eventualmente periódica, pois acaba caindo em meio aos pontos* 0 *e* 1 *que são periódicos nesta função.*

Exemplo 5.5. *Abaixo, o gráfico da função* $f(x) = x^2 - 2$*, iterando* 100 *vezes o ponto inicial* $x_0 = 0,5$*. Como podemos observar, a órbita deste ponto permanece nesta região.*

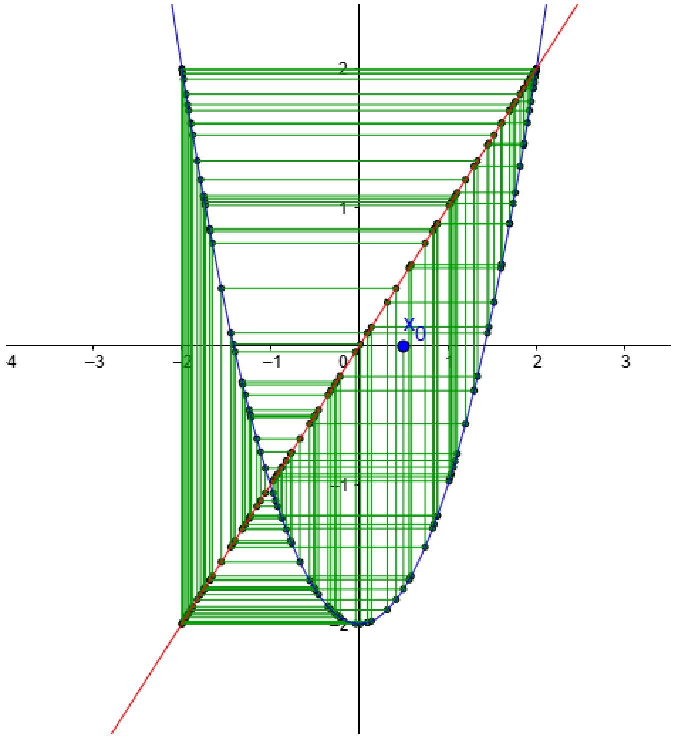

Figura 11: Órbita de $x_0 = 0,5$ na função $f(x) = -x^2 - 2$

Exemplo 5.6. *Vamos observar o gráfico da doubling function, iterada a partir dos pontos iniciais* $1/7$ *e* $3/8$*, respectivamente:*

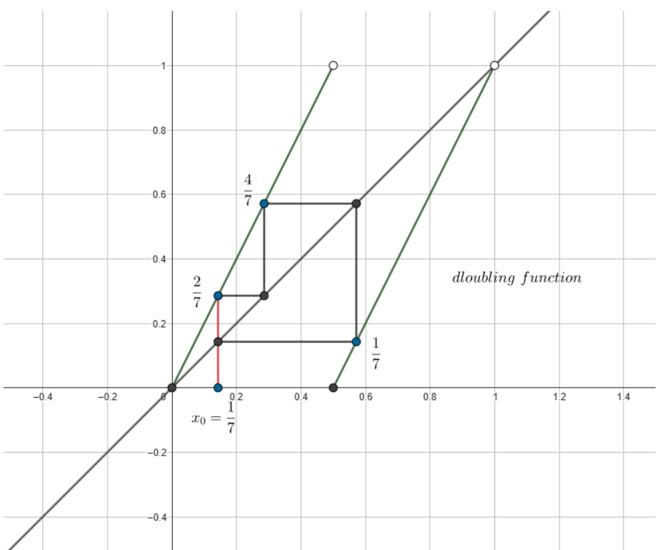

Figura 12: Órbita de 1/7 na doubling function

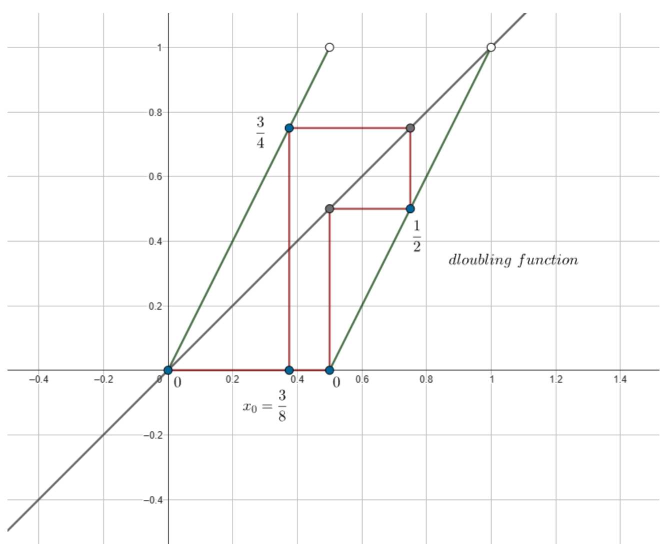

Figura 13: Órbita de 3/8 na doubling function

Na primeira figura (Figura 12), podemos agora observar graficamente uma órbita periódica da doubling function, partindo do ponto inicial $x_0 = 1/7$. Na segunda figura (Figura 13), podemos observar uma órbita eventualmente fixa partindo do ponto inicial $x_0 = 3/8$, e se fixando na origem, que é uma interseção do gráfico da doubling function com a reta $y = x$ do plano cartesiano.

Principais resultados

A partir de um estudo de sistemas dinâmicos, devemos expor algumas definições, teoremas e alguns dos principais resultados deste tema.

6.1 Teorema do valor intermediário

Enunciaremos o Teorema do Valor Intermediário cuja a demonstração se encontra em (5) na página 27.

Teorema 6.1. ***Teorema do Valor Intermediário***. *Suponha $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha y_0 entre $F(a)$ e $F(b)$. Então, existe um x_0 no intervalo $[a, b]$ onde $F(x_0) = y_0$.*

Em outras palavras, o que esse teorema nos mostra é que uma função contínua vai assumir todos os valores entre $F(a)$ e $F(b)$ no intervalo $[a, b]$.

Podemos partir deste teorema para outro resultado importante:

Teorema 6.2. ***Teorema do Ponto Fixo***. *Suponha $F : [a, b] \to [a, b]$ contínua. Então F tem ponto fixo em $[a, b]$*

Demonstração. A demonstração do Teorema do Ponto Fixo parte diretamente do teorema do valor intermediário. Seja $H(x) = F(x) - x$ uma função contínua que satisfaz:

$$H(a) = F(a) - a \geq 0$$
$$H(b) = F(b) - b \leq 0$$

Aplicando o teorema do valor intermediário na função $H(x)$, temos que, como existe um 0 entre dois valores $H(a)$ e $H(b)$, portanto existe um x_0 no intervalo $[a, b]$ onde $H(x_0) = 0$, e desse modo, temos:

$$H(x_0) = F(x_0) - x_0 = 0 \qquad \text{implica que} \qquad F(x_0) = x_0$$

Portanto, F tem ponto fixo no intervalo $[a, b]$.

□

6.2 Atração e Repulsão

De maneira intuitiva, vamos observar na prática estes conceitos (que são, até certo ponto, auto explicativos), para defini-los a rigor adiante. Observando a função $f(x) = x^2$, vemos que esta função tem 2 pontos fixos, como esperado de uma função do segundo grau, com 2 soluções para $f(x) = x$, onde podemos resolver essa equação da seguinte maneira:

$$x^2 = x \quad \to \quad x^2 - x = 0 \quad \to \quad x \cdot (x - 1) = 0$$

Assim, vemos claramente que as soluções desta equação são $x = 0$ e $x = 1$. Vamos observar o que ocorre com a função próximo ao ponto fixo $x = 0$. Se considerarmos um $x_0 = 0.5$, o que ocorre com a órbita deste ponto?

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.5\\
x_1 &= 0.25\\
x_2 &= 0.0625\\
x_3 &= 0.00390625\\
&\dots
\end{aligned}
$$

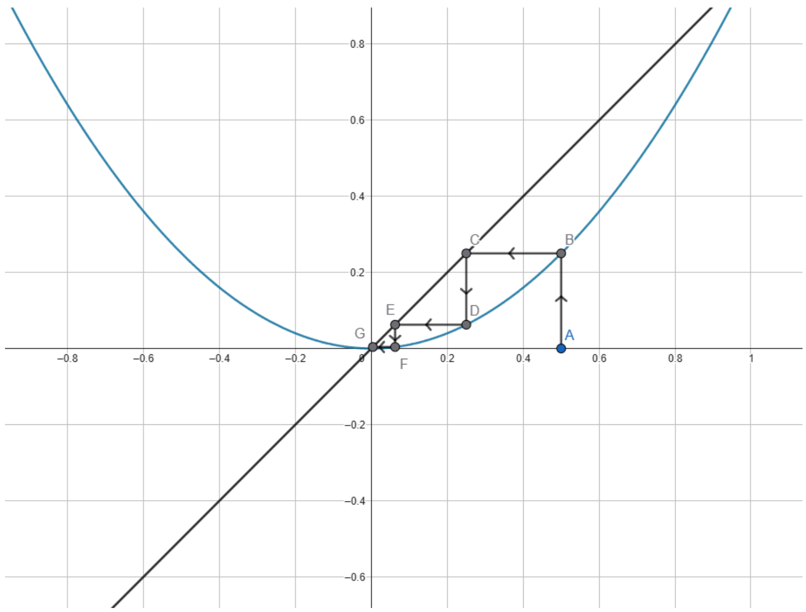

Figura 14: Órbita de $x_0 = 0,5$ na função $f(x) = x^2$

Note que o valor de x cai a cada iteração. Para valores de x no intervalo $(0, 1)$, note que obteremos uma órbita decrescente, pois dado um número neste intervalo, o quadrado deste número será um número menor, também no intervalo $(0, 1)$. Logo, para qualquer x_0 que tomarmos neste intervalo, a órbita deste x_0 irá decrescer a cada iteração, mantendo-se neste intervalo, se aproximando cada vez mais de 0.

Caso decidirmos tomar um x_0 como um número negativo, no intervalo $(-1, 0)$, o valor de x_1 será positivo, pois se tratando da função $f(x) = x^2$, caso x seja negativo, x^2 será positivo, e a partir deste ponto, a órbita se manterá positiva (e se manterá em $(0, 1)$).

Assim, vemos que caso tomemos um número entre -1 e 1, sabemos o que acontece com a órbita desse número, pois ou a órbita irá se aproximar de 0, ou caso tomemos o próprio 0, sabemos que ele é um ponto fixo. Com isso, podemos ver que ao redor do ponto fixo $x_0 = 0$, todos os pontos no intervalo $(-1, 1)$ (com excessão do próprio ponto 0) terão órbitas que se aproximarão de 0. Nesse caso, dizemos que o ponto fixo $x_0 = 0$ é um ponto fixo atrator. É importante destacar que atração e repulsão não são características exclusivas de pontos fixos, outros pontos podem apresentar estas características.

Podemos resumir o comportamento desta função da seguinte maneira: Para um x_0 inicial, a órbita de x_0 irá "explodir", ou em melhores palavras, subir em módulo indefinidamente para qualquer x_0 com módulo maior do que 1 (caso $|x_0| > 1$), obviamente para $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$, teremos pontos fixos, e para $|x_0| < 1$, a órbita deste ponto irá tender a 0. Com isso, resta apenas a possibilidade do $x_0 = -1$, mas $f(-1) = 1$, e caímos assim em um ponto fixo, se tratando portanto de uma órbita eventualmente fixa.

Utilizando este exemplo, podemos introduzir de maneira mais precisa os conceitos de um ponto fixo atrator ou repulsor, e observar melhor estes casos.

Antes de continuarmos, é importante apresentar o seguinte teorema (cuja demonstração pode ser encontrada em (5), pág 36):

Teorema 6.3. *(Teorema do Valor Médio). Suponha que F é uma função diferenciável no intervalo $a \leq x \leq b$. Então existe c entre a e b tal qual a seguinte condição é satisfeita:*

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Este teorema irá ser necessário na demonstração do próximo teorema. Agora, vamos definir de maneira mais formal o que é um ponto fixo atrator ou repulsor.

Definição 6.1. *Seja x_0 um ponto fixo de F. Então, x_0 será um ponto fixo atrator se $|F'(x_0)| < 1$, ou um ponto fixo repulsor se $|F'(x_0)| > 1$. Caso $|F'(x_0)| = 1$, dizemos que o ponto fixo é neutro.*

Teorema 6.4. *Seja x_0 um ponto fixo atrator de F. Então, existe um intervalo I que contém x_0 em seu interior, que satisfaz a seguinte condição: Se $x \in I$, então $F^n(x) \in I$ para todo n, e além disto, $F^n(x) \to x_0$ a medida que $n \to \infty$*

Demonstração. Pela continuidade de f' em x_0 e pelo fato de $|f'(x_0)| < 1$, existe $\delta > 0$ e um número $0 < m < 1$ tais que, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$|f'(x)| < m < 1.$$

Aplicação do Teorema do Valor Médio. Seja $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe ξ entre y e x_0 tal que

$$|f(y) - f(x_0)| \;=\; |f'(\xi)|\,|y - x_0|.$$

Como $|f'(\xi)| \leq m$, segue que

$$|f(y) - x_0| \;=\; |f(y) - f(x_0)| \;\leq\; m\,|y - x_0|.$$

Indução para contração exponencial. Suponhamos que $f^n(x)$ permaneça em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$d_n \;=\; |f^n(x) \;-\; x_0|.$$

Base ($n = 1$):

$$d_1 \;=\; |f(x) - x_0| \;\leq\; m\,|x - x_0| \;=\; m\,d_0.$$

Passo indutivo: Suponha que $d_n \leq m^n\, d_0$. Então,

$$d_{n+1} \;=\; |f^{n+1}(x) - x_0| \;=\; |f(f^n(x)) - x_0| \;\leq\; m\,|f^n(x) - x_0| \;=\; m\,d_n \;\leq\; m\,(m^n\, d_0) \;=\; m^{n+1}\, d_0.$$

Portanto, por indução, para todo n,

$$d_n \;\leq\; m^n\, d_0.$$

Conclusão. Como $0 < m < 1$, temos $\lim_{n\to\infty} m^n = 0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} d_n \;=\; \lim_{n\to\infty} |f^n(x) - x_0| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} m^n\, d_0 \;=\; 0.$$

Isso mostra que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$ para todo x suficientemente próximo de x_0. Assim, x_0 é um ponto fixo *atrator*. □

Teorema 6.5. *Seja x_0 um ponto fixo repulsor de F. Então, existe um intervalo I que contém x_0 em seu interior, que satisfaz a seguinte condição: Se $x \in I$, então $F^n(x) \in I$ e $x \neq x_0$, então existe um inteiro $n > 0$ tal que $F^n(x)$*

Demonstração. Vamos mostrar que $|f'(x)| > 1$ implica a expansão de sequências próximas a x.

Condição de expansão local: Pela continuidade da derivada f', existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$|f'(x)| > m > 1$$

Aplicação do teorema do valor médio: Seja $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$. Pelo teorema do valor médio, temos:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)| \cdot |x - x_0| \text{ para algum } \xi \text{ entre } x \text{ e } x_0.$$

Como $|f'(\xi)| \geq m > 1$, segue que:

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| \geq m \cdot |x - x_0|$$

Suponhamos que para todo n natural, $f^n(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Indução para expansão exponencial: Definimos $d_n = |f^n(x) - x_0|$

Base ($n = 1$):

$$d_1 = |f(x) - x_0| \geq m \cdot |x - x_0| = m \cdot d_0$$

Passo indutivo: Suponha $d_n \geq m^n \cdot d_0$. Então:

$$d_{n+1} = |f^{n+1}(x) - x_0| \geq m \cdot d_n \geq m^{n+1} \cdot d_0$$

Como $m > 1$, temos que $lim_{n\to\infty} m^n = \infty$, portanto $lim_{n\to\infty} d_n = \infty$, o que nos dá uma contradição, uma vez que a hipótese $f^n(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. □

Vamos analisar mais um exemplo de atração e repulsão. Olhando novamente para a função $f(x) = x^2$, podemos ver claramente que qualquer órbita em volta de $x_1 = 1$ é afastada deste ponto.

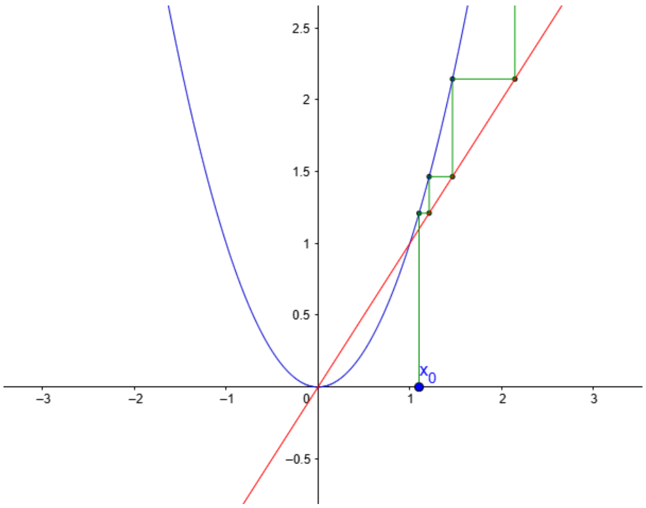

Figura 15: Órbita de $x_0 = 1,1$

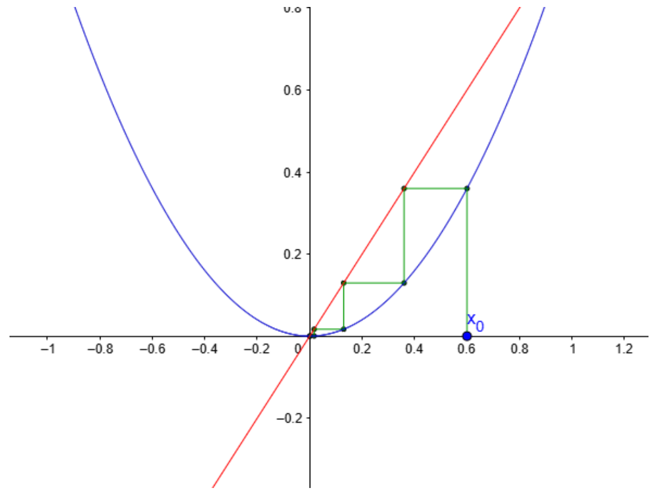

Figura 16: Órbita de $x_0 = 0,6$

Um detalhe importante que podemos destacar agora é o de que a derivada do ponto fixo $x_f = 1$ é positiva, e portanto, se trata de um ponto fixo repulsor.

Em contrapartida, para o ponto fixo $x = 0$, qualquer órbita suficientemente próxima a este ponto é atraída para ele, como pudemos ver inclusive na figura 12, onde para um ponto $x_0 = 0,6$, a sua órbita se afasta de 1, e se aproxima de 0. Como nesta função, qualquer ponto inicial $x_0 < 0$ é levado a um valor positivo após uma iteração, e mantido positivo (devido ao fato da função ser a função quadrática clássica), nossa atenção será mais voltada para o comportamento a partir de um ponto inicial positivo, já que eventualmente todas as órbitas serão levadas a um valor maior ou igual a 0 após uma iteração. Não iremos analisar aqui a fundo o caso do ponto fixo neutro, onde o módulo da derivada de $f(x_0)$ é igual a 1, pois neste comportamento não é padronizado, mas vamos apresentar alguns exemplos do que acontece em torno deste tipo de ponto fixo:

A função $f(x) = x - x^3$ possui um ponto fixo em $x = 0$, já que $f(0) = 0$. Neste caso, $f'(0) = 1$, e como mostra o gráfico abaixo, este ponto fixo é neutro, mas gera uma contração em órbitas próximas a ele.

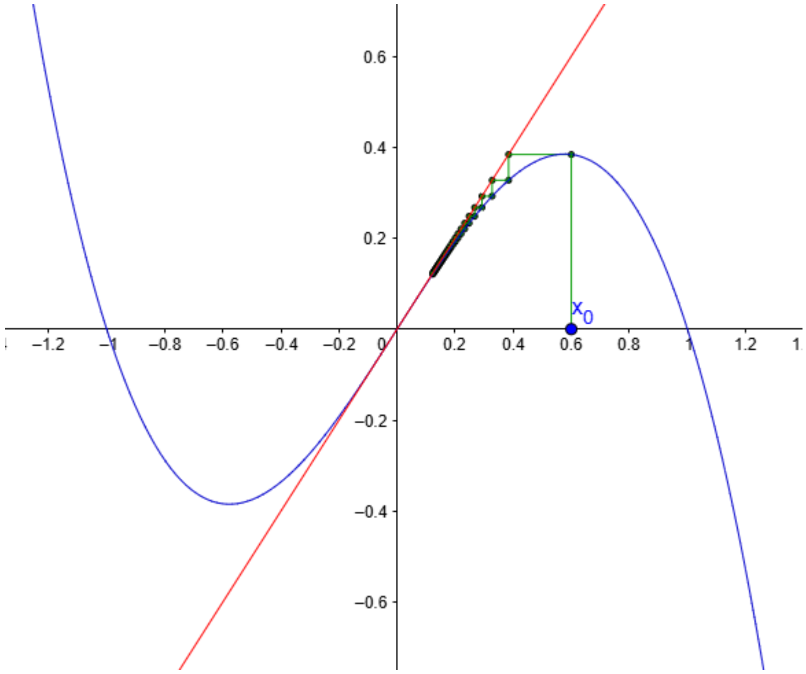

Figura 17: Contração em torno de um ponto fixo neutro

Quando observamos a função $f(x) = x + x^3$, o cenário é diferente. Novamente teremos um ponto fixo neutro em $x = 0$, mas este ponto irá afastar as órbitas próximas, como podemos ver nas duas imagens abaixo:

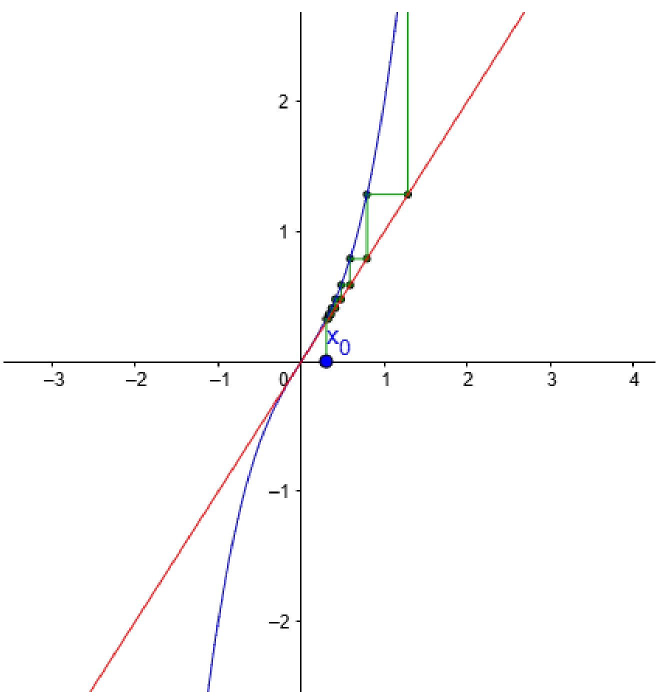

Figura 18: Órbita de $x_0 = 0,3$

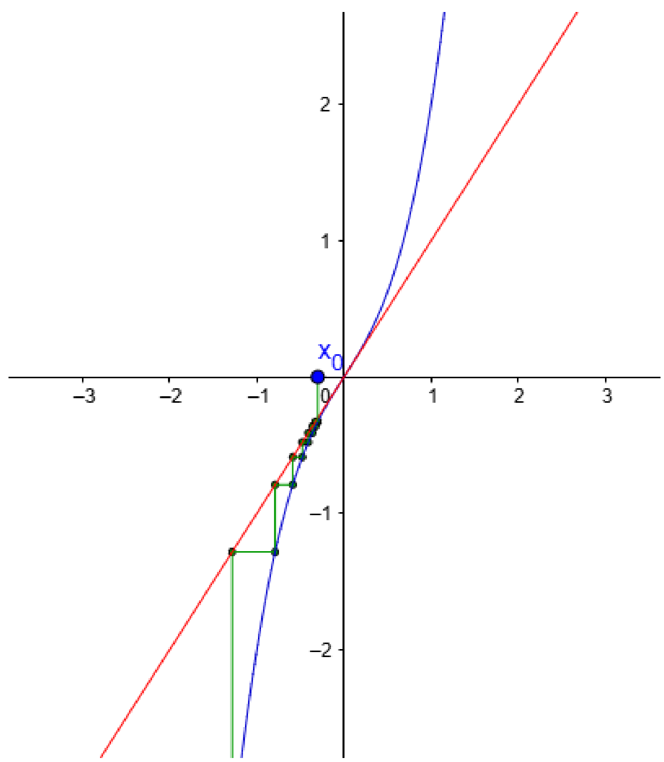

Figura 19: Órbita de $x_0 = -0,3$

6.3 Função logística

Dentre os possíveis exemplos que podem contextualizar um crescimento populacional limitado (como um exemplo anterior com a função $f(x) = 2x - 0,05x^2$), vale destacar que existem tipos de modelos de crescimento populacional limitado chamados de *funções logísticas*. Assim como no exemplo citado, estes modelos partem da ideia de um ambiente com recursos finitos (ou seja, a partir de um determinado valor da população, esta tem seu crescimento interrompido, e eventualmente se estabiliza em torno de um valor ou intervalo).

Um modelo simplificado da função logística que é possível de se trabalhar com alunos do ensino médio é o seguinte:

$$f(x) = rx(1 - x)$$

onde r é um parâmetro de crescimento, e x é a proporção de ocupação do ambiente, variando entre 0 e 1 (de 0% até 100%). A proporção de ocupação é iterada na função, e portanto, nos gerando um novo valor de proporção de ocupação após a iteração, que representa o "passo de tempo"do contexto (por exemplo, 1 minuto, 1 dia, 1 ano).

Muito se pode analisar de uma função logística simples como esta. Podem ser explorados com os alunos vários conceitos, como o de iteração, de pontos fixos, pontos fixos atratores ou repulsores.

Vale destacar que um ponto fixo é um valor de x que satisfaça $f(x) = x$, ou seja, $rx(1 - x) = x$. Para satisfazer esta equação, temos:

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1 - \tfrac{1}{r}$$

Este segundo ponto fixo x_2 só faz sentido quando $r > 1$, pois caso $0 < r \leq 1$, o ponto fixo será negativo ou zero, e como x representa uma proporção de ocupação neste contexto, não iremos admitir um ponto fixo negativo. Sendo assim, caso $r > 1$, podemos considerar dois pontos fixos, sendo eles descritos pelas equações acima.

Utilizar funções logísticas simples como estas pode agregar no aprendizado inicial dos alunos sobre sistemas dinâmicos. Uma possível abordagem em meio a apresentação do tema, pode ser dividir a turma em grupos, e fornecer um valor de R para cada grupo trabalhar. Com todos os grupos partindo de um valor inicial comum, como por exemplo $x_0 = 0,5$, os grupos podem compartilhar o que descobriram sobre o comportamento da órbita deste ponto. Abaixo, vemos o que ocorre para $r = 3$ e $r = 4$, com a órbita de $x_0 = 0,5$:

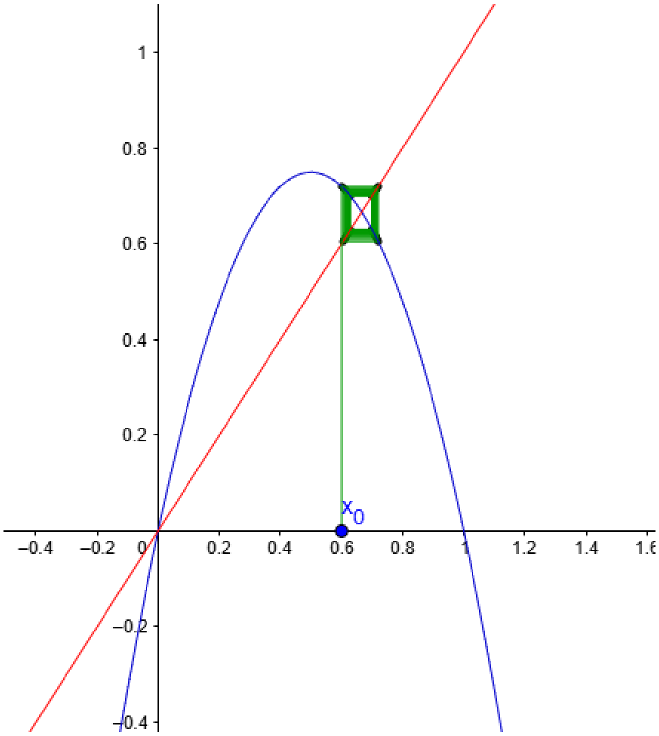

Figura 20: Órbita de $0,5$ em $3x(1-x)$

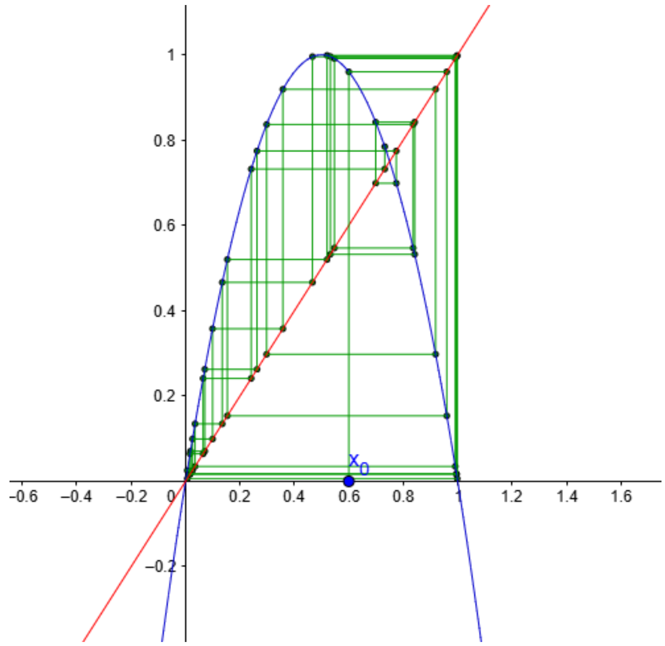

Figura 21: Órbita de $0,5$ na $4x(1-x)$

Na primeira figura, vemos que esta órbita se aproxima lentamente do ponto fixo, enquanto que na segunda figura, esta órbita transita no intervalo de 0 a 1 aparentemente de maneira randômica, sem um padrão aparente. Com estes e possivelmente mais casos diferentes, o(a) professor(a) pode mostrar aos alunos, com a exploração compartilhada deles, vários comportamentos de órbitas (inclusive em torno de um ponto fixo), como órbitas que são atraídas rapidamente para um ponto fixo, órbitas que são atraídas lentamente, um ponto fixo repelindo uma órbita, uma órbita transitando por um intervalo de maneira randômica, ou estabilizada em torno de um valor, dentre outros comportamentos.

Estas imagens mostram o comportamento destas órbitas em 30 iterações. Claramente não é viável trabalhar com este número de iterações com alunos do ensino médio, por exemplo, mas em uma atividade em grupo, o(a) professor(a) pode pedir aos alunos 6 ou 8 iterações, podendo variar mais a depender da turma e do tempo que possuem para trabalhar.

Tendo em vista o que foi comentado, a função logística se mostra uma ferramenta bem útil no arsenal do(a) professor(a) em uma abordagem introdutória de sistemas dinâmicos para os alunos.

Importância do estudo de sistemas dinâmicos

O estudo de sistemas dinâmicos vem se mostrado de grande importância na Matemática, principalmente com o fato de suas diversas aplicações em várias áreas, tais como na física, na biologia, em ciências sociais, na economia e em diversas áreas da tecnologia. Quando paramos para pensar, as aplicações deste tema nas áreas de economia e tecnologia por exemplo provavelmente irão crescer, já que estes tópicos estão em constante ascensão no mundo hoje.

A apresentação deste tema na educação básica, bem como um estudo guiado, pode ajudar a expandir a compreensão dos alunos para com a matemática. Alguns pontos positivos para os alunos podem ser:

- Análise de estabilidade: A análise de sistemas permite prever comportamentos futuros com base em condições iniciais. O estudo do tema auxilia o aluno a desenvolver um olhar mais analítico a funções e sistemas, podendo enxergar mais facilmente seu comportamento de maneira um pouco mais aprofundada, ao invés de um olhar mais superficial.

- Compreensão de fenômenos naturais: Sistemas dinâmicos descrevem fenômenos que mudam e evoluem ao longo do tempo, como o movimento de planetas ou um crescimento populacional. O estudo do tema não só amplia o olhar do aluno a esses fenômenos, como o auxilia a compreender melhor o comportamento destes fenômenos ao longo do tempo.

- Aplicações interdisciplinares: Como dito anteriormente, o conteúdo de sistemas dinâmicos possui aplicação e se mostra presente em diversas áreas do conhecimento, como na física (movimento de um pêndulo), na biologia (comportamentos da quantidade de populações) e na economia (modelos de crescimento econômico) por exemplo. Podemos destacar além disto que o estudo deste tema auxilia o aluno a notar as aplicações da matemática (bem como o estudo deste tema) no mundo no geral, evitando que o aluno veja a matemática como uma área distante do mundo material.

- Desenvolvimento do raciocínio matemático: O estudo do tema pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno como um todo, melhorando sua capacidade de interpretar e solucionar problemas, criar deduções mais complexas, simulações, e encarar situações da vida como sistemas, afim de analisá-las com padrões lógicos e ferramentas que a matemática pode oferecer.

Dado esse panorama sobre o estudo do tema, vamos observar uma possível abordagem introdutória deste tema para alunos do ensino básico, em específico para o segundo ano do ensino médio, por meio de uma iniciação científica.

Roteiro de atividade

Antes de pensar em elaborar uma atividade de exploração do tema com alunos da educação básica, deve ser pensado quais conceitos serão trabalhados com os alunos, quais conceitos eles precisam saber e ferramentas que precisam ter para esta exploração.

Esta atividade em específico foi pensada para uma turma no final do segundo ano do ensino médio, e necessitará que os alunos tenham trabalhado alguns conceitos, sendo os principais:

- manipulações de variáveis,
- resoluções de equação de 1º e 2º grau,
- sistemas de equações simples,
- noções elementares de funções, como função afim, função quadrática, e interpretação gráfica de funções.

Observação 8.1. *É importante destacar aqui, antes de iniciar a discussão sobre uma possível introdução a estes conceitos a alunos do ensino médio, a diferença entre a matemática escolar, e a matemática acadêmica docente. É evidente que, afim de introduzir este tema em tal ambiente, teremos que abrir mão de algum rigor, em prol da didática para o ensino deste conteúdo.*

Levando em conta que é de se esperar que os alunos do ensino básico em geral tenham um pouco mais de dificultade em abstrair conceitos em relação aos alunos do ensino superior, é importante que conceitos mais avançados para eles sejam introduzidos de maneira concreta, visando a didática para os alunos desta faixa etária. Um exemplo com um possível contexto real pode auxiliar os alunos a compreender os conceitos apresentados. Portanto, vamos observar um exemplo inicial que pode ser muito explorado tanto como um possível exemplo inicial, quanto um exemplo elaborado para apresentar vários conceitos abordados neste trabalho. Inicialmente vamos observar e explorar o conceito de iteração.

O conceito de iteração envolve um processo contínuo em um sistema. Este conceito pode ser introduzido aos alunos por meio de um exemplo inicial de uma função, que atua em um determinado contexto. Um exemplo disto poderia ser um crescimento populacional, onde após 1 ano, a lei que descreve o comportamento populacional dos indivíduos deste sistema é a seguinte:

$$2x - 0,05x^2$$

Esta função tem raízes em $x_1 = 0$ e $x_2 = 40$, e é positiva entre elas. Desse modo, iremos observar apenas o que acontece neste intervalo, pela construção do exemplo. É importante destacar que como este exemplo aborda um número de indivíduos, vamos considerar que qualquer número obtido que tenha parte decimal, iremos considerar apenas sua parte inteira.

Este exemplo inicial tem como objetivo apresentar e evidenciar aos estudantes a ideia central de um sistema dinâmico, que é o fato do processo ser contínuo e se transformar ao longo do tempo.

Vamos considerar que temos uma população inicial de 2 indivíduos. Em seguida, podemos perguntar aos alunos qual será a população de indivíduos após 1 ano. O esperado é que os alunos indiquem que devemos utilizar o valor da nossa população de 2 indivíduos e aplicar na lei que foi apresentada. Obtemos assim:

$$2 \cdot 2 - 0,05 \cdot 2^2 = 4 - 0,2 = 3,8$$

Como foi descrito acima, consideraremos apenas a parte inteira do resultado, e portanto, temos que após um ano, o nosso sistema terá 3 indivíduos. Vamos denotar o nosso valor inicial como $x_0 = 2$, e o valor que encontramos como $x_1 = 3$. Podemos perguntar aos alunos novamente qual será nossa população no ano seguinte, e o cenário ideal é o de que os alunos compreendam que utilizamos o último valor obtido aplicado na lei da função, e com isso obteremos o número de indivíduos após 2 anos, que denotaremos de x_2, e assim por diante. Vamos observar o que acontece:

$$2 \cdot 3 - 0,05 \cdot 3^2 = 6 - 0,45 = 5,5 \quad \rightarrow \quad x_2 = 5,$$

$$2 \cdot 5 - 0,05 \cdot 5^2 = 10 - 1,25 = 8,75 \quad \rightarrow \quad x_3 = 8,$$

$$2 \cdot 8 - 0,05 \cdot 8^2 = 16 - 3,2 = 12,8 \quad \rightarrow \quad x_4 = 12,$$

$$2 \cdot 12 - 0,05 \cdot 12^2 = 24 - 3,2 = 16,8 \quad \rightarrow \quad x_5 = 16,$$

$$2 \cdot 16 - 0,05 \cdot 16^2 = 32 - 12,8 = 19,2 \quad \rightarrow \quad x_6 = 19,$$

$$2 \cdot 19 - 0,05 \cdot 19^2 = 38 - 18,05 = 19,95 \quad \rightarrow \quad x_7 = 19.$$

A partir deste exemplo inicial, podemos comentar sobre a ideia de um processo contínuo, e como observarmos o seu comportamento mediante as ferramentas previamente aprendidas pelos alunos. Outra coisa que também pode ser comentada é sobre o valor de 19 indivíduos, que, seguindo os parâmetros predeterminados, se mantém nele mesmo. O professor pode exemplificar este comportamento em um possível cenário real, como por exemplo uma escassez de recursos no ambiente, devido ao crescimento populacional, que dificulta a população a crescer nesta faixa.

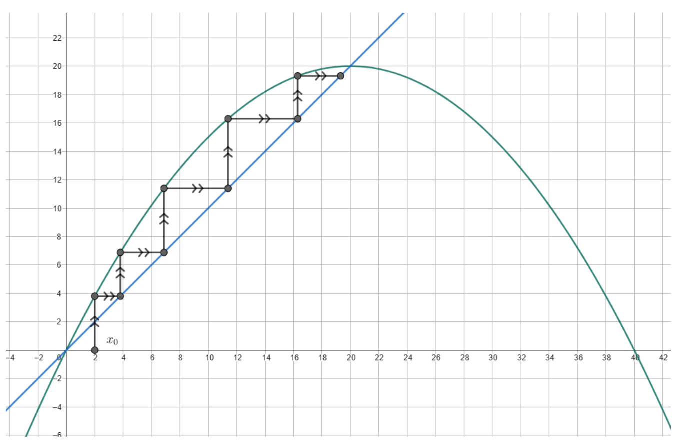

Figura 22: Órbita de $x_0 = 2$ em $f(x) = 2x - 0,05x^2$

Seguido ao exemplo anterior, um outro ponto interessante que pode ser explorado é analisar o que ocorre se tomarmos como população inicial, o valor $x_0 = 30$, por exemplo. Em resumo:

$$2 \cdot 30 - 0,05 \cdot 30^2 = 60 - 45 = 15 \quad \rightarrow \quad x_1 = 15,$$

$$2 \cdot 15 - 0,05 \cdot 15^2 = 30 - 11,25 = 18,75 \quad \rightarrow \quad x_2 = 18,$$

$$2 \cdot 18 - 0,05 \cdot 18^2 = 36 - 16,2 = 19,8 \quad \rightarrow \quad x_3 = 19.$$

Neste caso, vemos que a população cai drasticamente do valor 30 para o valor 15, e volta a subir. Este é um momento interessante para indagar os alunos sobre um possível comportamento padrão neste sistema. Algunas possíveis perguntas que podem surgir em meio aos alunos, ou fomentada pelo professor para que eles pensem a respeito:

- O crescimento da população segue um padrão uniforme? Como uma PA ou uma PG?
- Os valores da população pararam de crescer perto de algum valor? Se sim, qual?
- Tomamos como população inicial um valor acima do "limite"da população, e ela caiu imediatamente pra um valor bem menor, isto acontece com outros valores acima do "limite"que nós supomos?

Estes e outros questionamentos devem ser respondidos pelo professor na medida do possível neste momento inicial. A lei que descreve o sistema é descrita pela função $f(x) = 2x - 0,05x^2$, que por ser uma função quadrática, não teremos uma mudança populacional como uma progressão aritmética ou uma progressão geométrica (pelo menos não necessariamente). Os valores da função no intervalo analisado tendem a se aproximar do valor de população 20, mas caso apenas tomemos a parte inteira dos resultados para simular um sistema de crescimento populacional, então haverá casos onde o valor da população se manterá em 19, como vimos no exemplo a partir de dois valores iniciais diferentes.

Um aspecto importante a ser comentado com os alunos, é o de que quando encontramos um valor já encontrado antes, nós já vimos então o comportamento desta população a partir deste valor. Exemplificando este pensamento, nós encontramos um valor de população igual a 19 no nosso segundo exemplo, mas como já encontramos este valor no primeiro exemplo, já sabemos para onde o valor da população irá a seguir, pois todos os cálculos que faremos com o valor 19 se repetirão. Isto abre portas para outro ponto a seguir.

Outro ponto interessante a se comentar com os alunos é: O que acontece quando tomamos nossa população inicial igual a 20 indivíduos? Nós teremos que $f(20) = 2 \cdot 20 - 0,05 \cdot 20^2 = 40 - 0,05 \cdot 400 = 40 - 20 = 20$, logo, $x_1 = 20$. Ou seja, quando temos 20 indivíduos como população, então após 1 ano teremos novamente 20 indivíduos. Como fazemos sempre os mesmos cálculos com valores iguais de população, nós vamos encontrar novamente 20 indivíduos depois de 1 ano, e novamente 20 indivíduos depois de 2 anos, e assim por diante.

Apenas com este exemplo, portanto, pode ser introduzido de maneira informal os conceitos de ponto fixo e atração, dando uma noção inicial destes conceitos pelo estudo do comportamento das órbitas no contexto deste exemplo. Vamos continuar e abordar um pouco o coneito de órbita periódica, mas é importante destacar que antes de abstrair os conceitos apresentados para alunos que ainda estão no ensino básico, é recomendado mais alguns exemplos contextualisados.

Um possível exemplo para mostrar aos alunos uma órbita periódica, pode ser a função $f(x) = x^2 - 1$, que possui uma órbita periódica de período 2 nos pontos 0 e -1. Primeiro, podemos apresentar esta função e deixar em aberto a questão de como é a órbita do ponto inicial $x_0 = -1$. Após a órbita voltar ao valor -1 para, por exemplo, o $x_2 = -1$, talvez alguns alunos já identifiquem o padrão, mas para garantir que os alunos compreendam melhor o conceito de uma órbita periódica, é recomendável mostrar aos alunos como essa órbita é cíclica até a quinta iteração, por exemplo.

Outro exemplo simples para introduzir a ideia de atração e repulsão pode ser a função $f(x) = x^2$, que é familiar aos alunos do ensino médio, possuindo pontos fixos tanto para $x_0 = 0$ quanto para $x_0 = 1$. Embora esta seja uma abordagem viável, uma outra opção mais simples, porém didática, pode ser de apresentar uma função ainda mais direta e de fácil manipulação com um ponto fixo atrator, e outra com um ponto fixo repulsor. Por exemplo, a função de primeiro grau $f(x) = 2x - 3$ que possui um ponto fixo repulsor para $x = 3$, e a função de primeiro grau $f(x) = x/2 + 1$, que possui um ponto fixo atrator em $x = 2$.

Tendo discutido algumas abordagens e como explorá-las, será apresentado abaixo um plano de aula para uma exploração e introdução inicial de sistemas dinâmicos para uma turma na segunda metade do ensino médio. Vale destacar que quanto ao método avaliativo destas aulas, isto fica totalmente a critério do professor responsável como proceder, se estas aulas com caráter de iniciação científica teriam parte na avaliação, e qual seria a pontuação distribuída nestas duas aulas. Portanto, a avaliação sugerida neste plano é evidentemente uma sugestão genérica, com 10 pontos distribuídos também simbolizando 100% dos pontos que o professor optar por distribuir ao longo destas aulas.

Plano de Aula

Tema: Sistemas dinâmicos, um primeiro contato
Professor(a): ———
Ano/Turma: 2º ano do ensino médio

Objetivos

- Obter uma noção inicial de sistemas dinâmicos, alguns de seus principais conceitos, e sobre processos contínuos.

Habilidades

- **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (adaptada)

Metodologia

As aulas serão aulas expositivas dialogadas. O(a) professor(a) irá utilizar de alguns exemplos para introduzir uma noção inicial dos conceitos a serem abordados, e em seguida, estes conceitos serão definidos e trabalhados. Os exemplos dados em sala terão caráter de experimentos. Idealmente, será utilizado um software para apresentar graficamente os conceitos estudados para auxílio.

Recursos necessários

Quadro/lousa, giz/pincel, computador e projetor.

Desenvolvimento da Aula

Foram planejadas 2 aulas de 50 minutos cada.

Aula 1:
10 minutos: Introdução à turma sobre o tema, o que será realizado, e como será a dinâmica das próximas aulas. Também está incluso neste tempo inicial um possível atraso na logística de chegar à sala de aula, e de preparar o ambiente de ensino.

10 minutos: Exemplos iniciais de um processo contínuo. Neste trecho da aula, o(a) professor(a) irá evidenciar a diferença de um processo contínuo para as funções matemáticas trabalhadas. Dois exemplos serão descritos para evidenciar este conceito:

Exemplo 1: Difusão de um rumor em uma escola
Um boato se espalha em uma escola da seguinte forma: Ao longo de 1 dia, as pessoas que sabem deste boato o comentam com outras 2 novas pessoas que ainda não sabem deste boato. Assim, ao final do dia, o triplo de pessoas está sabendo desse boato.
Uma função que descreve o número de pessoas que ficaram sabendo do boato após 1 dia é: $f(x) = 3x$.

Exemplo 2: Crescimento de seguidores em uma rede social
O número de seguidores de uma pessoa cresce em 20% a cada semana.
Uma função que descreve esse crescimento semanal é: $f(x) = x + 0,2 \cdot x$.

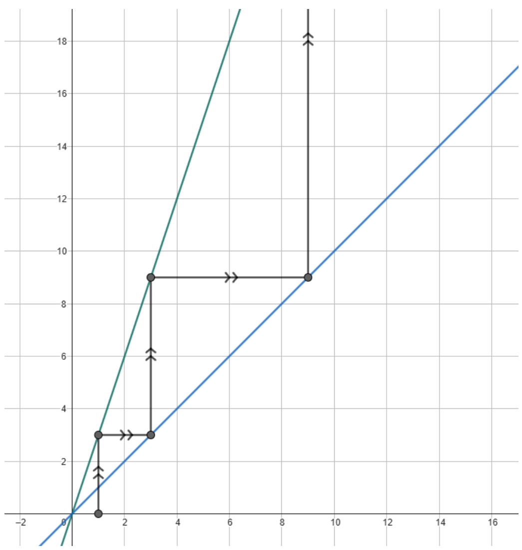

Figura 23: Órbita de $x_0 = 1$ em $f(x) = 3x$

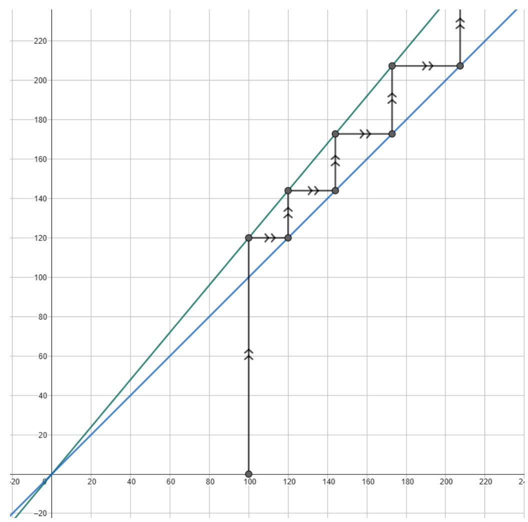

Figura 24: Órbita de $x_0 = 100$ em $f(x) = x + 0,2 \cdot x$

O(a) professor(a) irá apresentar estes dois exemplos a turma, com a finalidade de introduzir a noção de iteração de função, que significa repetir ou reaplicar a função.
30 minutos: Nesta parte da aula, será abordado inicialmente um exemplo de um crescimento populacional, dado pela seguinte lei (que nos dá o novo número de indivíduos após 1 ano, a partir de um valor x de indivíduos):

$$2x - 0,05x^2$$

Este exemplo será utilizado com um número inicial de 2 indivíduos, considerando apenas a parte inteira dos resultados, para representar o número de indivíduos. Neste exemplo, o(a) professor(a) evidenciará novamente a ideia de um processo contínuo, de iteração, e chamará atenção aos alunos sobre o conceito de *órbita*, que representa o conjunto dos valores obtidos a partir da iteração de um valor/ponto inicial.

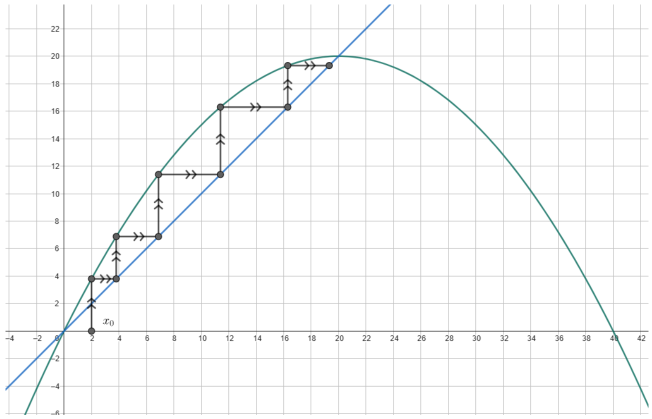

Figura 25: Órbita de $x_0 = 2$ em $f(x) = 2x - 0,05x^2$

Em seguida, o(a) professor(a) questionará os alunos sobre o valor da população anterior ter "estagnado", e levantará a questão em aberto para os alunos sobre o que ocorre se tomarmos como valor inicial de população, 30? Observando em seguida com os alunos as primeiras iterações, o(a) professor(a) irá comentar com a turma sobre este sistema, sobre um possível comportamento padrão, e sobre um possível "limite de população"neste sistema.

Será apresentado para os alunos o que ocorre quando toma-se como população inicial os valores 19 e 20 ainda no exemplo acima. Neste momento, o professor introduzirá a noção de ponto fixo aos alunos, tangenciando também o conceito de ponto fixo atrator, indagando aos alunos se todos os números de população próximos aos valores 19 e 20 nos levam, com o tempo, a estes valores.

Aula 2: 10 minutos: Neste momento, serão revisados os conceitos vistos na última aula, e os principais resultados e conceitos abordados. Caso as duas aulas sejam realizadas em sequência (ou com um intervalo pequeno de tempo), o(a) professor(a) pode optar por diminuir ou omitir este momento.

20 minutos: Neste momento, será apresentado aos alunos o seguinte contexto: Um tanque de água é enchido com 200 litros a cada hora, mas possui um vazamento, que além de vazar água, vaza mais água quanto mais água o tanque possui, por causa da pressão da água. A quantidade de água no tanque após uma hora é descrita pela seguinte função:

$$f(x) = x + 200 - 0,05x$$

Com esse exemplo, o(a) professor(a) irá mostrar algumas iterações partindo dos valores iniciais de 500 litros, e 6000 litros. No primeiro valor, os valores irão aumentar, pois no contexto, o tanque recebe mais água do que perde pelo vazamento, aumentando os valores a cada iteração. Como os valores crescem cada vez menos a cada hora, pode-se perguntar aos alunos e levantar a questão: Terá um momento onde a água do tanque não irá mais aumentar de hora em hora? E para o segundo valor a ser apresentado, isto é parcialmente visualizado, onde para o valor inicial de 6000 litros, a quantidade de água de hora em hora irá decair. Com isto, o professor deverá reforçar a ideia de atração em torno de um ponto, e perguntar aos alunos se alguém consegue pensar em um método de descobrir o ponto fixo deste sistema. Em seguida, o professor irá realizar com os alunos o cálculo $x + 200 - 0,05x = x$, explicando como esta equação descreve e encontra o ponto fixo desta função, em que um certo valor x aplicado na função deve resultar neste mesmo valor. O valor encontrado será $x = 4000$, que é o ponto fixo desta função.

10 minutos: Neste momento, o(a) professor(a) irá apresentar a função $f(x) = x^2 - 1$ aos alunos, e lhes trará a seguinte indagação: O que acontece quando iteramos esta função partindo do valor inicial $x_0 = 1$? Construindo este exemplo em conjunto com a sala, o(a) professor(a) irá mostrar algumas iterações a partir deste valor inicial, mostrando que este valor inicial gera uma órbita que passa a se repetir nos valores 0 e -1. Nesse momento, o(a) professor(a) irá introduzir aos alunos a noção inicial de "órbita periódica", mostrando neste exemplo como ocorre quando o valor 0 aplicado nesta função, leva ao valor -1, que leva ao valor 0, e isto se repete, criando um ciclo periódico.
10-20 minutos: Neste momento final, o(a) professor(a) irá apresentar uma atividade aos alunos. Será lhes apresentada a função quadrática $f(x) = x^2$. Nesta atividade, o que é pedido aos alunos é que encontrem os dois pontos fixos desta função, que podem ser encontrados resolvendo a equação $x^2 = x$, e para que testem o que acontece quando iteramos valores próximos a estes pontos fixos. Para termos parâmetros, o(a) professor(a) pode pedir para que os alunos iterem 3 valores: Um valor logo antes do primeiro ponto fixo (um negativo logo antes de 0), um valor entre os dois pontos fixos (um valor entre 0 e 1), e um valor logo após segundo ponto fixo (um pouco maior do que 1).

Avaliação

Serão distribuídos 10 pontos ao longo destas duas aulas, onde 5 pontos serão distribuídos para participação e presença, e outros 5 pontos para a atividade ao final da segunda aula. A participação será avaliada pela disciplina em sala de aula, visto que a participação no quesito responder perguntas não é viável de ser pontuada. Dado o caráter desta exploração, os 5 pontos distribuídos na atividade visarão apenas na participação em realizar a atividade, e não necessariamente em obter uma resposta correta.

Conclusão

O objetivo deste estudo é apresentar uma introdução à sistemas dinâmicos, com uma abordagem pedagógica voltada para o ensino básico. Ao longo do trabalho, discutimos conceitos fundamentais da área, exploramos aplicações didáticas e analisamos estratégias para tornar o tema acessível aos estudantes.

Dentre os principais resultados, destacamos que a utilização de exemplos práticos e tecnologias podem facilitar a compreensão dos conceitos de sistemas dinâmicos, permitindo que os alunos visualizem e experimentem suas propriedades de maneira interativa e intuitiva. Além disso, observamos que o ensino desse tema pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático, incentivando a modelagem e a análise de fenômenos naturais e sociais.

Apesar das contribuições desta pesquisa, reconhecemos que há desafios na implementação dessa abordagem no ensino básico, como a necessidade de formação adequada dos professores e a adaptação dos conteúdos ao currículo escolar. Nesse sentido, sugerimos futuras investigações sobre metodologias específicas para a introdução de sistemas dinâmicos na educação básica, bem como a criação de materiais didáticos que auxiliem docentes e discentes nesse processo.

Dessa forma, esperamos que este trabalho contribua para a ampliação das discussões sobre o ensino de sistemas dinâmicos e inspire novas abordagens para a sua aplicação na educação matemática, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada para os alunos.

Referências

1 DEVANEY, Robert L. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2020.

2 GEOGEBRA. Software utilizado para imagens. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/calculator>>. Acesso em: 3 abr. 2025. Todas as imagens foram produzidas pelo autor com auxílio do software.

3 BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

4 MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. Matemática escolar, matemática científica, saber docente. *Zetetike*, Campinas, SP, v. 11, n. 1, p. 57–80, 2003. DOI: 10.20396/zet.v11i19.8646950. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646950>>. Acesso em: 3 abr. 2025.

5 LIMA, Elon Lages. *Análise real. Volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.