



Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Departamento de Engenharia Elétrica



## **Trabalho de Conclusão de Curso**

# **Sintonia de Controladores PID Robustos por Meta-heurísticas e LMI**

**Mateus Araújo de Oliveira**

João Monlevade, MG  
2018

**Mateus Araújo de Oliveira**

**Sintonia de Controladores PID Robustos por  
Meta-heurísticas e LMI**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

**Universidade Federal de Ouro Preto**  
**João Monlevade**  
**2018**

O482s Oliveira, Mateus Araújo de.  
Sintonia de controladores PID robustos por meta-heurísticas e LMI  
[manuscrito] / Mateus Araújo de Oliveira. - 2018.

38f.: il.: color; grafs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.  
Coorientador: Prof. Dr. Victor Costa da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de  
Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia elétrica. 2. Controladores PID. 3. Heurística. I. Braga,  
Márcio Feliciano. II. Campos, Victor Costa da Silva. III. Universidade Federal  
de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 681.5

Catálogo: [ficha@sisbin.ufop.br](mailto:ficha@sisbin.ufop.br)



## ATA DE DEFESA

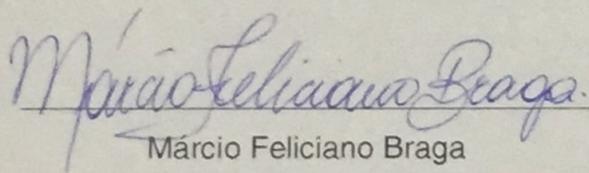
Aos 21 dias do mês de dezembro de 2017, às 9 horas, no bloco C deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pelo formando Mateus Araújo de Oliveira, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Márcio Feliciano Braga, Vítor Costa da Silva Campos, Anny Verly e Marcus Vinicius de Paula.

O candidato apresentou a monografia intitulada: Sintonia de Controladores PID Robustos por Meta-heurísticas e LMI. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela aprovação do candidato, com a nota média 9,3, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo formando.

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

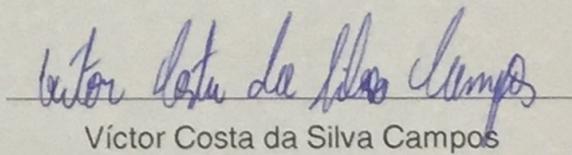
Banca Examinadora	Nota
Márcio Feliciano Braga	9,5
Vítor Costa da Silva Campos	9,5
Anny Verly	8,5
Marcus Vinicius de Paula	9,5
<b>Média</b>	<b>9,3</b>

João Monlevade, 21 de dezembro de 2017.



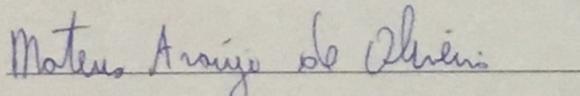
Márcio Feliciano Braga

Professor Orientador



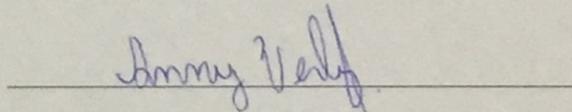
Vítor Costa da Silva Campos

Professor Coorientador



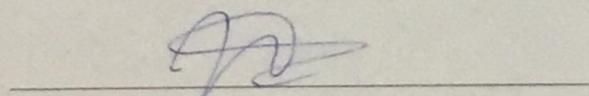
Mateus Araújo de Oliveira

Aluno



Anny Verly

Professora Convidada



Marcus Vinicius de Paula

Professor Convidado



---

**ANEXO X - TERMO DE RESPONSABILIDADE**

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "Sintonia de Controladores PID Robustos por Meta-heurísticas e LMI" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 05 de fevereiro de 2018 .

Matheus Araújo de Oliveira  
Nome completo do(a) aluno(a)

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força e sabedoria durante toda esta caminhada, aos meus pais, Zulmar e Ana Marilza, aos meus irmãos Ana Eliza e João Paulo, e aos meus amigos que me apoiaram e estiveram comigo durante toda esta jornada.

Agradeço de forma especial aos professores Márcio e Vítor, que me deram todo suporte necessário para a conclusão deste trabalho.

*"When everything seems to be going against you, remember that the airplane takes off against the wind, not with it."*

*– Henry Ford*

# Resumo

Mesmo com as novas metodologias de controle, o controlador PID ainda é o controlador mais empregado nas indústrias devido ao seu desempenho. Portanto, a sintonia de controladores PID ainda é muito utilizada nos meios industriais e novas técnicas têm sido desenvolvidas para a sintonia do controlador. Portanto, este trabalho tem como objetivo a sintonia de controladores robustos (compensadores capazes de estabilizar sistemas sujeitos a incertezas) por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e métodos de otimização conhecidos como meta-heurísticas (*Simulated Annealing* e *Particle Swarm Optimization*). As LMIs terão como principal alvo, a análise de estabilidade do sistema e a quantificação do custo de determinada planta utilizando-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Para a primeira parte deste projeto, um sistema mecânico é utilizado como sistema-teste. Na parte final, um módulo didático, que simula um sistema sujeito a incertezas, é modelado de modo que as incertezas sejam descritas por uma representação politópica e LMIs e técnicas de otimização sejam aplicadas para a sintonia do controlador robusto.

**Palavras-chave:** Controladores PID, LMIs, norma  $\mathcal{H}_\infty$ , meta-heurísticas.

# Abstract

Even with the new control methodologies, the PID controller is still the most used controller in the industry due to its performance. Therefore, the tuning of PID controllers is still widely used in industrial environments and new techniques have been developed for the tuning of the controller. Therefore, this work aims to tune robust controllers (compensators capable of stabilizing systems subject to uncertainties) by means of linear matrix inequalities (LMIs) and optimization techniques known as metaheuristics (Simulated Annealing and Particle Swarm Optimization). The LMIs will have as their main target, the stability analysis of the system and the evaluation of the cost of an established plant using the  $\mathcal{H}_\infty$  norm. In the first part of this project, a mechanical system is used as a test system. In the final part, one didactic module, which simulates a system subject to uncertainties, is modeled so that the uncertainties are described by a polytopic representation and LMIs and optimization techniques are applied for the tuning of the robust controller.

**Keywords:** PID controller, LMIs,  $\mathcal{H}_\infty$  norm, metaheuristics.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Topologia PID Paralelo. . . . .	5
Figura 2 – Fluxograma <i>Simulated Annealing</i> . . . . .	11
Figura 3 – Fluxograma PSO ( <i>Particle Swarm Optimization</i> ). . . . .	14
Figura 4 – Diagrama para o erro filtrado. . . . .	16
Figura 5 – Sistema Mecânico massa-mola-amortecedor (a) Esquema e (b) Diagrama de corpo livre. . . . .	17
Figura 6 – Errorbar para <i>PSO</i> (a) Fator multiplicativo 10 para a população inicial que é gerada aleatoriamente e (b) Fator multiplicativo 100 para a população inicial que é gerada aleatoriamente. . . . .	19
Figura 7 – Errorbar para <i>Simulated Annealing</i> (a) Caso I com $\beta = 0.8$ e (b) Caso II com $\beta = 0.9$ . . . . .	20
Figura 8 – Resposta ao degrau do sistema compensado com o controlador PID projetado. As características de desempenho do sistema são apresentadas na parte inferior. . . . .	21
Figura 9 – Primeiro módulo com circuito subtrator, amplificador inversor e passatudo. . . . .	23
Figura 10 – Segundo módulo com filtro passa-baixas de segunda ordem. . . . .	23
Figura 11 – Resposta ao Degrau do módulo didático aplicando os parâmetros encontrados por meio da Meta-heurística PSO e utilizando os parâmetros $\alpha$ e os parâmetros do Controlador PID $K = [0.39 \ -10.19 \ -7.12 \ 11.59]$ . . . . .	25
Figura 12 – Resposta ao Degrau do módulo didático aplicando os parâmetros encontrados por meio da Meta-heurística PSO em um sistema estável em malha aberta com os parâmetros do Controlador PID $K = [0.39 \ -10.19 \ -7.12 \ 11.59]$ . . . . .	25
Figura 13 – Resposta ao Degrau do módulo didático aplicando os parâmetros encontrados por meio da Meta-heurística PSO em um sistema instável em malha aberta com os parâmetros do Controlador PID $K = [0.39 \ -10.19 \ -7.12 \ 11.59]$ . . . . .	26

# Lista de abreviaturas e siglas

PID	Proporcional-Integral-Derivativo
LMI	Desigualdade Matricial Linear
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>

# Lista de símbolos

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\alpha$	Letra grega minúscula alfa
$\beta$	Letra grega minúscula beta
$\omega$	Letra grega minúscula omega
$\tau$	Letra grega minúscula tau
$\Re$	Conjunto de números reais
$K_p$	Ganho proporcional
$K_i$	Ganho integral
$K_d$	Ganho derivativo
$T_f$	Constante de tempo do filtro derivativo
$\varphi_1$	Influência cognitiva
$\varphi_2$	Influência social

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Estrutura do Trabalho</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>CONTROLADORES PID</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Descrição do Controlador PID</b>	<b>3</b>
2.1.1	Ação Proporcional	3
2.1.2	Ação Integral	4
2.1.3	Ação Derivativa	4
2.1.3.1	Filtro Derivativo	4
2.1.4	Formas do PID	5
<b>2.2</b>	<b>Controlador PID em Espaço de Estados</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS</b>	<b>7</b>
<b>3.1</b>	<b>Sistemas Incertos</b>	<b>7</b>
<b>3.2</b>	<b>LMIs</b>	<b>7</b>
3.2.1	Análise de Estabilidade	8
3.2.2	Análise de Custo Garantido	9
3.2.2.1	Norma $\mathcal{H}_\infty$	9
<b>3.3</b>	<b>Meta-Heurística</b>	<b>11</b>
3.3.1	Simulated Annealing	11
3.3.2	Particle Swarm Optimization	12
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS EM AMBIENTE SIMULADO</b>	<b>15</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelagem da Dinâmica do Sistema</b>	<b>15</b>
4.1.1	Técnicas de Otimização	16
<b>4.2</b>	<b>Resultados</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO NO MÓDULO DIDÁTICO</b>	<b>22</b>
<b>5.1</b>	<b>Módulo Didático</b>	<b>22</b>
5.1.1	Técnicas de Otimização	23
<b>5.2</b>	<b>Resultados</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>27</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>28</b>

# 1 Introdução

Embora novas e eficazes teorias e metodologias de projetos sejam continuamente desenvolvidas no campo de controle, os controladores Proporcional-Integral-Derivativos (PID) são ainda, de longe, os controladores mais adotados na indústria devido à relação custo/benefício vantajosa que eles podem proporcionar. De fato, embora sejam relativamente simples de aplicar, eles são capazes de fornecer um desempenho satisfatório em muitas tarefas de controle de processo (VISIOLI, 2006). As ações proporcional, integral e derivativa estão diretamente ligadas ao erro do sistema (diferença entre a entrada e a saída). A ação proporcional é imediata e proporcional ao erro, aumentando a largura de banda do sistema e produzindo uma resposta mais rápida, porém, mais oscilatória. A ação derivativa é preditiva, diretamente relacionada com a derivada do erro, dando um efeito de amortecimento, o qual se deve tomar cuidado para que o sistema não se torne instável. A ação integral, que corresponde à integral do erro, pode eliminar o erro em regime permanente quando se tem como entrada um sinal do tipo degrau, mas torna o sistema mais lento e o deixa menos estável.

Os métodos desenvolvidos para determinar os parâmetros dos controladores PID levam em conta o propósito, a dinâmica do sistema e fatores que influenciam o sistema para que os parâmetros do controlador obtidos gere um resultado satisfatório. Algumas restrições devem ser analisadas antes que o método seja desenvolvido, são elas: dinâmica do sistema, não linearidades, distúrbios e incertezas do processo. Dois métodos clássicos para determinar os parâmetros do PID foram apresentados por Ziegler e Nichols (1942). O primeiro é o método de resposta ao degrau e o segundo é o método pela resposta em frequência (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Além de outros métodos que são modificações dos métodos de Ziegler e Nichols. Por exemplo, o método CHR (Chien, Hrones e Reswick) o qual utiliza o método de resposta ao degrau, com o intuito de obter a resposta mais rápida sem sobressinal ou a resposta mais rápida com 20% de sobressinal. Outros métodos, também citados por Åström e Hägglund (1995), são Sintonia- $\lambda$ , Método Haalman e Modelo de Controlador Interno (IMC).

Incertezas podem ser vistas quando algumas características do sistema não são conhecidas no momento da modelagem ou análise. Segundo Dorf (2010), muitos sistemas têm parâmetros que são constantes mas têm valores incertos dentro de uma faixa. Por isso, busca-se sempre projetar um controlador que garanta a estabilidade do sistema operando em malha fechada independentemente da incerteza presente. Existem diversas maneiras de representar as incertezas. As incertezas politópicas, incertezas na forma afim, incertezas limitadas em norma e incertezas intervalares. Neste trabalho, as incertezas politópicas são utilizadas para a parametrização do módulo didático.

Problemas de otimização envolvem a especificação de possíveis soluções e a definição

de um conceito da decisão ótima ou global. Denota-se um conjunto de soluções como  $X$  e supõe-se que um conjunto de decisões factíveis (ou candidatas) é um subconjunto  $S$  de  $X$ . Uma maneira de quantificar o desempenho de uma decisão pode ser feita expressando seu valor em termos de um valor real quantificado  $f(x)$ , em que  $f$  é uma função chamada função de custo (SCHERER; WEILAND, 2000). Além disso, as propostas para otimização podem ser tanto para maximização como também para minimização.

## 1.1 Objetivos

A proposta deste trabalho abrange a sintonia de controladores PID robustos aplicando técnicas de LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e meta-heurísticas em um sistema. A modelagem da planta e do controlador se dão no espaço de estados. Técnicas de otimização são aplicadas aos controladores PID robustos, os quais garantem a estabilidade do sistema sujeito a incertezas e são tratadas por meio de LMIs, procurando encontrar os melhores ganhos para o controlador com um custo ótimo. A função de custo é quantificada por meio da norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 1.2 Estrutura do Trabalho

No Capítulo II, apresenta-se uma abordagem teórica sobre os controladores PID e suas características: descrição dos ganhos ( $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ ) individualmente analisados, as formas de implementação e as formas digitais do controlador.

No Capítulo III, tem-se uma breve descrição do projeto de controladores robustos, cujo foco está nas incertezas do sistema, LMIs para a análise de estabilidade e custo garantido e as técnicas meta-heurísticas.

Nos Capítulos IV e V, a técnica proposta é validada por meio de um sistema-teste, o que permite a análise e verificação dos resultados obtidos. Após a validação dos resultados obtidos no sistema-teste, as técnicas são aplicadas a um modelo de um sistema incerto.

## 2 Controladores PID

A realimentação em sistemas de controle é uma ferramenta indispensável para o controle de um processo. É extremamente poderosa e simples, pois, com a realimentação, os efeitos dos ruídos nas plantas podem ser reduzidos e tornar o sistema menos sensível a variações de processo. O controlador PID pode ser considerado uma simples implementação de uma realimentação. O PID possui características que podem eliminar o erro em regime permanente por meio de sua ação integral e, além do mais, pode ter uma ação antecipativa por meio da ação derivativa. Uma descrição detalhada de cada ação do controlador Proporcional-Integrativo-Derivativo é realizada a fim de proporcionar uma abordagem completa do controlador PID.

### 2.1 Descrição do Controlador PID

De acordo com Åström e Hägglund (2006), o controlador PID pode ser descrito pela função de transferência dada por

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (2.1)$$

e no domínio do tempo por

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d(\tau) + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.2)$$

em que  $K_p$  corresponde ao ganho proporcional,  $K_i$  ao ganho integral,  $K_d$  ao ganho derivativo do controlador PID,  $u$  ao sinal de controle e  $e$  ao sinal de erro.

Portanto, como destacado por (2.1) ou (2.2), o controlador PID consiste da soma de três ações de controle: ação proporcional, ação integral e ação derivativa.

#### 2.1.1 Ação Proporcional

O termo proporcional do controlador PID está diretamente relacionado ao erro do sistema, como pode ser visto por

$$u(t) = K_p e(t) = K_p (r(t) - y(t)), \quad (2.3)$$

em que  $r(t)$  é a entrada e  $y(t)$  é a saída do sistema. O controlador proporcional produz erro em regime permanente: quanto maior o ganho, menor será o erro em regime permanente. Logo, o aumento do ganho proporcional pode melhorar a precisão do sistema. Entretanto, o ganho torna o sistema mais oscilatório, o que pode causar instabilidade. A função de transferência do controlador proporcional compreende o primeiro termo de (2.1).

### 2.1.2 Ação Integral

A ação integral pode ser definida como sendo a parte proporcional à integral do erro. Note que a integral é baseada nos valores passados do erro. O termo integral do controlador PID é dado por

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Nessa ação, o erro em regime permanente pode ser anulado, pois, a presença de um polo na origem faz com que o erro em regime permanente seja nulo quando se tem um sinal do tipo degrau aplicado à entrada do sistema. Porém, a adição de um polo na origem do sistema pode deixá-lo mais lento, acarretando instabilidade. A função de transferência do controlador integral corresponde ao segundo termo de (2.1).

### 2.1.3 Ação Derivativa

O controlador derivativo baseia-se em antecipar os valores do erro, diferentemente do controlador integral que tem como base os valores anteriores ao valor atual. Com isso, pode-se ter uma ação antecipativa no controle do sistema. A lei de controle da parte derivativa do controlador PID, cuja função de transferência é dada pelo último termo de (2.1), pode ser expressa como

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (2.5)$$

De acordo com Visioli (2006), a ação derivativa possui um grande potencial que pode melhorar o desempenho do controlador, pois permite antecipar uma tendência incorreta da saída do sistema e reagir contra o erro. Entretanto, em casos práticos, este controlador possui alguns problemas que fazem com que ele não seja adotado com muita frequência. Segundo Åström e Hägglund (2006), uma desvantagem da ação derivativa é o alto ganho para sinais de alta frequência, ou seja, altos valores medidos de ruído geram altas variações no sinal de controle.

#### 2.1.3.1 Filtro Derivativo

O controlador PID descrito por (2.1) não possui utilidade prática. Um problema que o controlador pode proporcionar corresponde a um ganho para altas frequências que amplifica o ruído na variável manipulada, o que pode ser resolvido aplicando um filtro derivativo à ação derivativa do controlador. Este filtro pode possuir uma ordem maior, mas, para o trabalho proposto, um filtro de primeira ordem é utilizado. Sendo assim, a função de transferência do controlador PID com filtro derivativo é dada por

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{T_f s + 1} \quad (2.6)$$

em que  $T_f$  é a constante de tempo do filtro.

### 2.1.4 Formas do PID

Existem diversas formas de implementação dos controladores PID. A primeira delas é a forma ideal, a qual pode ser descrita por

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.7)$$

sendo  $T_i$  a constante de tempo integral,  $T_d$  a constante de tempo derivativa e  $K_p$  o ganho proporcional.

De acordo com Visioli (2006), uma maneira alternativa de representar o controlador PID é a estrutura em série, em que a constante de tempo da derivada afeta também a ação integral cuja descrição é dada por

$$C_s(s) = K'_p \left( 1 + \frac{1}{T'_i s} \right) (T'_d s + 1) = K'_p \left( \frac{T'_i s + 1}{T'_i s} \right) (T'_d s + 1). \quad (2.8)$$

Por último, tem-se a forma paralela, a qual é utilizada neste trabalho. Pois, o controle das três ações pode ser realizadas separadamente, facilitando assim a realização das outras técnicas que serão aplicadas ao PID. Como por exemplo, representar o controlador PID no espaço de estados. Na Figura 1, apresenta-se a representação do controlador PID paralelo.

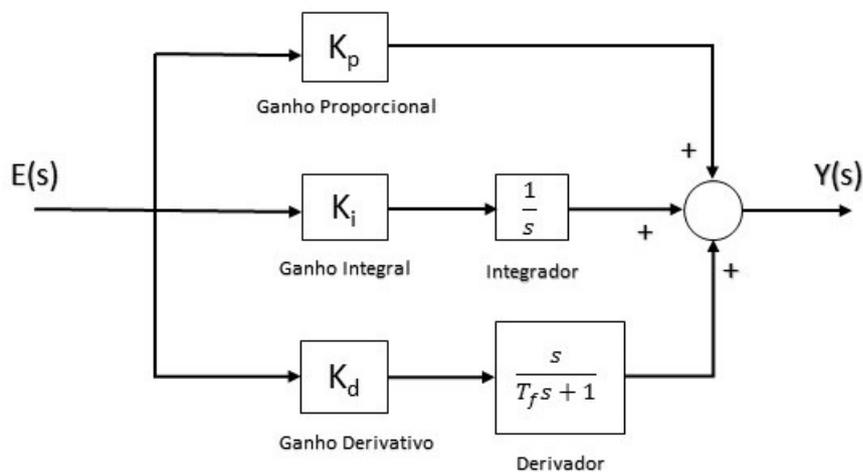


Figura 1 – Topologia PID Paralelo.

## 2.2 Controlador PID em Espaço de Estados

O controlador PID representado em espaço de estados com um filtro derivativo de primeira ordem é implementado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_f} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} K_i - \frac{K_d}{T_f^2} & \frac{K_i}{T_f} \end{bmatrix} x + \left( \frac{K_d}{T_f} + K_p \right) u. \end{aligned} \tag{2.9}$$

## 3 Projeto de Controladores Robustos

### 3.1 Sistemas Incertos

Alguns sistemas possuem parâmetros incertos, que pode ou não ser variantes no tempo e pertencer a uma determinada faixa de valores. As incertezas podem variar de acordo com as condições de operação do sistema. Mesmo que as variações possam parecer pequenas, o impacto que podem trazer ao sistema pode ser grande.

Existem diversas maneiras de representar as incertezas, porém, o modelo utilizado neste trabalho é o modelo de incertezas politópicas que pode ser representado por

$$\mathcal{A} = \{A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0\} \quad (3.1)$$

em que  $A(\alpha)$  pertence ao conjunto  $\mathcal{A}$  e corresponde ao somatório de todos os vértices conhecidos  $A_i$  multiplicado pelo parâmetro incerto  $\alpha_i$ , sendo que o somatório de todos os  $\alpha_i$  deve ser igual a unidade. Quando tem-se um modelo com  $p$  incertezas, sempre pode-se escrevê-lo como um modelo com incerteza politópica com  $N = 2^p$  vértices, dados pelas possíveis combinações dos valores extremos das incertezas no modelo.

Para o trabalho proposto, emprega-se, para o sistema incerto, a seguinte representação em espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \\ y &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Caso o politopo seja estável, então  $\rho A(\alpha)$  também será estável  $\forall \rho > 0$ . Uma constatação importante acerca de sistemas politópicos é que a estabilidade dos vértices não assegura a estabilidade robusta do sistema, sendo apenas uma condição necessária.

### 3.2 LMIs

Em meados de 1890, Lyapunov afirmou que o sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad (3.3)$$

é estável se, e somente se, existir uma matriz  $P = P'$  definida positiva tal que

$$A'P + PA < 0. \quad (3.4)$$

As condições (3.4) e  $P$  ser definida positiva, isto é  $P > 0$ , são definidas como desigualdades matriciais lineares (LMIs). Além do mais, pode-se definir  $Q = Q^T > 0$  e

então resolver  $A'P + PA = -Q$  para a matriz  $P$ , a qual é definida positiva, quando (3.3) é estável.

As desigualdades matriciais pode ser vistas por

$$T(l) := T_0 + l_1 T_1 + \dots + l_n T_n < 0, \quad (3.5)$$

em que  $l$  é um vetor linha composto de números reais e  $T_0, \dots, T_n$  são matrizes simétricas.

Em (3.5), tem-se que o sinal de menor corresponde à matriz ser definida negativa, ou seja, todos os autovalores de  $T(l)$  devem ser negativos.

Segundo Scherer e Weiland (2000), um sistema LMI é definido como o seguinte conjunto finito de LMIs

$$T_1(l) < 0, \dots, T_k(l) < 0. \quad (3.6)$$

Uma definição importante para a manipulação de matrizes é o chamado complemento de Schur.

Considere uma matriz quadrada simétrica  $Y$  dada por

$$Y = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Suponha que o determinante da matriz  $A$  é diferente de zero, ou seja, a matriz  $A$  é invertível. Pode-se definir que  $Y > 0$  se, e somente se

$$\begin{aligned} A &> 0, \\ C - B'A^{-1}B &> 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tem-se, portanto, o complemento de Schur de  $Y$  em relação a  $A$ . Pode-se também definir o complemento de Schur de  $Y$  em relação a  $C$ . Neste caso,  $Y > 0$  se, e somente se

$$\begin{aligned} C &> 0, \\ A - BC^{-1}B' &> 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2.1 Análise de Estabilidade

Um sistema do tipo (3.3), em que  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é assintoticamente estável se ao menos uma das duas condições detalhadas a seguir forem verificadas. A primeira condição diz respeito ao limite de  $x(t)$  para quando  $t$  tende ao infinito, em que o resultado deve ser nulo para uma condição inicial arbitrária, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (3.10)$$

A segunda condição que o sistema deve respeitar para ser assintoticamente estável está relacionada aos autovalores da matriz  $A$ . Nesta condição, a parte real de todos os autovalores deve ser menor do que zero. Prova-se assim que, todos os autovalores do sistema estão no semiplano esquerdo (eixo negativo).

Outro método para se verificar a estabilidade de um sistema é por meio da função de Lyapunov. Duas condições devem ser analisadas para que o sistema possa ser dito assintoticamente estável, a saber,

$$\begin{aligned} v(x) &> 0 \quad \forall x \neq 0, \\ \dot{v}(x) &< 0 \quad \forall x \neq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Deve-se escolher uma candidata à função de Lyapunov, sendo esta, normalmente, uma função quadrática,  $v(x) = x'Px$ , em que  $P = P'$ , a qual é encontrada posteriormente. Partindo das condições em (3.11), tem-se que a partir da primeira delas, a matriz  $P$  é definida positiva. A segunda condição diz que a derivada da candidata deve ser menor do que zero. Derivando-se então a função quadrática e fazendo alguns ajustes encontra-se que  $x(A'P + PA)x < 0$ , portanto, tem-se (3.4). Deste modo, para verificar se  $A$  é estável, deve-se encontrar uma solução factível para o seguinte conjunto de LMIs

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A'P + PA &< 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

## 3.2.2 Análise de Custo Garantido

### 3.2.2.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bw(t) \\ y &= Cx(t) + Dw(t). \end{aligned} \tag{3.13}$$

em que  $w(t)$  é uma entrada exógena. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser definida como o máximo valor singular da função de transferência do sistema

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \Re} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \tag{3.14}$$

em que  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, \min(m, p)$ , são os valores singulares da função de transferência.

Para um sistema com somente uma entrada e uma saída (SISO, do inglês *Single Input Single Output*), ou para sistemas de múltiplas entradas e saídas (MIMO, do inglês *Multiple Input Multiple Output*), a norma  $\mathcal{H}_\infty$  representa o valor máximo da magnitude da resposta em frequência. Considerando que  $w(t)$  é limitado, a norma pode ser quantificada pelo menor valor de  $\gamma$  tal que  $\|y(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ ,  $w(t) \in \mathcal{L}_2$ , em que  $\mathcal{L}_2$  representa um espaço de Hilbert cujos sinais são quadraticamente integráveis.

Utilizando os conceitos citados para um sistema estável, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser identificada por meio da função de Lyapunov,  $v(x) = x'Px$ , em que  $x(0) = 0$  e

$$\dot{v} + y'y - \gamma^2 w'w < 0. \tag{3.15}$$

Considerando novamente o sistema em (3.13), pode-se escrevê-lo da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x' & w' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA + CC' & PB + C'D \\ B'P + DC' & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0. \quad (3.16)$$

Considerando que a matriz

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + CC' & PB + C'D \\ B'P + DC' & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

deve ser definida negativa, pode-se afirmar que a matriz  $A$  é assintoticamente estável e a  $\|H(s)\|_\infty < \gamma$  se, e somente se,  $P = P' > 0$  existir. Para a realização da rotina no *software* MATLAB para encontrar a solução de  $P$  e  $\gamma$  deve-se aplicar o complemento de Schur ao termo do meio de (3.16), para que a LMI possa ser representada de forma conhecida e o termo que contém  $\gamma^2$  possa ficar isolado, produzindo

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -I & D' \\ C & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.18)$$

A representação (3.18) tem a estrutura de uma LMI e uma rotina em MATLAB pode ser executada para a obtenção dos parâmetros desconhecidos.

Note que o termo  $\gamma^2$  em (3.18) não é linear. Deste modo, pode-se substituí-lo por  $\mu$  gerando um procedimento convexo de otimização, que compreende minimizar  $\mu$  e encontrar uma matriz  $P = P' > 0$ . Finalmente pode-se encontrar o valor de  $\gamma$  extraíndo-se a raiz quadrada de  $\mu$ .

Para a análise de custo garantido de um sistema incerto (3.2), pode existir matrizes do sistema que não são totalmente conhecidas, porém, deve fazer parte de um politopo que é dado por

$$\mathcal{D} = \{(A, B, C, D)(\alpha) : (A, B, C, D)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A, B, C, D)_i; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0\}, \quad (3.19)$$

cujos vértices podem ser referenciados por meio de  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  com  $i = 1, \dots, N$ .

Para a análise de custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ , determina-se qualquer valor de  $\gamma > 0$ , tal que  $\|H(\alpha, s)\|_\infty < \gamma$ ,  $\forall (A, B, C, D)(\alpha) \in \mathcal{D}$ . O menor valor encontrado de  $\gamma$  representa a norma de pior caso do politopo. Assim, para o caso politópico,  $\gamma$  é um custo garantido caso exista  $P = P' > 0$  e que a seguinte condição seja satisfeita

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'P + PA(\alpha) & PB(\alpha) & C(\alpha)' \\ B(\alpha)'P & -I & D(\alpha)' \\ C(\alpha) & D(\alpha) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (A, B, C, D)(\alpha) \in \mathcal{D}, \quad (3.20)$$

em que o melhor custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  deve corresponder ao menor valor de  $\gamma$ . O qual pode ser encontrado realizando por meio de uma rotina em MATLAB o menor valor de  $\gamma$  realizando uma busca em todo o espaço paramétrico. Porém, isto é impossível. Como a  $P$  é constante, basta avaliar a LMI (3.20) nos vértices do politopo.

### 3.3 Meta-Heurística

As meta-heurísticas são métodos de otimização cujo propósito é encontrar uma solução ótima. Além do mais, as meta-heurísticas são métodos que tentam resolver um problema de uma forma genérica. Geralmente são utilizadas em problemas que não possuem algoritmos eficientes que os resolvam. Por diversas vezes, a solução de um determinado problema pode ser encontrada demasiadamente rápida, porém, a solução pode vir a ser um ótimo local do problema e não a solução ótima global.

De acordo com Talbi (2009), as meta-heurísticas proporcionam soluções “aceitáveis” em um tempo razoável resolvendo problemas complexos da ciência e engenharia. Cada problema exige uma modelagem específica em sua heurística, para que a meta-heurística aplicada ao problema encontre a solução ótima global escapando assim dos ótimos locais.

Descreve-se a seguir os procedimentos para duas meta-heurísticas que são utilizadas no processo de otimização do trabalho proposto, sendo elas:

- *Simulated Annealing*;
- PSO (*Particle Swarm Optimization*).

#### 3.3.1 Simulated Annealing

A técnica *Simulated Annealing* é um processo baseado em fenômenos térmicos. Simula o processo de recozimento de metais, ou seja, metais aquecidos à uma temperatura muito elevada para um estado líquido e resfriados lentamente para formar cristais mais estáveis com menor energia interna. *Simulated Annealing* foi primeiramente proposto por Kirkpatrick et al. (1983).

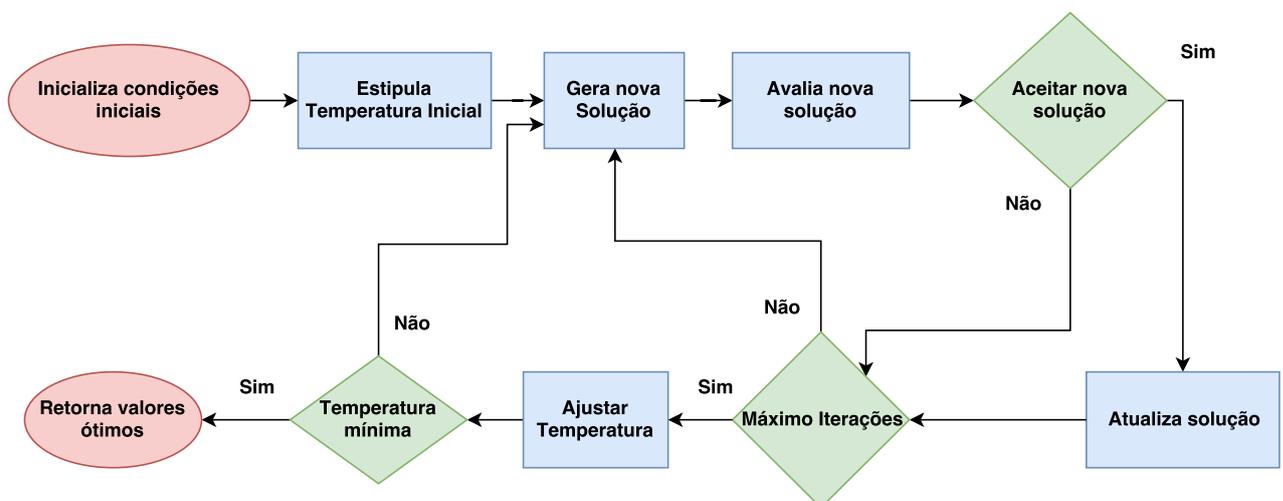


Figura 2 – Fluxograma *Simulated Annealing*.

O desenvolvimento do algoritmo pode ser visto por meio do fluxograma na Figura 2. Alguns parâmetros para o desenvolvimento da técnica devem ser inicializados para que a

busca por uma solução ótima inicie. São eles: as matrizes em espaço de estado do sistema, a condição inicial dos parâmetros do controlador, a temperatura mínima, a temperatura inicial, as constantes  $\beta$  e  $\tau$ , e o número de iterações. Tanto as matrizes do sistema como os parâmetros do controlador, são funções do trabalho proposto que serão detalhados na Seção 4.1. A temperatura mínima é o limite inferior para que o algoritmo encontre a solução ótima. Enquanto a temperatura não atingir o valor estipulado, o programa não é encerrado. A temperatura inicial deve ser um valor alto, uma vez que o processo deve escapar de soluções locais e, caso a temperatura seja inicializada com um valor pequeno, a solução pode não ser a melhor possível. A constante  $\beta$  é uma constante que representa a atualização da temperatura (com  $T = \beta T$ ). Assim como no resfriamento dos materiais, essa constante deve ser um valor entre  $0 < \beta < 1$ . A constante  $\tau$  é um valor arbitrário o que dá aleatoriedade à técnica. Além do mais,  $\tau$  está relacionado com a busca local aleatória, ou seja, faz com que o método tenha comportamento estocástico. O número de iterações limita a quantidade de vezes que a busca por uma solução ocorrerá para uma mesma temperatura. A alteração do número de iterações se dá por meio da constante  $\beta$ . Quanto mais próximo da unidade esta constante estiver, maior será o número de iterações para a busca da melhor solução.

Partindo das condições iniciais, a técnica procura por uma solução até que o número de iterações seja alcançado. Lembrando que, para cada iteração, uma função de custo é executada com o intuito de mensurar o custo da nova solução. Uma ação condicional verifica os resultados e compara com a solução anterior. Caso a condição venha a ser a melhor solução até o momento, os valores são atribuídos aos dados ótimos, e um novo incremento é realizado ao valor de entrada. Entretanto, caso a condição gerada não seja melhor, calcula-se a probabilidade de aceitar ou não o valor obtido. Por vezes, aceitar um valor pior é conveniente para que a solução possa escapar de ótimos locais e então encontrar um ótimo global posteriormente. O processo ocorre até que a condição mínima de temperatura seja alcançada e, então, a solução final é armazenada e disponibilizada para visualização.

### 3.3.2 Particle Swarm Optimization

PSO (*Particle Swarm Optimization*) é um algoritmo estocástico para otimização baseado em populações. Inicialmente, a influência e a aprendizagem social podem permitir que um indivíduo tenha consistência cognitiva. Ou seja, de acordo com a discussão de um problema ou a interação em uma sociedade, pode-se perceber que as atitudes, crenças e o comportamento são alterados. Tais mudanças podem ser vistas como movimentações em um espaço social-cognitivo (BONYADI, 2016).

A população pode ser referenciada como enxame, do termo em inglês *Swarm*, que é composto por indivíduos que podem ser determinados como partículas. Cada partícula é composta de um vetor com três dimensões:

- Posição ( $x_t^i$ ) — posição da  $i$ -ésima partícula na iteração  $t$ ;
- Velocidade ( $V_t^i$ ) — velocidade da  $i$ -ésima partícula na iteração  $t$ ;
- Melhor pessoal ( $p_t^i$ ) — melhor posição que a  $i$ -ésima partícula esteve até a iteração  $t$ .

Segundo Bonyadi (2016), o vetor de partículas deve ser atualizado a cada iteração por meio de

$$\begin{aligned} V_{t+1}^i &= \mu(x_t^i, V_t^i, N_t^i) \\ x_{t+1}^i &= \xi(x_t^i, V_{t+1}^i) \\ p_{t+1}^i &= \begin{cases} x_{t+1}^i, & \text{se o custo for melhor} \\ p_t^i, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que o conjunto  $N_t^i$  pode ser determinado como um subconjunto contendo uma certa quantidade de melhores posições que contribuem para a atualização da velocidade da partícula.

Para a atualização da posição, tem-se  $x_{t+1}^i = x_t^i + V_{t+1}^i$ . A velocidade possui diferentes opções para a atualização, entretanto, a opção linear é utilizada, a qual pode ser visualizada a seguir

$$V_{t+1}^i = \omega V_t^i + \varphi_1 r_{1t}^i (p_t^i - x_t^i) + \varphi_2 r_{2t}^i (g_t - x_t^i) \quad (3.22)$$

em que  $g_t$  é a melhor solução,  $\omega$  é o coeficiente de inércia,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  compreendem os termos de influência cognitiva e social e, por último,  $r_{1t}^i$  e  $r_{2t}^i$  são valores aleatórios entre 0 e 1.

No primeiro termo de (3.22), tem-se o coeficiente de inércia que determina a influência do valor passado da velocidade para os valores futuros. Os dois últimos termos de (3.22) têm o objetivo de mover a solução em direção à melhor solução pessoal e à melhor solução social, respectivamente. Os valores de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  devem ser complementares, ou seja, a soma deles deve ser a unidade. A topologia utilizada para efetuar os cálculos da velocidade é a topologia estrela, a qual utiliza o melhor local e o melhor global para a determinação da influência cognitiva e social na velocidade (BONYADI, 2016). O fluxograma correspondente ao algoritmo PSO pode ser visualizado por meio da Figura 3.

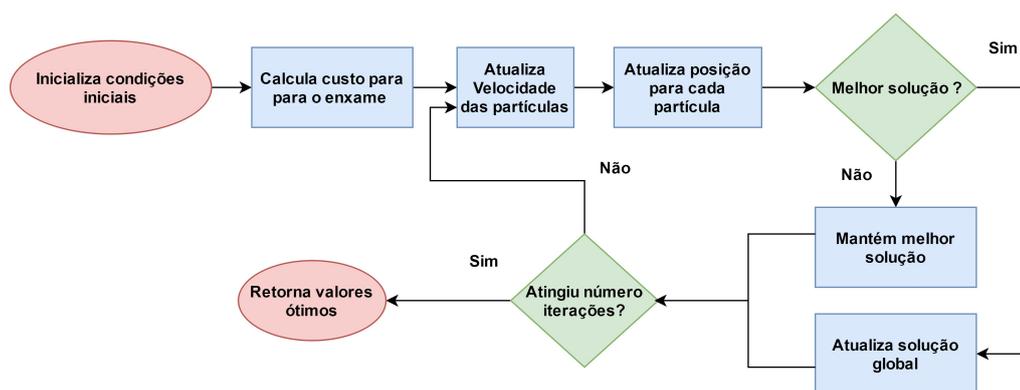


Figura 3 – Fluxograma PSO (*Particle Swarm Optimization*).

## 4 Aplicação das Técnicas em Ambiente Simulado

Para a verificação de factibilidade do trabalho proposto, as técnicas de LMIs e meta-heurísticas serão aplicadas a um sistema-base, cujo objetivo é encontrar uma solução ótima para o controlador PID por meio das técnicas descritas nas seções anteriores. A modelagem de um sistema que consiste de um controlador PID em série com a planta é desenvolvida na seção seguinte.

### 4.1 Modelagem da Dinâmica do Sistema

Nesta etapa do trabalho, a modelagem das equações em espaço de estado do sistema é demonstrada gradativamente. A conexão série do controlador PID em (2.9) com a planta é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ B_2 C_c & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_c \\ B_2 D_c \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} D_2 C_c & C_2 \end{bmatrix} x + D_2 D_c u.\end{aligned}\quad (4.1)$$

em que pode-se identificar as matrizes do controlador PID denominadas por  $A_c, B_c, C_c, D_c$  e as da planta por  $A_2, B_2, C_2$  e  $D_2$ .

Para a realimentação do sistema em malha aberta, atribui-se a nomenclatura  $A_{MA}, B_{MA}, C_{MA}$  e  $D_{MA}$  às matrizes para uma melhor visualização do sistema em malha fechada, o qual é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_{MA} - B_{MA} C_{MA})x + B_{MA} u, \\ y &= (C_{MA} - C_{MA} D_{MA})x + D_{MA} u,\end{aligned}\quad (4.2)$$

sendo as matrizes de malha fechada do sistema identificadas por  $A_{MF}, B_{MF}, C_{MF}$  e  $D_{MF}$ . Neste trabalho,  $D_{MF}$  é considerada nula.

Para o próximo passo, um filtro é utilizado, como pode ser visto por meio da Figura ??, cuja função de transferência é

$$\frac{a}{s + a}.\quad (4.3)$$

O conjunto de equações em espaço de estados do filtro é  $A_f = -a, B_f = 1, C_f = a$  e  $D_f = 0$ .

Para que as demais técnicas sejam utilizadas, deve-se encontrar o conjunto de equações em espaço de estado para o erro filtrado, o qual é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} A_{MF} & 0 \\ -B_f C_{MF} & A_f \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_{MF} \\ B_f I \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} -D_f C_{MF} & C_f \end{bmatrix} x + D_f u.\end{aligned}\quad (4.4)$$

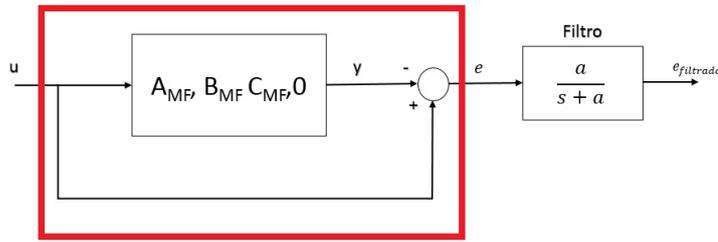


Figura 4 – Diagrama para o erro filtrado.

Sabe-se que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  corresponde ao valor de pico da resposta em frequência. Segundo Skogestad e Postlethwaite (2007),  $S$  é a sensibilidade (matriz de transferência/operador da referência para o erro em malha fechada), que para o caso deste trabalho corresponde à parte demarcada em vermelho da Figura 4. Para isto, utiliza-se a sensibilidade com pesos, onde para o trabalho proposto, este peso corresponde ao filtro. O filtro suaviza o valor de pico de frequência da resposta em frequência, sendo este fato importante, pois, reduz o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Além do mais, este peso limita a faixa de frequência de trabalho do sistema, o que pode evitar a amplificação de ruídos em altas frequências.

#### 4.1.1 Técnicas de Otimização

Nesta etapa do trabalho, as meta-heurísticas foram desenvolvidas por meio do *software* MATLAB. *Simulated Annealing* e PSO foram desenvolvidas para o processo de otimização, ou seja, encontrar os valores ótimos dos ganhos do controlador PID por meio de algoritmos que simulam comportamentos distintos. As duas meta-heurísticas necessitam de uma função custo, que retorna ao algoritmo a factibilidade ou não dos valores dos parâmetros do controlador e quantitativamente retorna um valor que corresponde à norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

Para a realização do cálculo do custo dos parâmetros do controlador. A análise de custo garantido com a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é utilizada. Nesta análise, o valor retornado é considerado como sendo o máximo valor de pico da resposta em frequência do sistema. Com esse parâmetro, pode-se comparar quais parâmetros do controlador PID têm um custo melhor e qual é o custo ótimo para determinado sistema, de acordo com a meta-heurística aplicada.

Na função que analisa o custo garantido da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , existe uma condição que determina a factibilidade do problema. Caso o valor mínimo verificado na LMI seja superior a uma tolerância, o mesmo é definido infactível, o que faz com que a função custo retorne um valor alto para o mesmo.

A representação em espaço de estados utilizada para a análise do custo é definida em (4.4), a qual encontra os valores dos parâmetros do controlador. Os parâmetros

$$K = [K_p, K_i, K_d, T_f], \quad (4.5)$$

são utilizados no sistema em malha fechada do PID com a planta.

## 4.2 Resultados

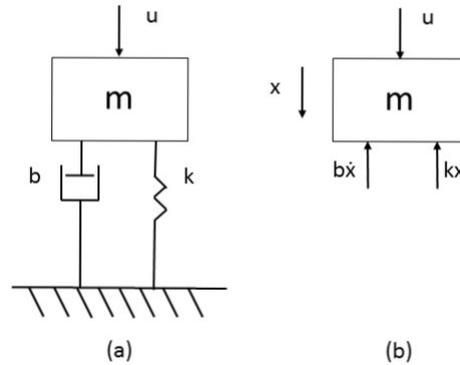


Figura 5 – Sistema Mecânico massa-mola-amortecedor (a) Esquema e (b) Diagrama de corpo livre.

Para a verificação dos métodos de otimização e também da análise de custo utilizando LMIs, um sistema mecânico é utilizado como exemplo. A modelagem da planta didática é realizada no próximo Capítulo. Para a verificação dos resultados, é definida uma planta que faz o papel do módulo didático. Para esta etapa do processo, a planta utilizada é um modelo mecânico massa-mola-amortecedor, cujo esquema e diagrama de corpo livre podem ser visualizados na Figura 5. As equações da dinâmica do sistema são obtidas por meio da modelagem do sistema dada por

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= u - b\dot{x} - kx, \\ y &= x, \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que  $m$  é a massa do objeto,  $k$  é a constante da mola,  $b$  o coeficiente de amortecimento e  $u$  a força aplicada.

A representação em espaço de estados utilizada para o sistema mecânico é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0u. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Os valores de  $m$ ,  $k$  e  $b$  que foram utilizados para este trabalho são:  $1 \text{ kg}$ ,  $8 \text{ N/m}$  e  $16 \text{ Ns/m}$ , respectivamente.

Com a planta definida, os testes para análise devem ser executados. As duas técnicas de otimização utilizam a mesma função de custo, que, para esta parte do projeto, utiliza-se o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Como parâmetro de entrada da função de custo utiliza-se

as equações em espaço de estado do erro filtrado vistas em (4.4). O valor correspondente à norma  $\mathcal{H}_\infty$  é encontrado aplicando-se o algoritmo desenvolvido que calcula o valor de  $\gamma$  por meio da LMI (3.18).

Com a função de custo definida, as técnicas meta-heurísticas são implementadas com base nessa função. Os parâmetros das técnicas de otimização são alterados com o intuito de observar a variação das soluções ótimas para cada técnica para os parâmetros do controlador (4.5).

Para a verificação de convergência das técnicas meta-heurísticas, foi utilizado o *errorbar* do MATLAB, que permite analisar graficamente se as técnicas convergem para determinado custo ótimo. Para a realização desta técnica, o custo para cada iteração realizada dentro do algoritmo deve ser armazenada para encontrar o custo médio para cada iteração, além do desvio padrão que também é encontrado utilizando o custo por iteração. Com esses valores armazenados em uma variável, pode-se então executar um laço para que a meta-heurística possa ser executada mais de uma vez. Como as meta-heurísticas são técnicas que possuem parâmetros probabilísticos, a comparação pode proporcionar a análise da convergência ou não de determinada técnica.

A primeira técnica a ser apresentada é a técnica de *PSO*, em que os parâmetros alterados são as condições iniciais do controlador, pois, esses parâmetros são gerados aleatoriamente e, de acordo com um fator, esses parâmetros podem estar próximos dos valores que podem retornar custos ótimos. Com isso, a variação no parâmetro constataria a convergência do método, caso os resultados apresentados sejam semelhantes.

No algoritmo *PSO*, a população inicial é gerada aleatoriamente, portanto, de acordo com o fator multiplicativo da população, o resultado poderia convergir para um custo ótimo mais rapidamente. Na Figura 6, tem-se dois casos distintos para a utilização deste fator. No primeiro caso, um fator 10 foi utilizado, enquanto que no segundo caso um fator 100 foi escolhido. De acordo com o *errorbar*, ambos os casos convergiram para um valor ótimo próximo. Além do mais, os fatores  $L$  (*Lower*) e  $U$  (*Upper*) representam o desvio-padrão, ou seja, a variabilidade dos valores de custo à volta do custo médio. Os valores de  $L$  e  $U$  para o *PSO* são valores baixos, confirmando assim, a convergência do algoritmo.

Para a segunda técnica, *Simulated Annealing*, dois casos diferentes também são propostos. Para o primeiro caso, tem-se um número de iterações menor, ou seja, a constante  $\beta$  que faz o decremento da temperatura é menor do que no caso II. Logo, como pode ser visto na Figura 7, o segundo caso possui mais iterações que o primeiro.

Quando comparadas as duas técnicas de otimização, o *PSO* possui uma convergência mais precisa do que o *Simulated Annealing*, o que pode ser visto comparando os resultados apresentados nas Figuras 6 e 7. Lembrando que a função de custo utilizada não leva em consideração as informações da resposta ao degrau do sistema. Somente verifica a estabilidade do mesmo através do algoritmo que contém a norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

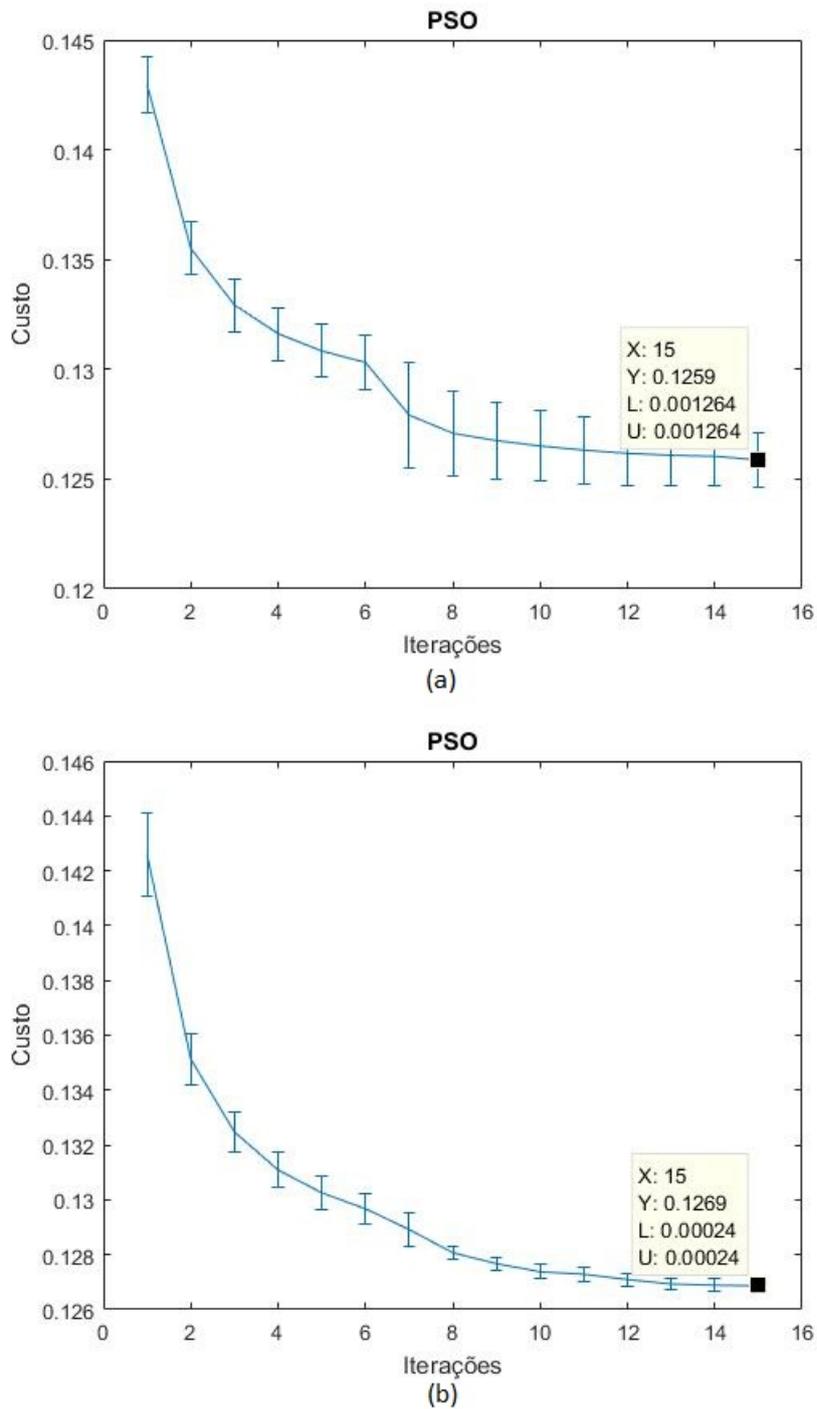


Figura 6 – Errorbar para *PSO* (a) Fator multiplicativo 10 para a população inicial que é gerada aleatoriamente e (b) Fator multiplicativo 100 para a população inicial que é gerada aleatoriamente.

Um exemplo de resposta ao degrau e suas características de desempenho podem ser vistas por meio da Figura 8 com os parâmetros do controlador PID

$$K = \begin{bmatrix} 7795.9 & -16.641 & 763.37 & 1052.9 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Para a verificação do cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , foi utilizada a função *hinfnorm*

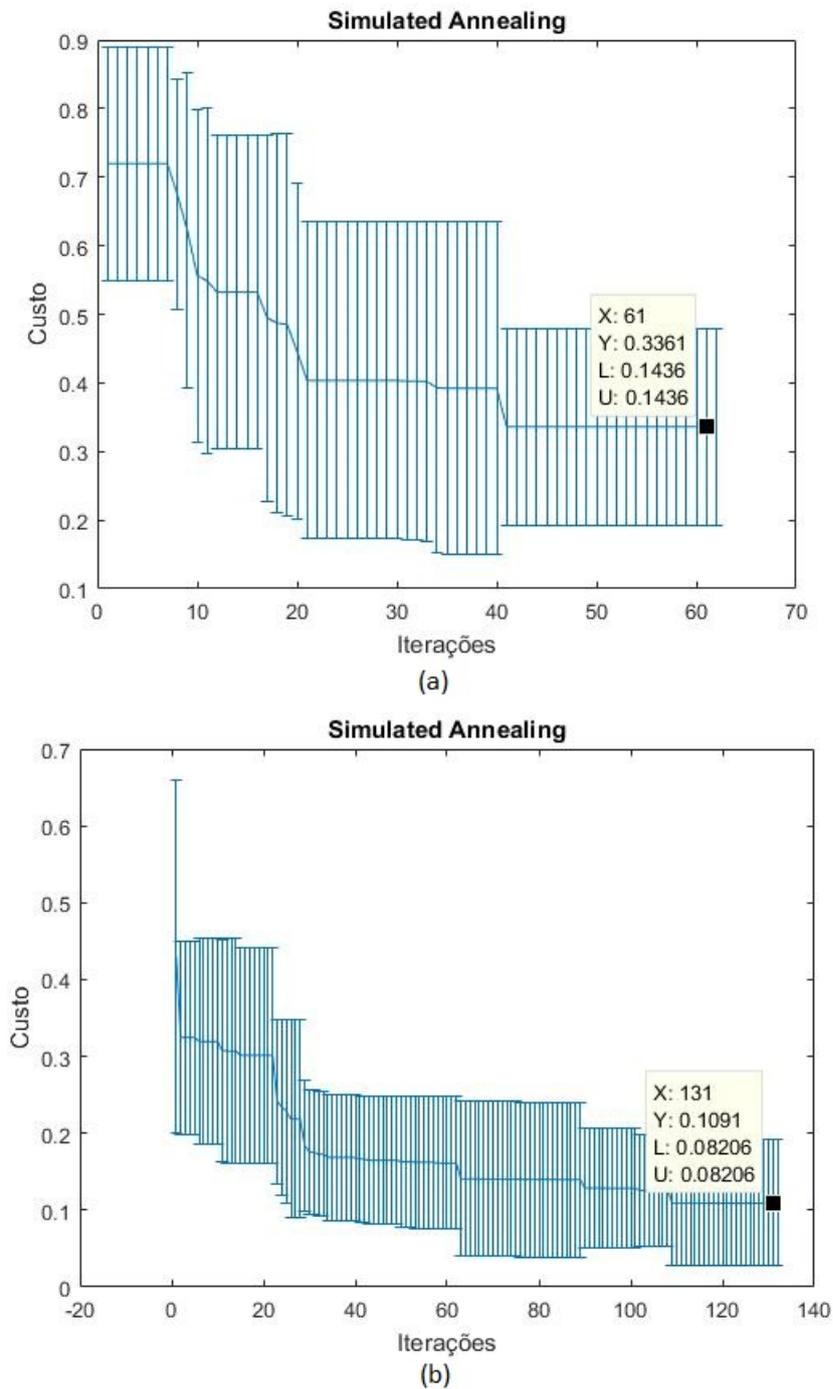


Figura 7 – Errorbar para *Simulated Annealing* (a) Caso I com  $\beta = 0.8$  e (b) Caso II com  $\beta = 0.9$ .

do MATLAB, a qual retorna o valor da norma. Os resultados foram os mesmos, pois para a realização do cálculo da norma utilizam-se as equações em espaço de estado (4.4). Conseqüentemente, para a verificação do sistema, as mesmas equações devem ser utilizadas, obtendo um resultado satisfatório para a mesma.

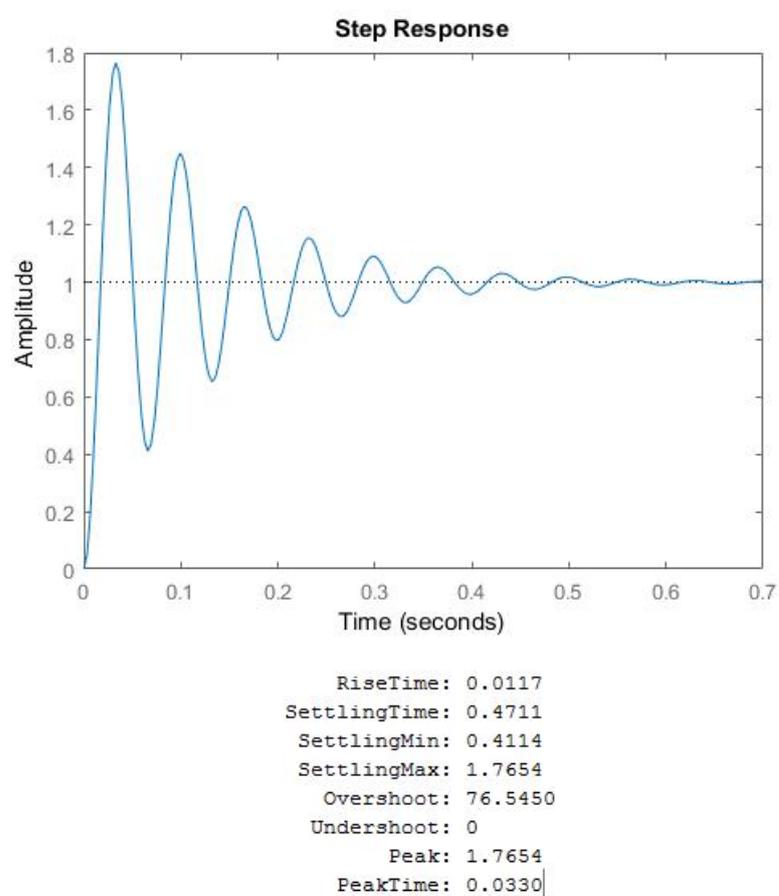


Figura 8 – Resposta ao degrau do sistema compensado com o controlador PID projetado. As características de desempenho do sistema são apresentadas na parte inferior.

## 5 Aplicação no Módulo Didático

Após verificada a factibilidade das técnicas desenvolvidas aplicadas ao sistema-base, parte-se para a aplicação das técnicas no módulo didático.

### 5.1 Módulo Didático

Segundo Keles et al. (2017), o módulo didático tem o objetivo de abordar pontos específicos na área de controle, sendo eles, modelagem, simulação, síntese de controladores, e conceitos que a realimentação negativa podem proporcionar. Para este trabalho, a utilização do módulo se dá principalmente pelo fato de que ele pode ser utilizado para simular incertezas. Portanto, as técnicas desenvolvidas neste projeto podem ser aplicadas ao módulo para a verificação de factibilidade das técnicas.

A configuração do módulo didático desenvolvido por Keles et al. (2017) é composto por dois módulos. O primeiro módulo consiste de três estágios: o circuito subtrator, o amplificador inversor e o passa-tudo, como pode ser visto por meio da Figura 9. A segunda parte é composta por dois filtros passa-baixas de primeira ordem que estão conectados em cascata. Sendo assim tem-se um filtro passa-baixas de segunda ordem, o qual pode ser observado na Figura 10.

O módulo didático apresenta algumas características que são ressaltadas por Keles et al. (2017): a primeira parte possui características de fase não mínima e instabilidade dependendo dos valores de resistência assumidos pelos potenciômetros  $R_2$  e  $R_3$ . Caso  $R_2 > R_3$ , tem-se um sistema estável. Caso contrário tem-se uma instabilidade na planta. No segundo módulo, tem-se que  $R_9$  também é um potenciômetro que permite variar o ganho. Tais resistências variáveis proporcionam as incertezas do sistema e, com elas, as técnicas de controle robusto desenvolvidas neste projeto podem ser aplicadas. O modelo em espaço de estados do módulo é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \frac{R_3 - R_2}{R_6 C_1 (R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_7 C_2} \left( \frac{2R_2}{R_2 + R_3} \right) & -\frac{1}{R_7 C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{11} C_3} \left( 1 + \frac{R_9}{R_8} \right) & -\frac{1}{R_1 C_3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{R_3}{R_6 C_1 (R_2 + R_3)} \\ \frac{R_3}{R_7 C_2 (R_2 + R_3)} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \left[ 0 \quad 0 \quad 1 + \frac{R_{13}}{R_{12}} \right] x + 0u, \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que as resistências  $R_1$ ,  $R_6$ ,  $R_7$ ,  $R_8$ ,  $R_{11}$ ,  $R_{12}$  e  $R_{13}$  equivalem a  $1200 \Omega$  e as capacitâncias  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  equivalem a  $1 \mu F$ . Os valores de resistência dos potenciômetros podem variar de 0 a  $20 K\Omega$  para  $R_2$  e  $R_3$  e de 0 a  $10 K\Omega$  para  $R_9$ .

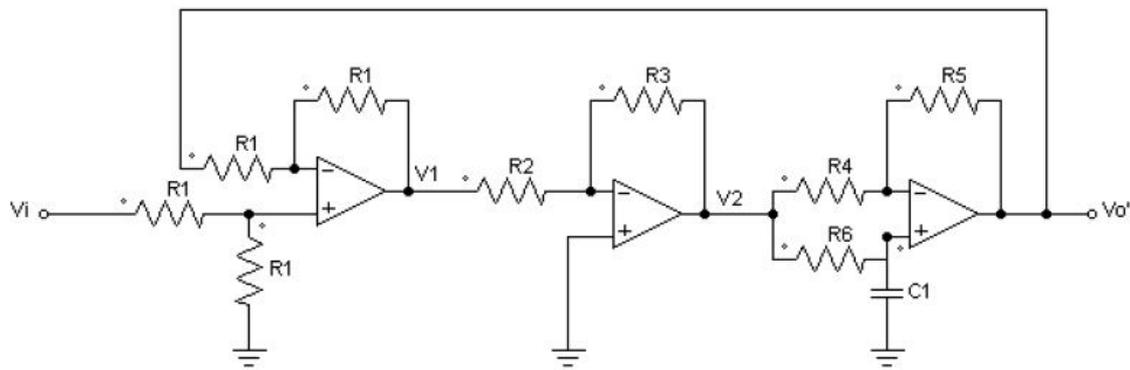


Figura 9 – Primeiro módulo com circuito subtrator, amplificador inversor e passa-tudo.

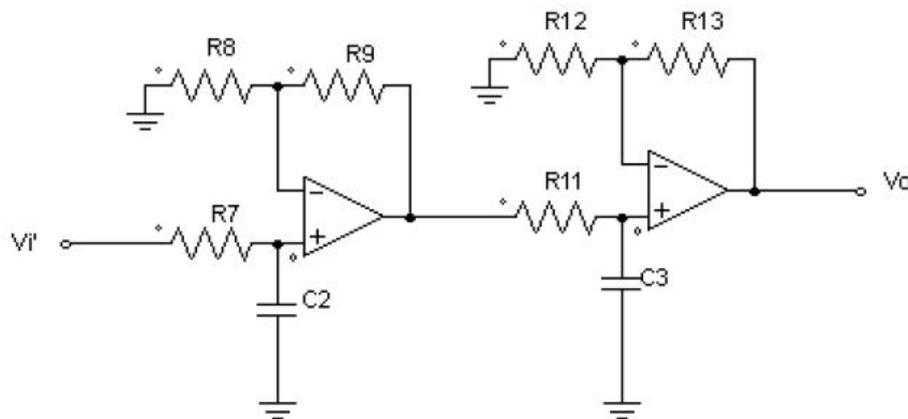


Figura 10 – Segundo módulo com filtro passa-baixas de segunda ordem.

### 5.1.1 Técnicas de Otimização

Com as técnicas aplicadas ao sistema-base determinadas factíveis, pode-se agora aplicá-las ao sistema incerto do módulo didático. Contudo, modificações nas rotinas dos algoritmos devem ser realizadas para que as incertezas possam ser definidas. O módulo didático pode oferecer até três parâmetros incertos, porém, para este trabalho, somente os potenciômetros  $R_2$  e  $R_3$  são variáveis. Tem-se então que o modelo politópico do sistema é composto por dois parâmetros incertos e conseqüentemente, por quatro conjunto de matrizes que correspondem aos vértices do sistema incerto. Ou seja, o sistema pode ser representado por uma combinação dos conjuntos.

Primeiramente, a realização do cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  foi alterada para que os parâmetros incertos possam ser verificados, ou seja, todo o espaço paramétrico referente ao sistema incerto deve ser verificado para os parâmetros do controlador PID. Como a norma  $\mathcal{H}_\infty$  retorna o menor valor para determinado controlador, as técnicas de otimização são responsáveis para que o menor custo seja encontrado e a solução seja ótima.

## 5.2 Resultados

Duas técnicas meta-heurísticas foram utilizadas para encontrar os melhores parâmetros para o controlador PID, porém, devido à aleatoriedade da técnica *Simulated Annealing*, a mesma não conseguiu encontrar parâmetros factíveis para o problema proposto, portanto, a técnica *PSO* foi a única técnica que encontrou valores factíveis para o sistema incerto determinado pelo módulo didático.

O principal motivo da técnica *Simulated Annealing* não encontrar uma solução plausível se deu pelos valores determinados como condição inicial. A técnica somente encontrava uma solução satisfatória caso os parâmetros do controlador inseridos já fossem soluções do sistema.

Utilizando a técnica *PSO*, o número de iterações e a quantidade de partículas foram determinados por meio de testes, verificando quais produziam o melhor resultado. Logo, os parâmetros do controlador foram encontrados e então foi aplicada uma entrada do tipo degrau para três casos distintos. O primeiro caso é um sistema obtido por meio de (3.19), em que os valores de  $\alpha$  utilizados são

$$\alpha = [0.40138 \quad 0.20354 \quad 0.33559 \quad 0.05949]. \quad (5.2)$$

O resultado pode ser visto por meio da Figura 11. Para este caso tem-se um sistema estável em malha aberta, o qual é representado por meio de uma combinação linear dos vértices do politopo com os parâmetros  $\alpha$ .

No segundo caso, os valores dos potenciômetros são escolhidos para que o sistema em malha aberta seja estável. Portanto, os valores de resistência dos potenciômetros  $R_2$  e  $R_3$  são, respectivamente,  $10 \text{ K}\Omega$  e  $5 \text{ K}\Omega$ . O resultado deste caso pode ser visto por meio da Figura 12.

No último caso, tem-se um sistema instável, em que os valores dos potenciômetros  $R_2$  e  $R_3$  são  $8 \text{ K}\Omega$  e  $10 \text{ K}\Omega$ , respectivamente. A resposta do sistema em malha fechada do sistema pode ser visto por meio da Figura 13.

Vale ressaltar que os três casos têm a mesma característica de fase não mínima correspondente a uma reação reversa no início da aplicação da entrada degrau. Esta característica se deu pelo fato do módulo didático possuir esta propriedade.

Projetou-se uma rotina no MATLAB para que se encontrasse uma solução ótima considerando todas as incertezas do módulo didático, porém, o resultado não foi satisfatório. Contudo, a técnica de otimização encontrou soluções ótimas para uma determinada faixa de valores para dois dos três parâmetros incertos, sendo eles:  $R_2$ , de  $8 \text{ K}\Omega$  a  $20 \text{ K}\Omega$ ,  $R_3$ , de  $1 \text{ K}\Omega$  a  $10 \text{ K}\Omega$  e  $R_9 = 500 \Omega$ .

Os dois primeiros casos são sistemas estáveis em malha aberta, portanto, a resposta do sistema aplicado ao controlador PID robusto em ambos os casos foi satisfatório como pode ser visto nas Figuras 11 e 12. No último caso, sistema instável em malha aberta, a

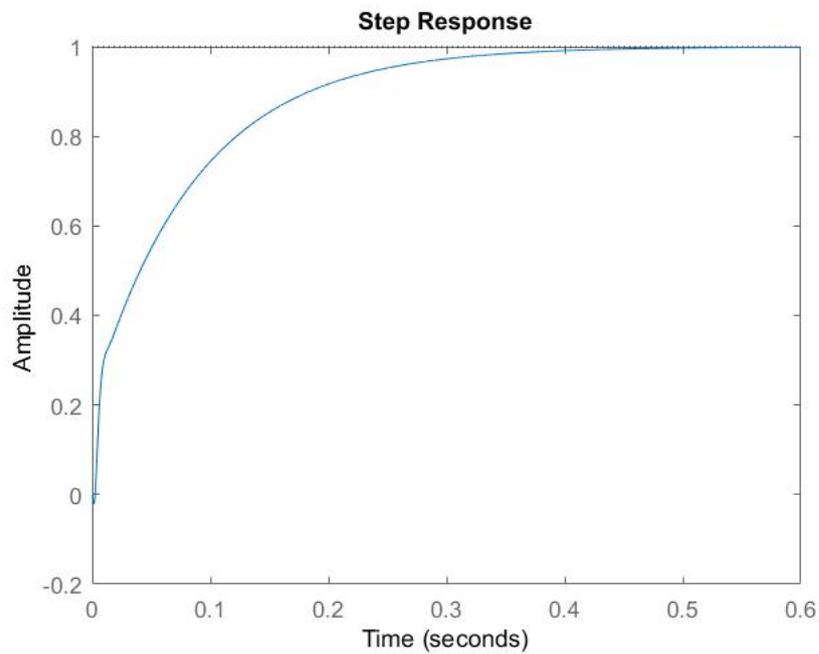


Figura 11 – Resposta ao Degrau do módulo didático aplicando os parâmetros encontrados por meio da Meta-heurística PSO e utilizando os parâmetros  $\alpha$  e os parâmetros do Controlador PID  $K = [0.39 \ -10.19 \ -7.12 \ 11.59]$ .

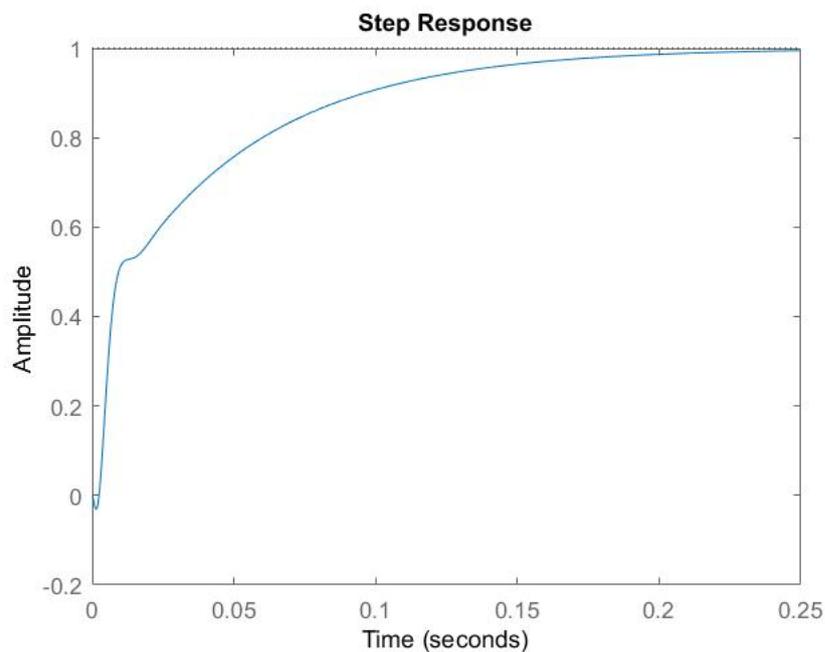


Figura 12 – Resposta ao Degrau do módulo didático aplicando os parâmetros encontrados por meio da Meta-heurística PSO em um sistema estável em malha aberta com os parâmetros do Controlador PID  $K = [0.39 \ -10.19 \ -7.12 \ 11.59]$ .

resposta ao degrau, Figura 13, tem um sobressinal muito alto. Contudo, o controlador

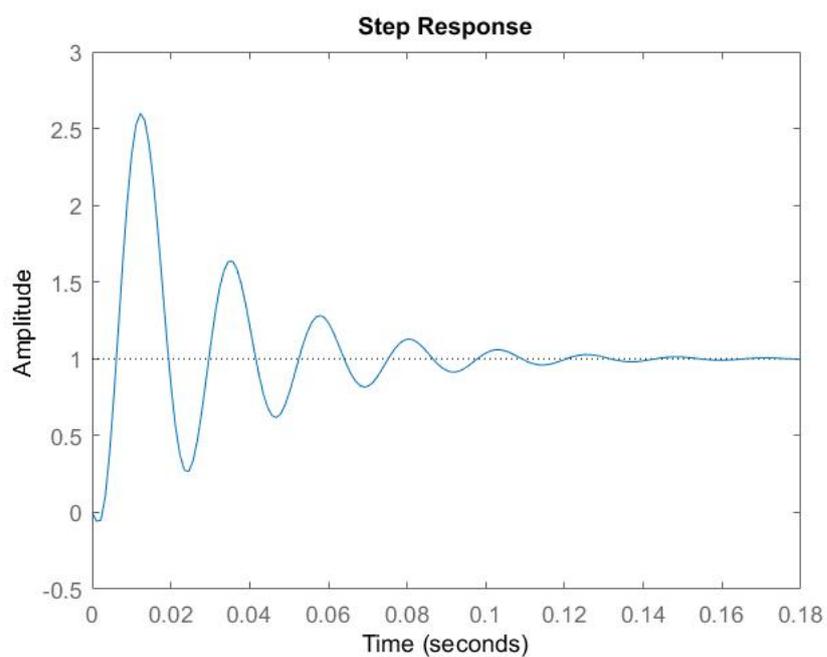


Figura 13 – Resposta ao Degrau do módulo didático aplicando os parâmetros encontrados por meio da Meta-heurística PSO em um sistema instável em malha aberta com os parâmetros do Controlador PID  $K = [0.39 \ -10.19 \ -7.12 \ 11.59]$ .

estabilizou o sistema.

## 6 Conclusão

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de técnicas para sintonizar controladores PID robustos (sujeito a incertezas) por meio de LMIs e técnicas meta-heurísticas em um sistema. As técnicas meta-heurísticas são utilizadas para encontrar a melhor solução dos parâmetros do controlador PID com um menor custo possível. O custo é obtido utilizando-se a análise de estabilidade por meio da norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

Na primeira parte do trabalho, as técnicas são desenvolvidas para um sistema mecânico (sistema-teste). Os resultados encontrados permitem concluir que a metodologia utilizada para o projeto foi adequada ao objetivo proposto no início do trabalho. Levando em consideração que a resposta ao degrau do sistema compensado com o controlador PID projetado resultou em um sobressinal. O qual não foi levado em consideração no projeto do controlador, pois a norma  $\mathcal{H}_\infty$  representa o máximo do diagrama de magnitude e minimiza-se este valor por meio das técnicas meta-heurísticas.

Na segunda parte deste trabalho, as técnicas foram aplicadas em um sistema incerto (módulo didático). Como este sistema possui parâmetros incertos (potenciômetros), as rotinas no *software* MATLAB foram modificadas para a representação das incertezas. Os dois primeiros casos são sistemas estáveis em malha aberta, sendo o primeiro deles encontrado por meio do parâmetro  $\alpha$ , ou seja, tem-se uma combinação linear dos vértices do politopo e determina-se o sistema em que o controlador PID é aplicado. No segundo caso é determinado os valores dos potenciômetros para que o sistema seja estável. Em ambos os casos, as respostas permitem concluir que o controlador PID é adequado. O último caso corresponde a um sistema instável. Pode-se visualizar por meio da resposta ao degrau do sistema compensado com o controlador PID um sobressinal elevado. Mesmo assim, o resultado encontrado é adequado, pois, como na primeira parte do trabalho, a análise de custo se dá por meio da norma  $\mathcal{H}_\infty$  e não pelo sobressinal do sistema.

Para atividades posteriores, sugere-se a aplicação do controlador PID robusto encontrado aplicado ao módulo didático para uma melhor validação dos resultados obtidos por meio de simulações.

# Referências

- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. [S.l.]: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995. 1
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *Advanced PID control*. [S.l.]: ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006. 3, 4
- BONYADI, Z. M. M. R. Particle swarm optimization for single objective continuous space problems: A review. *Evolutionary Computation*, 2016. 12, 13
- DORF, R. H. B. R. C. *Modern Control Systems*. 12. ed. [S.l.]: PRENTICE HALL, 2010. 1
- KELES, N. A. et al. Módulos didáticos para o ensino de análise e controle de sistemas dinâmicos. In: *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1893–1898. 22
- KIRKPATRICK, S. et al. Optimization by simulated annealing. *Science*, Washington, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. 11
- SCHERER, C.; WEILAND, S. Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, v. 3, 2000. 2, 8
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. [S.l.]: Wiley New York, 2007. v. 2. 16
- TALBI, E.-G. *Metaheuristics: from design to implementation*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 74. 11
- VISIOLI, A. *Practical PID control*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. 1, 4, 5
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *trans. ASME*, v. 64, n. 11, 1942. 1