



UFOP



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil
Curso de Graduação em Engenharia Civil



Matheus Augusto Torres Campolina Vieira

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Ouro Preto
2025

Análise de estruturas reticuladas planas com ligações semirrígidas

Matheus Augusto Torres Campolina Vieira

Trabalho Final de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto.

Data da aprovação: 10/04/2025

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Prof^a. Dra. Andréa Regina Dias da Silva – UFOP

Ouro Preto
2025



FOLHA DE APROVAÇÃO

Matheus Augusto Torres Campolina Vieira

Análise de estruturas reticuladas planas com ligações semirrígidas

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil

Aprovada em 10 de abril de 2025

Membros da banca

Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva - Orientadora (Universidade Federal de Ouro Preto)
Prof. Dr. Walliston dos Santos Fernandes - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Me. Erivaldo Santos Jales - (Instituto Tecnológico da Vale - ITV)

Andréa Regina Dias da Silva, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 10/04/2025



Documento assinado eletronicamente por **Andrea Regina Dias da Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 10/04/2025, às 16:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0893717** e o código CRC **2E053103**.

AGRADECIMENTOS

Encerrar este ciclo que marca o início de um sonho só foi possível em razão das pessoas que compartilharam ele comigo, que foram apoio e motivação durante esses anos, mesmo que indiretamente.

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela vida e força diária.

Aos meus pais, por me proporcionarem a oportunidade de estudar que não tiveram. Mas, sobretudo, por serem auxílio e âncora durante toda a trajetória.

Ao meu irmão, Lucas, por compartilhar comigo a vida com tanto companheirismo.

À Rafaela, minha gratidão por estar ao meu lado com amor e amparo, tornando os dias mais leves e fáceis durando toda a graduação.

À minha orientadora prof.^a Andréa Regina Dias Silva, pelas conversas, motivação, paciência e dedicação ao me orientar.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas pelos ensinamentos.

À Universidade Federal de Ouro Preto, pelo ensino público e de qualidade.

Aos amigos que fiz e que caminharam comigo durante esses anos, em especial Ewerthon e Emanuel, mas também aqueles que sempre estiveram comigo, muito antes da UFOP.

RESUMO

A análise de estruturas reticuladas planas com ligações semirrígidas visa compreender o impacto deste tipo de ligação no comportamento estrutural em comparação com ligações rígidas e articuladas. Nesse sentido, a pesquisa busca evidenciar a importância de considerar ligações semirrígidas em análises estruturais, já que estas influenciam diretamente deslocamentos, esforços internos e a estabilidade global do sistema, promovendo uma análise mais realista que evita o superdimensionamento ou subdimensionamento das estruturas. Para isso, a metodologia empregada inclui o uso de ferramentas computacionais baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) que permitem a modelagem das propriedades de semirrígidez e efeitos não lineares. Ao longo deste trabalho, serão apresentados os fundamentos teóricos essenciais para uma melhor compreensão do comportamento estrutural e da metodologia empregada. Serão também discutidas as formulações de elementos finitos, assim como as estratégias incrementais e iterativas utilizadas no processo de solução. Com intuito de destacar a significativa influência da semirrígidez nas respostas estruturais foi realizado simulações em quatro diferentes sistemas, dos quais as respostas foram comparadas àquelas encontradas na literatura. Conclusivamente, a pesquisa reafirma que a consideração do comportamento não linear das ligações melhora a precisão nas estimativas de capacidade de carga e deslocamentos, proporcionando não apenas segurança, mas também economia nos projetos de estruturas, conforme demonstrado pelos resultados que confirmam a eficácia das metodologias utilizadas.

Palavras-chaves: Método dos Elementos Finitos, estruturas reticuladas planas, ligações semirrígidas, análise avançada, comportamento estrutural, análise estática não linear.

ABSTRACT

The analysis of plane reticulated structures with semi-rigid connections aims to understand the impact of this type of connection on structural behavior in comparison with rigid and articulated connections. In this sense, the research seeks to highlight the importance of considering semi-rigid connections in structural analysis, since they directly influence displacements, internal forces and the overall stability of the system, promoting a more realistic analysis that avoids over- or under-dimensioning structures. To this end, the methodology employed includes the use of computational tools based on the Finite Element Method (FEM), which allow the modeling of semi-rigidity properties and non-linear effects. Throughout this work, the theoretical foundations essential for a better understanding of structural behavior and the methodology employed will be presented. The finite element formulations will also be discussed, as well as the incremental and iterative strategies used in the solution process. In order to highlight the significant influence of semi-rigidity on structural responses, simulations were carried out on four different systems, the responses of which were compared to those found in the literature. In conclusion, the research reaffirms that taking into account the non-linear behavior of connections improves the accuracy of load capacity and displacement estimates, providing not only safety, but also savings in structural design, as demonstrated by the results that confirm the effectiveness of the methodologies used.

Keywords: Finite Element Method, plane lattice structures, semi-rigid connections, advanced analysis, structural behavior, non-linear static analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Efeitos de segunda ordem: P- Δ (deslocamento lateral) e P- δ (curvatura).....	2
Figura 2.1	Aspecto típico das curvas momento-rotação de uma ligação.....	10
Figura 2.2	Detalhes construtivos de ligações viga-coluna.....	13
Figura 2.3	Comportamento de ligações viga-coluna	14
Figura 3.1	Elemento finito adotado.....	19
Figura 3.2	Elemento de viga-coluna com molas fictícias	20
Figura 3.3	Deslocamentos nodais do elemento na configuração deformada.....	23
Figura 4.1	Viga biengastada.....	26
Figura 4.2	Sistemas estruturais analisados: geometria e carregamento	27
Figura 4.3	Trajetórias de equilíbrio.....	28
Figura 4.4	Pórtico de seis andares: geometria e carregamento	31
Figura 4.5	Comportamento de ligações viga-coluna	32
Figura 4.6	Influência da rigidez da ligação nas análises elásticas	33
Figura 4.7	Pórtico de sete andares	34
Figura 4.8	Comportamento das ligações semirrígidas tipos E e F.....	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Parâmetros do modelo exponencial para quatro tipos de ligações	14
Tabela 3.1	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear	18
Tabela 4.1	Cargas limite de estabilidade P_{lim} (kN) para o pórtico com apoios engastados	29
Tabela 4.2	Cargas limite de estabilidade P_{lim} (kN) para o pórtico com apoios rotulados	29
Tabela 4.3	Fator de carga de colapso, λ_{lim} , obtido na análise elástica.....	33
Tabela 4.4	Carga limite, em kN, obtida na análise de flambagem	36

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	V
LISTA DE TABELAS	VI
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos.....	1
1.2 Organização do Trabalho	4
2 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS	5
2.1 Introdução.....	5
2.2 Comportamento da ligação	9
2.2.1 Modelo Linear	11
2.2.2 Modelo Exponencial.....	12
2.2.3 Modelo de Potências com Quatro Parâmetros.....	15
3 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR.....	16
3.1 Introdução	16
3.2 Metodologia	16
3.3 O Elemento Finito.....	17
4 APLICAÇÕES.....	25
4.1 Introdução	25
4.2 Viga com Ligações Semirrígidas nas Extremidades.....	25
4.3 Pórticos de Dois Andares.....	27

4.4	Pórtico de Seis Andares	30
4.5	Pórtico de Sete Andares	34
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

A análise estrutural é essencial no projeto de estruturas, permitindo prever e compreender seu comportamento sob diferentes condições de carregamento. Dentre as diversas configurações estruturais existentes, a construção civil busca, na atualidade, por sistemas estruturais em aço que se destaquem na eficiência resultante da combinação entre leveza e alta resistência, possibilitando a concepção de estruturas capazes de superar grandes vãos. Essas estruturas, formadas por barras conectadas em nós, são frequentemente modeladas com hipóteses simplificadoras que assumem ligações perfeitamente rígidas ou completamente articuladas. No entanto, a realidade construtiva demonstra que as conexões possuem um comportamento intermediário, conhecido como ligações semirrígidas. Esse comportamento impacta diretamente a resposta estrutural, alterando deslocamentos, esforços internos e a estabilidade global do sistema.

O estudo das ligações semirrígidas, caracterizadas por rigidez rotacional parcial, é fundamental para análises mais realistas e precisas. Essas ligações são frequentemente descritas por curvas momento-rotação, que permitem representar com maior fidelidade a interação entre os elementos conectados (SILVA, 2009). Ignorar esse comportamento pode levar a um dimensionamento equivocado, comprometendo tanto a segurança quanto a eficiência econômica dos projetos. Além disso, avanços no desenvolvimento de materiais e técnicas construtivas, incluindo a utilização de seções mais esbeltas, tornam ainda mais relevante a consideração de ligações semirrígidas nas análises estruturais.

Outro aspecto fundamental no comportamento de estruturas é a presença de não linearidades geométricas e físicas, que influenciam significativamente a resposta. A não linearidade geométrica, conhecida como efeitos de segunda ordem, surge das alterações na configuração geométrica da estrutura durante o carregamento. Esses efeitos, identificados como $P-\Delta$ (deslocamento global) e $P-\delta$ (curvatura local), tornam necessário o uso de teorias mais avançadas para análise estrutural, como a elasticidade não linear (SILVA, 2009). A representação desses efeitos é apresentada na Figura 1.1. Já as não linearidades físicas estão associadas à inelasticidade dos materiais e à deformabilidade das ligações. Por exemplo, a plastificação local

nas ligações e nos membros estruturais pode alterar de maneira significativa a rigidez global do sistema. Ferramentas computacionais baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) têm permitido incorporar esses efeitos em análises avançadas. Tais ferramentas possibilitam modelagens mais precisas ao integrar diretamente as propriedades de semirrigidez e os efeitos não lineares nos modelos numéricos (SILVA, 2009).

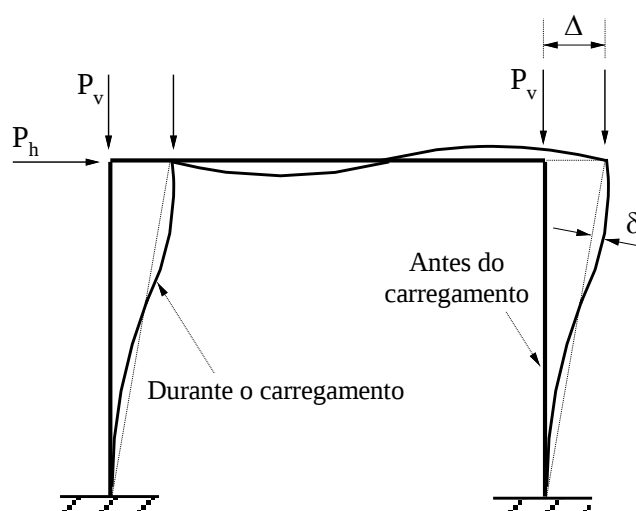


Figura 1.1 Efeitos de segunda ordem: P- Δ (deslocamento lateral) e P- δ (curvatura)

Dada a complexidade das interações entre ligações semirrígidas, não linearidades e estabilidade estrutural, a presente pesquisa propõe uma análise não linear de estruturas reticuladas planas com ligações semirrígidas. O objetivo principal é investigar como esses fatores afetam o comportamento estrutural através de estudos envolvendo vigas e pórticos com diferentes pavimentos. Essa abordagem permitiu avaliar a influência da alteração na rigidez das ligações viga-coluna na resposta estrutural, em especial na carga limite de estabilidade e na trajetória de equilíbrio, através de uma análise estática considerando os efeitos da não linearidade geométrica, contribuindo, dessa forma, para projetos mais eficientes e seguros.

Para realizar os estudos, será utilizada a base computacional CS-ASA — *Computational System for Advanced Structural Analysis* — implementada por Silva (2009). O programa CS-ASA que baseia-se no Método dos Elementos Finitos, é capaz de realizar análises estática e dinâmica avançadas de estruturas em aço. O emprego da análise avançada como metodologia de análise e projeto de estruturas de aço apresenta diversas vantagens entre as quais se destaca a possibilidade de estabelecer o limite de resistência e de estabilidade do sistema estrutural e de seus membros de

forma direta, sem a necessidade de verificação separada da capacidade de cada membro (CHEN e TOMA, 1994). Apresenta várias formulações não lineares de elementos finitos reticulados planos capazes de simular os importantes efeitos que modificam o comportamento estrutural.

Na literatura, há uma grande variedade de estudos que abordam temas relacionados a este trabalho. Livros como os de Chen e Lui (1991), Chen e Toma (1994), Chen e Sohal (1995) e Chan e Chui (2000) tratam especificamente de estruturas com ligações semirrígidas.

Pinheiro (2003) explora formulações e implementações computacionais voltadas para a análise não linear de treliças planas, espaciais e pórticos com ligações semirrígidas. Propondo métodos para determinar matrizes de rigidez e vetores de forças internas, além de modelar o comportamento não linear dessas estruturas. A partir de simulações e comparações com dados da literatura, avalia-se a precisão e a eficiência computacional das técnicas desenvolvidas, oferecendo contribuições relevantes para soluções mais realistas em projetos de estruturas metálicas sob condições extremas de carregamento.

Silva (2009) propôs uma ferramenta computacional baseada no Método dos Elementos Finitos para a análise avançada de estruturas metálicas reticuladas. O estudo aborda o comportamento estático e dinâmico dessas estruturas, incorporando não linearidades geométricas e físicas, como a inelasticidade do aço e a semirrigidez das ligações estruturais, enfatizando a integração direta dessas não linearidades na formulação dos elementos finitos, dispensando a separação entre a análise estrutural e o dimensionamento. Conclusões relevantes são extraídas a partir da validação com sistemas estruturais disponíveis na literatura.

Santana (2015) implementou um sistema computacional denominado AFA-OPSM, projetado para a análise não linear geométrica de estruturas reticuladas planas. O programa integrou o uso do MATLAB com interface gráfica interativa e programação orientada a objetos (POO), permitindo a modelagem, análise e visualização conjunta dos resultados. Implementou formulações baseadas nas teorias de treliças, vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

Mais recente, Dias (2020) desenvolveu uma nova versão parcial do software FTOOL, incorporando a análise de ligações semirrígidas. Com foco na implementação de um elemento finito de mola rotacional, que pode apresentar comportamentos lineares ou não lineares, permitindo a realização de análises com não linearidade física. O estudo busca aprimorar a capacidade do FTOOL em simular estruturas de engenharia, oferecendo uma abordagem mais

eficiente e precisa para a análise de conexões em estruturas mistas.

Além disso, existem normas que já estabelecem procedimentos para definir tanto a rigidez quanto a resistência das ligações semirrígidas, o que possibilita sua utilização em programas de análise e projeto estrutural em aço. Exemplos dessas normas incluem a NBR 8800 (2024), o AISC (2005) e o Eurocode 3 (2005). Na versão anterior da NBR 8800 (1986), as ligações eram classificadas apenas nos casos extremos de rígidas ou articuladas. No entanto, a partir da revisão de 2008 passou a admitir que, para análises elásticas, as ligações podem ser tratadas como semirrígidas. De maneira semelhante, normas internacionais, como o AISC (1989) e o Eurocode 3 (1992), já ofereciam orientações para estruturas com ligações semirrígidas, conforme discutido por Júnior (2000) e Santana (2002).

1.2 Organização do Trabalho

Esta monografia é dividida em cinco capítulos. No primeiro capítulo, foram apresentados uma introdução e os objetivos a serem atingidos pela pesquisa, além de uma revisão bibliográfica .

No Capítulo 2, são abordados os fundamentos essenciais para a avaliação do comportamento da ligação semirrígida. Além disso, são apresentados os três modelos matemáticos utilizados aqui para representar esse comportamento.

No Capítulo 3 são abordados os principais aspectos da análise estática não linear. Apresenta-se a formulação do elemento finito de viga-coluna utilizado na modelagem do sistema estrutural, além do detalhamento da metodologia numérica empregada na solução do problema não linear. A descrição da formulação inclui as equações de equilíbrio, destacando-se, sobretudo, a obtenção dos vetores de forças internas e da matriz de rigidez do elemento.

No Capítulo 4, realizam-se as aplicações numéricas. Serão analisados quatro sistemas estruturais, cujas respostas serão avaliadas para demonstrar que o comportamento estrutural pode ser significativamente afetado pelo efeito da semirrigidez das ligações, o que justifica uma investigação detalhada.

E por fim, no Capítulo 5, são apresentadas considerações e conclusões relacionadas ao trabalho desenvolvido.

2 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

2.1 Introdução

As ligações em uma estrutura são elementos que estabelecem a conexão entre membros estruturais, como, por exemplo, entre uma viga e uma coluna, permitindo ou não a transferência de forças e momentos entre esses componentes. Nas estruturas em aço, as ligações exercem um papel essencial no desempenho, no sistema construtivo e de montagem e nos custos da estrutura. Dito isso, diversos estudos e programas vêm sendo desenvolvidos para avaliar o comportamento desses sistemas estruturais de forma mais realista. Isso contradiz o que é adotado em projetos, pois, para facilitar os cálculos, as ligações são idealizadas erroneamente como perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas.

Em ligações que são completamente articuladas, não há transferência de momento entre a viga e a coluna, permitindo que esses componentes trabalhem de maneira independente. Por outro lado, nas ligações que são totalmente rígidas, o ângulo formado entre os eixos da viga e da coluna permanece fixo, indicando que a ligação não apresenta qualquer rotação relativa durante a deformação da estrutura. Nesse tipo de conexão, o momento gerado na extremidade da viga é integralmente transmitido para a coluna.

De acordo com a Norma Brasileira de Estruturas Metálicas, a NBR-8800 (2024), em uma análise estrutural elástica, uma ligação viga-pilar pode ser considerada rotulada se:

$$S_i \leq \frac{0,5EI_v}{L_v} \quad (2.1)$$

e pode ser considerada rígida se,

$$S_i \geq \frac{25EI_v}{L_v} \quad (2.2)$$

em que S_i é a rigidez da ligação, correspondente a 2/3 do momento resistente de cálculo da ligação, simplificada denominada rigidez inicial, e I_v e L_v são o momento de inércia da seção transversal no plano da estrutura e o comprimento da viga conectada à ligação, respectivamente. Para qualquer valor intermediário de S_i , a ligação é considerada semirrígida.

2.2 Comportamento da ligação

Para analisar estruturas com ligações semirrígidas, o primeiro passo é modelar o comportamento da conexão. Esse comportamento é geralmente representado por curvas momento-rotação, que podem ser determinadas por meio de ensaios experimentais, simulações numéricas com elementos finitos ou modelos teóricos.

A inclusão das curvas momento-rotação na análise estrutural permite obter resultados mais precisos em comparação com as análises tradicionais, que assumem as ligações como totalmente rígidas ou articuladas. De modo geral, essas curvas podem ser expressas pelas seguintes relações:

$$M = f(\phi_c) \quad (2.3a)$$

$$\phi_c = g(M) \quad (2.3b)$$

onde, $\mathbf{M}$ é o momento que atua na ligação e ϕ_c é a sua rotação relativa.

A rigidez da ligação, representada neste estudo por S_c , é um fator essencial determinado por meio de ensaios experimentais. Do ponto de vista matemático, ela corresponde à inclinação da reta tangente à curva momento-rotação, podendo ser calculada pela seguinte equação:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \quad (2.4)$$

A rigidez por si só, não define se ela terá um comportamento rígido ou flexível. Para essa determinação, é necessário um parâmetro que relacione a rigidez da ligação à rigidez do elemento conectado a ela. Cunningham (1990) sugeriu o uso do fator fixo de rigidez, γ . Estabelecido pela Equação (2.5) com o objetivo de fornecer uma melhor compreensão sobre o comportamento rotacional da ligação.

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{3EI}{S_c L}} \quad (2.5)$$

Os valores limites do fator fixo γ são 0 e 1. Quando a ligação é totalmente articulada, sua

rigidez é nula, resultando em $\gamma = 0$. Por outro lado, para uma ligação perfeitamente rígida, o fator fixo γ assume o valor 1, pois sua rigidez é extremamente alta ($S_c \rightarrow \infty$). A partir da equação anterior, observa-se que, para uma ligação com rigidez S_c , seu comportamento será mais rígido (ou seja, γ terá um valor maior) quanto menor for a rigidez à flexão, EI , do elemento ao qual está conectada.

A Figura 2.1 apresenta o comportamento de três tipos de ligações representado por meio de uma curva momento-rotação. Observa-se que essas ligações exibem um comportamento altamente não linear sob a ação do momento fletor, porém, seguem um padrão característico. Através dessas curvas pode-se estabelecer duas propriedades importantes: a rigidez (inclinação da reta tangente à curva) e o momento último, também conhecido como capacidade de momento. Sendo assim, observando as curvas ilustradas na figura supracitada, percebe-se que, a ligação com chapa de topo se destaca por sua maior rigidez (para uma mesma intensidade de momento, uma menor rotação relativa), enquanto a cantoneira de topo e assento é a mais flexível.

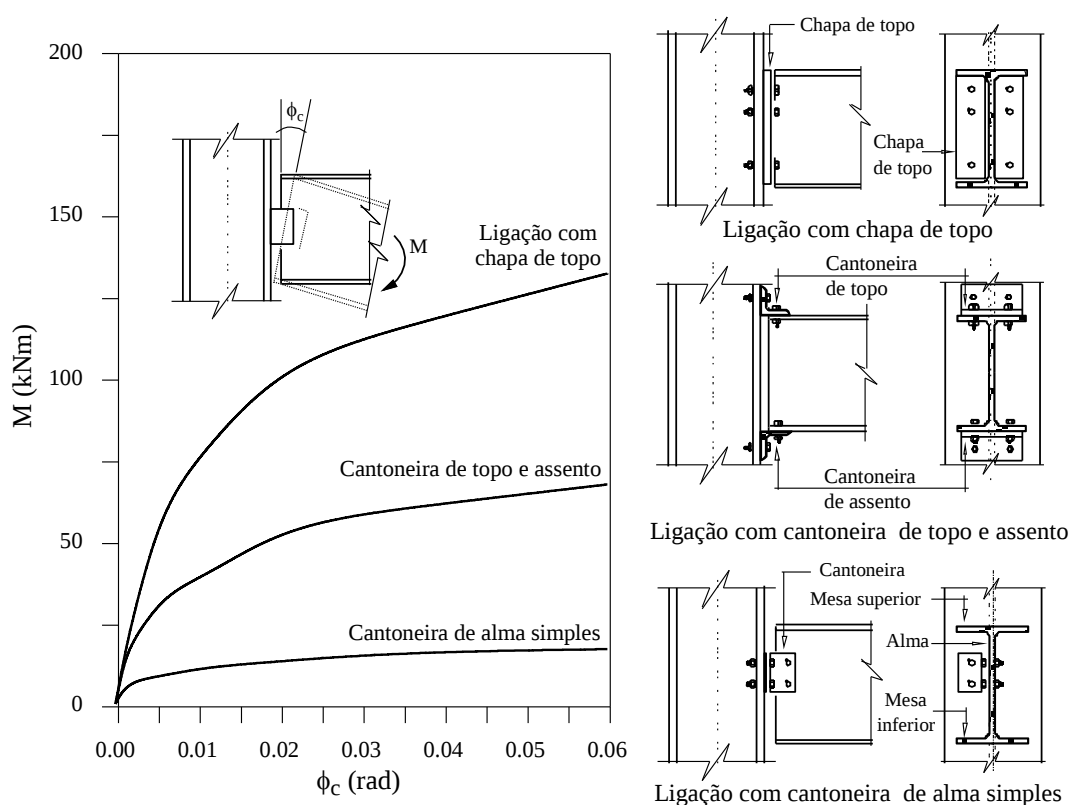


Figura 2.1 Aspecto típico das curvas momento-rotação de uma ligação

A rigidez inicial (S_{cini}) representa o comportamento da ligação no início do carregamento e pode ser determinada pela Equação (2.4) ao considerar $\phi_c = 0$. Nessa fase, a curva momento-rotação apresenta um comportamento linear, indicando a presença de uma etapa elástica, que desaparece conforme o carregamento aumenta.

A transição para um comportamento não linear ocorre devido a fatores como concentração de tensões, imperfeições geométricas, descontinuidades nos elementos da ligação e até mesmo a plastificação de seus componentes. Com o aumento da carga, esses efeitos reduzem progressivamente a rigidez da ligação, afetando sua capacidade de rotação. Na fase final do carregamento, a curva momento-rotação se aproxima de um valor assintótico chamado momento último (M_u), ou capacidade de momento. A partir desse ponto, a ligação entra em colapso e sua rigidez torna-se nula.

Devido à complexidade do comportamento das ligações semirrígidas, sua representação matemática por meio de aproximações simples e precisas é um desafio. Diversos modelos analíticos foram desenvolvidos para essa finalidade, porém muitos deles, apesar de descreverem com precisão o comportamento da ligação, são bastante complexos e aplicáveis apenas a casos específicos. A literatura apresenta diversos modelos não lineares, e neste trabalho será abordado o modelo exponencial (Lui e Chen, 1986) e o modelo de potências com quatro parâmetros (Richard-Abbott, 1975). Ao contrário do modelo linear, que assume a rigidez da ligação como constante, os modelos não lineares devem ser capazes de atualizar a rigidez da ligação (rigidez tangente) ao longo do processo de carregamento.

2.2.1 Modelo Linear

No modelo linear, a rigidez da ligação é determinada por um único parâmetro. Nesse caso, a relação momento-rotação pode ser expressa pela seguinte equação:

$$M = S_{cini}\phi_c \quad (2.6)$$

na qual S_{cini} é o valor da rigidez inicial da ligação, que pode ser expressa em função da rigidez à flexão da viga e de um coeficiente de rigidez que indica o grau de flexibilidade da ligação. Esse coeficiente, denominado fator de rigidez γ , descreve o comportamento dos nós no elemento viga-

coluna com ligações semirrígidas, variando de 0 (zero) para ligações idealmente articuladas a 1 (um) para ligações perfeitamente rígidas. Com base nesses parâmetros, a rigidez inicial da ligação, utilizando a Equação (2.5), é definida como:

$$S_{cini} = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{3EI}{L} \quad (2.7)$$

em que EI e L são a rigidez à flexão e o comprimento da viga, respectivamente. É importante ressaltar que, numa análise pelo Método dos Elementos Finitos, L representa o comprimento do elemento finito que possui ligação semirrígida em suas extremidades.

No modelo linear, assume-se que a rigidez da ligação, S_c , permanece constante durante todo o processo de análise, com valor igual a S_{cini} . Trata-se do modelo mais simples de ligação e é amplamente utilizado nas fases iniciais de desenvolvimento de métodos de análise para ligações semirrígidas. No entanto, não é muito preciso em casos de grandes deslocamentos.

2.2.2 Modelo Exponencial

O modelo exponencial foi proposto por Lui e Chen (1986; 1988), cuja equação matemática da curva momento-rotação é expressa por:

$$M = M_o + \sum_{m=1}^n C_j \left[1 - \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c| \quad (2.8)$$

em que M representa o valor do momento na ligação, ϕ_c é a deformação rotacional correspondente, M_o é o momento inicial, R_{kf} refere-se à rigidez associada ao encruamento da ligação, α é um fator de escala, n indica o número de termos considerados no ajuste, e C_m (para $m = 1, 2, \dots, n$) são os coeficientes de ajuste da curva.

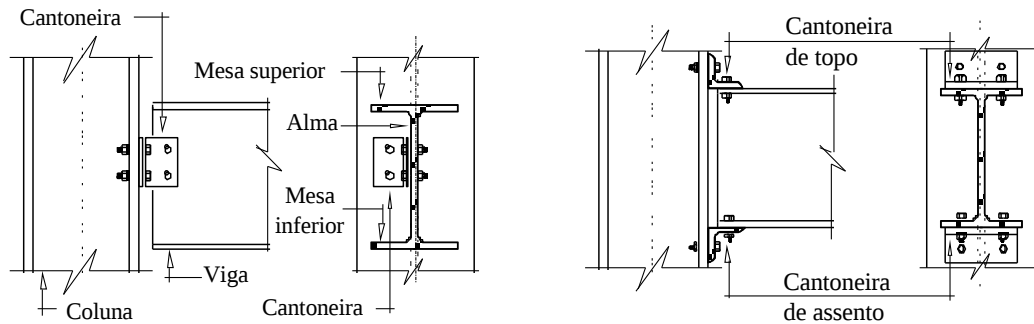
A Figura 2.2 a seguir apresenta os detalhes construtivos de quatro tipos de ligações viga-coluna: (A) ligação com cantoneira de alma simples, (B) ligação com cantoneira de topo e assento, (C) ligação com chapa de topo e (D) ligação com chapa de topo estendida. Os valores dos parâmetros do modelo exponencial para essas ligações, obtidos a partir de ensaios experimentais (Chen e Lui, 1991), estão indicados na Tabela 2.1.

A rigidez tangente pode ser expressa, usando (2.7), como:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{m=1}^n \frac{C_j}{2m\alpha} \exp\left(\frac{-|\phi_c|}{2m\alpha}\right) + R_{kf} \quad (2.9)$$

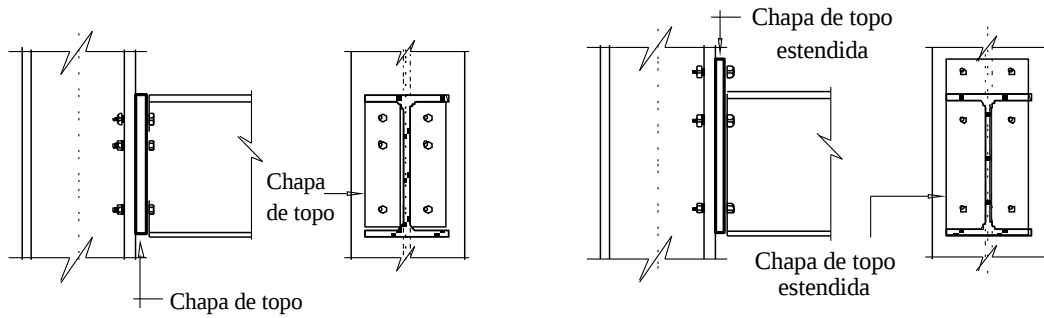
A Figura 2.3 ilustra as curvas momento-rotação e rigidez-rotação para as ligações viga-coluna detalhadas na Figura 2.2 obtidas através desse modelo exponencial.

O modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986, 1988) geralmente representa bem o comportamento não linear da ligação (Chan e Chui, 2000), embora exija um grande número de parâmetros para o ajuste da curva. No entanto, quando ocorre uma mudança abrupta na inclinação da curva momento-rotação, esse modelo não consegue capturá-la com precisão.



(a) Ligação com cantoneira de alma simples (A)

(b) Ligação com cantoneira de topo e assento (B)



(c) Ligação com chapa de topo (C)

(d) Ligação com chapa de topo estendida (D)

Figura 2.2 - Detalhes construtivos de ligações viga-coluna

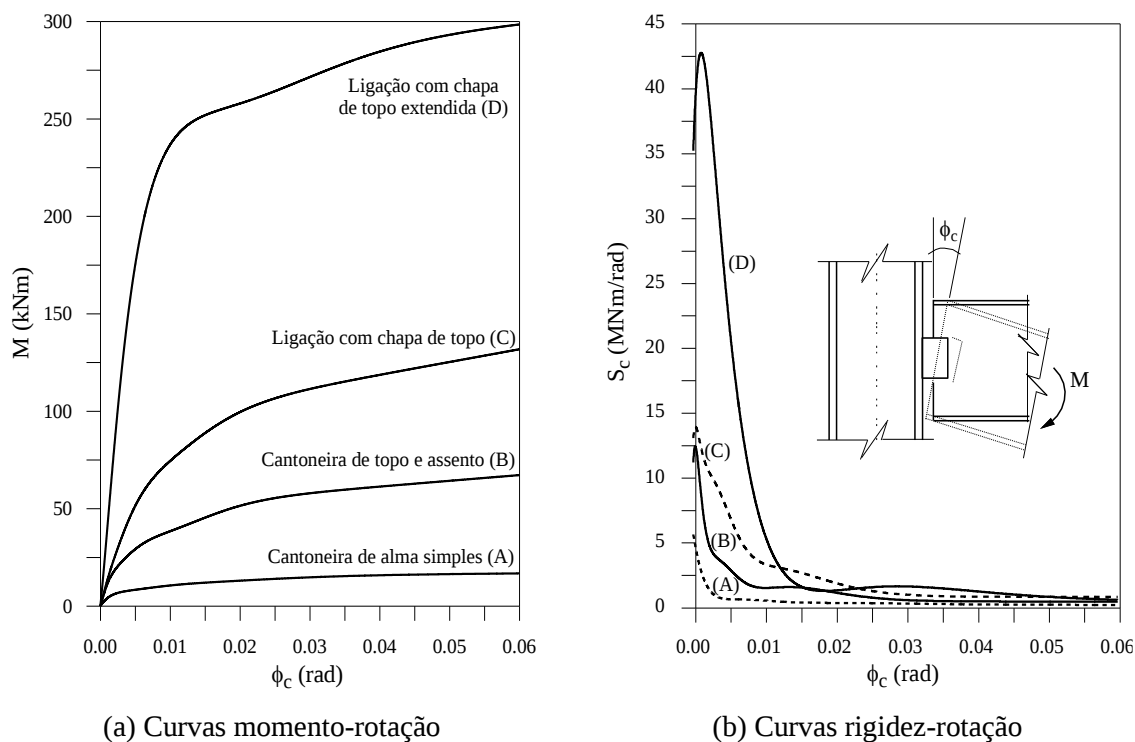


Figura 2.3 Comportamento de ligações viga-coluna

Tabela 2.1 Parâmetros do modelo exponencial para quatro tipos de ligações

Parâmetros	Cantoneira de alma simples (A)	Cantoneira de topo e assento (B)	Chapa de topo (C)	Chapa de topo estendida (D)
M_o (kip.in)	0	0	0	0
R_{kf} (kip/rad)	$0,47104 \times 10^2$	$0,43169 \times 10^2$	$0,96415 \times 10^3$	$0,41193 \times 10^3$
α	$0,51167 \times 10^{-3}$	$0,31425 \times 10^{-3}$	$0,31783 \times 10^{-3}$	$0,67083 \times 10^{-3}$
C_1	$-0,43300 \times 10^2$	$-0,34515 \times 10^3$	$-0,25038 \times 10^3$	$-0,67824 \times 10^3$
C_2	$0,12139 \times 10^4$	$0,52345 \times 10^4$	$0,50736 \times 10^4$	$0,27084 \times 10^4$
C_3	$-0,58583 \times 10^4$	$-0,26762 \times 10^5$	$-0,30396 \times 10^5$	$-0,21389 \times 10^5$
C_4	$0,12971 \times 10^5$	$0,61920 \times 10^5$	$0,75338 \times 10^5$	$0,78563 \times 10^5$
C_5	$-0,13374 \times 10^5$	$-0,65114 \times 10^5$	$-0,82873 \times 10^5$	$-0,99740 \times 10^5$
C_6	$0,52224 \times 10^4$	$0,25506 \times 10^5$	$0,33927 \times 10^5$	$0,43042 \times 10^5$
S_{cini} (kip in/rad)	$0,48000 \times 10^5$	$0,95219 \times 10^5$	$0,11000 \times 10^6$	$0,30800 \times 10^6$

2.2.3 Modelo de Potências com Quatro Parâmetros

O modelo de potências com quatro parâmetros é proposto por Richard-Abbott (1975), que descreve a relação momento-rotação como:

$$M = \frac{(S_{cini} - R_p)|\phi_c|}{\left[1 + \left|\frac{(S_{cini} - R_p)|\phi_c|}{M_0}\right|^n\right]^{(n+1)/n}} + R_p \quad (2.10)$$

com rigidez tangente,

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \Big|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \frac{(S_{cini} - R_p)}{\left[1 + \left|\frac{(S_{cini} - R_p)|\phi_c|}{M_0}\right|^n\right]^{(n+1)/n}} + R_p \quad (2.11)$$

onde R_p , representa a rigidez associada ao encruamento da ligação quando ϕ_c tende ao infinito, n é um parâmetro que define o formato da curva, e M_0 corresponde a um momento de referência. Como a função requer apenas quatro parâmetros para sua definição e sempre resulta em uma rigidez positiva, o modelo é considerado simples. Além disso, sua eficiência computacional faz com que seja amplamente utilizado na representação do comportamento de ligações semirrígidas. Entre os estudos que adotaram esse modelo na modelagem da curva momento-rotação, destacam-se os trabalhos de Chen e Lui (1991), Chan e Chui (2000), Liu (2007) e Sekulovic e Nefovska (2008). Em um desses estudos, Kishi et al. (2004) demonstraram que o modelo é preciso e eficaz na previsão do comportamento de ligações com placa de extremidade. Vale ressaltar que esse modelo pode ser aplicado a qualquer tipo de ligação, desde que seus quatro parâmetros sejam determinados experimentalmente ou por meio de simulações numéricas.

3 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

3.1 Introdução

Os projetos estruturais geralmente são desenvolvidos considerando uma estrutura idealizada e empregando uma análise elástica linear. Nesse contexto, as equações de equilíbrio são estabelecidas com base na configuração original, sem deformações, assumindo que as variações geométricas são pequenas o suficiente para não influenciar significativamente o equilíbrio e a resposta do sistema. No entanto, uma limitação desse tipo de análise é sua incapacidade de representar com precisão o comportamento real das estruturas quando submetidas a carregamentos extremos ou condições fora do usual. Isso ocorre porque a maioria das estruturas apresenta comportamento não linear antes de alcançar seus limites de resistência. Por esse motivo, diversas normas baseadas no conceito de resistência última passaram a incluir diretrizes para que os engenheiros estruturais levem em conta a não linearidade, seja por meio de análises precisas ou aproximadas.

Sendo assim, a análise não linear busca aprimorar a simulação do comportamento estrutural em diversos aspectos. O constante avanço na modelagem estrutural tem destacado a importância de considerar adequadamente os efeitos das não linearidades, que influenciam de maneira significativa a resposta das estruturas. O principal objetivo é garantir previsões seguras e confiáveis do comportamento do sistema para aplicação em projetos.

3.2 Metodologia

No âmbito da Engenharia de Estruturas, um dos métodos usados para discretização de um problema contínuo e, a partir daí, a obtenção de soluções numéricas aproximadas, é o Método dos Elementos Finitos. Esse método tem sido uma das ferramentas de solução numérica mais utilizada nessa área, principalmente devido à sua eficiência e aplicabilidade.

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) permite alcançar o equilíbrio estrutural ao dividir o meio contínuo em subdomínios interligados por pontos nodais, nos quais são definidos os graus de liberdade a serem determinados. Esse processo é realizado por meio

da avaliação da energia potencial total, conforme descrito na Equação (3.1), e da soma das contribuições individuais de cada elemento. Nesse contexto, a condição de equilíbrio estático para os problemas estruturais analisados neste estudo pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c) \cong \mathbf{F}_e \text{ ou } \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c) \cong \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{F}_i$ representa o vetor de forças internas, uma função não linear dos deslocamentos nodais $\mathbf{U}$, dos esforços internos nos elementos $\mathbf{P}$ e rigidez da ligação $\mathbf{S}_c$. O termo $\mathbf{F}_e$ corresponde ao vetor de forças externas, expresso como o produto do parâmetro de carga λ pelo vetor de forças externas de referência $\mathbf{F}_r$, que define a direção da solicitação externa aplicada.

A solução da Equação (3.1) é obtida nesse trabalho por meio de um processo incremental e iterativo, baseado no método de Newton-Raphson. Esse processo é organizado em duas etapas fundamentais: primeiramente, a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, monta-se a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$ e seleciona-se o incremento inicial de carga $\Delta\lambda^0$, onde se procura satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Com o valor de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais, $\Delta\mathbf{U}^0$. Os valores de $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$ caracterizam a chamada solução predita que, a princípio, não satisfaz a Equação (3.1), pois $\mathbf{F}_i$ é uma função não linear dos deslocamentos. Por isso, numa segunda etapa, é feita a correção dessa solução predita através de um processo iterativo, utilizando o método de Newton-Raphson. Essa estratégia de solução é sumarizada na Tabela 3.1, onde é apresentado o algoritmo para solução numérica que foi adotado. O elemento finito usado na discretização do sistema estrutural e uma das formulações detalhadas em Silva (2009) serão apresentados na próxima seção.

3.3 O Elemento Finito

Neste estudo, a ligação semirrígida é representada por um elemento de mola posicionado no ponto de interseção entre a viga e a coluna. Os elementos de ligação são fisicamente fixados às extremidades do elemento viga-coluna, garantindo o equilíbrio e a compatibilidade do sistema. Dessa forma, os graus de liberdade das ligações podem ser incorporados à matriz de rigidez tangente do elemento viga-coluna. As ligações transmitem esforços axiais, cortantes, de flexão e torção, porém, apenas a deformação rotacional do elemento de mola é considerada na modelagem.

Tabela 3.1 Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros particulares referentes ao tipo de análise. Vale ressaltar que, para os elementos com ligações semi-rígidas, o comportamento momento-rotação da ligação deve ser fornecido
2. Define o vetor de cargas nodais de referência, $\mathbf{F}_r$, que estabelece a direção do carregamento externo aplicado
3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^t\lambda$
4. SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente: $\mathbf{K} = \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c)$
4b. Resolve: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
4c. Define $\Delta\lambda^0$ usando uma estratégia de incremento de carga
4d. Determina: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
4e. Atualiza as variáveis na configuração $t + \Delta t$: ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
5. PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON: $k = 1, 2, 3, \dots$
5a. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
5b. Calcula o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente
SIM (Critério de forças): <i>Pare o processo iterativo e siga para o item 6</i>
5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$
5e. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, usando uma estratégia de iteração
5f. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$, com:
$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$
5g. Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, $\mathbf{U}$:
a) <i>Incremental:</i> $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
b) <i>Total:</i> ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
5h. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente
SIM (Critério de deslocamentos): <i>Pare o processo iterativo e siga para o item 6</i>
SIM (Critério de força e deslocamentos): <i>Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c</i>
5i. Retorna ao passo 5
6. Atualiza a variável $\mathbf{S}_c$ e outras que forem necessárias
7. REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4

A presença das molas introduz rotações relativas nos nós das extremidades do elemento. Com isso, as equações que descrevem o comportamento não linear do sistema estrutural idealmente rígido se modificam. Nesse trabalho o procedimento usado para modificar as equações matriciais de elementos de viga-coluna para a consideração dos efeitos da flexibilidade da ligação é definindo pela formulação SRF-1 (*Semi-rigid finite element formulation - 1*), que é uma metodologia que se baseia na formulação proposta por Chan e Chui (2000) e será usada para investigar a influência das ligações viga-coluna semirrígidas na capacidade de carga e estabilidade de sistemas estruturais.

Para desenvolver a formulação, considera-se o elemento finito apresentado na Figura 3.1. Esse elemento é composto por uma viga-coluna e dois elementos fictícios de mola, posicionados em suas extremidades. Como mencionado anteriormente, essas molas incorporam os efeitos da flexibilidade das ligações na análise. Nota-se que um dos lados dos elementos de ligação se conecta à viga-coluna, enquanto o outro se liga ao nó global (i ou j). A Figura 3.2 ilustra a configuração deformada do elemento, destacando as forças internas e as deformações nas molas de ligação. As rigidezes dessas molas são representadas por S_{ci} e S_{cj} , e as ligações podem apresentar diferentes comportamentos, sendo descritas por distintas curvas momento-rotação.

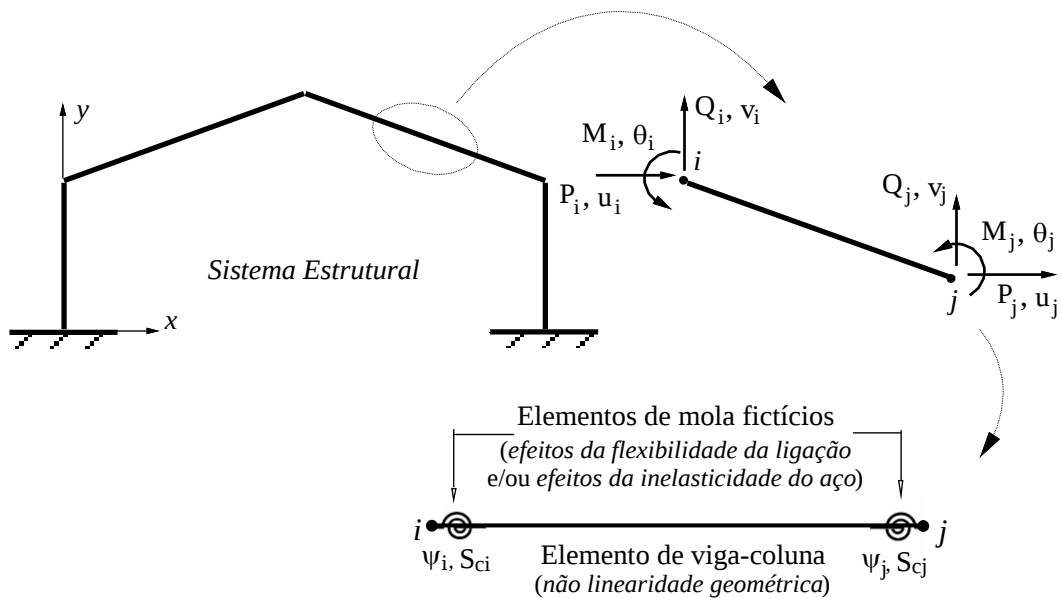


Figura 3.1 Elemento finito adotado

A rotação relativa da ligação, ϕ_c , é definida como sendo a diferença entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global do elemento, θ_c , e daquele conectado ao elemento de viga-coluna, θ_b . Considerando, então, os elementos de mola das extremidades i e j , as rotações das ligações podem ser escritas, na forma incremental, como:

$$\Delta\phi_{ci} = \Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi} \quad (3.2)$$

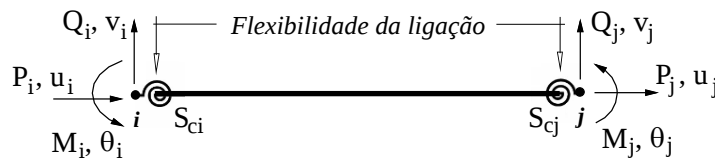
$$\Delta\phi_{cj} = \Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj} \quad (3.3)$$

sendo $\Delta\phi_{ci}$ e $\Delta\phi_{cj}$ as rotações relativas incrementais devido à flexibilidade das ligações, onde podemos escrever as seguintes relações:

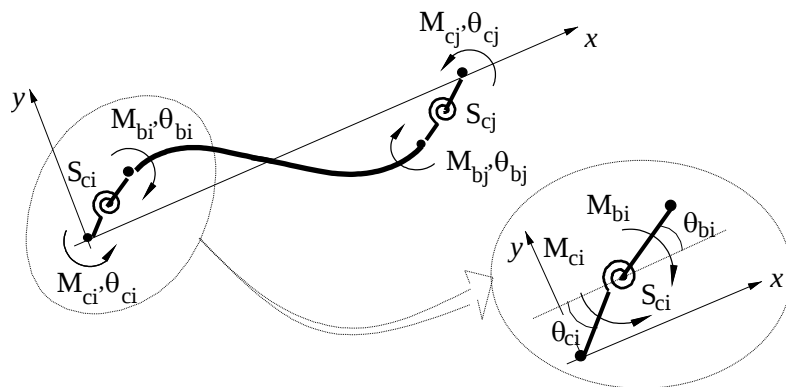
$$\Delta M_{ci} = S_{ci}\Delta\phi_{ci} \quad (3.4)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj}\Delta\phi_{cj} \quad (3.5)$$

na qual ΔM_{ci} e ΔM_{cj} são, respectivamente, os momentos fletores atuantes nos elementos de mola das extremidades i e j .



(a) Configuração indeformada



(b) Configuração deformada

Figura 3.2 Elemento de viga-coluna com molas fictícias

Estabelecendo o equilíbrio de momento nos elementos de ligação das extremidades i e j, ou seja:

$$\Delta M_{ci} + \Delta M_{bi} = 0 \quad (3.6)$$

$$\Delta M_{cj} + \Delta M_{bj} = 0 \quad (3.7)$$

e, levando em consideração as relações anteriores (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), escreve-se:

$$\Delta M_{ci} = S_{ci}(\Delta \theta_{ci} - \Delta \theta_{bi}) \text{ e } \Delta M_{bi} = -\Delta M_{ci} = S_{ci}(\Delta \theta_{bi} - \Delta \theta_{ci}) \quad (3.8)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj}(\Delta \theta_{cj} - \Delta \theta_{bj}) \text{ e } \Delta M_{bj} = -\Delta M_{cj} = S_{cj}(\Delta \theta_{bj} - \Delta \theta_{cj}) \quad (3.9)$$

sendo ΔM_{bi} e ΔM_{bj} os momentos atuantes no elemento de viga-coluna (Figura 3.2).

Na forma incremental matricial, as relações (3.8) e (3.9) ficam:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

nas quais as matrizes representam as matrizes de rigidez dos elementos de ligação das extremidades i e j.

Ao se adicionar molas de ligação às extremidades do elemento de viga-coluna, a matriz de rigidez convencional desse elemento, em uma análise de segunda ordem, deve ser modificada para considerar o efeito provocado pela flexibilidade das ligações. Os procedimentos necessários para que se faça a modificação dependem da formulação de elementos finitos adotada.

Para as seções internas do elemento de viga-coluna, a relação de equilíbrio momento-rotação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

onde os termos de rigidez à flexão da matriz, $k_{(m,n)}$, são os coeficientes correspondentes à linha

m e coluna n da matriz de rigidez do elemento de viga coluna da formulação geometricamente não linear proposta por Yang e Kuo (1994), no qual as ligações são consideradas perfeitamente rígidas.

Assim, combinando as Equações (3.10 e 3.11) e (3.12), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} & 0 \\ 0 & k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Fazendo a multiplicação matricial e assumindo que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais do elemento, ou seja, que os momentos internos ΔM_{bi} e ΔM_{bj} são iguais a zero, chega-se, usando a segunda e terceira linhas do sistema de equações resultante, a:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

e, através das duas outras linhas, encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Usando (3.14) é possível reescrever (3.15) como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + k_{(6,6)} & -k_{(3,6)} \\ -k_{(6,3)} & S_{ci} + k_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

na qual $\beta = (S_{ci} + k_{(3,3)})(S_{cj} + k_{(6,6)}) - k_{(6,3)}k_{(3,6)}$.

Novamente percebe-se que $\Delta M_i = \Delta M_{ci}$ e $\Delta M_j = \Delta M_{cj}$. Assim, as relações entre os esforços cisalhantes e os momentos fletores, obtidas por equilíbrio de força e momento podem ser escritas na seguinte forma incremental matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/L & 1/L \\ 1 & 0 \\ -1/L & -1/L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

onde ΔM_i e ΔM_j são os momentos nodais incrementais do elemento; ΔQ_i e ΔQ_j são as forças cisalhantes incrementais; e L é o comprimento desse elemento na configuração de equilíbrio t .

A partir da Figura 3.3 a seguir, é possível ainda estabelecer as igualdades (3.18) e (3.19).

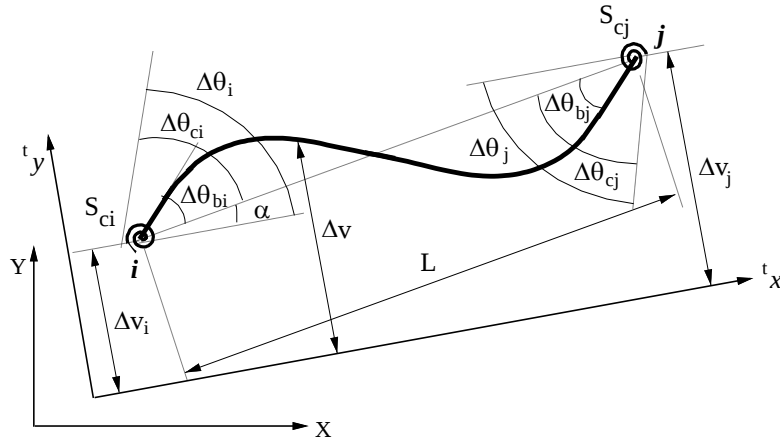


Figura 3.3 Deslocamentos nodais do elemento na configuração deformada

$$\Delta\theta_{ci} = \Delta\theta_i - \alpha \quad (3.18)$$

$$\Delta\theta_{cj} = \Delta\theta_j - \alpha \quad (3.19)$$

com $\alpha = (\Delta v_j - \Delta v_i)/L$. Assim, com essas relações escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/L & 1 & -1/L & 0 \\ 1/L & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta\theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

onde Δv_i e Δv_j são, respectivamente, os deslocamentos verticais incrementais dos nós i e j.

Substituindo (3.17) em (3.18) e, na equação obtida, introduzindo (3.20), chega-se, após realizar as operações matriciais necessárias, à seguinte equação de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta Q_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

na qual os elementos da matriz consideram de forma conjunta o efeito da flexibilidade da ligação e aqueles oriundos da não linearidade geométrica. Esses coeficientes $k_{(m,n)}^*$ são funções das rigidezes das ligações, S_{ci} e S_{cj} , e dos respectivos termos $k_{(m,n)}$.

Reagrupando a matriz de rigidez, apresentada na Equação (3.22), na matriz de rigidez completa (ordem 6x6) do elemento de viga-coluna com molas nas duas extremidades, chega-se finalmente à relação força-deslocamento para esse elemento. A expressão que a define é:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)}^* & k_{(1,2)}^* & k_{(1,3)}^* & k_{(1,4)}^* & k_{(1,5)}^* & k_{(1,6)}^* \\ k_{(2,1)}^* & k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,4)}^* & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,1)}^* & k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,4)}^* & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(4,1)}^* & k_{(4,2)}^* & k_{(4,3)}^* & k_{(4,4)}^* & k_{(4,5)}^* & k_{(4,6)}^* \\ k_{(5,1)}^* & k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,4)}^* & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,1)}^* & k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,4)}^* & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_j \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

na qual os termos $k_{(m,n)}$ são os elementos da linha m e coluna n na matriz de rigidez da formulação de segunda ordem usada anteriormente para estabelecer a Equação (3.23). Pode-se observar que as forças axiais não sofreram alteração ao se considerar o efeito da flexibilidade da ligação.

Numa forma simplificada, a relação (3.22) pode ser escrita como:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{K}_e^* \Delta \mathbf{u} \quad (3.23)$$

em que $\Delta \mathbf{f}_i$, $\mathbf{K}_e^*$ e $\Delta \mathbf{u}$ representam, respectivamente, o vetor de forças internas incrementais, a matriz de rigidez modificada para considerar os efeitos da semi rigidez da ligação e o vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento de viga-coluna com ligações semi-rígidas definidos no sistema local de coordenadas.

4 APLICAÇÕES

4.1 Introdução

Nesta seção a metodologia numérica apresentada no capítulo anterior é usada para avaliar o efeito da semirrigidez da ligação na capacidade de carga e estabilidade de quatro sistemas estruturais: viga biengastada, pórtico de dois, seis e sete pavimentos.

Tendo como objetivo principal nas análises a determinação da carga de colapso das estruturas supracitadas, o incremento inicial desse parâmetro foi assumido igual a 0.01. O método de Newton-Raphson padrão, a estratégia do incremento direto do parâmetro de carga com iteração a carga constante, uma tolerância $\zeta = 10^{-4}$ capaz de assegurar a convergência da solução no processo iterativo foram usados.

4.2 Viga com Ligações Semirrígidas nas Extremidades

A Figura 4.1a ilustra a estrutura a ser analisada nesta seção. Trata-se de uma viga biengastada cujo comportamento foi também investigado por Mondkar e Powell (1977) e Yang e Saigal (1984). A viga, que tem comprimento $L = 0.508$ m, é submetida a uma carga concentrada, P , no centro do vão. Como indicado, a seção transversal da viga é retangular, com dimensões $b = 2.54$ cm e $h = 0.3175$ cm, e considera-se o módulo de elasticidade igual a 207 GPa.

Para a análise, a viga foi discretizada com dez elementos. Vale ressaltar que apenas dois desses elementos foram modelados com molas de ligação nas extremidades. As ligações entre as extremidades da viga e os apoios foram consideradas rígidas e semirrígidas. Para o caso de ligações rígidas membro-apoio, adotou-se, com o objetivo de verificar a eficiência das formulações no caso extremo, um valor elevado para a rigidez da ligação ($S_c \rightarrow \infty$). Nesse caso, o parâmetro S_c foi considerado igual a $10^{10}EI/L$. Para a ligação semirrígida, considerou-se a rigidez das ligações igual a $10EI/L$. Nos dois casos, o modelo linear foi utilizado na modelagem da ligação. Esse modelo está detalhado no Capítulo 2 deste trabalho. Nesse contexto, a rigidez da ligação é considerada invariável durante todo o processo de carregamento. Além disso, a carga P foi incrementada até atingir 2 kN.

A Figura 4.1b ilustra a variação do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga,

v , com o carregamento, P . Comparam-se as respostas obtidas com a solução numérica encontrada em Chui e Chan (1996) que também realizaram a análise dinâmica dessa viga. A boa concordância pode ser verificada. Percebe-se, com as análises, que a rigidez da viga, matematicamente representada pela inclinação reta tangente à curva carga-deslocamento, aumenta com o acréscimo do carregamento.

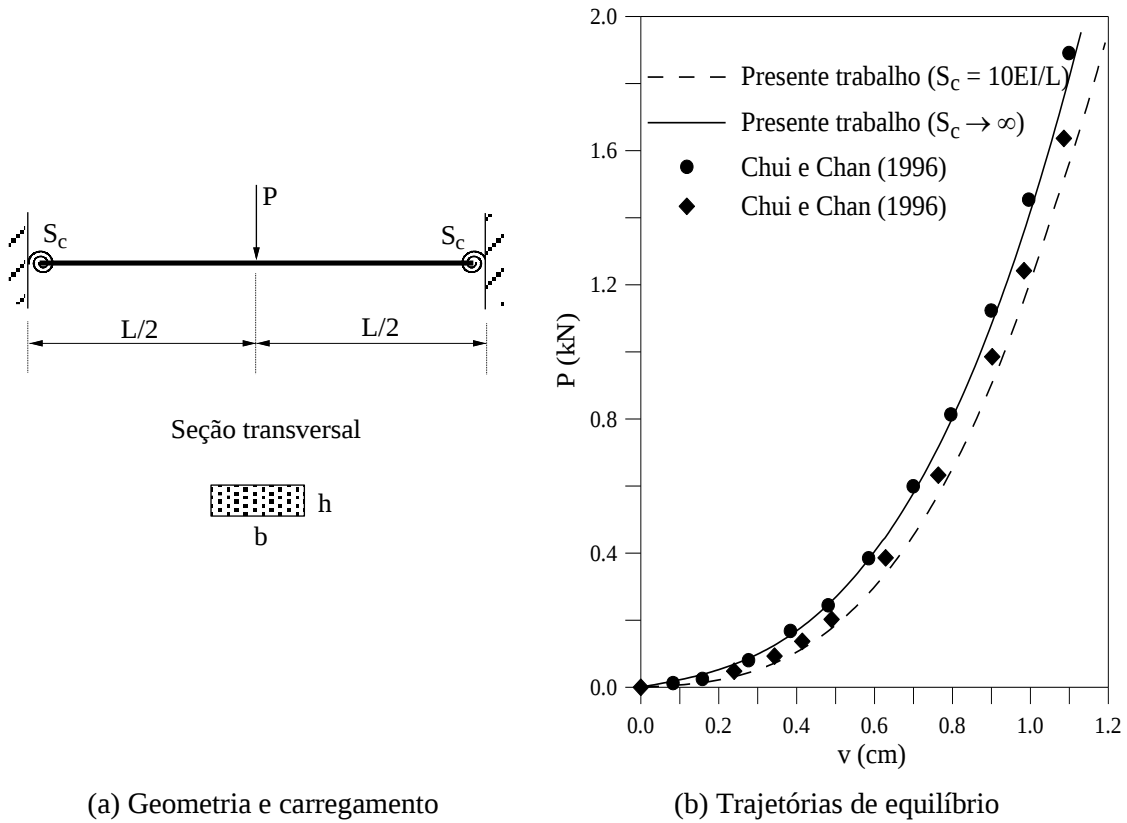


Figura 4.1 Viga biengastada

4.3 Pórticos de Dois Andares

A Figura 4.2 ilustra dois pórticos de dois pavimentos, com ligações viga-coluna semirrígidas de comportamentos não lineares que serão estudados nesta seção. São feitas análises considerando duas condições de apoios diferentes: engastados e rotulados, para avaliar a capacidade de carga do pórtico. Essas duas situações são mostradas na Figura 4.2, respectivamente.

Para as vigas é adotado o perfil W360x72 e para as colunas, o perfil W310x143. Na discretização das vigas e colunas foram usados, respectivamente, dois e um elementos finitos. Além disso, foi considerado em todas as seções o módulo de elasticidade, E , igual a 200 GPa. Imperfeições na estrutura são induzidas por meio de forças horizontais de pequena intensidade aplicadas no topo do primeiro e do segundo pavimentos, como pode ser visto também na Figura 4.2.

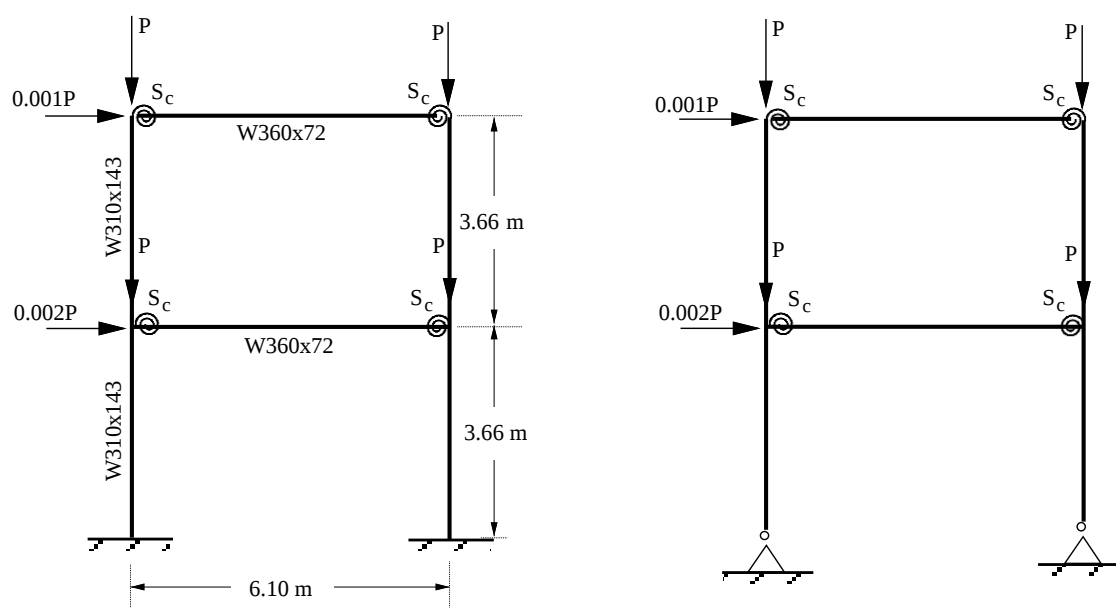


Figura 4.2 Sistemas estruturais analisados: geometria e carregamento

Para representar o comportamento não linear das ligações viga-coluna, quatro tipos de ligações, modeladas através do modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986), foram usadas. As ligações consideradas são: cantoneira de alma simples (Ligação A), cantoneira de topo e assento (Ligação B), chapa de topo (Ligação C) e chapa de topo estendida (Ligação D). Detalhes dessas ligações são mostrados na Figura 2.2 do Capítulo 2. Segundo Chen e Lui (1991)

e Chan e Chui (2000), a ligação A foi testada por Richard *et al.* (1982), enquanto B foi ensaiada por Azizinamini *et al.* (1985). Já as ligações C e D, de acordo com os mesmos autores, foram testadas por Ostrander (1970) e Johnson e Walpole (1981), respectivamente. Os valores dos parâmetros do modelo exponencial para essas ligações, baseados em ensaios experimentais (Chen e Lui, 1991) estão indicados no Capítulo 2, na Tabela 2.1. Além desses quatro modelos de ligações, é considerada a ligação viga-coluna como sendo perfeitamente rígida.

A Figura 4.3a exibe, as trajetórias de equilíbrio obtidas para o pórtico com apoios engastados. Essa figura mostra a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura, u , com a carga aplicada, P . Os resultados obtidos são comparados aos de Chan e Chui (2000). Já a Figura 4.3b, exibe, respectivamente, os resultados obtidos para o pórtico com apoios rotulados.

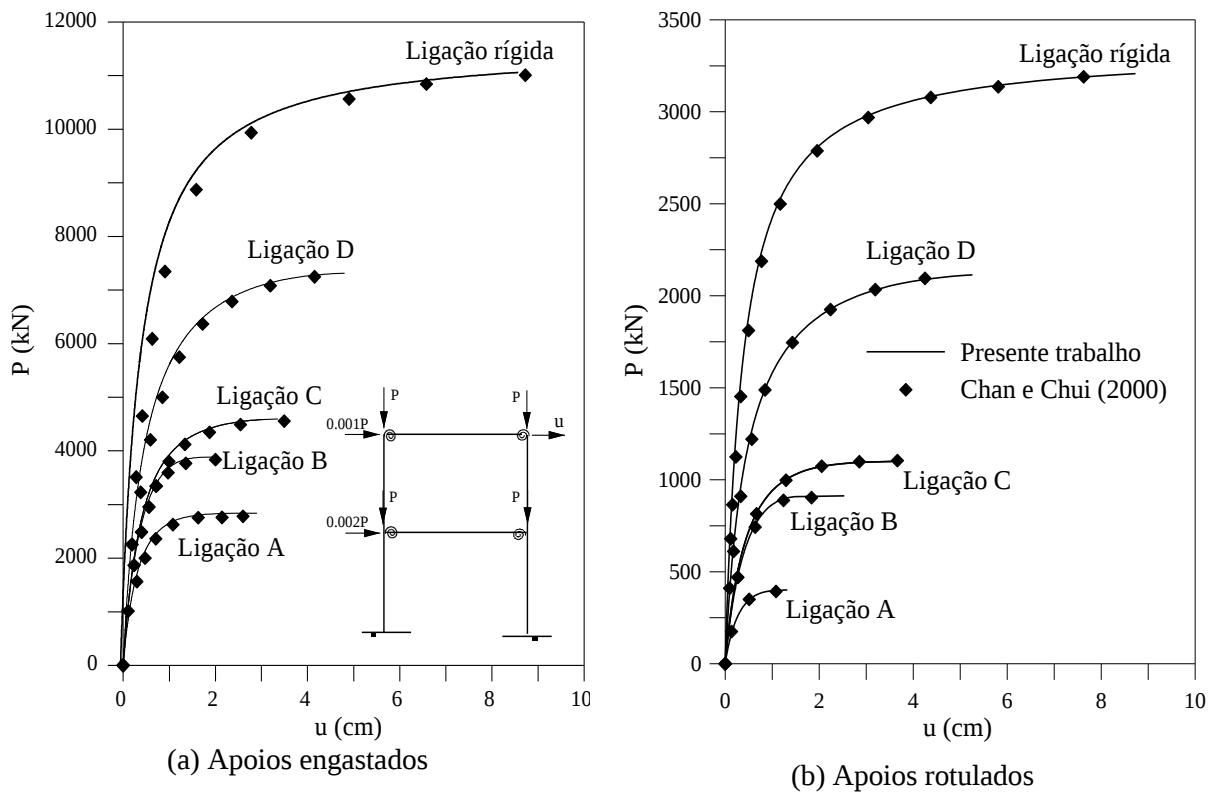


Figura 4.3 Trajetórias de equilíbrio

Através da análise dessas figuras, percebe-se que as cargas limite são menores para as ligações mais flexíveis e, adicionalmente, o tipo de apoio, engastado ou rotulado, desempenha um papel importante no comportamento estrutural. O apoio rígido eleva consideravelmente o

valor da carga crítica. Portanto, o uso de apoios fixos e ligações mais rígidas seria uma forma de aumentar o valor da carga limite e diminuir o deslocamento horizontal.

As Tabelas 4.1 e 4.2, mostradas a seguir, apresentam as cargas críticas para os pórticos com apoios engastados e rotulados, respectivamente. Os valores são comparados aos fornecidos por Chen e Lui (1991) e Chan e Chui (2000). O bom acordo entre os resultados é novamente observado.

Tabela 4.1 Cargas limite de estabilidade P_{lim} (kN) para o pórtico com apoios engastados

Ligação	Chen e Lui (1991)	Chan e Chui (2000)	Presente Trabalho
<i>A</i>	2802.4	2838.0	2842.4
<i>B</i>	3825.5	3892.2	3887.7
<i>C</i>	4581.7	4617.3	4595.0
<i>D</i>	7228.4	7330.7	7317.3
<i>Rígida</i>	11254.0	11387.5	11320.7

Tabela 4.2 Cargas limite de estabilidade P_{lim} (kN) para o pórtico com apoios rotulados

Ligação	Chen e Lui (1991)	Chan e Chui (2000)	Presente Trabalho
<i>A</i>	400.3	395.9	400.3
<i>B</i>	911.9	907.4	903.0
<i>C</i>	1076.5	1107.6	1098.7
<i>D</i>	2112.9	2121.8	2121.8
<i>Rígida</i>	3225.0	3318.4	3256.1

4.4 Pórtico de Seis Andares

O pórtico de seis pavimentos e quadro duplo ilustrado na Figura 4.4 é a próxima estrutura a ser investigada. A análise dessa estrutura com ligações rígidas entre vigas e colunas é um problema clássico, que foi proposto por Vogel (1985) para calibração de formulações inelásticas. Por essa razão, essa estrutura é conhecida na literatura como pórtico de Vogel. Porém, para realizar uma análise estrutural mais realística, ligações semirrígidas com comportamento não linear serão adotadas para interligar vigas e colunas. Como se sabe, molas com rigidez rotacional são usadas para modelar as ligações e, na Figura 4.4, elas estão esboçadas para representá-las. A análise estrutural convencional, no qual as ligações são assumidas perfeitamente rígidas, será também realizada com o objetivo de verificar as suas diferenças em relação àquelas considerando as ligações como semirrígidas.

O pórtico tem 22.5 m de altura e 6 m de vão em cada um dos quadros, como mostra a Figura 4.4. Os seguintes perfis metálicos comerciais constituem as vigas: IPE 240, IPE 300, IPE 330, IPE 360 e IPE 400. As colunas são formadas por perfis HEB 160, HEB 200, HEB 220, HEB 240 e HEB 260, como indicado na mesma figura. Nessa figura tem-se também o carregamento atuante. Nas vigas, cargas uniformemente distribuídas com intensidades 31.7λ kN/m e 49.1λ kN/m, sendo λ um fator de carga, são consideradas. No topo das colunas em cada um dos seis pavimentos, cargas concentradas de intensidades F_1 e F_2 são aplicadas. Em todas as vigas e colunas, o módulo de elasticidade é assumido igual a 205 GPa e uma imperfeição geométrica inicial Δ_0 nas colunas é considerada. O valor dessa imperfeição será informado mais adiante de acordo com a análise realizada.

Quatro diferentes tipos de ligações viga-coluna são consideradas: cantoneira de alma simples (Ligação A), cantoneira de topo e assento (Ligação B), chapa de topo (Ligação C) e chapa de topo estendida (Ligação D). O comportamento momento-rotação de tais ligações é representado através da função exponencial proposta por Lui e Chen (1986). Os parâmetros requeridos pelo modelo para essa representação são informados na Tabela 2.1 do Capítulo 2. As curvas momento-rotação, $M-\phi_c$, e rigidez-rotação, $S_c-\phi_c$, dessas ligações estão ilustradas na Figura 4.5. O comportamento linear momento-rotação, no qual a rigidez das ligações não sofre nenhuma degradação, é também considerado nas análises. Nesse caso, ela é definida em função do fator fixo, γ , que varia de 0, para as ligações rotuladas, a 1, para as ligações rígidas. O valor

da rigidez inicial, S_{cini} , das ligações semirrígidas A , B , C e D , em kNm/rad são, de acordo com a Tabela 2.1, iguais a 5424, 10759.75, 12430 e 34804, respectivamente.

Para as análises foram usados quatro elementos finitos na discretização das vigas e apenas um elemento finito em cada coluna. Os elementos das extremidades das vigas são modelados com molas nas extremidades para simular o efeito da flexibilidade da ligação. Os demais seguem a forma convencional com a hipótese de ligações idealmente rígidas.

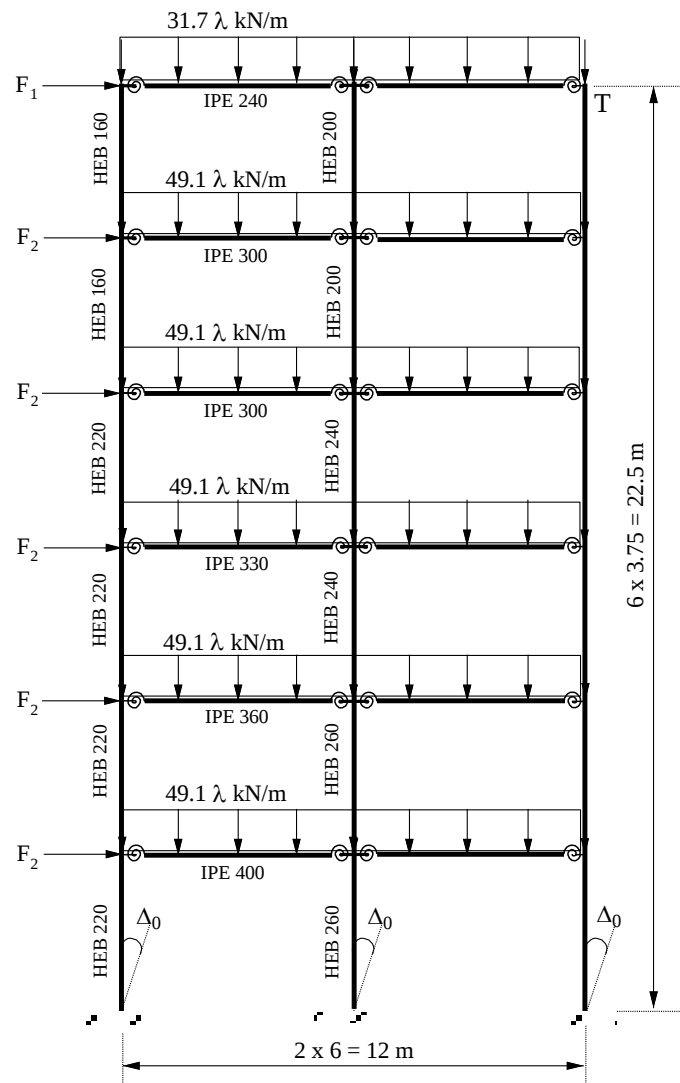


Figura 4.4 Pórtico de seis andares: geometria e carregamento

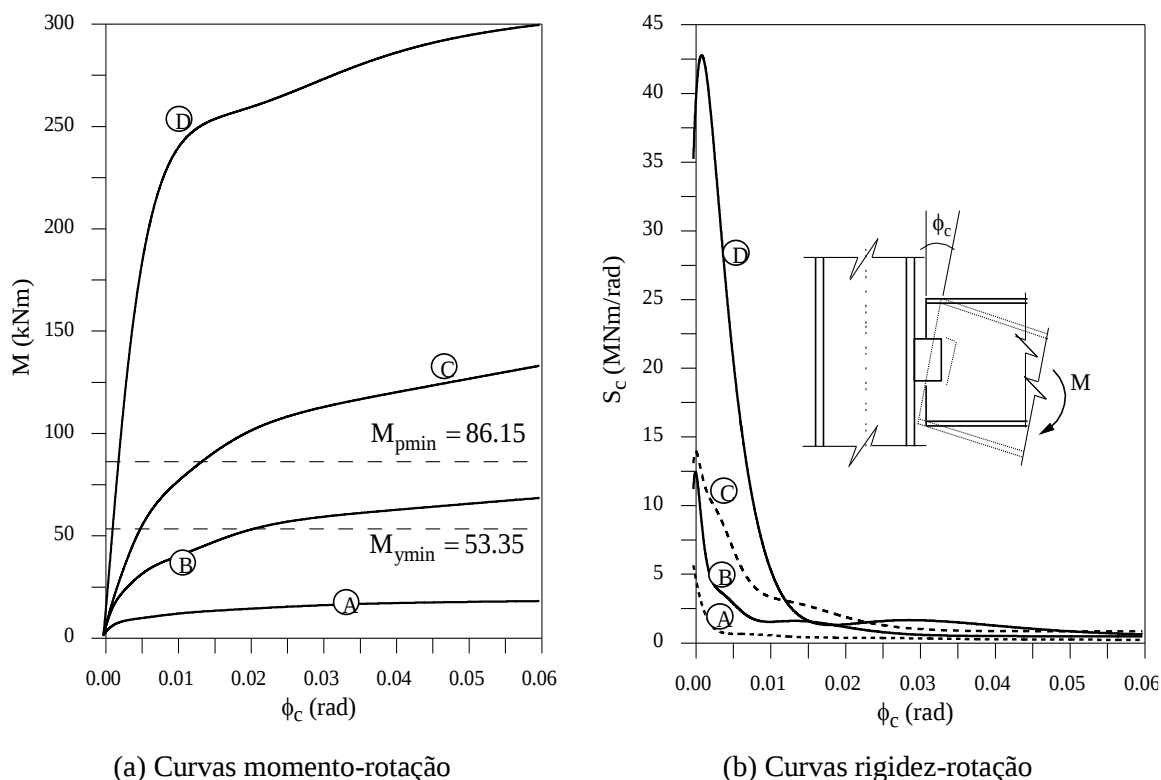


Figura 4.5 Comportamento de ligações viga-coluna

O estudo é realizado, como anteriormente mencionado, considerando as ligações viga-coluna rígidas e semirrígidas. As trajetórias de equilíbrio para o pórtico de Vogel obtidas com a hipótese de ligações tipo A, B, C e D com comportamento linear e não linear são mostradas nas Figuras 4.6a e 4.6b, respectivamente. Representam-se nessas figuras a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura, u_T , com o fator de carga, λ . A curva carga-deslocamento para o pórtico com ligações rígidas está também ilustrada na Figura 4.6a. Os resultados numéricos obtidos por Chan e Chui (2000) são indicados nessas figuras para comparação. Na Tabela 4.3 são informados os fatores de carga limite alcançados nessas análises. Pode-se notar, observando as Figuras 4.6a e 4.6b e, também, a Tabela 4.3, a influência da ligação semirrígida na resposta. O efeito da não linearidade da ligação, que considera a perda de rigidez da ligação durante o processo de carregamento, faz com que a estrutura atinja níveis de capacidade de carga, representados pelo fator λ , bastante inferiores à hipótese de ligações rígidas ou com semirrigidez constante. Além disso, as cargas de colapso são menores, como esperado, para as ligações mais flexíveis, ou seja, com menor rigidez inicial.

Nas análises, a carga uniformemente distribuída foi representada como um conjunto de cargas nodais equivalentes, e as cargas concentradas F_1 e F_2 , adotadas iguais, respectivamente, a 10.23λ kN e 20.44λ kN. A imperfeição, Δ_0 , é assumida igual a $1/300$.

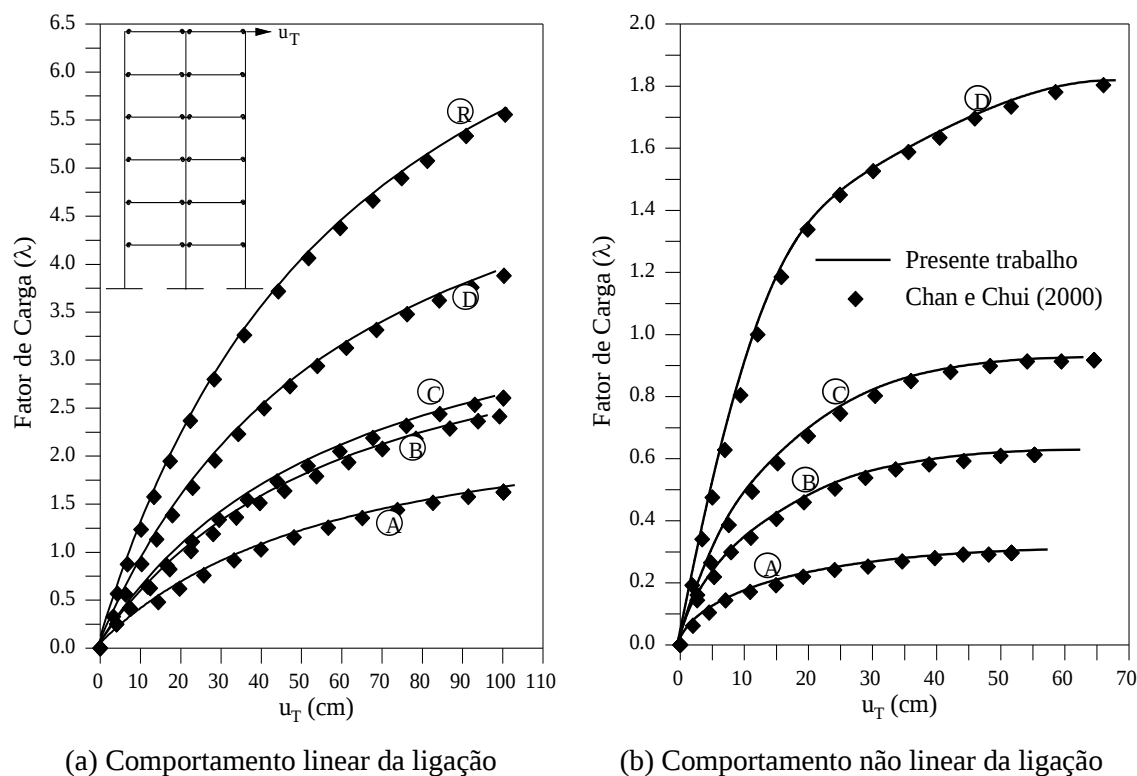


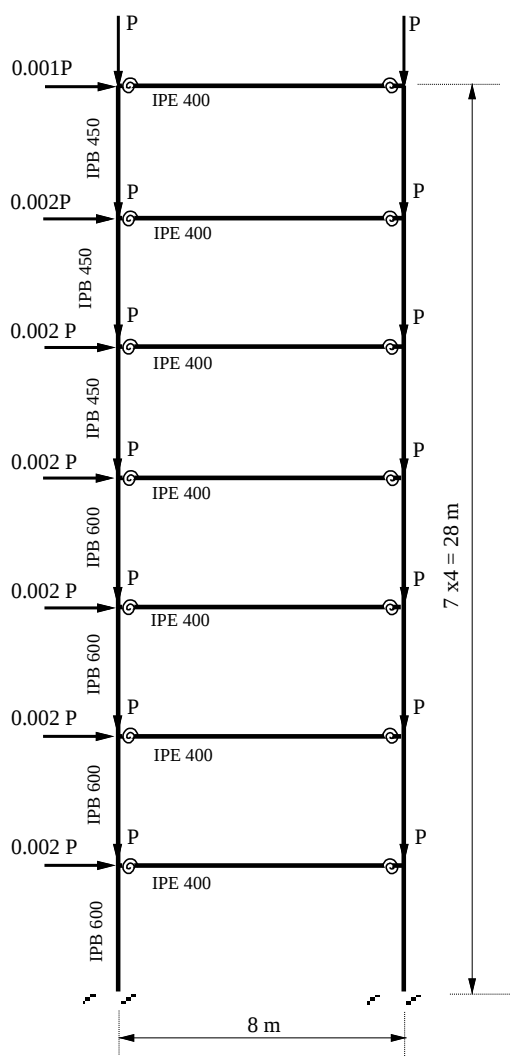
Figura 4.6 Influência da rigidez da ligação nas análises elásticas

Tabela 4.3 Fator de carga de colapso, λ_{lim} , obtido na análise elástica

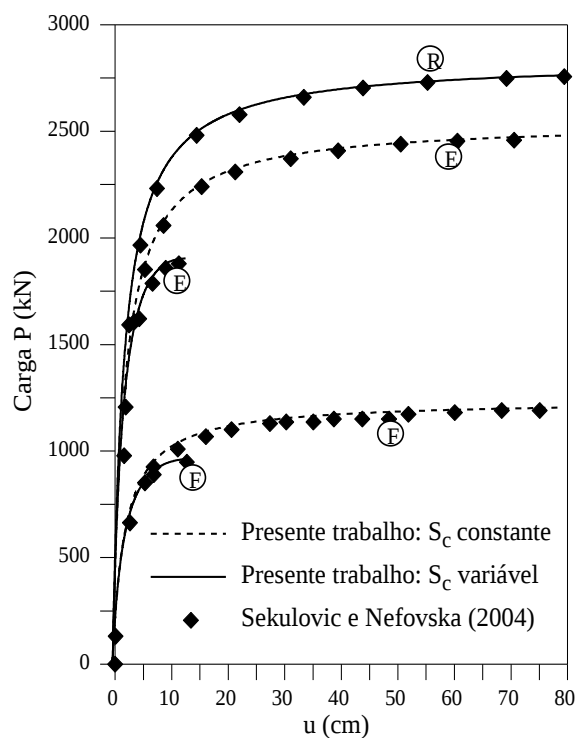
Ligação	Comportamento linear	Comportamento não linear
A	2.35	0.306
B	3.00	0.621
C	3.20	0.918
D	5.20	1.811
Rígida	8.10	-

4.5 Pórtico de Sete Andares

O último problema estrutural deste capítulo está exemplificado na Figura 4.7. Trata-se de um pórtico de sete andares com 28 m de altura e 8 m de vão. A geometria da estrutura e os perfis que constituem as vigas e as colunas são indicados nessa figura. Além da ligação rígida entre os membros estruturais, ligações semirrígidas dos tipos *E* e *F* foram usadas para conectar vigas e colunas. O comportamento não linear momento-rotação e rigidez-rotação para essas duas ligações são mostrados na Figura 4.8.



(a) Geometria e carregamento



(b) Trajetórias de equilíbrio

Figura 4.7 Pórtico de sete andares:

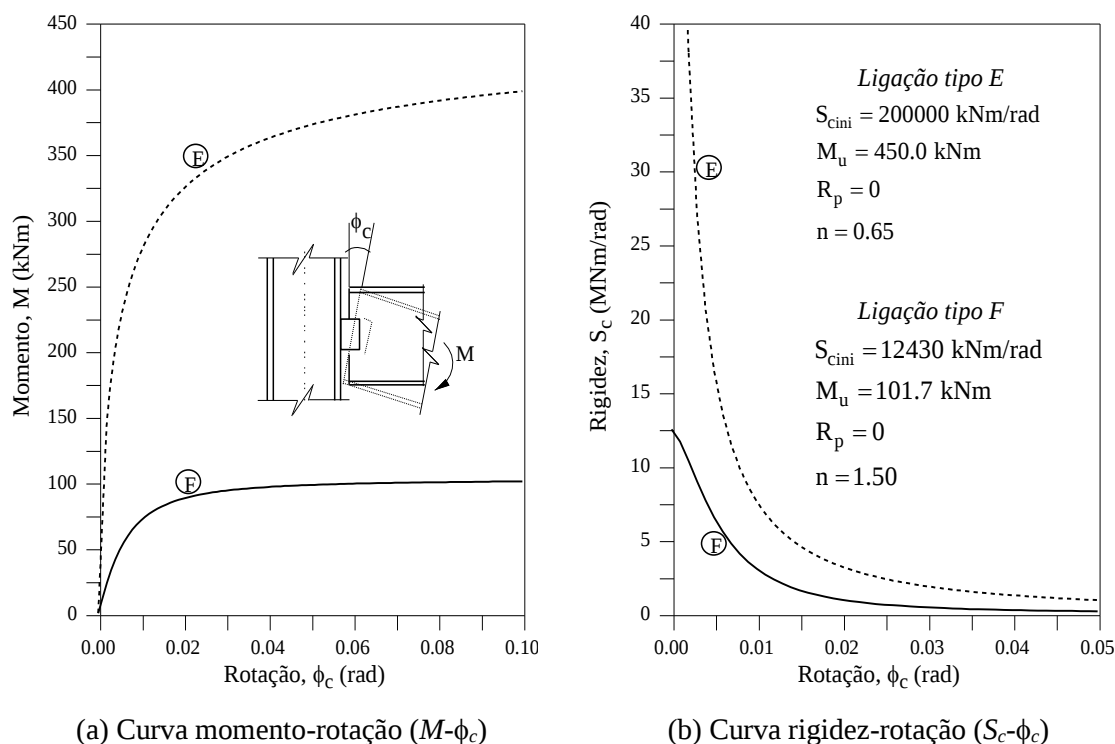


Figura 4.8 Comportamento das ligações semirrígidas tipos E e F

Esse pórtico foi analisado inicialmente por Sekulovic e Nefovska (2004) para validar suas formulações não lineares desenvolvidas para análises estáticas considerando os efeitos da semirrigidez das ligações e da inelasticidade do material. Duas análises foram conduzidas por esses pesquisadores: flambagem e capacidade de carga, e os resultados obtidos por esses autores serão usados para comparação. Cabe destacar que, neste trabalho, apenas o comportamento elástico do material é assumido.

Adicionalmente, dois modelos foram considerados para representar o comportamento das ligações E e F: linear e não linear. Para o modelo linear, como se sabe, a rigidez da ligação, S_c , é considerada permanecer constante ao longo de todo o processo de carregamento. Nesse caso, a rigidez inicial da ligação é usada. Já o comportamento não linear será representado pelo modelo de quatro parâmetros proposto por Richard-Abbott (1975). A rigidez inicial, o momento último da ligação, M_u , (igual ao momento de referência, M_0), a rigidez devido ao encruamento da ligação e o fator de forma, necessários para definir a função matemática nesse modelo, são indicados na Figura 4.8b. Detalhes desse modelo podem ser encontrados, como já mencionado no início deste capítulo, no Capítulo 2.

Nos estudos, as vigas e as colunas foram discretizadas com quatro e dois elementos finitos, respectivamente.

O carregamento, mostrado na Figura 4.7a, consiste de cargas concentradas de intensidade P nas extremidades das vigas e cargas horizontais desestabilizadoras, $0.001P$ e $0.002P$, no topo das colunas em cada um dos pavimentos são usadas para acentuar os efeitos de segunda ordem, $P-\Delta$ e $P-\delta$. O módulo de elasticidade considerado nas análises foi 210 GPa.

O resultado da análise de flambagem elástica com as hipóteses de ligações rígidas e semirrígidas é apresentado na Figura 4.7b, na qual a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura, u , com o carregamento, P , é exibido. A Tabela 4.4 resume as cargas limites obtidas através desse estudo. Os resultados são comparados aos de Sekulovic e Nefovska (2004) que estão também mostrados nessas figura e tabela. Pode-se observar que existe uma boa concordância entre as respostas encontradas neste trabalho e aquelas obtidas por Sekulovic e Nefovska (2004) independente do tipo de análise.

Através da Figura 4.7b, observa-se que comportamento estrutural nas análises elásticas é dependente do tipo de ligação adotado. Além disso, o comportamento momento-rotação da ligação semirrígida, linear ou não linear, exerce também papel importante nesse tipo de análise. Como já previsto, verifica-se através da Tabela 4.4 que a carga limite do pórtico com ligações rígidas é superior às demais. Já para a ligação tipo F , que é a mais flexível, a carga limite é inferior. Verifica-se, também, que a adoção de ligações semirrígidas com comportamento momento-rotação não lineares (S_c variável) contribui para a redução da carga limite do pórtico. O bom acordo entre os resultados encontrados aqui e aqueles da literatura pode ser observado.

Tabela 4.4 Carga limite, em kN, obtida na análise de flambagem

Ligação	Modelo de ligação linear		Modelo de ligação não linear	
	Presente trabalho	Sekulovic e Nefovska (2004)	Presente trabalho	Sekulovic e Nefovska (2004)
<i>Rígida</i>	2819	2794	-	-
<i>E</i>	2516	2515	1890	1883
<i>F</i>	1205	1210	951	948

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Os resultados das análises não lineares realizadas em sistemas estruturais mostraram concordância com as soluções encontradas na literatura, confirmando a eficácia da formulação de elementos finitos e das metodologias de solução utilizadas. É importante destacar que os sistemas analisados apresentavam diferentes geometrias e condições de carregamento.

Ao avaliar a influência da flexibilidade das ligações, observou-se que a carga crítica de estabilidade diminui à medida que o fator de rigidez das ligações reduz. Dessa forma, ligações rígidas suportam cargas maiores em comparação com ligações semirrígidas ou rotuladas. Além disso, o tipo de apoio (engastado ou rotulado) exerce um papel significativo no comportamento estrutural. No pórtico de dois pavimentos analisado, verificou-se que apoios rígidos aumentam consideravelmente a carga crítica. Assim, para uma mesma carga aplicada, estruturas com ligações mais rígidas apresentam deslocamentos menores, enquanto a maior flexibilidade das ligações intensifica o efeito $P-\Delta$.

Quando se considera o comportamento não linear das ligações, percebe-se que a degradação da rigidez reduz a capacidade de carga em comparação com a adoção do comportamento linear, onde a rigidez é assumida como constante e igual à rigidez inicial.

Portanto, as análises realizadas permitem concluir que considerar o comportamento não linear das estruturas proporciona resultados mais realistas e pode gerar economia em projetos estruturais. Isso ocorre porque é possível estimar com maior precisão a capacidade de carga do sistema e os deslocamentos associados, evitando, assim, o superdimensionamento das estruturas.

REFERÊNCIAS

- AISC, 1989. *Manual of Steel Construction - Allowable Stress Design*. Chicago.
- AZIZINAMINI, A., Bradburn, J.H., e Radziminski, J.B., 1985. *Static and Cyclic Behavior of Semi-rigid Steel Beam-Column Connections*. Technical Report, Dept. of Civil Engineering, University of South Carolina, Columbia, SC.
- CHAN, S.L., e CHUI, P.P.T., 2000. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.
- CHAPMAN, S.J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- CHEN, W.F., e Lui, E.M., 1991. *Stability Design of Steel Frames*. CRC Press, Boca Raton, Flórida.
- CHUI, P.P.T., e Chan, S.L., 1996. *Transient response of moment-resistant steel frames with flexible and hysteretic joints frames*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 39(3), pp. 221-243.
- CHEN, W.F., e Toma, S., 1994. *Advanced Analysis of Steel Frames*, CRC Press, Boca Raton, Flórida.
- CUNNINGHAM, R., 1990. *Some aspects of semi-rigid connections in structural steelwork*. The Structural Engineer, vol. 68(5), pp. 85-92.
- DIAS, Christian L.; RANGEL, Rafael L.; MARTHA, Luiz Fernando. *Nonlinear analysis in FTOOL with semi-rigid connections: a partial development*. In: CILAMCE 2020 - Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC. Foz do Iguaçu/PR, Brazil, 16-19 nov. 2020. p. 1-8
- EUROCODE 3, 1992. *Design of Steel Structures. Part I: General rules and rules for buildings*. Comité Européen de Normalisation (CEN) Brussels, Belgium.
- GALVÃO, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de*

- Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- JOHNSON, N.D., e Walpole, W.R., 1981. *Bolted End-plate Beam-to-column Connections Under Earthquake Type Loading*. Research Report 81-7, Dept. of Civil Engineering, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- JUNIOR, P, C, P, S., 2000 *Análise Não-Linear de Pórticos Planos Metálicos com Conexões Semi-Rígidas*. Dissertação de Mestrado, Engenharia Civil. Florianópolis, UFSC, Santa Catarina.
- KISHI, N., Komuro, M., e Chen, W.F., 2004. *Four-parameter power model for $M-\theta$ curves of end-plate connections*. In: ECCS/AISC workshop connections in steel structures V: Innovative steel connections.
- LIU, Y., 2007. *Progressive-Failure Analysis of Steel Building Structures under Abnormal Load*. Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- LUI, E.M., e Chen, W.F., 1986. *Analysis and behavior of flexible-jointed frames*. Engineering Structures, vol. 8(2), pp. 107-118.
- MONDKAR, D.P., Powell, G.H., 1977. *Finite element analysis of non-linear static and dynamic response*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 11, pp. 499-520.
- NBR 8800, 2024. *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.
- OSTRANDER, J.R., 1970. *An Experimental Investigation of End-Plate Connections*. Master's Thesis, Univ. of Saskatchewan, Saskatoon, SK, Canadá.
- PINHEIRO, L. *Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos*. 2003. 263f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, 2003.
- PRADO, I. M. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Interativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em

- Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2012.
- RICHARD, R.M., e Abbott, B.J., 1975. *Versatile elastic-plastic stress-strain formula*. Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 101(4), pp. 511-515.
- RICHARD, R.M., Kriegh, J.D., e David, E.H., 1982. *Design of single plate framing connections with A307 bolts*. Engineering Journal, vol. 19(4), pp. 209-213.
- SANTANA, C.L.O., 2002. *Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Madeira Com Ligações Semi-Rígidas*. Tese de Doutorado em Engenharia Agrícola. UNICAMP, Campinas.
- SANTANA, M. V. B. *Sistema computacional gráfico Interativo para problemas de instabilidade em treliças e pórticos planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2015.
- SEKULOVIC, M., e Nefovska, M., 2004. *Static inelastic analysis of steel frames with flexible connections*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 31(2), pp. 101-134.
- SEKULOVIC, M., e Nefovska, M., 2008. *Contribution to transient analysis of inelastic steel frames with semi-rigid connections*. Engineering Structures, vol. 30, pp. 976–989.
- SILVA, A. R. D. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. 2009. 341f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, 2009.
- VOGEL, U., 1985. *Calibrating Frames*. Stahlbau, vol. 54 (october), pp. 295-311.
- YANG, T.Y., e Saigal, S., 1984. *A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, pp. 851-867.