



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
BACHARELADO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

MATHEUS MELQUÍADES GOMES LEITE

MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA A OTIMIZAÇÃO DO CONSUMO AO  
LONGO DA VIDA: UMA ABORDAGEM NUMÉRICA EM PYTHON

MARIANA / MG

2025

MATHEUS MELQUÍADES GOMES LEITE

MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA A OTIMIZAÇÃO DO CONSUMO AO  
LONGO DA VIDA: UMA ABORDAGEM NUMÉRICA EM PYTHON

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Ciências Econômicas no Instituto de Ciências Sociais Aplicadas (ICSA) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) - *Campus* Mariana, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea.

MARIANA / MG

2025

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

L533m Leite, Matheus Melquíades Gomes.

Modelagem computacional para a otimização do consumo ao longo da vida [manuscrito]: uma abordagem numérica em Python. / Matheus Melquíades Gomes Leite. - 2025.

86 f.

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea.  
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas. Graduação em Ciências Econômicas .

1. Algoritmos computacionais. 2. Consumo (Economia). 3. Equações diferenciais ordinárias. 4. Equações - Soluções numéricas. 5. Processo decisório. 6. Python (Linguagem de programação de computador). I. Barrenechea, Martin Harry Vargas. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 330.567.22

Bibliotecário(a) Responsável: Essevalter De Sousa - Bibliotecário Coordenador  
CBICSA/SISBIN/UFOP-CRB6a1407



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Matheus Melquíades Gomes Leite**

Modelagem computacional para a otimização do consumo ao longo da vida: Uma abordagem numérica em Python

Monografia apresentada ao Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas

Aprovada em 13 de março de 2025

### Membros da banca

Prof. Dr. - Martin Harry Vargas Barrenechea - Orientador- Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
Prof. Dr. - Alan André Borges da Costa - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
Prof. Dr. - Luccas Assis Atilio - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Martin Harry Vargas Barrenechea, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 13/03/2025



Documento assinado eletronicamente por **Martin Harry Vargas Barrenechea, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 13/03/2025, às 19:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0874608** e o código CRC **21896451**.

## RESUMO

Este trabalho investiga a otimização intertemporal do consumo e da poupança ao longo da vida, utilizando modelos de otimização dinâmica para compreender como um agente econômico pode maximizar sua utilidade ao longo do tempo. A formulação do problema considera um fluxo de renda projetado e uma restrição intertemporal de riqueza, estabelecendo o equilíbrio entre consumo presente e acumulação de riqueza futura. A abordagem metodológica baseia-se na modelagem do problema como um sistema de equações diferenciais resolvido numericamente como um Problema de Valor de Fronteira (PVF), implementado em Python. A solução numérica permite identificar as trajetórias ótimas de consumo e poupança, além de analisar a sensibilidade dos resultados a diferentes parâmetros econômicos, como taxa de juros, aversão ao risco e crescimento da renda. A implementação computacional é validada por meio da comparação com um caso especial de solução conhecida, assegurando a precisão do modelo. Os achados contribuem para uma melhor compreensão do comportamento econômico ao longo do ciclo de vida e fornecem subsídios para o desenvolvimento de políticas que auxiliem na tomada de decisões financeiras individuais, promovendo maior eficiência na gestão de recursos ao longo do tempo.

**Palavras chave:** Otimização Intertemporal; Consumo ao Longo da Vida; Problema de Valor de Fronteira; Equações Diferenciais Ordinárias; Métodos Numéricos; Python.

## ABSTRACT

This study investigates the intertemporal optimization of consumption and savings over the life cycle using dynamic optimization models to understand how an economic agent can maximize utility over time. The problem formulation considers a projected income stream and an intertemporal wealth constraint, establishing the balance between present consumption and future wealth accumulation. The methodological approach models the problem as a system of differential equations solved numerically as a Boundary Value Problem (BVP), implemented in Python. The numerical solution allows for the identification of optimal consumption and savings trajectories, as well as an analysis of the sensitivity of results to key economic parameters such as interest rates, risk aversion, and income growth. The computational implementation is validated through comparison with a known analytical solution, ensuring model accuracy. The findings contribute to a better understanding of economic behavior over the life cycle and provide insights for developing policies that support individual financial decision-making, promoting greater efficiency in resource management over time.

**Keywords:** Intertemporal Optimization; Life-cycle consumption; Boundary Value Problem; Ordinary Differential Equations; Numerical Methods; Python.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>MODELO DE CONSUMO E POUPANÇA AO LONGO DO CICLO DE VIDA</b>	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS</b>	<b>14</b>
<b>2.3</b>	<b>PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTEIRA</b>	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: HORIZONTE FINITO E INFINITO</b>	<b>26</b>
2.4.1	EDOs COM HORIZONTE FINITO	27
2.4.2	EDOs COM HORIZONTE INFINITO	29
2.4.3	MÉTODOS DE SOLUÇÃO	31
<b>2.5</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS EM ECONOMIA</b>	<b>33</b>
2.5.1	MÉTODO DE TIRO	33
2.5.2	PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO DE HORIZONTE FINITO	35
2.5.3	CONTROLE ÓTIMO DE HORIZONTE INFINITO E TIRO REVERSO	38
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>43</b>
<b>3.1</b>	<b>ESCOLHA DO MÉTODO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO DO PVF</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL EM PYTHON</b>	<b>47</b>
<b>3.3</b>	<b>VALIDAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>CONSUMO E RIQUEZA ANTES DA APOSENTADORIA</b>	<b>57</b>
<b>4.2</b>	<b>CONSUMO E RIQUEZA APÓS A APOSENTADORIA</b>	<b>59</b>
<b>4.3</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE COM VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS</b>	<b>60</b>
4.3.1	VALIDAÇÃO DO MODELO: CASO ESPECIAL $\rho = r$	62
<b>4.4</b>	<b>INTERPRETAÇÃO DOS GRÁFICOS E RESULTADOS</b>	<b>64</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>APÊNDICE</b>	<b>75</b>
<b>A.1</b>	<b>CONSUMO AO LONGO DA VIDA*</b>	<b>75</b>
<b>A.2</b>	<b>PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DO CONSUMO*</b>	<b>76</b>
A.2.1	CASO ESPECIAL: CONSUMO CONSTANTE	77
<b>A.3</b>	<b>CÓDIGO ORIGINAL: PROBLEMA DO CONSUMO AO LONGO DA VIDA</b>	<b>78</b>
<b>A.4</b>	<b>CÓDIGO DE VALIDAÇÃO: PROBLEMA DO CONSUMO ÓTIMO</b>	<b>83</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O estudo da otimização dinâmica consolidou-se como um pilar fundamental na análise econômica moderna, oferecendo um arcabouço teórico e metodológico sofisticado para a modelagem de decisões intertemporais (ARROW, 1968; DORFMAN, 1969). Em um contexto de recursos escassos e escolhas que se estendem ao longo do tempo, a compreensão da alocação de recursos pelos agentes econômicos para maximizar sua utilidade torna-se crucial tanto para a criação de políticas públicas eficazes quanto para o planejamento financeiro individual (CHIANG, 1999).

Dentro desse campo, o problema do consumo ao longo da vida destaca-se, atraindo a atenção de economistas e pesquisadores como Angus Deaton, Franco Modigliani e Milton Friedman. A questão central é como os indivíduos devem distribuir consumo e poupança ao longo do tempo, considerando expectativas sobre renda futura, taxas de juros e outros fatores relevantes num cenário econômico dinâmico.

Em destaque, Modigliani, com a sua Hipótese do Ciclo de Vida (HCV), revolucionou a forma como os economistas entendem as decisões de poupança e consumo, ao enfatizar a importância do planejamento intertemporal e da suavização do consumo ao longo da vida (MODIGLIANI, 1985). Deaton, por sua vez, ofereceu uma análise abrangente do comportamento do consumo, abordando desde os fundamentos teóricos até as aplicações empíricas, e destacando a importância de fatores como a incerteza, as restrições de liquidez e as preferências dos indivíduos (DEATON, 1992).

A hipótese de Modigliani (1985) postula que os indivíduos planejam suas decisões de consumo e poupança ao longo de um longo período de tempo, geralmente pela extensão de toda a sua vida, buscando suavizar o seu padrão de consumo e maximizar a sua utilidade intertemporal. Tal hipótese fundamenta-se em premissas como a racionalidade dos agentes, a informação perfeita acerca das perspectivas de renda futura e das condições de mercado, e a existência de mercados de capitais perfeitos, nos quais os indivíduos podem tomar e conceder empréstimos a uma taxa de juros constante, sem restrições de liquidez ou outras imperfeições (ANDO; MODIGLIANI, 1963)

Sob essas premissas, a HCV implica que os indivíduos tendem a poupar durante os períodos de maior renda, tipicamente durante a vida ativa, e a "despoupar" nos períodos de menor renda, comumente na aposentadoria, visando suavizar o consumo ao longo do ciclo de vida. Essa suavização reflete a preferência por um padrão de vida estável e

previsível, em detrimento de flutuações abruptas no consumo (ANDO; MODIGLIANI, 1963).

Deaton (1991) aprofunda a análise do comportamento do consumo, reconhecendo que os indivíduos podem enfrentar restrições e imperfeições de mercado que limitam a capacidade de suavizar o consumo. O autor enfatiza a relevância de considerar a incerteza em relação à renda futura, a existência de restrições de crédito e a presença de preferências não homotéticas na modelagem das decisões de consumo.

Em que pese os avanços teóricos e empíricos na área, a implementação de modelos dinâmicos de otimização do consumo ao longo da vida apresenta desafios metodológicos. A resolução analítica desses modelos revela-se, em geral, inviável, demandando a aplicação de métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas (JUDD, 1998; MIRANDA; FACKLER, 2004). Nesse contexto, a formulação computacional desses problemas, incluindo a discretização de equações diferenciais e a aplicação de técnicas de programação dinâmica, torna-se essencial para a obtenção de previsões quantitativas mais confiáveis.

Nesse contexto, o presente trabalho investiga a aplicação de métodos numéricos na resolução do problema de otimização do consumo ao longo da vida. Objetiva-se contribuir para a compreensão das decisões de poupança e consumo em um contexto intertemporal, investigando o impacto de parâmetros como taxa de juros, aversão ao risco e taxa de impaciência sobre as trajetórias de consumo e riqueza. Adicionalmente, avalia-se a capacidade de métodos numéricos, como o método de colocação e o método de diferenças finitas, em reproduzir os resultados teóricos esperados (JUDD, 1998; BOYCE et al., 2020).

Para alcançar os objetivos propostos, o estudo adota um modelo matemático fundamentado em Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), no qual a evolução da riqueza do agente econômico é descrita por:

$$\frac{dW}{dt} = rW + w(t) - c(t)$$

onde  $W(t)$  representa a riqueza acumulada,  $r$  a taxa de retorno,  $w(t)$  o fluxo de renda esperado e  $c(t)$  o consumo. Esse tipo de modelagem é amplamente utilizado na literatura econômica para analisar decisões intertemporais de consumo e poupança, conforme discutido por Blanchard e Fischer (1989) e Deaton (1992).

A abordagem metodológica emprega técnicas de solução numérica baseadas em modelos de programação dinâmica e equações diferenciais, visando garantir a robustez e a precisão da trajetória ótima de consumo. Em particular, utiliza-se o método de colocação, o qual é parte da solução numérica de problemas de valor de contorno inserido por meio da função `solve_bvp` da biblioteca SciPy, implementada em Python. Essa função per-

---

mite a resolução de sistemas de equações diferenciais de contorno, proporcionando uma solução numérica precisa para o modelo de otimização intertemporal (JONES et al., 2001; LINGE; LANGTANGEN, 2020).

Para assegurar a confiabilidade dos resultados, o modelo é validado com um problema de referência com solução analítica conhecida, especificamente o problema de consumo ótimo proposto por Sydsæter, Hammond e Strøm (2008). Essa comparação permite verificar se o código utilizado está funcionando corretamente e se o método numérico escolhido é adequado para o problema em questão. Além disso, a implementação computacional dessas técnicas possibilita o refinamento da modelagem econômica, oferecendo um arcabouço sólido para a tomada de decisões em nível individual e governamental (MIRANDA; FACKLER, 2004; JUDD, 1998).

A literatura pertinente ao tema é igualmente considerada. O estudo fundamenta-se em uma revisão bibliográfica que abrange os principais trabalhos sobre otimização dinâmica e decisões intertemporais na economia. Destacam-se pesquisas que aplicam técnicas numéricas à análise do consumo e da poupança ao longo da vida, fornecendo suporte empírico e metodológico para o desenvolvimento do modelo proposto. Autores como Deaton (1992) e Carroll (1997) introduziram elementos relevantes nessa área, demonstrando como restrições de crédito e incerteza afetam a trajetória ótima de consumo.

A escolha da linguagem de programação Python e das bibliotecas NumPy e SciPy para a implementação computacional deste trabalho se justifica pela sua ampla utilização na área de computação científica e pela sua capacidade de oferecer ferramentas eficientes e precisas para a resolução de problemas numéricos (LINGE; LANGTANGEN, 2020; JONES et al., 2001). Em particular, o livro *Programming for Computations - Python* de Linge e Langtangen (2020) forneceu um guia prático para a implementação dos algoritmos, enquanto a documentação da biblioteca SciPy (JONES et al., 2001) foi fundamental para a compreensão e utilização das funções de resolução de equações diferenciais e otimização.

A contribuição deste trabalho reside na aplicação de métodos numéricos para resolver um problema clássico da economia, o consumo ao longo da vida, de forma precisa e eficiente. A implementação em Python, com o uso da função `solve_bvp`, torna o modelo acessível e flexível, permitindo a análise de diferentes cenários e a investigação do impacto de vários parâmetros econômicos. Os resultados obtidos podem auxiliar na compreensão das decisões de consumo e poupança dos indivíduos e fornecer subsídios para a formulação de políticas públicas, contribuindo para o debate sobre planejamento financeiro e bem-estar econômico (BLANCHARD; FISCHER, 1989; DEATON, 1992)

Para além deste capítulo introdutório, o presente trabalho estrutura-se nos seguintes capítulos:

- O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico, detalhando os fundamentos da otimização intertemporal e da teoria do consumo;
- O Capítulo 3 descreve a metodologia empregada, incluindo a formulação matemática do problema, o método numérico utilizado e a implementação computacional;
- O Capítulo 4 apresenta e discute os resultados obtidos, com foco na validação do modelo e na análise de sensibilidade;
- e, finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho.

Dessa forma, busca-se contribuir para a literatura econômica ao aplicar técnicas computacionais na análise da otimização intertemporal do consumo, oferecendo uma abordagem prática e acessível para a solução de problemas que têm impacto direto na formulação de políticas econômicas e financeiras.

Este trabalho tem por objetivo desenvolver, implementar e validar um modelo computacional em Python para analisar o problema de otimização intertemporal do consumo ao longo da vida de um agente representativo. O problema é formulado como um controle ótimo em tempo contínuo e resolvido numericamente como um Problema de Valor de Fronteira (PVF), utilizando o método de colocação. O intuito é investigar a influência de diferentes parâmetros econômicos nas decisões de consumo e poupança. Além disso, espera-se:

1. Compreender e apresentar os fundamentos teóricos da otimização intertemporal do consumo, com ênfase na Hipótese do Ciclo de Vida e suas extensões.
2. Formular matematicamente o problema de consumo e poupança ao longo da vida como um problema de controle ótimo em tempo contínuo, derivando as equações diferenciais ordinárias que o governam.
3. Implementar um modelo computacional em Python, utilizando a biblioteca SciPy (e sua função `solve_bvp`), para resolver numericamente o Problema de Valor de Fronteira resultante da formulação do problema.
4. Validar a implementação numérica, comparando os resultados obtidos com a solução analítica de um problema de referência (problema de consumo ótimo) para garantir a precisão e a confiabilidade do método.
5. Analisar a sensibilidade das trajetórias ótimas de consumo e riqueza a variações em parâmetros econômicos chave, como taxa de juros, aversão ao risco, taxa de impaciência e taxa de crescimento da renda projetada, e discutir as implicações econômicas dessas relações.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 MODELO DE CONSUMO E POUPANÇA AO LONGO DO CICLO DE VIDA

A teoria do consumo é um pilar fundamental da macroeconomia, e o estudo das decisões intertemporais de consumo e poupança é crucial para entender o comportamento agregado da economia. Modelos de consumo buscam explicar como os indivíduos alocam seus recursos ao longo do tempo, equilibrando o consumo presente com a poupança para o futuro. A otimização intertemporal, processo de tomar decisões que consideram as consequências em diferentes pontos no tempo, é um elemento central desses modelos (BLANCHARD; FISCHER, 1989).

A Hipótese do Ciclo de Vida (HCV), proposta por Modigliani e Brumberg (1954), e a Hipótese da Renda Permanente (HRP), desenvolvida por Friedman (1957), são dois dos modelos mais influentes nesse campo. Ambos os modelos destacam a importância de decisões intertemporais na alocação de recursos, considerando fatores como renda futura, incerteza e preferências individuais (MODIGLIANI; BRUMBERG, 2005; FRIEDMAN, 1957).

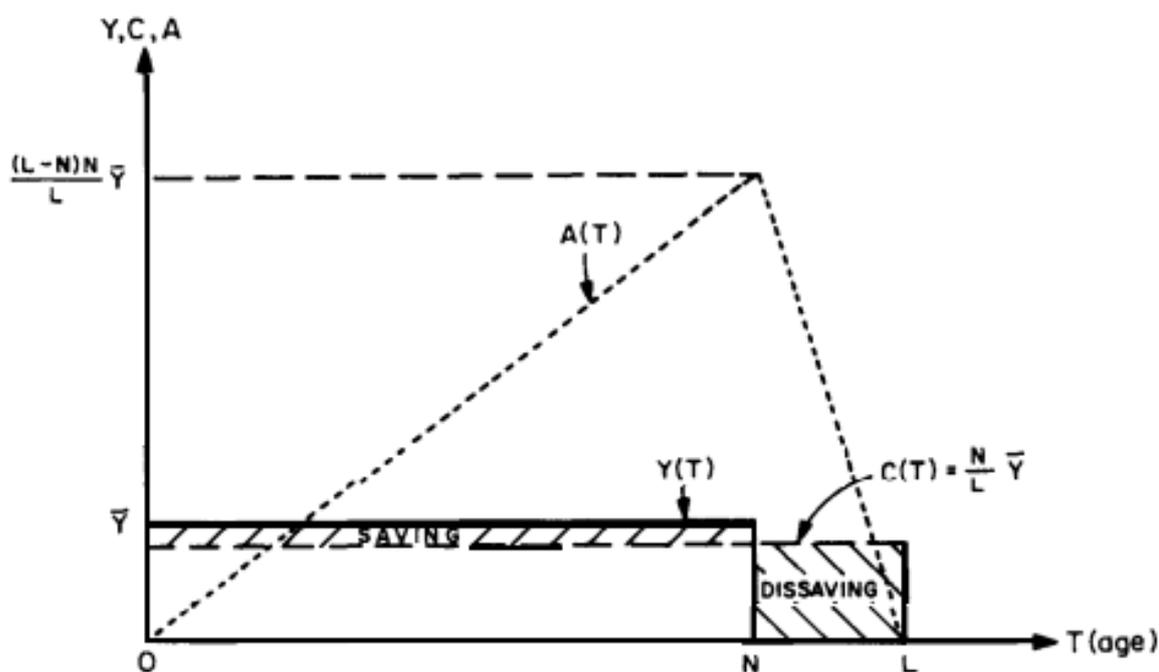
A HCV, representou um marco na compreensão das decisões de poupança e consumo entre os economistas, ao enfatizar a relevância do planejamento intertemporal e das expectativas concernentes à renda futura (MODIGLIANI; BRUMBERG, 2005). Ela postula que os indivíduos planejam suas decisões de consumo e poupança ao longo de um horizonte de longo prazo, tipicamente a vida inteira, buscando suavizar seu padrão de consumo e maximizar sua utilidade intertemporal (MODIGLIANI, 1985). Essa hipótese repousa sobre pressupostos fundamentais:

- **Racionalidade:** Assume-se que os indivíduos são racionais e buscam maximizar sua utilidade intertemporal, considerando suas expectativas em relação à renda futura e à taxa de juros. Isso implica que os indivíduos têm preferências bem definidas, são capazes de formar expectativas consistentes e tomam decisões que maximizam sua utilidade esperada ao longo da vida (MODIGLIANI; BRUMBERG, 2005). Este pressuposto é frequentemente debatido, e modelos comportamentais exploram desvios da racionalidade perfeita.
- **Informação Perfeita:** Pressupõe-se que os indivíduos dispõem de informações

perfeitas acerca de suas perspectivas de renda futura e das condições de mercado. Na prática, a incerteza sobre a renda futura e os retornos dos investimentos desempenha um papel crucial nas decisões de consumo e poupança. Modelos mais realistas incorporam a incerteza e a aprendizagem gradual (DEATON, 1992).

- **Mercados de Capitais Perfeitos:** Assume-se a existência de mercados de capitais perfeitos, nos quais os indivíduos podem tomar e conceder empréstimos a uma taxa de juros constante, sem restrições de liquidez ou outras imperfeições de mercado, o qual é um pressuposto muito forte. Na realidade, os indivíduos frequentemente enfrentam restrições de crédito, taxas de juros diferentes para empréstimos e poupança, e custos de transação (DEATON, 1992; CARROLL, 1997). A relaxação desse pressuposto é um dos focos principais da pesquisa em modelos de consumo.

Com base nesses pressupostos, a Hipótese do Ciclo de Vida implica que os indivíduos tendem a poupar durante os períodos de maior renda (comumente durante a vida ativa) e a "despoupar" durante os períodos de menor renda (em geral, na aposentadoria), visando suavizar seu consumo ao longo da vida (MODIGLIANI, 1985).



INCOME, CONSUMPTION, SAVING AND WEALTH AS A FUNCTION OF AGE

Figura 1 – "RENDA, CONSUMO, POUPANÇA E RIQUEZA EM FUNÇÃO DA IDADE"

Fonte: MODIGLIANI (1985)

A HCV, apesar de seus pressupostos simplificadores, gerou uma série de previsões testáveis sobre o comportamento agregado de consumo e poupança. Ando e Modigliani (1963) testaram as implicações da hipótese usando dados agregados dos EUA e encontraram evidências que, em geral, suportavam o modelo. No entanto, estudos subsequentes

identificaram anomalias e desvios do comportamento previsto pela HCV, como o "excesso de sensibilidade" do consumo a variações de renda corrente (o consumo reage mais a variações de renda do que o previsto pela HCV pura) e o "excesso de suavidade" (o consumo reage menos a choques permanentes de renda do que o previsto). Essas anomalias levaram ao desenvolvimento de modelos mais sofisticados que incorporam, por exemplo, restrições de liquidez, incerteza e miopia dos consumidores como pode ser encontrado em Deaton (1992) e Carroll (1997).

O trabalho de Modigliani exerceu um impacto profundo na teoria do consumo e na macroeconomia, propiciando uma base teórica sólida para a compreensão das decisões de poupança e consumo, sendo empregada em diversos modelos macroeconômicos para analisar o comportamento da economia como um todo (BLANCHARD; FISCHER, 1989). Adicionalmente, a HCV influenciou significativamente a área de finanças pessoais, ao enfatizar a relevância do planejamento financeiro de longo prazo e da diversificação de investimentos para assegurar uma aposentadoria tranquila (BODIE et al., 2007).

O modelo matemático dessa hipótese pode ser formulado como:

$$\max_{c_t} U_0 = \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t), \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$A_{t+1} = (1+r)A_t + y_t - c_t, \quad (2.2)$$

com  $A_0$  dado, onde:

- $U_0$ : Utilidade descontada ao longo da vida.
- $c_t$ : Nível de consumo no período  $t$ .
- $\beta = \frac{1}{1+\rho}$ : Fator de desconto, com  $\rho$  representando a taxa de preferência intertemporal.
- $A_{t+1}$ : Ativos no tempo  $t+1$ .
- $r$ : Taxa de juros constante.
- $y_t$ : Renda no período  $t$ .

As condições de primeira ordem para o problema de otimização supracitado conduzem à Equação de Euler:

$$u'(c_t) = \beta(1+r)E_t[u'(c_{t+1})]. \quad (2.3)$$

Esta equação estabelece que a utilidade marginal do consumo no período  $t$  deve equivaler à utilidade marginal esperada do consumo no período  $t + 1$ , descontada pela taxa de preferência intertemporal ( $\rho$ ) e ajustada pela taxa de juros ( $r$ ). Em outras palavras, um indivíduo racional ajustará seu consumo até que o benefício marginal de consumir uma unidade adicional hoje seja igual ao benefício marginal esperado de consumir essa unidade no futuro, devidamente descontado (BLANCHARD; FISCHER, 1989). Se a taxa de juros for igual à taxa de preferência intertemporal ( $r = \rho$ ), a equação de Euler simplifica-se para  $u'(c_t) = E_t[u'(c_{t+1})]$ , implicando que, na ausência de incerteza, o consumo marginal será constante ao longo do tempo (SYDSÆTER et al., 2008). A equação de Euler é uma condição necessária para a otimização intertemporal e é central em muitos modelos macroeconômicos.

A Hipótese da Renda Permanente, proposta por Friedman (1957), é outra teoria influente sobre o consumo a qual postula que o consumo não depende da renda corrente, mas sim da renda permanente, que é a renda média esperada ao longo da vida. A HRP pode ser vista como um caso especial da HCV, na qual os indivíduos têm um horizonte de planejamento infinito e enfrentam incerteza sobre sua renda futura. Sob certos pressupostos (como uma função de utilidade quadrática e uma taxa de juros constante), essa hipótese implica que o consumo é uma fração constante da renda permanente (FRIEDMAN, 1957).

O trabalho de Angus Deaton (1992) apresenta uma análise abrangente do comportamento do consumo, desde os fundamentos teóricos até as aplicações empíricas. O autor ressalta a importância de considerar a incerteza, as restrições de liquidez e as preferências dos indivíduos na modelagem do consumo, destacando a influência de fatores como a suavização do consumo e a resposta a choques de renda (DEATON, 1992).

Um dos conceitos centrais apresentados por Deaton é o de suavização do consumo, que postula que os indivíduos buscam manter um padrão de consumo estável ao longo do tempo, mesmo diante de flutuações na renda. Essa suavização é alcançada por meio da poupança e do endividamento, que permitem aos indivíduos transferir renda entre diferentes períodos de suas vidas.

Deaton também examina a resposta dos indivíduos a choques de renda, como aumentos ou reduções inesperadas na renda do trabalho ou nos retornos sobre investimentos. O autor demonstra que a resposta do consumo a esses choques depende de diversos fatores, incluindo a magnitude e a duração do choque, a capacidade dos indivíduos de obter empréstimos e sua aversão ao risco (DEATON, 1992).

No seu trabalho, diferentes abordagens são exploradas para modelar o comportamento do consumo, incluindo modelos de ciclo de vida, fundamentados na HCV de Modigliani e Brumberg (1954), modelos de renda permanente, baseados na teoria da renda permanente de Friedman (1957) e modelos com restrições de liquidez. Estes últimos

incorporam a possibilidade de os indivíduos enfrentarem restrições para obter empréstimos, o que limita sua capacidade de suavizar o consumo.

As restrições de liquidez podem assumir diversas formas. Uma forma comum é um limite de endividamento, onde os indivíduos não podem tomar emprestado além de um certo valor, independentemente de sua capacidade futura de pagamento. Outra forma é uma taxa de juros mais alta para empréstimos do que para poupança, o que cria um *spread* que desencoraja o endividamento. Essas restrições impedem que os indivíduos suavizem perfeitamente seu consumo em resposta a choques de renda negativos, levando a um comportamento de consumo mais sensível à renda corrente (DEATON, 1992; CARROLL, 1997). Deaton argumenta que a escolha do modelo mais adequado é contingente ao contexto específico do problema e às características dos indivíduos em análise (DEATON, 1992; BLANCHARD; FISCHER, 1989).

Embora as obras de Modigliani e Deaton abordem o tema do consumo sob perspectivas distintas, elas se complementam e se enriquecem mutuamente. Modigliani oferece uma estrutura teórica abrangente para a compreensão das decisões de poupança e consumo em um contexto intertemporal, enquanto Deaton proporciona uma análise mais detalhada do comportamento do consumo, considerando fatores como a incerteza, as restrições de liquidez e as preferências individuais (MODIGLIANI; BRUMBERG, 2005; DEATON, 1992). A principal distinção entre os trabalhos reside no nível de agregação da análise: Modigliani foca em modelos macroeconômicos, agregando o comportamento de todos os indivíduos, enquanto Deaton se direciona mais ao comportamento individual e familiar, utilizando dados microeconômicos.

Uma importante contribuição para a literatura sobre consumo, que se baseia tanto na HCV quanto no trabalho de Deaton, é o desenvolvimento dos modelos *buffer-stock* por Carroll (1997). Esses modelos incorporam incerteza sobre a renda futura e restrições de liquidez (ou, de forma mais geral, aversão a ficar com baixos níveis de ativos) em um contexto de otimização intertemporal. Em um modelo *buffer-stock* típico, os indivíduos mantêm um "estoque de segurança" de ativos para se proteger contra choques de renda negativos. O nível ótimo desse estoque de segurança depende da aversão ao risco do indivíduo, da taxa de juros, da taxa de desconto e das características do processo estocástico que governa a renda (CARROLL, 1997). Esses modelos de estoque de segurança geram previsões que se ajustam melhor aos dados microeconômicos do que os modelos tradicionais da HCV ou da HRP, especialmente para famílias com baixa riqueza (CARROLL, 1997; DEATON, 1992).

As contribuições de Modigliani e Deaton, juntamente com os avanços de Carroll com os modelos *buffer-stock*, fornecem a base teórica para o desenvolvimento deste trabalho. A investigação da aplicação de métodos numéricos na resolução de problemas de otimização do consumo ao longo da vida, proposta neste trabalho, permite superar as limitações das

soluções analíticas e analisar o comportamento do consumo em cenários mais realistas. A consideração da incerteza, das restrições de liquidez e de outras imperfeições de mercado, bem como a análise da sensibilidade dos resultados em relação aos parâmetros do modelo, aprofundam a compreensão das decisões de poupança e consumo em diferentes contextos econômicos e sociais, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias de investimento e planejamento financeiro mais eficazes.

## 2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) constituem uma classe fundamental de equações que relacionam uma função desconhecida de uma variável independente (geralmente o tempo, denotado por  $t$ ) com suas derivadas. Essas equações são ferramentas indispensáveis na modelagem de sistemas dinâmicos em uma ampla gama de disciplinas, incluindo física, biologia, economia e engenharia (BOYCE et al., 2020 ; MEDEIROS; OLIVEIRA, 2006).

As Equações Diferenciais Ordinárias permitem descrever matematicamente como as variáveis de um sistema mudam ao longo do tempo. Na física, por exemplo, as EDOs são usadas para modelar o movimento de projéteis sob a ação da gravidade, a oscilação de pêndulos, o decaimento radioativo e o comportamento de circuitos elétricos (BOYCE et al., 2020). Na biologia, elas podem descrever o crescimento de populações (como no modelo logístico mencionado posteriormente), a propagação de doenças infecciosas (modelos SIR) e a dinâmica de reações bioquímicas. Na engenharia, são usadas para analisar sistemas mecânicos (como a vibração de estruturas), sistemas de controle e sistemas térmicos. E, como veremos em detalhes neste trabalho, as EDOs são cruciais na economia para modelar o crescimento econômico, a acumulação de capital, o consumo e a poupança ao longo do tempo, e muitos outros fenômenos dinâmicos (MEDEIROS; OLIVEIRA, 2006; BLANCHARD; FISCHER, 1989).

Essa classe de equações admitem categorizações diversas, baseadas em critérios como linearidade, dependência das variáveis e natureza das condições de contorno. As principais classificações a serem consideradas, são:

**Equações Diferenciais Lineares:** Uma EDO é classificada como linear se a função desconhecida e suas derivadas manifestam-se exclusivamente de forma linear, ou seja, não são multiplicadas entre si nem elevadas a potências superiores à unidade (BOYCE et al., 2020; MEDEIROS; OLIVEIRA, 2006). A forma genérica de uma EDO linear de ordem  $n$  é expressa por:

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t), \quad (2.4)$$

onde  $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$  representam funções dadas, e  $g(t)$  é uma função conhecida.

Um exemplo simples de equação linear de primeira ordem é:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 3. \quad (2.5)$$

Nesta equação, a função desconhecida  $x(t)$  e sua derivada aparecem linearmente.

**Equações Diferenciais Não Lineares:** Uma EDO é considerada não linear se a função desconhecida ou suas derivadas se apresentam de forma não linear, como em multiplicações entre si ou elevação a potências superiores à unidade (BOYCE et al., 2020; MEDEIROS; OLIVEIRA, 2006). A título de exemplo:

$$(x'(t))^2 + x(t) = 0, \quad (2.6)$$

em que a derivada de  $x(t)$  figura elevada ao quadrado.

Outro exemplo de equação não linear, relevante em economia, é a equação que descreve a dinâmica do consumo no modelo de ciclo de vida com utilidade de aversão ao risco relativo constante ou CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*):

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{C(t)(r - \rho)}{\lambda}, \quad (2.7)$$

onde  $C(t)$  é o consumo,  $r$  é a taxa de juros,  $\rho$  é a taxa de impaciência, e  $\lambda$  é o coeficiente de aversão relativa ao risco. A não linearidade, neste caso, surge se a utilidade não for logarítmica ( $\lambda \neq 1$ ).

**Equações Diferenciais Ordinárias:** Caracterizam-se pela presença de uma única variável independente  $t$ , como nos exemplos supracitados.

**Equações Diferenciais Parciais (EDPs):** Distinguem-se pela ocorrência de mais de uma variável independente, como em problemáticas envolvendo múltiplos parâmetros temporais ou espaciais (BOYCE et al., 2020).

**Problema de Valor Inicial (PVI):** O problema é formulado com condições que especificam o valor da função desconhecida em um ponto particular no domínio da variável independente (MEDEIROS; OLIVEIRA, 2006). A forma geral do PVI é:

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.8)$$

onde  $t_0$  designa o ponto inicial e  $x_0$  representa o valor conhecido da função nesse ponto.

**Problemas de Valor de Fronteira (PVFs):** Em contraposição às condições iniciais, o problema é formulado com condições impostas nos extremos do intervalo de solução. Em um intervalo  $[t_0, t_1]$ , por exemplo, as condições de fronteira podem ser expressas por:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \quad (2.9)$$

Este tipo de problema é recorrente em sistemas físicos e de engenharia, a exemplo da condução de calor em uma barra com temperaturas conhecidas em suas extremidades (BOYCE et al., 2020; ASCHER et al., 1994).

**Sistemas de EDOs:** Muitas aplicações, especialmente em economia, envolvem sistemas de EDOs, nos quais várias variáveis interagem e suas taxas de variação dependem umas das outras (BOYCE et al., 2020; MEDEIROS; OLIVEIRA, 2006). Um sistema de EDOs de primeira ordem pode ser escrito na forma geral:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\dots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  são as funções desconhecidas, e  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são funções que descrevem as interdependências. O modelo de ciclo de vida, quando formulado com equações para o consumo e para os ativos, é um exemplo de um sistema de EDOs.

No que tange à solução, essa classe de equações podem admitir:

- **Soluções Exatas:** Certas EDOs admitem resolução analítica, resultando em soluções exatas que descrevem o comportamento da função desconhecida em termos de outras funções conhecidas. A equação diferencial  $x'(t) = kx(t)$ , cuja solução é  $x(t) = x_0 e^{kt}$ , com  $k$  constante, ilustra um exemplo clássico de solução exata (BOYCE et al., 2020; MEDEIROS; OLIVEIRA, 2006).
- **Soluções Aproximadas:** Em numerosos casos, as EDOs não comportam resolução exata. Nessas situações, métodos numéricos, como o Método de Runge-Kutta ou o Método de Diferenças Finitas, são empregados para determinar soluções aproximadas (BOYCE et al., 2020; ALMEIDA et al., 2020).

A obtenção de uma solução analítica (ou exata) para uma EDO significa encontrar uma expressão explícita para a função desconhecida em termos de funções elementares (como polinomiais, exponenciais, trigonométricas, etc.). No entanto, muitas dessas EDOs,

especialmente as não lineares, não possuem soluções analíticas conhecidas. Nesses casos, é necessário recorrer a métodos numéricos para obter soluções aproximadas (BOYCE et al., 2020; JUDD, 1998).

Métodos numéricos discretizam o tempo (ou qualquer que seja a variável independente) e calculam valores aproximados da solução em pontos discretos (ASCHER et al., 1994). A precisão da solução numérica depende do método utilizado e do tamanho do passo de discretização. Em economia, modelos mais realistas (que incorporam diversas variáveis) frequentemente exigem o uso de métodos numéricos, pois as soluções analíticas são, em geral, intratáveis (JUDD, 1998).

Diversas abordagens se apresentam para resolver EDOs, condicionadas às suas características intrínsecas. As principais são:

Entre os **Métodos Analíticos**, destacam-se:

- **Separação de Variáveis:** Aplicável quando a EDO pode ser reescrita de forma que todas as variáveis dependentes se situem em um lado da equação e todas as variáveis independentes no outro, como em  $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ . Nesses casos, a solução pode ser obtida por integração direta (ASCHER et al., 1994).
- **Método das Equações Lineares de 1ª Ordem:** Para EDOs lineares de primeira ordem, a solução pode ser obtida por meio do fator integrante, que simplifica a equação e possibilita a determinação de uma solução exata (BOYCE et al., 2020).

Considere a EDO linear de primeira ordem na forma padrão:

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) = q(t)$$

O fator integrante,  $\mu(t)$ , é definido como:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Multiplicando ambos os lados da EDO por  $\mu(t)$ , obtemos:

$$\mu(t)\frac{dx(t)}{dt} + \mu(t)p(t)x(t) = \mu(t)q(t)$$

O lado esquerdo da equação é agora a derivada do produto  $\mu(t)x(t)$ :

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x(t)) = \mu(t)q(t)$$

Integrando ambos os lados em relação a  $t$ , obtemos a solução geral:

$$\mu(t)x(t) = \int \mu(t)q(t)dt + C$$

onde  $C$  é uma constante de integração. A solução explícita para  $x(t)$  é então:

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left( \int \mu(t)q(t)dt + C \right)$$

Quando a obtenção de uma solução exata se revela inviável ou impraticável, **Métodos Numéricos** oferecem uma via para aproximar a solução da EDO. Dentre os principais métodos, destacam-se:

- **Método de Euler:** O método de Euler é um dos métodos mais simples de discretização. A ideia principal é aproximar a solução da equação diferencial por meio de uma expansão de primeira ordem (LINGE;LANGTAGEN, 2020). A solução em  $t_{i+1}$  é obtida a partir de  $t_i$  e do valor da função  $f(t_i, x_i)$  no ponto  $t_i$ , utilizando a fórmula:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot f(t_i, x_i).$$

Este método é direto e fácil de implementar, mas pode não ser suficientemente preciso em muitos casos, especialmente para sistemas com comportamento altamente não linear ou rápidos.

- **Métodos de Runge-Kutta:** Métodos mais sofisticados, como o de quarta ordem, que proporcionam aproximações mais precisas em comparação com o Método de Euler (LINGE;LANGTAGEN, 2020).

O Método de Runge-Kutta é uma família de métodos, e não um único método. O Método de Euler pode ser considerado um método de Runge-Kutta de primeira ordem. Métodos de Runge-Kutta de ordem superior usam múltiplas avaliações da função  $f(t, x(t))$  em pontos intermediários dentro de cada passo de tempo para obter uma aproximação mais precisa da solução. O Método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), que é amplamente utilizado, calcula quatro valores intermediários ( $k_1, k_2, k_3, k_4$ ) e usa uma média ponderada desses valores para atualizar a solução.

A fórmula do RK4 para atualizar  $x$  de  $t_i$  para  $t_{i+1}$  é dada por:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t \cdot f(t_i, x_i), \\ k_2 &= \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= \Delta t \cdot f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= \Delta t \cdot f(t_i + \Delta t, x_i + k_3), \end{aligned}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Este método leva em consideração uma média ponderada de várias aproximações intermediárias de  $f(t, x(t))$ , o que melhora significativamente a precisão da solução.

A maior precisão do RK4 (e de outros métodos de Runge-Kutta de ordem superior) permite usar passos de tempo maiores do que os necessários com o Método de Euler, mantendo a mesma precisão (LINGE; LANGTAGEN, 2020).

- **Método de Diferenças Finitas:** Predominantemente aplicado na resolução de EDPs, mas também adaptável a EDOs, mediante discretização do domínio temporal (ALMEIDA et al., 2010).

No Método de Diferenças Finitas, a derivada da função desconhecida é aproximada por diferenças entre valores da função em pontos discretos. Por exemplo, a derivada primeira  $x'(t)$  pode ser aproximada por:

Diferença Finita Progressiva (*Forward Difference*):

$$x'(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Diferença Finita Regressiva (*Backward Difference*):

$$x'(t) \approx \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Diferença Finita Central (*Central Difference*):

$$x'(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

A diferença finita central é geralmente mais precisa do que as diferenças progressiva e regressiva. Substituindo a derivada (ou derivadas) na EDO original por essas aproximações de diferenças finitas, obtém-se um sistema de equações algébricas que pode ser resolvido para obter valores aproximados da solução em pontos discretos (ALMEIDA et al., 2010).

Para ilustrar a aplicação de um método numérico, considera-se o exemplo de EDO de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \tag{2.11}$$

com condição inicial  $y(0) = y_0$ . O Método de Euler pode ser empregado para aproximar a solução desta equação, cuja solução exata é expressa por:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}. \quad (2.12)$$

Para a resolução numérica, o Método de Euler, fundamentado na aproximação da derivada, apresenta a seguinte formulação:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(t_n, y_n), \quad (2.13)$$

onde  $\Delta t$  representa o tamanho do passo,  $y_n$  a solução aproximada no tempo  $t_n$ , e  $f(t_n, y_n)$  a função que descreve a equação diferencial, sendo  $f(t_n, y_n) = -ky_n$  no caso em questão.

A seguir, apresenta-se uma implementação simplificada do Método de Euler para resolver a EDO supracitada, utilizando as bibliotecas NumPy, para operações numéricas, e Matplotlib, para a representação gráfica (LINGE;LANGTAGEN, 2020):

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Parâmetros
5 k = 0.1 # Constante de decaimento
6 y0 = 1 # Condição inicial
7 t_max = 100 # Tempo final
8 dt = 1 # Tamanho do passo
9
10 # Vetores de tempo e solução
11 t_values = np.arange(0, t_max, dt)
12 y_values = np.zeros(len(t_values))
13 y_values[0] = y0
14
15 # Método de Euler
16 for i in range(1, len(t_values)):
17     y_values[i] = y_values[i-1] - k * y_values[i-1] * dt
18
19 # Solução exata
20 y_exact = y0 * np.exp(-k * t_values)
21
22 # Plotando os resultados
23 plt.plot(t_values, y_values, label='Método de Euler', color='blue')
24 plt.plot(t_values, y_exact, label='Solução Exata', color='red',
25         linestyle='--')
26 plt.xlabel('Tempo t')
27 plt.ylabel('y(t)')

```

```
27 plt.title('Solução de uma EDO usando o Método de Euler')
28 plt.legend()
29 plt.show()
```

Listing 2.1 – Implementação do Método de Euler

- **Curva Azul (Contínua):** Ilustra a solução aproximada obtida pelo Método de Euler. Apesar da simplicidade, o método proporciona uma aproximação razoável do comportamento da solução ao longo do tempo.
- **Curva Vermelha (Tracejada):** Representa a solução exata, expressa pela fórmula  $y(t) = y_0 e^{-kt}$ . Conforme esperado, a solução exata descreve a evolução do sistema de forma contínua e precisa.

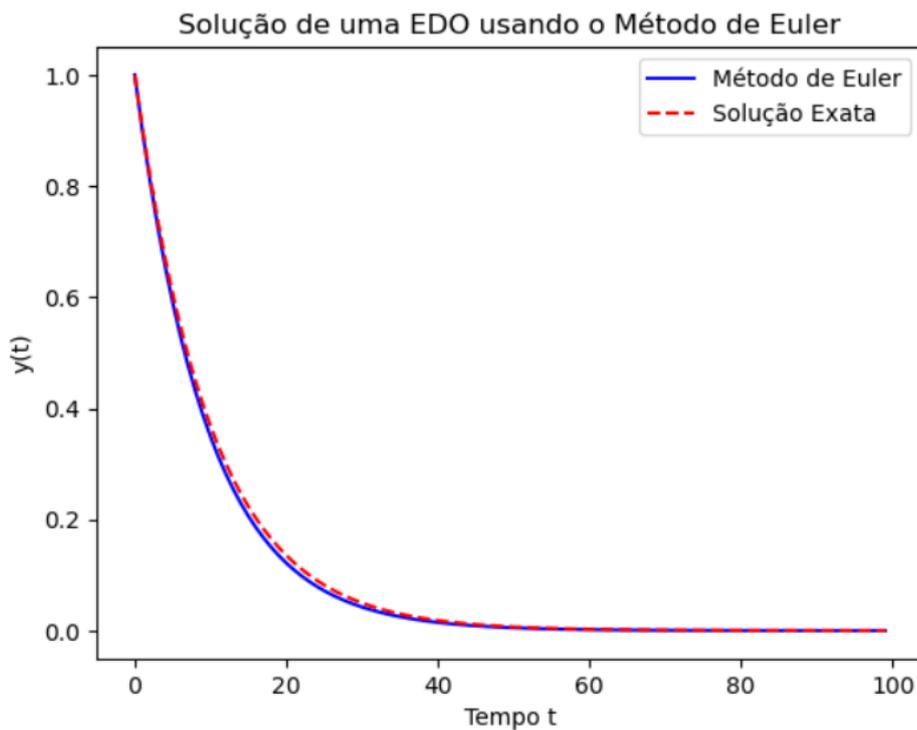


Figura 2 – Gráfico EDO com Método de Euler

Fonte: Elaboração própria

O Método de Euler apresenta precisão condicionada ao tamanho do passo  $\Delta t$ . Em cenários com valores elevados de  $k$  ou intervalos de tempo extensos, a aproximação pode divergir da solução exata (LINGE; LANGTANGEN, 2020; BOYCE et al., 2020).

A estabilidade numérica é um conceito crucial na resolução numérica de EDOs. Um método numérico é considerado estável se pequenos erros (como erros de arredondamento) introduzidos em um passo da iteração não se amplificam exponencialmente ao longo do tempo, levando a uma solução completamente errônea. O Método de Euler, embora simples, pode ser numericamente instável para certos tipos de EDOs e/ou para

tamanhos de passo ( $\Delta t$ ) muito grandes. A estabilidade do Método de Euler depende da rigidez (*stiffness*) da equação (LINGE; LANGTANGEN, 2020).

Uma EDO é considerada rígida se ela possui soluções que variam em escalas de tempo muito diferentes. Para EDOs rígidas, o Método de Euler pode exigir um  $\Delta t$  extremamente pequeno para garantir a estabilidade, o que torna a simulação computacionalmente inviável (LINGE; LANGTANGEN, 2020).

Para aprimorar a precisão da solução, métodos mais avançados e estáveis, como o Método de Runge-Kutta de ordem superior e os métodos implícitos, podem ser empregados, oferecendo maior exatidão mesmo com o uso de passos de tempo maiores, mesmo para EDOs rígidas. Este exemplo demonstra a aplicação de um método numérico elementar na resolução de uma equação diferencial ordinária. Em problemáticas mais complexas, nas quais a solução analítica se mostra inviável, os métodos numéricos como revelam-se ferramentas cruciais para a obtenção de soluções aproximadas (JUDD, 1998; ALMEIDA et al., 2020).

Tais métodos (analíticos e numéricos) encontram implementação em softwares de programação e modelagem como MATLAB, Fortran, Python (com bibliotecas como SciPy (JONES et al., 2001)) e Mathematica, conferindo acessibilidade à resolução numérica de EDOs a pesquisadores de diversas áreas.

### 2.3 PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTEIRA

Os Problemas de Valor de Fronteira (PVFs) constituem uma classe fundamental de problemas em Equações Diferenciais Ordinárias e sistemas dinâmicos (SYDSÆTER et al., 2021), caracterizada pela necessidade de que a solução satisfaça condições específicas nos limites de um intervalo. Esses problemas, que surgem na modelagem de fenômenos que dependem de condições de contorno, são prevalentes em diversas áreas, como engenharia, física e, de forma particularmente relevante para este trabalho, economia (JUDD, 1998). Esta seção oferece uma introdução abrangente aos PVFs, abordando definições formais, métodos de solução e exemplos práticos.

Um Problema de Valor de Fronteira pode ser formalizado da seguinte maneira:

- **Equação Diferencial Ordinária:** Considere uma EDO de primeira ordem, expressa por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x'(t)), \quad (2.14)$$

onde  $x(t)$  representa a função incógnita e  $f$  denota uma função conhecida, dependente de  $t$ ,  $x(t)$  e  $x'(t)$ .

- **Condições de Contorno:** O problema incorpora, adicionalmente, condições a serem satisfeitas nos extremos do intervalo  $[0, T]$ , especificadas por:

$$b(t_b, x(t_b), x'(t_b)) = 0, \quad (2.15)$$

em que  $t_b$  designam os pontos de borda (tipicamente,  $t_b = 0$  e  $t_b = T$ ) e  $b$  representa uma função que define as condições nos pontos de contorno.

- **Condições Iniciais e Finais:** Frequentemente, as condições são estabelecidas em  $t = 0$  e  $t = T$ . A título de ilustração:

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad x(T) = x_T. \quad (2.16)$$

A resolução de Problemas de Valor de Fronteira geralmente envolve a transformação do problema contínuo em um problema numérico, que pode ser solucionado por meio de métodos algébricos e numéricos. Diversas técnicas são amplamente adotadas para obter soluções aproximadas para tais problemas, incluindo o Método dos Coeficientes de Colocação, o Método de Galerkin e o Método de Elementos Finitos (ASCHER et al., 1994; BOYCE et al., 2020).

Em economia, os PVFs, surgem, muitas vezes, a partir de problemas de otimização dinâmica, onde um agente econômico (como um consumidor ou uma firma) busca maximizar uma função objetivo ao longo do tempo, sujeito a restrições. Nesse contexto, Dorfman (1969) apresenta uma interpretação econômica da teoria do controle ótimo, que frequentemente leva a PVFs. Arrow (1968) também discute aplicações da teoria do controle em problemas de crescimento econômico, que podem ser formulados como problemas de valor de fronteira.

Para ilustrar a aplicação dos métodos de solução e a relevância dos PVFs em economia, considere o problema de otimização do consumo ao longo da vida, com formulação retirada do livro *Applied Computational Economics and Finance* de Miranda e Fackler (2004), e que serve como base para este trabalho:

- **Função Objetivo:** O agente busca maximizar a utilidade descontada ao longo da vida, expressa por:

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} U(C(t)) dt, \quad (2.17)$$

onde  $U(C(t))$  denota a função de utilidade e  $C(t)$  representa a taxa de consumo.

- **Restrição de Riqueza:** A restrição intertemporal da riqueza é definida como:

$$\frac{dW}{dt} = rW + w(t) - C(t), \quad (2.18)$$

em que  $W(t)$  corresponde à riqueza,  $w(t)$  ao fluxo de renda e  $C(t)$  ao consumo

- **Condições de Contorno:** Assume-se que o agente inicia sem riqueza e não transmite herança (ou, de forma mais geral, que a riqueza final é um valor predeterminado):

$$W(0) = 0 \quad \text{e} \quad W(T) = 0. \quad (2.19)$$

Este exemplo demonstra como um problema econômico central, a otimização do consumo, pode ser formulado como um PVF (MIRANDA; FACKLER, 2004; JUDD, 1998). A compreensão e a aplicação apropriada das técnicas de resolução desse tipo de problema viabilizam a abordagem de uma vasta gama de problemas reais e complexos em economia e em outras áreas.

Adicionalmente, para identificar um zero de uma função não linear  $f(x)$ , com  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f \in C^1$ , pode-se empregar o **Método de Newton**. Este método iterativo busca aproximar a raiz por meio de retas tangentes à função, utilizando sua derivada. O procedimento desdobra-se nos seguintes passos:

**Objetivo:** Determinar um zero de  $f(x)$ .

**Inicialização:** Definir os critérios de parada  $\epsilon$  e  $\delta$ , e o ponto inicial  $x_0$ . Inicializar  $k = 0$ .

**Passo 1:** Calcular a iteração subsequente:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

**Passo 2:** Verificar o critério de parada: Se  $|x_k - x_{k+1}| \leq \epsilon(1 + |x_{k+1}|)$ , prosseguir para o Passo 3. Caso contrário, retornar ao Passo 1.

**Passo 3:** Registrar os resultados e interromper o processo: Se  $|f(x_{k+1})| \leq \delta$ , reportar sucesso na identificação de um zero; caso contrário, reportar falha.

Mesmo ao identificar um ponto que satisfaça ambos os critérios  $\epsilon$  e  $\delta$ , este pode não corresponder a um zero ou proximidade de um zero. Considere-se o caso de  $f(x) = x^6$ . Aplicando o Passo 1 a  $x^6$ , obtém-se:

$$x_{k+1} = \frac{5x_k}{6},$$

o que resulta em uma iteração de convergência lenta e linear. A problemática reside no fato de  $x^6$  apresentar-se "plano" em seu zero. De maneira mais geral, se uma função manifestar-se quase plana em um zero, a convergência pode tornar-se consideravelmente lenta, e critérios de parada menos rigorosos podem conduzir à interrupção distante do verdadeiro zero (JUDD, 1998; MIRANDA; FACKLER, 2004).

Questões concernentes aos critérios de parada assumem maior relevância no contexto de equações não lineares, em comparação com problemas de otimização. Nesse tipo

de problema, frequentemente considera-se satisfatório um ponto  $x$  que se aproxima do ótimo verdadeiro  $x^*$  na otimização do objetivo  $F(x)$ . Nesses casos, a magnitude do erro  $x - x^*$  pode ser tolerada. Entretanto, ao resolver equações não lineares, usualmente exige-se que o erro  $x - x^*$  seja mínimo, tornando os critérios de parada mais críticos (JUDD, 1998; MIRANDA; FACKLER, 2004).

Essa distinção entre a otimização de um objetivo e a resolução de equações não lineares se reflete nos métodos numéricos utilizados para resolver PVFs. Enquanto métodos iterativos, como o de Newton, buscam refinar sucessivamente uma estimativa inicial para minimizar o erro, os métodos espectrais, como o Método de Colocação, adotam uma abordagem diferente: eles aproximam diretamente a solução ao expressá-la como uma combinação de funções conhecidas (BOYD, 2013). Essa técnica permite transformar o problema diferencial original em um sistema algébrico mais tratável, garantindo que a solução aproximada satisfaça a equação diferencial em pontos específicos do domínio (ASCHER et al., 1994).

O Método de Colocação se baseia na ideia de aproximar a solução do PVF por uma combinação linear de funções conhecidas, chamadas funções de base ou funções de interpolação. A solução aproximada, denotada por  $u_N(x)$ , é expressa como:

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x)$$

onde  $c_j$  são coeficientes a serem determinados e  $\phi_j(x)$  são as funções de base. No Método de Colocação, esses coeficientes são determinados exigindo que a equação diferencial seja satisfeita exatamente em um conjunto específico de pontos, chamados pontos de colocação, no domínio do problema (BOYD, 2013).

Considerando um PVF genérico da forma:

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

sujeito às condições de contorno:

$$Bu(a) = \alpha, \quad Cu(b) = \beta$$

onde  $L$  é um operador diferencial linear,  $B$  e  $C$  são operadores de contorno, e  $f(x)$  é uma função conhecida. Substituindo a solução aproximada  $u_N(x)$  na equação diferencial, obtemos o resíduo  $R(x)$ :

$$R(x) = Lu_N(x) - f(x)$$

O Método de Colocação impõe que o resíduo seja zero nos pontos de colocação  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ :

$$R(x_i) = Lu_N(x_i) - f(x_i) = 0$$

Essa condição gera um sistema de  $N$  equações algébricas para os  $N$  coeficientes desconhecidos  $c_j$ . A escolha dos pontos de colocação é crucial para a precisão do método. Pontos de colocação equidistantes são comuns, mas outras escolhas, como os nós de Chebyshev, podem levar a uma convergência mais rápida (BOYD, 2013). Resolvendo o sistema de equações, obtemos os coeficientes  $c_j$  e, conseqüentemente, a solução aproximada  $u_N(x)$ .

Já o Método de Galerkin, assim como o anterior, também aproxima a solução por uma combinação linear de funções de base. No entanto, em vez de impor que o resíduo seja zero em pontos específicos, esse método exige que o resíduo seja ortogonal a cada uma das funções de base (ASCHER et al., 1994). Matematicamente, isso se traduz nas seguintes equações:

$$\int_a^b R(x)\phi_i(x)dx = \int_a^b (Lu_N(x) - f(x))\phi_i(x)dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Essas equações geram um sistema de  $N$  equações algébricas para os coeficientes  $c_j$ . A principal diferença entre os Métodos de Colocação e Galerkin reside na forma como os coeficientes são determinados. Enquanto o Método de Colocação impõe condições pontuais, o Método de Galerkin impõe condições integrais. A escolha do método mais adequado depende das características do problema e das funções de base utilizadas. Esse método geralmente leva a uma melhor aproximação global da solução, enquanto o Método de Colocação pode ser mais eficiente computacionalmente (ASCHER et al., 1994).

## 2.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: HORIZONTE FINITO E INFINITO

Em modelos dinâmicos, o horizonte de tempo sobre o qual o sistema é analisado pode ser finito ou infinito, o que leva a duas classes importantes de problemas em EDOs: as EDOs com horizonte finito e as EDOs com horizonte infinito (CHIANG, 1992).

As EDOs com horizonte finito são utilizadas para modelar sistemas que evoluem ao longo de um período de tempo limitado, como o problema de consumo ao longo da vida com aposentadoria, em que o agente econômico planeja o seu consumo até um determinado momento no futuro (CHIANG, 1999; BLANCHARD; FISCHER, 1989).

Já as EDOs com horizonte infinito são utilizadas para modelar sistemas que evoluem indefinidamente no tempo, como o modelo de crescimento (SOLOW, 1988), em que

o estoque de capital da economia converge para um estado estacionário no longo prazo. A escolha entre um horizonte finito ou infinito depende da natureza do problema e dos objetivos da análise (CHIANG, 1999).

### 2.4.1 EDOs COM HORIZONTE FINITO

As EDOs com horizonte finito representam uma classe de problemas matemáticos nos quais a solução é buscada até um ponto temporal específico, denominado horizonte finito (um tempo  $T$  definido). Essa categoria de problema é comum em diversos setores, onde sistemas dinâmicos são modelados e analisados em um intervalo de tempo delimitado. O ponto final do horizonte finito configura-se como uma restrição relevante, pois define o limite temporal para a avaliação e análise das variáveis do sistema (CHIANG, 1999).

Em um problema típico de EDO com horizonte finito, o sistema de equações descreve a evolução de uma ou mais variáveis dependentes ao longo de um intervalo temporal, sujeitas a condições iniciais e/ou de fronteira. A forma geral de uma EDO com horizonte finito pode ser expressa como:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.20)$$

onde  $y(t)$  representa a variável dependente (por exemplo, consumo, riqueza ou outro indicador do sistema),  $f(y(t), t)$  é uma função que descreve a dinâmica do sistema, e  $t_0$  e  $T$  correspondem, respectivamente, aos tempos inicial e final do intervalo considerado (CHIANG, 1999; BOYCE et al., 2020).

Em problemas com horizonte finito, as condições de fronteira ou condições finais são fundamentais, pois descrevem o comportamento do sistema no ponto final  $T$  e determinam a solução da equação diferencial. Em modelos econômicos, por exemplo, pode-se estabelecer uma condição de fronteira que indique que a riqueza de um agente se esgota ao final da fronteira. O horizonte finito inerente a esses modelos implica que sua aplicação não se destina a descrever o comportamento do sistema indefinidamente (CHIANG, 1999; BOYCE et al., 2020).

Essa característica assume relevância em diversas situações práticas, nas quais o comportamento do sistema é relevante apenas dentro de um intervalo de tempo específico, como em modelos de aposentadoria, sistemas com vida útil limitada ou ciclo definido (MIRANDA; FACKLER, 2004; JUDD, 1998). No contexto de modelos econômicos, o horizonte finito representa a delimitação temporal para as decisões de consumo, poupança ou investimento do agente. O modelo deve, portanto, capturar as escolhas otimizadas até o término do horizonte, quando o agente ou sistema atinge um estado final (CHIANG, 1999).

Modelos dessa natureza são frequentemente utilizados para prever o comportamento de sistemas que exibem um ciclo ou que são intrinsecamente limitados em  $t$ . Em um problema de EDO com horizonte finito, busca-se uma equação que descreva a evolução temporal de uma variável  $x(t)$  ao longo de um intervalo de tempo específico  $[0, T]$  (JUDD, 1998).

O sistema é modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad (2.21)$$

onde  $x(t)$  representa a função desconhecida que descreve o comportamento do sistema, e  $f(t, x(t))$  é uma função conhecida que define a dinâmica do sistema, em função do tempo  $t$  e da variável  $x(t)$ .

Adicionalmente à equação diferencial, impõem-se condições de contorno nos extremos do intervalo  $[0, T]$ , que especificam os valores de  $x(t)$  no início e no final do intervalo. Tais condições de contorno são expressas por:

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad x(T) = x_T, \quad (2.22)$$

onde  $x_0$  denota o valor da variável no instante inicial  $t = 0$ , e  $x_T$  o valor da variável no instante final  $t = T$ . Essas condições revelam-se essenciais para determinar a solução única da equação diferencial.

Uma aplicação clássica de EDO com horizonte finito reside no modelo de consumo ao longo da vida, no qual o agente econômico toma decisões econômicas ao longo de um período determinado (MIRANDA; FACKLER, 2004). Nesse contexto, a variável  $x(t)$  pode representar a riqueza do agente ao longo do tempo, se esgota ao final do horizonte, e a função  $f(t, x(t))$  pode modelar a influência de fatores como consumo, taxa de juros e fluxo de renda sobre a riqueza (CHIANG, 1999; BOYCE et al., 2020).

A dinâmica do consumo poderia ser modelada por uma EDO na forma dada pela equação (2.7):

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{C(t)(r - \rho)}{\lambda},$$

Sendo esta, na verdade, uma simplificação. Em um modelo mais completo, a dinâmica do consumo seria derivada da equação de Euler, e a aversão ao risco entraria através da curvatura da função de utilidade (JUDD, 1998).

A dinâmica da riqueza pode ser definida por uma EDO na forma dada pela equação (2.18), onde as condições de contorno seriam  $W(0) = W_0$  e  $W(T) = 0$ , com  $W_0$  representando

o valor da riqueza no início do intervalo.:

$$\frac{dW(t)}{dt} = rW(t) + w(t) - C(t),$$

A solução numérica dessas equações é obtida até o final do horizonte  $T$ , considerando as condições de fronteira que determinam os valores de  $W(t)$  e  $C(t)$  no ponto final.

#### 2.4.2 EDOS COM HORIZONTE INFINITO

As EDOs com horizonte infinito surgem em diversos contextos da matemática aplicada e da engenharia, especialmente quando se analisa o comportamento de sistemas ao longo de um intervalo de tempo que se estende indefinidamente (JUDD, 1998). Modelos com horizonte infinito são frequentemente utilizados quando se está interessado no comportamento de longo prazo ou no estado estacionário de um sistema, onde as condições iniciais se tornam menos relevantes (CHIANG, 1999).

Considere uma EDO que descreve o comportamento de um sistema em um intervalo  $[0, \infty)$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad (2.23)$$

onde  $x(t)$  é a função desconhecida e  $f(t, x(t))$  é uma função conhecida. Em problemas com horizonte infinito, busca-se a solução da EDO para  $t$  tendendo a infinito ( $t \rightarrow \infty$ ) (CHIANG, 1999; BOYCE et al., 2020).

Além da EDO, condições iniciais são tipicamente impostas, mas, diferentemente dos problemas com horizonte finito, não há condições de contorno no "final" do intervalo, uma vez que ele é infinito. A condição inicial é geralmente expressa como:

$$x(0) = x_0. \quad (2.24)$$

A resolução de EDOs com horizonte infinito pode ser desafiadora devido à natureza ilimitada do intervalo.

Uma EDO com horizonte infinito pode ser modelada de forma análoga a uma com horizonte finito. A principal distinção reside na extensão do intervalo de tempo até  $t \rightarrow \infty$ , demandando métodos específicos para lidar com esse comportamento assintótico.

A equação geral pode ser expressa como na equação (2.23), onde:  $x(t)$  designa a função desconhecida que descreve o comportamento do sistema ao longo do tempo e  $f(t, x(t))$  representa uma função conhecida que define a dinâmica do sistema (CHIANG, 1999; BOYCE et al., 2020).

Adicionalmente à equação diferencial, a condição de contorno para  $t = 0$  é usualmente especificada, mas a condição para  $t \rightarrow \infty$  é definida de acordo com o comportamento esperado da solução (por exemplo, convergência para um estado estacionário) (CHIANG, 1999).

Na resolução de EDOs com horizonte infinito, é crucial considerar o comportamento assintótico da solução à medida que  $t \rightarrow \infty$ . A solução pode:

- **Estabilizar-se:** Convergir para um valor constante ou atingir um estado de equilíbrio. Este é o caso mais comum em modelos econômicos que buscam analisar o estado estacionário (SOLOW, 1988; BLANCHARD; FISCHER, 1989).
- **Divergir:** Crescer ou decrescer ilimitadamente. Isso pode ocorrer em modelos de crescimento, por exemplo (CHIANG, 1999).
- **Oscilar:** Apresentar um comportamento oscilatório indefinido. Este caso pode ocorrer em modelos com ciclos, por exemplo (CHIANG, 1999).

Exemplos de modelos que frequentemente utilizam equações diferenciais com horizonte infinito incluem:

- **Crescimento Populacional:** Um modelo de crescimento populacional pode ser descrito por uma EDO com horizonte infinito. O modelo de crescimento logístico, por exemplo, descreve a dinâmica populacional como:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K} \right),$$

onde  $P(t)$  é a população no tempo  $t$ ,  $r$  é a taxa de crescimento intrínseca e  $K$  é a capacidade de suporte do ambiente. Neste modelo, a população tende a se estabilizar em  $K$  no longo prazo (BOYCE et al., 2020).

- **Acúmulo de Capital:** Em modelos econômicos, como o modelo de Solow de crescimento econômico, o acúmulo de capital ao longo do tempo pode ser modelado por uma EDO com horizonte infinito:

$$\frac{dK(t)}{dt} = sY(t) - \delta K(t),$$

onde  $K(t)$  é o estoque de capital,  $s$  é a taxa de poupança,  $Y(t)$  é a produção (que geralmente depende de  $K(t)$ ) e  $\delta$  é a taxa de depreciação do capital.

Nesse modelo, que é amplamente utilizado para analisar o crescimento econômico de longo prazo (SOLOW, 1988), o capital por trabalhador tende a um estado estacionário no longo prazo (BLANCHARD; FISCHER, 1989).

Outros exemplos de EDOs com horizonte infinito incluem:

**Problema de Decaimento Exponencial:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t), \quad x(0) = x_0,$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva. Neste caso, a solução tende a zero à medida que  $t$  tende a infinito.

**Crescimento Populacional com Taxa de Crescimento Variável:**

$$\frac{dP(t)}{dt} = r(t)P(t), \quad P(0) = P_0,$$

onde  $r(t)$  representa a taxa de crescimento populacional variável ao longo do tempo.

### 2.4.3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

A resolução de EDOs com horizonte infinito ou finito exige a aplicação de métodos numéricos e analíticos específicos.

Para EDOs com horizonte finito, uma abordagem comum é a discretização temporal. O intervalo de tempo  $[0, T]$  é subdividido em  $n$  subintervalos, e a solução da EDO é aproximada em pontos discretos  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , onde  $t_i = i\Delta t$  e  $\Delta t = \frac{T}{n}$  é o tamanho do passo. A solução é então aproximada por uma sequência de valores  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (BOYCE et al., 2020).

- **Método de Euler:** Método elementar e direto para resolver EDOs, embora apresente limitações em precisão para equações complexas ou intervalos de tempo extensos (LINGE; LANGTANGEN, 2020).
- **Método de Runge-Kutta:** Uma família de métodos mais avançados, sendo o de quarta ordem (RK4) amplamente utilizado por sua maior precisão (LINGE; LANGTANGEN, 2020). A fórmula do RK4 é dada pelas equações já apresentadas anteriormente.
- 
- **Método dos Elementos Finitos:** Esse método, também conhecido como MEF, pode ser adaptado para EDOS com horizonte finito. O intervalo é discretizado em elementos, e a solução é aproximada por funções polinomiais (funções de forma) dentro de cada elemento. As equações diferenciais são multiplicadas por funções de teste e integradas por partes, resultando em um sistema de equações algébricas (ASCHER et al., 1994).

Para resolver EDOs com horizonte infinito, as técnicas analíticas e numéricas que podem ser empregadas são:

- **Método da Transformada de Laplace:** Uma ferramenta poderosa, especialmente para EDOs lineares. A EDO é transformada para o domínio da frequência, resolvida algebricamente e, em seguida, a transformada inversa é aplicada para obter a solução no domínio do tempo. A Transformada de Laplace de uma função  $x(t)$  é definida como na equação. Este método é particularmente útil quando a EDO possui coeficientes constantes.

A Transformada de Laplace de uma função  $x(t)$  é definida como:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt, \quad (2.25)$$

onde  $s$  é a variável complexa no domínio da frequência. Aplicando a Transformada de Laplace na EDO original, a equação diferencial é convertida em uma equação algébrica. A solução dessa equação algébrica é então transformada de volta ao domínio do tempo usando a Transformada Inversa de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}. \quad (2.26)$$

- **Método de Análise Assintótica:** Usado para obter soluções aproximadas quando  $t \rightarrow \infty$ . A solução é expressa como uma série de termos que dominam o comportamento para valores grandes de  $t$ . Este método busca caracterizar o comportamento da solução no longo prazo, mesmo que não se consiga uma solução exata para todo  $t$  (BOYCE et al., 2020).
- **Método de Runge-Kutta Estendido:** Uma variação do Método de Runge-Kutta adaptada para intervalos longos (LINGE; LANGTANGEN, 2020).
- **Método de Discretização Temporal com Truncamento:** O intervalo infinito é discretizado em pontos, mas com um  $t_n$  suficientemente grande para capturar o comportamento assintótico. Métodos como Euler e Runge-Kutta são aplicados até  $t_n$  (BOYCE et al., 2020).
- **Método dos Elementos Finitos com Truncamento:** O intervalo é truncado, e a solução no intervalo finito é usada para extrapolar o comportamento para o infinito. Em alguns casos, pode-se usar "elementos infinitos" no MEF para lidar com o comportamento assintótico (ASCHER et al., 1994).

A escolha do método apropriado depende das características específicas do problema (linearidade, ordem, condições de contorno, comportamento assintótico) e da precisão desejada. Em muitos casos, uma combinação de métodos analíticos e numéricos é utilizada.

Por exemplo, pode-se usar análise assintótica para entender o comportamento de longo prazo e, em seguida, usar um método numérico para obter uma solução mais precisa em um intervalo finito, mas suficientemente longo (BOYCE et al., 2020; LINGE; LANGTANGEN, 2020).

## 2.5 MÉTODOS NUMÉRICOS EM ECONOMIA

A resolução de modelos econômicos dinâmicos, frequentemente expressos como EDOs ou sistemas de EDOs, muitas vezes requer o uso de métodos numéricos. Esta seção aborda algumas das técnicas numéricas mais relevantes para a análise econômica, com foco no Método de Tiro e suas variantes (JUDD, 1998).

Como já enfatizado, modelos econômicos que buscam representar a realidade de forma mais precisa frequentemente levam a equações diferenciais não lineares, para as quais soluções analíticas são, em geral, desconhecidas. Portanto, o uso de métodos numéricos é essencial para a análise quantitativa desses modelos (JUDD, 1998).

Problemas de Valor Inicial (PVI) em EDOS são, em geral, mais simples de resolver numericamente do que Problemas de Valor de Fronteira, pois a solução em cada ponto depende apenas de condições locais. Métodos como os procedimentos explícitos e implícitos (como Euler e Runge-Kutta) são adequados para PVI (BOYCE et al., 2020). No entanto, PVFs impõem condições à solução em múltiplos pontos, o que introduz uma complexidade adicional e exige métodos numéricos de natureza global (JUDD, 1998).

Considere o seguinte problema de valor de contorno de dois pontos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t), \\ \dot{y} &= g(x, y, t), \\ x(0) &= x^0, \quad y(T) = y^T, \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , e  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  representam, respectivamente,  $dx/dt$  e  $dy/dt$ .

### 2.5.1 MÉTODO DE TIRO

O Método de Tiro (*Shooting Method*) é uma abordagem fundamental para resolver PVFs como o apresentado em (2.27). A ideia central é converter o PVF em um PVI ou em uma sequência de PVI. Como conhecemos apenas  $x(0)$  (e não  $y(0)$ ), o Método de Tiro "adivinha" (ou "chuta", do inglês shoot) o valor de  $y(0)$ . Em seguida, um método numérico para PVI é empregado para resolver a EDO resultante, verificando se a solução obtida satisfaz a condição de contorno em  $y(T)$  (JUDD, 1998; BOYCE et al., 2020).

Geralmente, o valor resultante de  $y(T)$  não coincidirá com a condição terminal  $y^T$ , exigindo que o processo seja iterativo: novas estimativas para  $y(0)$  são geradas até que um valor consistente com a condição terminal seja encontrado.

Em detalhe, o algoritmo de tiro envolve duas etapas principais (JUDD, 1998; BOYCE et al., 2020):

1. **Estimativa Inicial:** Para uma dada estimativa inicial  $y(0) = y^0$ , resolve-se o seguinte PVI:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t), \\ \dot{y} &= g(x, y, t), \\ x(0) &= x^0, \quad y(0) = y^0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

A solução deste PVI fornece um valor para  $y$  no tempo  $T$ , que denotamos por  $Y(T, y^0)$  para enfatizar sua dependência da estimativa inicial  $y^0$ . A primeira etapa, portanto, consiste na aplicação de um método para PVIs (como os mencionados anteriormente). A escolha do método e do tamanho do passo afeta a precisão da solução do PVF.

2. **Ajuste da Estimativa:** A segunda etapa envolve determinar o valor correto de  $y^0$ . Como a maioria das estimativas iniciais levará a um valor terminal  $Y(T, y^0)$  diferente de  $y^T$ , o problema se resume a encontrar o valor de  $y^0$  que satisfaz a equação não linear  $Y(T, y^0) = y^T$ .

Portanto, a segunda etapa envolve um método para resolver equações não lineares. O Método de Newton é uma escolha comum, mas outros métodos, como o Método da Bisseção ou o Método da Secante, também podem ser usados (MIRANDA; FACKLER, 2004).

O Algoritmo 1 (JUDD, 1998) formaliza o Método de Tiro Genérico:

#### **Algoritmo 1: Tiro Genérico**

**Objetivo:** Resolver o Problema de Valor de Fronteira de dois pontos (2.27).

**Inicialização:** Escolher uma estimativa inicial  $y^{0,i}$  para  $y(0)$ . Definir um critério de parada  $\epsilon > 0$ .

**Passo 1:** Resolver o PVI (2.28) com a condição inicial  $y(0) = y^{0,i}$ , utilizando um método numérico apropriado. Isso resulta em um valor  $y(T)$ .

**Passo 2:** Verificar a condição de contorno: Se  $|y(T) - y^T| < \epsilon$ , a solução foi encontrada (PARE). Caso contrário, selecionar uma nova estimativa  $y^{0,i+1}$  com base em  $y^{0,i}$ ,  $y^{0,i-1}$ , etc., utilizando um método para resolução de equações não lineares (por exemplo, Método de Newton), e retornar ao Passo 1.

O Método de Tiro Genérico, portanto, é um algoritmo de duas camadas. A camada interna (Passo 1) emprega um método para PVI para calcular  $Y(T, y^0)$  dado um valor de  $y^0$ . A precisão desse procedimento interno depende do método PVI escolhido e do tamanho do passo utilizado. A camada externa (Passo 2) resolve a equação não linear  $Y(T, y^0) = y^T$ . Na prática, define-se uma sub-rotina para calcular  $Y(T, y^0) - y^T$  como uma função de  $y^0$  e essa sub-rotina é passada para um algoritmo de busca de zeros (JUDD, 1998).

Devido à natureza numérica do procedimento interno, o erro inerente a ele pode exigir um critério de parada menos rigoroso nos procedimentos externos. É importante ressaltar que a convergência do Método de Tiro não é garantida para todos os PVFs. A escolha da estimativa inicial  $y^{0,i}$  pode ser crucial para o sucesso do método (JUDD, 1998; BOYCE et al., 2020).

Além do Método de Newton, abaixo estão listados outros métodos para resolver a equação não linear:

- **Método da Bisseção:** Este método é mais robusto que o Método de Newton, mas geralmente mais lento. Ele requer que se encontre um intervalo  $[a, b]$  tal que  $Y(T, a) - y^T$  e  $Y(T, b) - y^T$  tenham sinais opostos. O método então repetidamente divide o intervalo ao meio, verificando em qual subintervalo a raiz se encontra, até que a raiz seja encontrada com a precisão desejada.
- **Método da Secante:** Este método é semelhante ao Método de Newton, mas aproxima a derivada da função  $Y(T, y^0) - y^T$  usando uma diferença finita:

$$y^{0,i+1} = y^{0,i} - \frac{Y(T, y^{0,i}) - y^T}{\frac{Y(T, y^{0,i}) - Y(T, y^{0,i-1})}{y^{0,i} - y^{0,i-1}}}$$

O Método da Secante não requer o cálculo da derivada, mas pode ter uma convergência mais vagarosa que o Método de Newton.

### 2.5.2 PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO DE HORIZONTE FINITO

Problemas de controle ótimo frequentemente levam a Problemas de Valor de Fronteira e são, portanto, passíveis de serem resolvidos por métodos numéricos, como tiro. Considere um problema canônico de controle ótimo de horizonte finito (JUDD, 1998):

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} \int_0^T e^{-\rho t} \pi(x, u, t) dt + W(x(T)) \\ \text{s.t.} \quad \dot{x} = f(x, u, t), \\ x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  são as variáveis de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  são os controles,  $\rho$  é a taxa de desconto,  $\pi$  é a função de retorno instantâneo,  $W(x)$  é o valor do estado terminal e  $f$  é a lei de movimento do sistema (JUDD, 1998; SYDSÆTER et al., 2008).

O Hamiltoniano de valor atual é:

$$H(x, u, \lambda, t) = \pi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t), \quad (2.30)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de variáveis de co-estado (preços-sombra). As variáveis de co-estado podem ser interpretadas como os preços sombra dinâmicos das variáveis de estado (SYDSÆTER et al., 2008). Elas representam o valor marginal de ter um pouco mais (ou um pouco menos) da variável de estado em um determinado ponto no tempo.

As equações de co-estado são:

$$\dot{\lambda} = \rho \lambda - (\pi_x + \lambda^T f_x). \quad (2.31)$$

O princípio do máximo de Pontryagin estabelece que:

$$u(t) \in \arg \max_u H(x, u, \lambda, t). \quad (2.32)$$

Se  $H$  é  $C^2$  e côncava em  $u$ , a condição de primeira ordem:

$$0 = H_u(x, U(x, \lambda, t), \lambda, t). \quad (2.33)$$

define implicitamente uma função de controle ótima  $u(t) = U(x, \lambda, t)$ .

Substituindo  $u(t) = U(x, \lambda, t)$  no sistema, obtém-se um sistema de equações diferenciais para  $x$  e  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, U(x, \lambda, t), t), \\ \dot{\lambda} &= \rho \lambda - (\pi_x(x, U(x, \lambda, t), t) + \lambda^T f_x(x, U(x, \lambda, t), t)), \end{aligned} \quad (2.34)$$

com as condições de contorno:

$$x(0) = x_0 \quad (2.35)$$

e a condição de transversalidade:

$$\lambda(T) = W'(x(T)). \quad (2.36)$$

Alternativamente, pode-se definir  $W(x(T)) = 0$  e impor uma condição terminal  $x(T) = x^T$ , caso em que a condição de transversalidade é substituída por:

$$x(T) = x^T. \quad (2.37)$$

O problema resultante é um PVF que pode ser resolvido numericamente, por exemplo, com o Método de Tiro (JUDD, 1998; SYDSÆTER et al., 2008). A função  $U(x, \lambda, t)$  pode, em alguns casos, ser obtida analiticamente. No entanto, frequentemente é necessário resolver numericamente a equação (2.33) para  $u$  em cada passo da integração das equações (2.34). A formulação como um PVF destaca a natureza *two-point* do problema de controle ótimo: temos condições iniciais para as variáveis de estado e condições terminais (ou de transversalidade) para as variáveis de co-estado (JUDD, 1998).

O modelo de ciclo de vida (MIRANDA; FACKLER, 2004), conforme já discutido, é um exemplo de PVF relevante em economia. Uma formulação simplificada é:

$$\begin{aligned} & \max_c \int_0^T e^{-\rho t} u(c) dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{A} = f(A) + w(t) - c(t), \\ & A(0) = A(T) = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde  $u(c)$  é a função de utilidade,  $c$  é o consumo,  $w(t)$  é a taxa de salário,  $A(t)$  são os ativos, e  $f(A)$  é o retorno sobre os ativos.

O Hamiltoniano é  $H = u(c) + \lambda(f(A) + w(t) - c)$ , a equação de co-estado é  $\dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda f'(A)$ , e o princípio do máximo implica  $u'(c) = \lambda$ , definindo a função de consumo  $c = C(\lambda)$  (JUDD, 1998). O sistema de equações diferenciais resultante é:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= f(A) + w - C(\lambda), \\ \dot{\lambda} &= \lambda(\rho - f'(A)), \end{aligned} \quad (2.39)$$

com condições de contorno  $A(0) = A(T) = 0$ . Este sistema pode ser reescrito em termos das variáveis observáveis  $c$  e  $A$ :

$$\dot{c} = - \left( \frac{u'(c)}{u''(c)} \right) (f'(A) - \rho), \quad (2.40)$$

$$\dot{A} = f(A) + w - c, \quad (2.41)$$

mantendo as mesmas condições de contorno. A Figura 3 ilustra o diagrama de fase deste sistema.

O Método de Tiro pode ser aplicado para resolver este problema. Se, para uma estimativa inicial  $c(0) = c_H$ , obtivermos  $A(T) < 0$ , e para  $c(0) = c_L$  obtivermos  $A(T) > 0$ , então o valor correto de  $c(0)$  está entre  $c_L$  e  $c_H$ . O Método da Bissecção pode ser usado para encontrar o valor correto, como formalizado no Algoritmo 2 (JUDD, 1998).

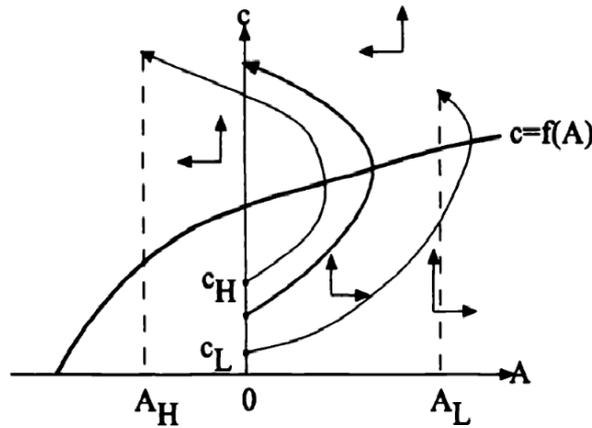


Figura 3 – Tiro em um problema de Ciclo de Vida  
Fonte: JUDD (1998)

### Algoritmo 2: Tiro de Ciclo de Vida

**Objetivo:** Resolver o sistema (2.39) com as condições de contorno  $A(0) = A(T) = 0$ .

**Inicialização:** Encontrar  $c_H$  tal que  $c(0) = c_H$  implique  $A(T) < 0$ , e  $c_L$  tal que  $c(0) = c_L$  implique  $A(T) > 0$ . Definir uma tolerância  $\epsilon > 0$  e inicializar  $c_0 = (c_L + c_H)/2$ .

**Passo 1:** Resolver o PVI definido por (2.39) com condições iniciais  $c(0) = c_0$  e  $A(0) = 0$ , usando um método numérico, para calcular  $c(T)$  e  $A(T)$ .

**Passo 2:** Se  $|A(T)| < \epsilon$ , a solução foi encontrada (PARE). Se  $A(T) > \epsilon$ , definir  $c_L = c_0$ ; caso contrário, definir  $c_H = c_0$ . Atualizar  $c_0 = (c_L + c_H)/2$  e retornar ao Passo 1.

### 2.5.3 CONTROLE ÓTIMO DE HORIZONTE INFINITO E TIRO REVERSO

O problema canônico de controle ótimo autônomo de horizonte infinito é:

$$\begin{aligned} \max_u \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \pi(x, u) dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

As condições de primeira ordem são semelhantes às do caso de horizonte finito (JUDD, 1998) (equações (2.31) a (2.33)), mas a condição de transversalidade muda. Mantém-se a condição inicial  $x(0) = x_0$ , mas a condição de Transversalidade no Infinito (TVCOO) é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \left| \lambda(t)^T x(t) \right| < \infty. \quad (2.43)$$

Métodos de tiro convencionais enfrentam dificuldades em problemas de controle ótimo de horizonte infinito devido à sensibilidade da solução a pequenas variações nas condições iniciais, especialmente para horizontes longos (JUDD, 1998). O Tiro Reverso (*Backward Shooting*) é uma técnica mais adequada nesses casos.

A ideia central do Tiro Reverso é que, embora o estado terminal seja muito sensível a pequenas variações no "chute" inicial das variáveis de co-estado, o estado inicial é relativamente insensível a pequenas variações no estado terminal (JUDD, 1998). Portanto, em vez de "chutar" o valor das condições iniciais não especificadas e integrar para frente, o Tiro Reverso "chuta" o valor das condições terminais não especificadas (ou uma aproximação do estado estacionário) e integra as equações diferenciais para trás no tempo.

A intuição é que, se o sistema possui um estado estacionário estável, trajetórias próximas a esse estado estacionário tenderão a convergir para ele à medida que o tempo avança. Ao integrar para trás a partir do estado estacionário (ou de uma aproximação dele), estamos, de certa forma, "reconstruindo" a trajetória que levaria a esse estado estacionário (JUDD, 1998).

Como exemplo, considere o problema de crescimento ótimo em tempo contínuo com um bem e um estoque de capital:

$$\begin{aligned} \max_c \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{k} = f(k) - c, \\ k(0) = k_0, \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde  $k$  é o capital,  $c$  é o consumo, e  $f(k)$  é a função de produção. As equações que governam a dinâmica de  $c(t)$  e  $k(t)$  são:

$$\begin{aligned} \dot{c} = \frac{u'(c)}{u''(c)} (\rho - f'(k)), \\ \dot{k} = f(k) - c, \end{aligned} \tag{2.45}$$

com condições de contorno:

$$k(0) = k_0, \quad 0 < \lim_{t \rightarrow \infty} |k(t)| < \infty. \tag{2.46}$$

O estado estacionário  $(k^*, c^*)$  é um ponto de sela, com um *manifold* estável ( $M_S$ ) e um *manifold* instável ( $M_U$ ) (ver Figura 4). O diagrama de fase a seguir ilustra a dificuldade de usar o Tiro "para frente" para encontrar a trajetória que converge para o estado estacionário: qualquer pequeno desvio do *manifold* estável é amplificado ao longo do tempo (JUDD, 1998).

No Tiro Reverso, a direção do tempo é invertida:

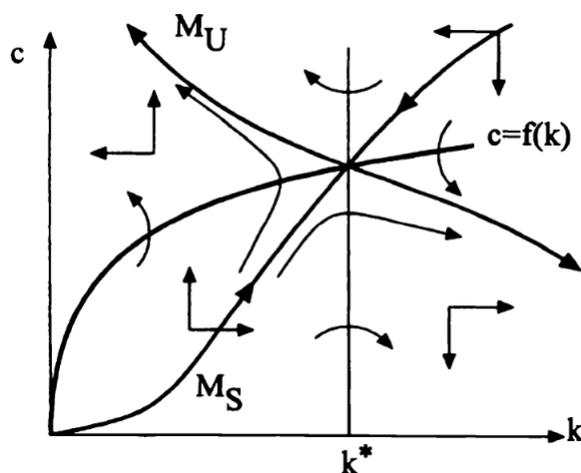


Figura 4 – Tiro em um problema de ponto de sela  
Fonte: JUDD (1998)

$$\begin{aligned}\dot{c} &= -\frac{u'(c)}{u''(c)}(\rho - f'(k)), \\ \dot{k} &= -(f(k) - c).\end{aligned}\tag{2.47}$$

Isso inverte as setas no diagrama de fase (Figura 5), tornando o *manifold* estável instável e vice-versa. Começando próximo ao estado estacionário e integrando para trás no tempo (usando, por exemplo, Runge-Kutta), pode-se traçar a trajetória que, no tempo original, convergiria para o estado estacionário (JUDD, 1998).

Na prática, escolhe-se um tempo  $T$  grande e um ponto próximo ao estado estacionário,  $(k^+ \epsilon, c^+ \delta)$ , onde  $\epsilon$  e  $\delta$  são pequenas perturbações. Em seguida, integra-se numericamente as equações de tempo reverso de  $T$  até 0. A trajetória resultante aproxima o *manifold* estável.

O *manifold* estável, obtido com o Tiro Reverso, representa a função de política de consumo,  $c = C(k)$ . A derivada desta função no estado estacionário,  $C'(k^*)$ , pode ser calculada usando a regra de L'Hôpital, resultando em uma equação quadrática. A raiz positiva desta equação é selecionada, pois o consumo aumenta com o capital. A função de política  $C(k)$  pode ser aproximada numericamente integrando-se a equação diferencial que a define, tanto para  $k > k^*$  quanto para  $k < k^*$ , usando o Tiro Reverso (JUDD, 1998).

A Figura 6 mostra os resultados do Tiro Reverso aplicado ao cálculo da função de política para um exemplo específico.

Os pontos obtidos com o Tiro Reverso podem ser usados para construir uma aproximação da função de política  $C(k)$  usando, por exemplo, mínimos quadrados.

O Tiro Reverso também pode ser estendido para problemas multidimensionais, tal como o problema de maximização de lucro multidimensional a seguir:

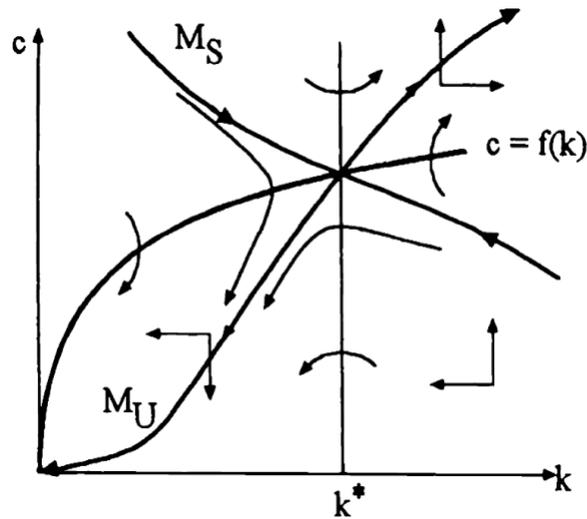


Figura 5 – Tiro Reverso em um problema de ponto de sela  
 Fonte: JUDD (1998)

<i>k</i>	<i>c</i>	Errors		
		<i>h</i> = 0.1	<i>h</i> = 0.01	<i>h</i> = 0.001
0.2	0.10272	0.00034	3.1(-8)	3.1(-12)
0.5	0.1478	0.000025	3.5(-9)	4.1(-13)
0.9	0.19069	-0.001	-3.5(-8)	1.8(-13)
1.	0.2	0	0	0
1.1	0.20893	-0.00086	-5.3(-8)	-1.2(-12)
1.5	0.24179	-0.000034	-1.8(-9)	-2.1(-14)
2.	0.2784	-9.8(-6)	-5.0(-10)	3.6(-15)
2.5	0.31178	-5.0(-6)	-2.6(-10)	-1.3(-14)
2.8	0.33068	-3.8(-6)	-1.9(-10)	-1.2(-14)

Figura 6 – Tabela de crescimento ótimo com Tiro Reverso  
 Fonte: JUDD (1998)

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} \left( \pi(k) - \sum_{i=1}^n I_i - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i I_i^2}{2} \right) dt, \tag{2.48}$$

sujeito a:

$$\dot{k}_i = I_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.49}$$

$$k(0) = k^0, \tag{2.50}$$

onde *k* é um vetor de estoques de capital,  $\pi(k)$  é o lucro, *r* é a taxa de juros, e *I<sub>i</sub>* são os investimentos. As equações de co-estado são  $\dot{\lambda}_i = r\lambda_i - \pi_i$ , e o princípio do máximo leva

às regras de investimento  $I_i = \frac{\lambda_i - 1}{\gamma_i}$ . O sistema resultante é:

$$\begin{aligned} \dot{k}_i &= \frac{\lambda_i - 1}{\gamma_i}, & i = 1, \dots, n, \\ \dot{\lambda}_i &= -r\lambda_i - \pi_i(k), & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.51)$$

com condição inicial  $k(0) = k^0$ .

No Tiro Reverso, fixa-se  $k(T) = k^*$  (o estado estacionário) e busca-se um vetor de co-estados  $\lambda^T$  que seja consistente com a condição inicial  $k(0) = k^0$  (JUDD, 1998). Integra-se o sistema de tempo reverso:

$$\begin{aligned} \dot{k}_i &= -(\lambda_i - 1)\gamma_i^{-1}, & i = 1, \dots, n, \\ \dot{\lambda}_i &= -r\lambda_i + \pi_i(k), & i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.52)$$

para trás no tempo, a partir de  $k(T) = k^*$  e  $\lambda(T) = \lambda^T$ . Encontrar  $\lambda^T$  envolve resolver a equação não linear  $K(0, \lambda^T) - k^0 = 0$ , onde  $K(0, \lambda^T)$  é o valor de  $k(0)$  obtido pela integração reversa. Aumenta-se progressivamente o valor de  $T$  até que a solução  $\lambda^T$  convirja para o valor desejado. Este processo de aumentar  $T$  é análogo a se aproximar cada vez mais do estado estacionário no problema de tempo contínuo original (JUDD, 1998).

O Tiro Reverso, embora mais estável que o Tiro "para frente" em muitos problemas de controle ótimo de horizonte infinito, não é garantidamente superior em todos os casos. A escolha entre os métodos depende da natureza específica do problema e da estrutura de estabilidade do estado estacionário (JUDD, 1998). Em particular, a estabilidade do estado estacionário (se ele é um ponto de sela, um nó estável, etc.) determina se o Tiro Reverso será eficaz.

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo detalha a metodologia empregada na resolução do problema de otimização intertemporal do consumo ao longo da vida, apresentado no capítulo anterior. Serão apresentados, em sequência, a formulação matemática do problema, a justificativa para a escolha do método numérico de resolução (com ênfase na função `solve_bvp` da biblioteca SciPy), a implementação computacional em Python e, por fim, os procedimentos de validação dos resultados (LINGE;LANGTANGEN, 2020).

O problema central deste trabalho, conforme introduzido até aqui, consiste na otimização intertemporal do consumo. Um agente econômico racional busca maximizar sua utilidade ao longo da vida, estando sujeito a uma restrição orçamentária. A modelagem matemática deste problema, que será detalhada a seguir, envolve a definição das equações diferenciais que descrevem a dinâmica do consumo e da riqueza, bem como as condições de contorno (JONES et al., 2001). Este foi um modelo proposto por Miranda e Fackler (2004) no livro *Applied Computational Economics and Finance*.

O modelo de consumo ao longo da vida é formulado como um problema de controle ótimo. O agente econômico busca maximizar a utilidade descontada ao longo do tempo, o que é matematicamente expresso por (MIRANDA;FACKLER, 2004):

$$\max_{C(t)} \int_0^T e^{-\rho t} U(C(t)) dt \quad (3.1)$$

Esta maximização, no entanto, não é irrestrita. O agente está sujeito a uma restrição intertemporal de riqueza, que limita suas escolhas de consumo:

$$W' = \frac{dW}{dt} = rW + w(t) - C(t), \quad (3.2)$$

onde, conforme definido anteriormente:

- $W(t)$  representa a riqueza do agente no tempo  $t$ ;
- $r$  designa a taxa de retorno sobre investimentos;
- $w(t)$  corresponde ao fluxo de renda ao longo do tempo;
- $C(t)$  denota o consumo do agente;

- $\rho$  representa a taxa de impaciência (ou taxa subjetiva de desconto);
- $U(C)$  indica a função de utilidade do consumo.

Para representar as preferências do agente, adota-se, neste estudo, a função de utilidade com coeficiente de aversão ao risco absoluto ou CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*):

$$U(C) = \frac{(C^{1-\lambda} - 1)}{1-\lambda}, \quad (3.3)$$

onde  $\lambda$  representa o coeficiente de aversão absoluta ao risco (e seu inverso,  $1/\lambda$ , representa o coeficiente de aversão relativa ao risco) (MIRANDA;FACKLER, 2004). A função de utilidade CARA é amplamente utilizada em modelos econômicos devido à sua tratabilidade matemática e às suas propriedades desejáveis (como aversão ao risco constante).

A função de consumo é descrita pela equação diferencial:

$$C' = -\frac{U'(C)}{U''(C)}(r - \rho), \quad (3.4)$$

Essa equação indica que a trajetória do consumo depende da relação entre a taxa de juros e a taxa de impaciência do agente econômico, onde  $C'$  representa a taxa de variação do consumo ao longo do tempo (MIRANDA;FACKLER, 2004).

Além das equações que governam a dinâmica do sistema, a resolução numérica do modelo requer a definição de condições de contorno. Neste caso, são consideradas as seguintes:

$$W(0) = 0, \quad W(T) = 0, \quad (3.5)$$

Essas condições expressam a ausência de riqueza inicial e final do agente, ou seja, o agente começa sem riqueza e não deixa herança (ou, de forma equivalente, consome toda a sua riqueza até o final do horizonte de planejamento) (MIRANDA;FACKLER, 2004).

É importante ressaltar que a modelagem do problema de consumo ao longo da vida, como apresentada, incorpora algumas hipóteses simplificadoras (MODIGLIANI, 1985). Assume-se, por exemplo, que o agente econômico dispõe de informações perfeitas acerca de seu fluxo de renda futuro e da taxa de retorno sobre investimentos. Além disso, a função de utilidade CARA pressupõe que a aversão ao risco do agente permanece constante ao longo do tempo (MIRANDA;FACKLER, 2004).

O modelo também não contempla a possibilidade de ocorrência de eventos inesperados, como choques de renda ou desemprego. Apesar dessas simplificações, o modelo

oferece um arcabouço útil para analisar as decisões de consumo e poupança em um contexto intertemporal, e a utilização de métodos numéricos permite flexibilizar algumas dessas hipóteses em futuras extensões.

### 3.1 ESCOLHA DO MÉTODO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO DO PVF

A formulação do problema de consumo e poupança resulta em um Problema de Valor de Fronteira. Para a resolução numérica deste PVF, optou-se pela utilização da função `solve_bvp` da biblioteca SciPy (LINGE; LANGTANGEN, 2020; JONES et al., 2001). Essa função implementa um método de colocação, que aproxima a solução por meio de uma combinação de funções de base e impõe que a equação diferencial seja satisfeita em pontos específicos do domínio (BOYD, 2013; ASCHER et al., 1994).

O método acima aproxima a solução da equação diferencial,  $y(t)$ , por uma combinação linear de funções base,  $\phi_i(t)$ :

$$y(t) \approx \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(t), \quad (3.6)$$

onde  $c_i$  são os coeficientes a serem determinados. As funções base são, geralmente, polinômios, como polinômios de Lagrange ou *splines* cúbicos. A função `solve_bvp` utiliza, por padrão, polinômios de grau até quatro (JONES et al., 2001). A escolha das funções base afeta a precisão e a estabilidade da solução (LINGE; LANGTANGEN, 2020).

Os coeficientes  $c_i$  são determinados de modo que a solução aproximada satisfaça:

1. **As condições de contorno:** A solução aproximada deve ter os valores especificados nos extremos do intervalo (BOYD, 2013; ASCHER et al., 1994).
2. **A equação diferencial em um conjunto de pontos de colocação:** Em vez de exigir que a equação diferencial seja satisfeita em todos os pontos do intervalo (o que seria praticamente impossível para uma solução aproximada polinomial), o método de colocação exige que ela seja satisfeita em um número finito de pontos,  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , dentro do intervalo. Esses pontos são os pontos de colocação (BOYD, 2013; LINGE; LANGTANGEN, 2020).

A escolha dos pontos de colocação também é importante. Uma distribuição uniforme dos pontos é uma opção, mas outras escolhas, como os pontos de Chebyshev, podem levar a uma melhor precisão e estabilidade numérica. A função `solve_bvp` usa, internamente, uma estratégia adaptativa para selecionar os pontos de colocação (LINGE; LANGTANGEN, 2020; JONES et al., 2001).

Ao impor que a solução aproximada satisfaça a equação diferencial nos pontos de colocação e as condições de contorno, obtém-se um sistema de equações não lineares para os coeficientes  $c_i$ . A função `solve_bvp` resolve esse sistema de equações não lineares de forma iterativa, utilizando um algoritmo baseado no Método de Newton. Em cada iteração, o Método de Newton lineariza o sistema de equações em torno da estimativa atual da solução e resolve o sistema linearizado resultante para obter uma nova estimativa. Esse processo é repetido até que a solução convirja (ou seja, até que a diferença entre duas iterações sucessivas seja menor do que uma tolerância especificada) (LINGE; LANGTANGEN, 2020; JONES et al., 2001).

A escolha do método de colocação e da função `solve_bvp` foi motivada por diversos fatores:

O `solve_bvp` é uma ferramenta adequada para lidar com PVFs não lineares, como o problema de consumo em questão, uma vez que a equação para  $\dot{c}$  apresenta não linearidade. A biblioteca SciPy implementa esse método de forma eficiente e robusta, garantindo sua aplicabilidade em diversos contextos (LINGE; LANGTANGEN, 2020; JONES et al., 2001). Além disso, o método de colocação utilizado permite obter soluções precisas, especialmente em problemas com soluções suaves, que são frequentes em análises econômicas (BOYD, 2013; ASCHER et al., 1994).

Em particular, o método de colocação de quarta ordem, empregado pela função, possui uma taxa de convergência mais rápida em comparação com métodos de diferenças finitas de ordem inferior, para um mesmo número de pontos de discretização. Essa característica melhora a eficiência computacional sem comprometer a precisão dos resultados. Quando bem implementado, esse método garante uma boa taxa de convergência, tornando-se uma abordagem confiável para a resolução de problemas de valor de fronteira não lineares (BOYD, 2013; LINGE; LANGTANGEN, 2020).

Embora existam outros métodos numéricos para resolver PVFs, como o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos, o método de colocação, implementado na função `solve_bvp`, mostrou-se mais adequado para este problema específico (JONES et al., 2001). O método das diferenças finitas, apesar de sua simplicidade conceitual, pode exigir um número maior de pontos de discretização para alcançar a mesma precisão do método de colocação, especialmente em soluções com variações rápidas ou derivadas de alta ordem (ASCHER et al., 1994).

Por outro lado, o método dos elementos finitos é mais geral e flexível, sendo particularmente útil para problemas com geometrias complexas, o que não se aplica ao caso em questão. No entanto, sua implementação é mais complexa e pode ser computacionalmente mais custosa para problemas unidimensionais simples, tornando o método de colocação uma alternativa mais eficiente e prática para a abordagem adotada (BOYD, 2013; LINGE; LANGTANGEN, 2020).

Para garantir a convergência do método numérico, é crucial monitorar os resíduos das equações diferenciais e das condições de contorno (MIRANDA;FACKLER, 2004). Os resíduos,  $R(t)$ , representam o "erro" da solução aproximada em relação à equação diferencial e às condições de contorno. Por exemplo, para a equação diferencial  $\dot{x} = f(x, y, t)$ , o resíduo em um ponto  $t_i$  seria dado por:

$$R(t_i) = \dot{x}(t_i) - f(x(t_i), y(t_i), t_i), \quad (3.7)$$

onde  $\dot{x}(t_i)$ ,  $x(t_i)$  e  $y(t_i)$  são os valores da solução aproximada (e suas derivadas) no ponto  $t_i$ . Idealmente, o resíduo seria zero em todos os pontos, no entanto, como estamos usando uma solução aproximada, haverá um pequeno erro (MIRANDA;FACKLER, 2004). Espera-se que esses resíduos diminuam à medida que a solução numérica se aproxima da solução exata (ou, em termos práticos, à medida que o número de pontos de colocação aumenta ou que o algoritmo iterativo interno do `solve_bvp` converge) (JONES et al., 2001). O algoritmo é interrompido quando os resíduos (ou a diferença entre iterações sucessivas da solução) ficam abaixo de uma tolerância pré-especificada (LINGE; LANGTANGEN, 2020; JONES et al., 2001).

### 3.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL EM PYTHON

A implementação computacional do modelo foi realizada em Python, uma linguagem de programação amplamente utilizada em computação científica devido à sua sintaxe clara, à sua vasta coleção de bibliotecas e à sua facilidade de uso (LINGE; LANTANGEN, 2020).

As principais bibliotecas empregadas foram:

- **NumPy** (*Numerical Python*): Utilizada como base para todas as operações numéricas, fornecendo estruturas de dados eficientes (*arrays*) e funções matemáticas otimizadas.
- **SciPy** (*Scientific Python*): Utilizada para a resolução numérica do problema de valor de fronteira. Especificamente, a função `solve_bvp` do módulo `scipy.integrate` foi empregada.
- **Matplotlib**: Utilizada para a visualização gráfica dos resultados.

A Listagem 3.1 apresenta a importação dessas bibliotecas no código.

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_bvp
3 import matplotlib.pyplot as plt
```

## Listing 3.1 – Bibliotecas

O código foi estruturado de forma modular, com funções separadas para cada etapa do processo, facilitando a leitura, manutenção e modificação (LINGE; LANTANGEN, 2020). As principais funções implementadas são: definição das funções de utilidade e renda, definição do sistema de equações diferenciais, definição das condições de contorno, definição dos valores de chute inicial, resolução numérica do PVF e visualização dos resultados.

As funções que representam a utilidade do agente e o fluxo de renda ao longo do tempo são apresentadas nas Listagens 3.2 e 3.3, respectivamente.

```

1 def U(C):
2     return (C**(1 - lambda_) - 1) / (1 - lambda_)
3
4 def U_prime(C, epsilon=1e-6):
5     C = np.maximum(C, epsilon)
6     return (C + epsilon)**(-lambda_)
7
8 def U_double_prime(C, epsilon=1e-6):

```

## Listing 3.2 – Funções de Utilidade

```

1 # Parte A: Fluxo de renda antes da aposentadoria
2 # =====
3 def w(t):

```

## Listing 3.3 – Função da Renda

- $U(C)$ : Implementa a função de utilidade com aversão absoluta ao risco constante.
- $U_{\text{prime}}(C)$ : Calcula a utilidade marginal, correspondendo à primeira derivada da função de utilidade.
- $U_{\text{double\_prime}}(C)$ : Determina a segunda derivada da função de utilidade, refletindo a variação da utilidade marginal.
- $w(t)$ : Modela o fluxo de renda do agente ao longo do tempo, especificando sua evolução dinâmica.

As equações diferenciais que governam a dinâmica do consumo e da riqueza, juntamente com as condições de contorno, são definidas nas Listagens 3.4 e 3.5, respectivamente.

```

1 # Parte A: Equações diferenciais
2 # =====
3 def odes_a(t, y):
4     """Equações diferenciais para a parte A."""
5     C, W = y # C(t): Consumo; W(t): Riqueza
6     dC_dt = -(U_prime(C) / U_double_prime(C)) * (r - rho) # Dinâmica
                    do consumo

```

Listing 3.4 – Equações Diferenciais

```

1 # Parte A: Condições de contorno
2 # =====
3 def bc_a(ya, yb):

```

Listing 3.5 – Condições de Contorno

- `odes_a(t, y)`: Define o sistema de equações diferenciais, onde  $y = [C(t), W(t)]$  representa o vetor de estado. Essa função recebe o tempo  $t$  e o vetor  $y$  como entrada, retornando as derivadas temporais do consumo e da riqueza.
- `bc_a(ya, yb)`: Especifica as condições de contorno do problema. A função recebe os valores do vetor de estado nos extremos do intervalo,  $y_a$  (ponto inicial) e  $y_b$  (ponto final), e retorna os resíduos que representam as restrições impostas às condições de contorno.

A definição dos parâmetros do modelo é realizada conforme a Listagem 3.6.

```

1 T = 45 # Horizonte temporal até a aposentadoria
2 T_ret = T + 20 # Período adicional após aposentadoria
3 r = 0.2 # Taxa de juros
4 lambda_ = 0.5 # Aversão ao risco
5 rho = 0.6 # Taxa de impaciência
6 w0 = 1 # Renda inicial máxima
7 alpha = 0.15 # Taxa de crescimento da renda

```

Listing 3.6 – Definição dos Parâmetros do Modelo

- $T$ : Horizonte temporal total do problema.
- $T_{ret}$ : Horizonte temporal ajustado para incluir a fase de aposentadoria.
- $r$ : Taxa de juros, representando o retorno sobre o capital ao longo do tempo.
- $\lambda$ : Coeficiente de aversão ao risco, indicando a sensibilidade do agente à incerteza.

- $\rho$ : Taxa de impaciência, refletindo a preferência temporal do agente pelo consumo presente em relação ao futuro.
- $w_0$ : Nível inicial da renda, determinando a base do fluxo de receitas ao longo do tempo.
- $\alpha$ : Taxa de crescimento da renda, representando a evolução da renda ao longo do tempo.

Para a resolução numérica do PVF, é necessário fornecer um chute inicial para a solução (JONES et al., 2001). A qualidade desse chute inicial pode influenciar a convergência do método numérico. No presente trabalho, o chute inicial para o consumo foi um vetor constante de valor 0.1, e o chute inicial para a riqueza foi um vetor de zeros (Listagem 3.7).

```

1 # Valores iniciais aproximados para a solução numérica
2 # =====
3 t_a = np.linspace(0, T, 100)
4 y_a = np.zeros((2, t_a.size))
5 y_a[0] = 0.1 # Consumo inicial aproximado
6
7 t_b = np.linspace(0, T_ret, 100)

```

Listing 3.7 – Valores Iniciais Aproximados

A resolução numérica propriamente dita é realizada pela função `solve_bvp` da biblioteca SciPy (Listagem 3.8). Essa função recebe como entrada as equações diferenciais, as condições de contorno, o vetor de tempo e o chute inicial, retornando um objeto que contém a solução aproximada.

```

1 # Resolver o problema de valor de contorno para a parte A
2 # =====

```

Listing 3.8 – Resolução Numérica do BVP

Finalmente, a biblioteca Matplotlib é utilizada para a visualização gráfica dos resultados (Listagem 3.9). Os gráficos gerados incluem as trajetórias de consumo e riqueza ao longo do tempo, bem como os resíduos das equações diferenciais (para avaliação da precisão).

```

1 sol_b = solve_bvp(odes_b, bc_b, t_b, y_b)
2
3 # =====
4 # Plotagem dos Gráficos
5 # =====

```

```
6 plt.figure(figsize=(12, 12))
7
8 # Parte A: Solução
9 plt.subplot(3, 2, 1)
10 plt.plot(sol_a.x, sol_a.y[0], label='Consumo C(t)', color='blue')
11 plt.xlabel('Tempo t')
12 plt.ylabel('Consumo C(t)')
```

Listing 3.9 – Visualização dos Resultados - Plot Parte A

A estrutura modular do código, juntamente com os comentários detalhados, torna sua compreensão mais intuitiva e facilita tanto a modificação quanto a adaptação do modelo para diferentes cenários e objetivos de pesquisa. Essa organização permite ajustes eficientes nos parâmetros e funções, favorecendo a exploração de novas hipóteses e a extensão do modelo para aplicações mais abrangentes (LINGE; LANTANGEN, 2020).

### 3.3 VALIDAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A validação dos resultados numéricos é uma etapa crucial para garantir a confiabilidade das conclusões do trabalho. Essa validação envolveu os seguintes procedimentos:

- **Análise dos Resíduos:** Verificar se os resíduos das equações diferenciais e das condições de contorno são suficientemente pequenos (MIRANDA;FACKLER, 2004). Os resíduos são calculados substituindo a solução numérica nas equações originais e verificando o quão próximo de zero o resultado se encontra.
- **Análise de Sensibilidade:** Isso envolve variar os parâmetros do modelo (como a taxa de juros, o coeficiente de aversão ao risco, etc.) e observar como a solução numérica (as trajetórias de consumo e riqueza) se altera.
- **Validação com Sydsæter:** Como forma de validação adicional, e para demonstrar a correção da implementação numérica, o código foi testado em um problema de referência com solução analítica conhecida: o problema de consumo ótimo proposto por Sydsæter et al. (2008).

O problema proposto no livro *Further Mathematics for Economic Analysis* aborda um agente econômico que busca maximizar a utilidade intertemporal do consumo, sujeito a uma restrição orçamentária. Em contraste com o modelo com aposentadoria, o exercício em questão considera um horizonte temporal infinito e uma taxa de juros constante. A solução para este problema, conforme demonstrado por Sydsæter et al. (2008), é conhecida analiticamente e possui um cenário especial no qual consiste em um nível de consumo constante ao longo do tempo, a depender de algumas condições.

Foram realizados dois testes em relação ao problema do consumo ótimo, utilizado como modelo de referência. O primeiro teste envolveu a adaptação do código original, enquanto o segundo consistiu na implementação direta no código original.

O código adaptado para o teste de validação, apresentado na Listagem A.2, passou por adaptações para garantir sua aderência às hipóteses do problema de consumo ótimo. Essas alterações visaram simplificar a estrutura do modelo, tornando-o mais compatível com o problema de referência, ao mesmo tempo em que asseguram a fidelidade dos resultados obtidos na solução numérica:

- **Parâmetros:** Foram redefinidos para alinhar o modelo ao cenário descrito no exercício, garantindo consistência com a formulação teórica.

```

1 T = 20          # Horizonte temporal
2 r = 0.15       # Taxa de juros
3 rho = 0.1      # Taxa de impaciência
4 w0 = 1         # Renda inicial máxima
5 lambda_ = 0.5  # Aversão ao risco
6 alpha = 5      # Parâmetro da função de renda

```

Listing 3.10 – Validação - Definição de Parâmetros

- **Função de renda:** Modificada para representar um fluxo de renda constante ao longo do tempo, conforme estipulado pelo problema de referência.

```

1 def w(t):
2     """Renda."""
3     return w0 * np.ones_like(t) # Renda constante

```

Listing 3.11 – Validação - Função de Renda

- **Equações diferenciais:** Reformuladas para incorporar a função de preço sombra, elemento essencial na resolução do problema conforme a abordagem de Sydsæter et al. (2008).

```

1 def equations(t, y):
2     """Sistema de equações diferenciais."""
3     C, W = y
4     # Equação de estado (riqueza)
5     dWdt = r * W + w(t) - C
6     # Equação de co-estado (multiplicador de Lagrange) - da
7     # condição de primeira ordem
8     p = np.exp(-rho * t) * U_prime(C)
9     dpdt = -p * r

```

```

10     # Como estamos resolvendo para C e W, e não para p,
11     # usamos a condição de primeira ordem para expressar C em
12     # termos de \rho:
13     # dCdt = (r - rho) * C
14
15     dCdt = -(U_prime(C) / U_double_prime(C)) * (r - rho)
16
17     return np.vstack((dCdt, dWdt))

```

Listing 3.12 – Validação - Função de Renda

- **Condições de contorno:** Ajustadas para garantir coerência com o modelo de referência, assegurando que a riqueza inicial e final respeitem as restrições impostas pelo problema.

```

1 def boundary_conditions(ya, yb):
2     """Condições de contorno."""
3     W0 = 1 # Alterar aqui a riqueza inicial
4     WT = 0 # Alterar aqui a riqueza final
5     return np.array([ya[1] - W0, yb[1]]) # W(0) = W0, W(T) = 0

```

Listing 3.13 – Validação - Função de Renda

- **Remoção da aposentadoria:** O código referente à aposentadoria foi eliminado, visto que o problema de referência não possui essa restrição.

Similarmente à validação do modelo, a análise de sensibilidade teve como objetivo avaliar o impacto de variações nos parâmetros-chave do modelo, especificamente a taxa de juros ( $r$ ) e a taxa de impaciência ( $\rho$ ), sobre as trajetórias de consumo e riqueza do agente (DEATON, 1992). Através da modificação sistemática desses parâmetros, foi possível observar como o comportamento ótimo do agente se altera em diferentes cenários econômicos.

Primeiramente, o código foi executado com os parâmetros originais ( $r = 0.1$  e  $\rho = 0.6$ ), estabelecendo uma linha de base para comparação. Em seguida, a taxa de juros foi elevada para  $r = 0.2$ , simulando um ambiente econômico mais favorável ao investimento. Posteriormente, a taxa de impaciência foi reduzida para  $\rho = 0.1$ , representando um agente com maior preferência pelo consumo futuro. Essas alterações permitiram explorar como as decisões ótimas de consumo e poupança respondem a mudanças no retorno dos investimentos e nas preferências intertemporais do agente.

```

1 T = 45 # Horizonte temporal até a aposentadoria
2 T_ret = T + 20 # Período adicional após aposentadoria
3 r = 0.2 # Taxa de juros

```

```
4 lambda_ = 0.5    # Aversão ao risco
5 rho = 0.1      # Taxa de impaciência
6 w0 = 1        # Renda inicial máxima
7 alpha = 0.15   # Taxa de crescimento da renda
```

Listing 3.14 – Parâmetros Alterados - Taxa de Juros e Impaciência

Complementando a análise de sensibilidade, a validação do modelo numérico foi realizada através da comparação como caso especial do problema de consumo ótimo (SYDSÆTER et al.,2008). O código original foi adaptado para simular esse cenário, igualando  $\rho$  e  $r$  e avaliando a precisão e capacidade do modelo em chegar nos resultados teóricos conhecidos sem a necessidade de adaptação significativa.

```
1 T = 45          # Horizonte temporal até a aposentadoria
2 T_ret = T + 20 # Período adicional após aposentadoria
3 r = 0.1        # Taxa de juros
4 lambda_ = 0.5  # Aversão ao risco
5 rho = 0.1     # Taxa de impaciência
6 w0 = 1       # Renda inicial máxima
7 alpha = 0.15  # Taxa de crescimento da renda
```

Listing 3.15 – Parâmetros Alterados - Consumo Constante

Os procedimentos adotados na implementação do código e do modelo foram cuidadosamente planejados para garantir uma solução numérica eficiente, conciliando precisão e viabilidade computacional. Além disso, a escolha de ferramentas e bibliotecas de software livre permitiu a replicação e a acessibilidade do modelo, assegurando que sua implementação seja sustentável e amplamente utilizável sem custos adicionais.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta e discute os resultados obtidos com a implementação numérica do modelo de consumo ao longo da vida, descrito em detalhes no Capítulo 3 (Metodologia). O foco principal é analisar a reprodutibilidade e a resolução de problemas de valor de fronteira utilizando o código desenvolvido e, em segunda instância, avaliar como as trajetórias ótimas de consumo e riqueza de um agente econômico são afetadas por variações em parâmetros-chave do modelo, como a taxa de juros, a aversão ao risco, a taxa de impaciência e a renda projetada. Antes de apresentar os resultados das simulações, é crucial validar o modelo.

Os resultados obtidos com o código modificado corroboram a previsão teórica de Sydsæter et al. (2008). Ao igualar a taxa de juros à taxa de impaciência, observou-se que o nível de consumo se mantém constante ao longo do tempo, indicando que o agente otimiza sua utilidade intertemporal ao suavizar seu consumo.

A condição de consumo constante emerge no problema do consumo ótimo quando a taxa de juros  $r$  se iguala à taxa de preferência intertemporal  $\rho$ . Nessa situação, o agente se torna indiferente entre consumir no presente ou no futuro, resultando em uma trajetória de consumo uniforme ao longo do tempo.

Ao implementar essa condição no código e executar a simulação sob essa premissa, a solução numérica converge para um nível de consumo constante, demonstrando coerência com a teoria (SYDSÆTER et al., 2008). Além disso, a trajetória da riqueza segue um padrão esperado: inicialmente crescente, atingindo um pico e, posteriormente, decrescendo até zero no horizonte temporal, o que está em conformidade com as condições de contorno do problema.

A Figura 7 ilustra as trajetórias de consumo e riqueza obtidas com o código adaptado, confirmando a validação do modelo.

A validação do código com o problema do consumo ótimo permitiu verificar a correção da implementação numérica e a capacidade do código em reproduzir resultados teóricos conhecidos (LINGE; LANTANGEN, 2020; SYDSÆTER et al., 2008). Essa etapa se revelou fundamental para aumentar a confiança nos resultados obtidos com o modelo original (com aposentadoria) e assegurar sua validade para a análise do problema de consumo ao longo da vida.

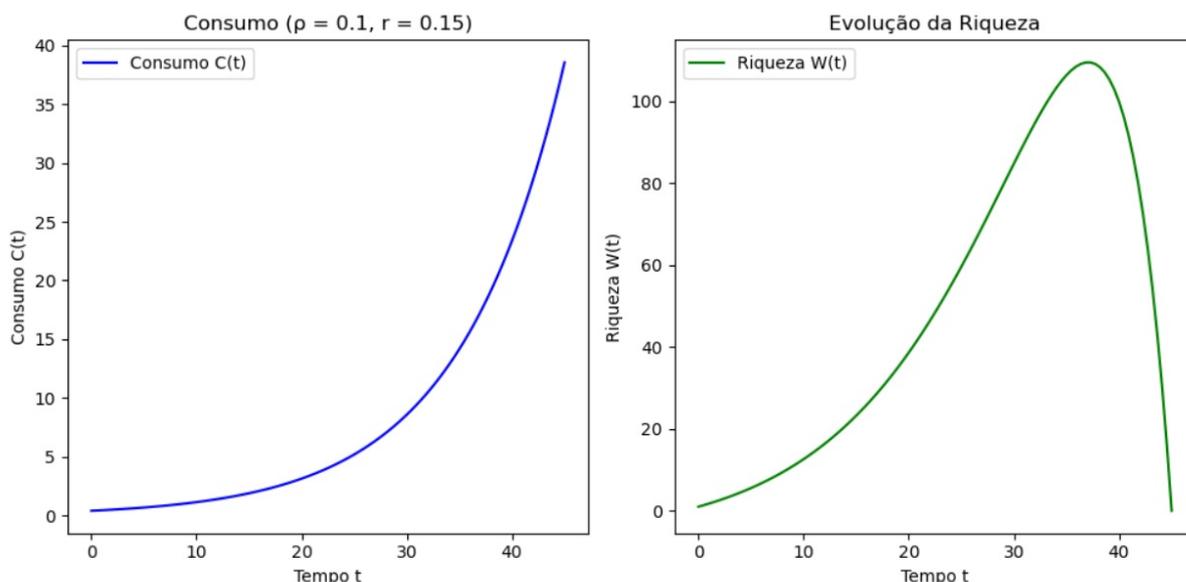


Figura 7 – Consumo Ótimo: Trajetórias de Consumo e Riqueza  
Fonte: Elaboração própria

A Figura 8 apresenta os resultados da validação, que demonstrou, como esperado, que o consumo permanece constante, corroborando a previsão teórica e evidenciando a precisão da implementação numérica. Ao igualar a taxa de juros à taxa de impaciência, observa-se que o nível de consumo se mantém inalterado ao longo do tempo, indicando que o agente otimiza sua utilidade intertemporal ao suavizar seu consumo.

A condição de consumo constante no problema de Sydsæter surge quando a taxa de juros  $r$  se iguala à taxa de preferência intertemporal  $\rho$ . Nesse cenário, o agente se torna indiferente entre consumir no presente ou no futuro, resultando em uma trajetória de consumo uniforme ao longo do tempo.

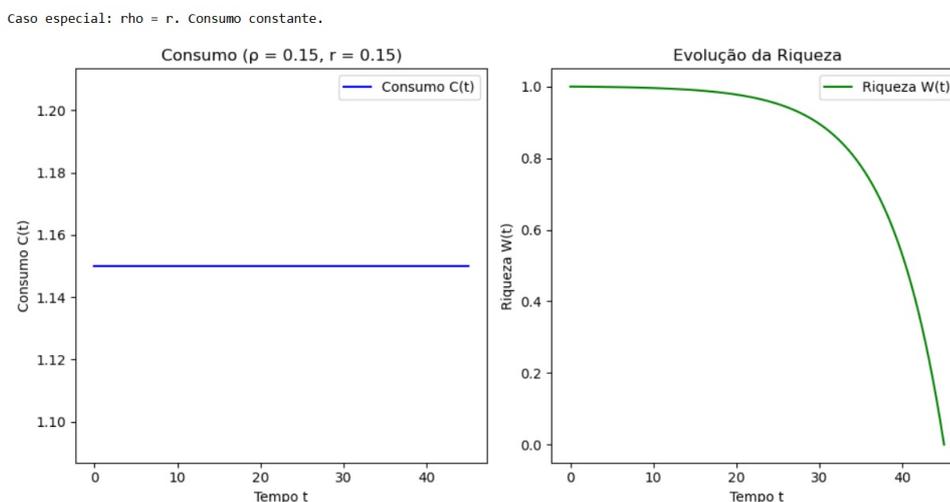


Figura 8 – Consumo Ótimo: Trajetórias de Consumo e Riqueza - Caso Especial:  
Consumo Constante

Fonte: Elaboração própria

A reprodução precisa desse resultado analítico confere confiança à implementação numérica e permite prosseguir com a análise de cenários mais complexos, com a variação de parâmetros, com a segurança de que o modelo está funcionando corretamente.

#### 4.1 CONSUMO E RIQUEZA ANTES DA APOSENTADORIA

A parte A do modelo descreve o comportamento do agente antes da aposentadoria, quando ele ainda possui um fluxo de renda crescente, modelado por uma função logística  $w(t) = \frac{w_0}{1+e^{-at}}$ , que captura a dinâmica de aumento de renda ao longo da carreira profissional até a estabilização em um patamar  $w_0$ . O objetivo do agente é maximizar sua utilidade ao longo da vida, decidindo quanto consumir e quanto poupar em cada período. A função utilidade CARA,  $U(C) = \frac{C^{1-\lambda}-1}{1-\lambda}$ , implica uma aversão absoluta ao risco constante, representando a preferência do agente por suavizar o consumo ao longo do tempo.

```

1 plt.figure(figsize=(12, 12))
2
3 # Parte A: Solução
4 plt.subplot(3, 2, 1)
5 plt.plot(sol_a.x, sol_a.y[0], label='Consumo C(t)', color='blue')
6 plt.xlabel('Tempo t')
7 plt.ylabel('Consumo C(t)')
8 plt.title('Parte A: Consumo antes da aposentadoria')
9 plt.legend()
10
11 plt.subplot(3, 2, 2)
12 plt.plot(sol_a.x, sol_a.y[1], label='Riqueza W(t)', color='green')
13 plt.xlabel('Tempo t')
14 plt.ylabel('Riqueza W(t)')
```

Listing 4.1 – Consumo - Antes da Aposentadoria

A Figura 9 ilustra as trajetórias ótimas de consumo e riqueza antes da aposentadoria.

O gráfico do consumo  $C(t)$  (curva azul) exhibe um comportamento decrescente ao longo do tempo. Este resultado, aparentemente contraintuitivo dada a função logística e a expectativa de aumento da renda, decorre da combinação da função utilidade CARA com uma taxa de impaciência  $\rho$  maior que a taxa de juros  $r$ . A alta impaciência, refletida em  $\rho > r$ , leva o agente a dar um peso significativamente maior à utilidade do consumo presente em relação ao consumo futuro. Assim, mesmo com a renda crescendo, o agente opta por consumir mais no início e reduzir o consumo gradualmente ao longo do tempo, priorizando a satisfação imediata.

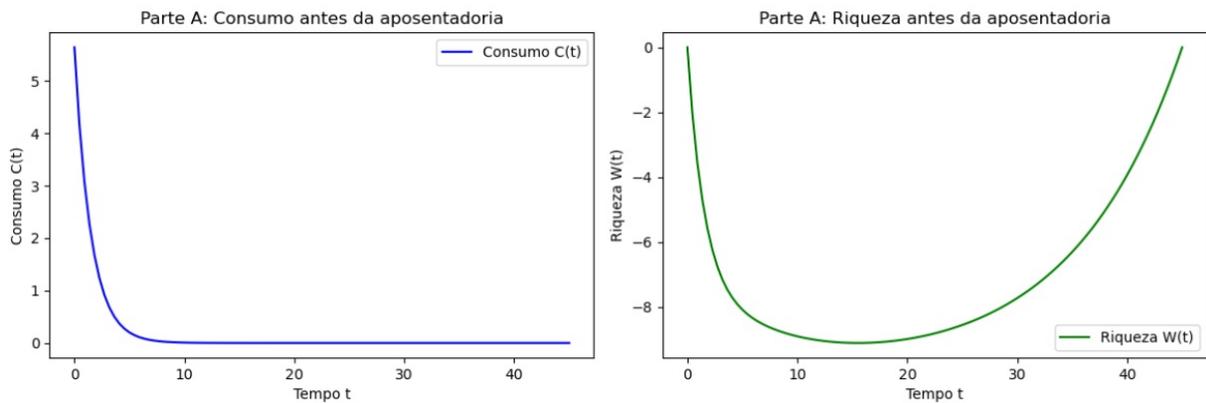


Figura 9 – Trajetórias de Consumo e Riqueza Antes da Aposentadoria.  
Fonte: Elaboração própria

O gráfico da riqueza  $W(t)$  (curva verde) inicia em zero, conforme a condição de contorno  $W(0) = 0$ , atinge um valor mínimo negativo e então cresce até retornar a zero no momento da aposentadoria  $T$ , cumprindo a condição  $W(T) = 0$ . A riqueza negativa na primeira parte da vida indica um provável endividamento, justificado pela alta impaciência do agente, que prefere antecipar o consumo futuro tomando empréstimos. À medida que a renda aumenta, o agente, mesmo em déficit, começa a poupar reduzindo o seu endividamento. Essa poupança, mesmo em um contexto de riqueza inicialmente negativa, é essencial para garantir a suavização do consumo ao longo do tempo e para cumprir a restrição de riqueza nula ao final do período de trabalho.

```

1 plt.legend()
2
3 # Parte A: Resíduos
4 res_c_a, res_w_a = residuals_a(sol_a.x, sol_a.y)
5 plt.subplot(3, 2, 3)
6 plt.plot(sol_a.x, res_c_a, label='Resíduo C(t)', color='blue')
7 plt.xlabel('Tempo t')
8 plt.ylabel('Resíduo de C(t)')
9 plt.title('Parte A: Resíduo do Consumo')
10 plt.legend()
11
12 plt.subplot(3, 2, 4)
13 plt.plot(sol_a.x, res_w_a, label='Resíduo W(t)', color='green')
14 plt.xlabel('Tempo t')
15 plt.ylabel('Resíduo de W(t)')

```

Listing 4.2 – Resíduos - Consumo e Riqueza

A Figura 10 apresenta os resíduos das equações diferenciais para consumo e riqueza. Os resíduos próximos de zero indicam uma boa convergência numérica do método `solve_bvp`, validando a precisão das soluções encontradas.

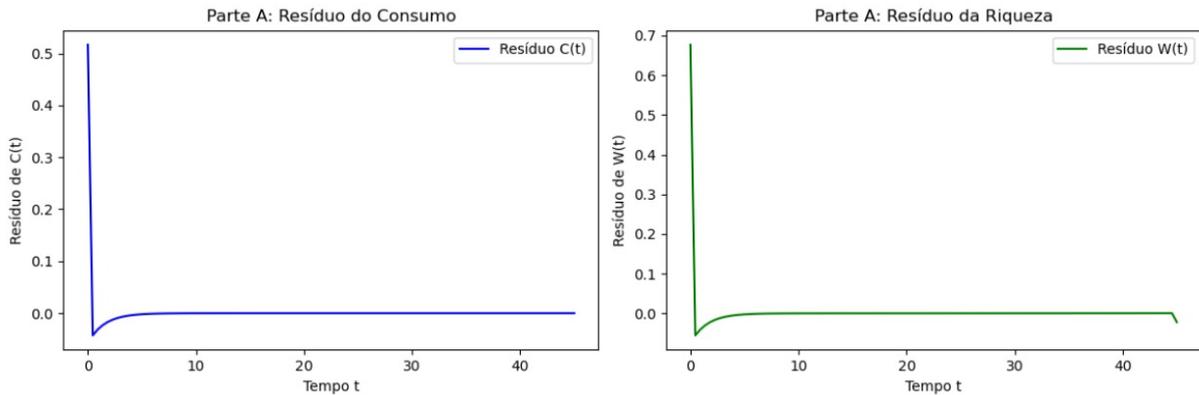


Figura 10 – Resíduos das Equações Diferenciais Antes da Aposentadoria.  
Fonte: Elaboração própria

## 4.2 CONSUMO E RIQUEZA APÓS A APOSENTADORIA

A Parte B incorpora a aposentadoria no modelo, introduzindo um período adicional de  $R = 20$  anos sem renda ( $w(t) = 0$  para  $t > T$ ). O agente continua a maximizar sua utilidade, agora considerando a restrição de renda nula após a aposentadoria. A condição de contorno  $W(T + R) = 0$  impõe que o agente esgote sua riqueza ao final de sua vida.

```

1 plt.legend()
2
3 # Parte B: Solução
4 plt.subplot(3, 2, 5)
5 plt.plot(sol_b.x, sol_b.y[0], label='Consumo C(t)', color='blue')
6 plt.axvline(T, color='red', linestyle='--', label='Aposentadoria')
7 plt.xlabel('Tempo t')
8 plt.ylabel('Consumo C(t)')
9 plt.title('Parte B: Consumo após aposentadoria')
10 plt.legend()
11
12 plt.subplot(3, 2, 6)
13 plt.plot(sol_b.x, sol_b.y[1], label='Riqueza W(t)', color="green")
14 plt.axvline(T, color='red', linestyle='--', label='Aposentadoria')
15 plt.xlabel('Tempo t')
16 plt.ylabel('Riqueza W(t)')
```

Listing 4.3 – Consumo - Após a Aposentadoria

A Figura 11 ilustra as trajetórias de consumo e riqueza após a inclusão da aposentadoria.

O consumo  $C(t)$  segue um padrão decrescente, acentuando-se após a aposentadoria (linha tracejada vermelha em  $T = 45$ ). Não há uma queda abrupta no consumo em  $T$  como seria esperado pela racionalidade da interrupção de renda do agente. A partir

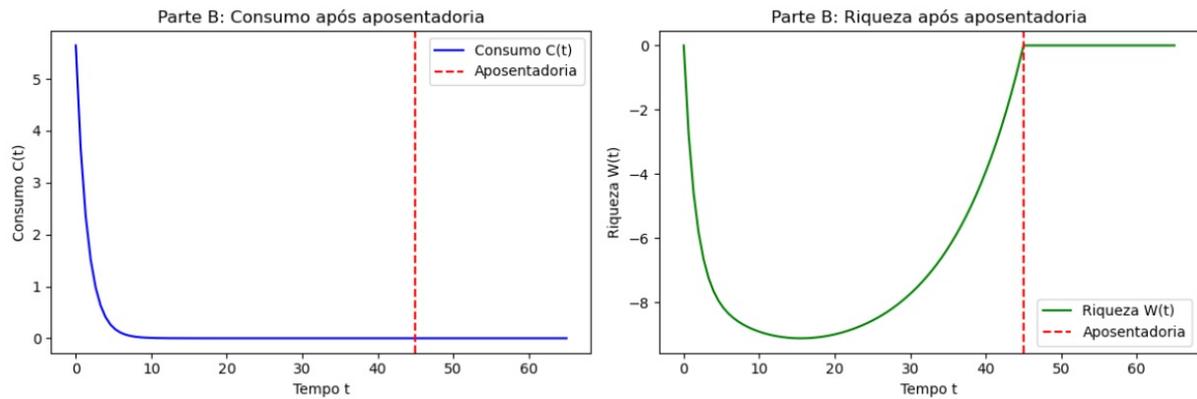


Figura 11 – Trajetórias de Consumo e Riqueza Após a Aposentadoria.  
Fonte: Elaboração própria

desse ponto, o consumo continua constante como no gráfico do modelo pré aposentadoria. A riqueza  $W(t)$  segue a mesma trajetória inicial da Parte A, acumulando-se até um pico  $W(T) = 0$  próximo ao momento da aposentadoria. Após  $T$ , a riqueza decresce se mantém constante no zero até o final do horizonte de vida  $T + R$ , ainda cumprindo a condição de contorno.

### 4.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE COM VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Para avaliar a versatilidade e funcionamento do modelo e o impacto de mudanças em variáveis-chave, foi conduzida uma análise de sensibilidade alterando a taxa de juros  $r$  e a taxa de impaciência  $\rho$ . Os valores originais  $r = 0.1$  e  $\rho = 0.6$  foram modificados para  $r = 0.2$  e  $\rho = 0.1$ , respectivamente. Essa alteração representa um cenário onde a taxa de retorno dos investimentos é maior e o agente dá mais valor ao consumo futuro.

```

1 T = 45           # Horizonte temporal até a aposentadoria
2 T_ret = T + 20 # Período adicional após aposentadoria
3 r = 0.2         # Taxa de juros
4 lambda_ = 0.5  # Aversão ao risco
5 rho = 0.1      # Taxa de impaciência
6 w0 = 1         # Renda inicial máxima
7 alpha = 0.15   # Taxa de crescimento da renda

```

Listing 4.4 – Parâmetros Alterados - Taxa de Juros e Impaciência

A Figura 12 apresenta as trajetórias de consumo e riqueza *antes* da aposentadoria com os parâmetros alterados. Observa-se um comportamento significativamente diferente em comparação com os resultados anteriores. O consumo  $C(t)$  agora exibe uma trajetória crescente, refletindo o incentivo à poupança proporcionado pela maior taxa de juros e a menor impaciência do agente. A riqueza  $W(t)$  acumula-se mais rapidamente, atingindo valores consideravelmente maiores.

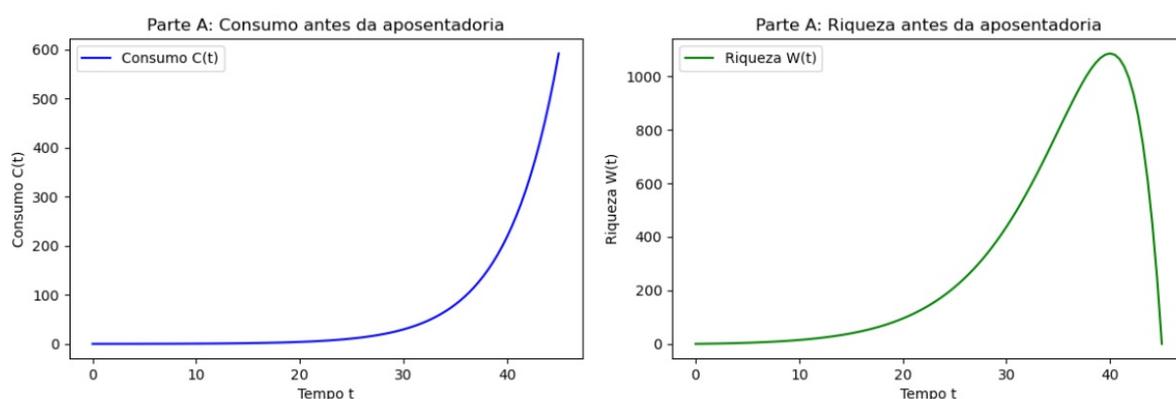


Figura 12 – Trajetórias de Consumo e Riqueza Antes da Aposentadoria (Parâmetros Alterados).

Fonte: Elaboração própria

A Figura 13 mostra os resíduos das equações diferenciais para o cenário com parâmetros alterados. Apesar das mudanças significativas nas trajetórias de consumo e riqueza, os resíduos permanecem próximos de zero, indicando que a solução numérica continua precisa e consistente com o modelo.

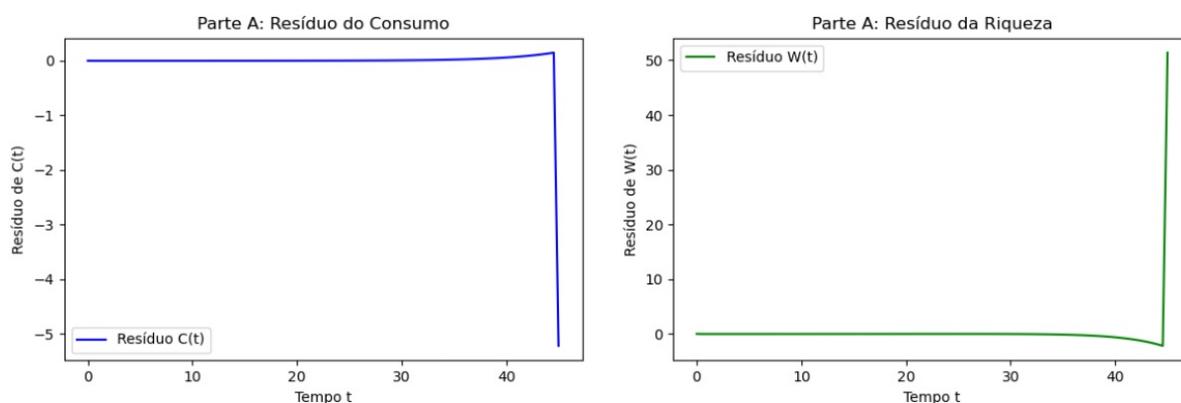


Figura 13 – Resíduos das Equações Diferenciais Antes da Aposentadoria (Parâmetros Alterados).

Fonte: Elaboração própria

A Figura 14 apresenta as trajetórias de consumo e riqueza *após* a aposentadoria com os parâmetros alterados. Aqui o consumo continua crescendo exponencialmente após a aposentadoria, o qual se inicia antes da aposentadoria, é mantido (e até acelerado) após  $T$ , refletindo provavelmente a forte preferência do agente pelo consumo futuro, devido à baixa taxa de desconto  $\rho$  em comparação com a alta taxa de retorno  $r$ . Portanto, devido à maior acumulação de riqueza, o nível de consumo durante a aposentadoria é substancialmente maior. A riqueza acumulada permite que o agente mantenha um padrão de consumo mais elevado mesmo sem renda adicional. Porém, não há mais acumulação líquida de riqueza após o pico, no qual o agente passa a consumir parte de sua riqueza para financiar o consumo crescente.

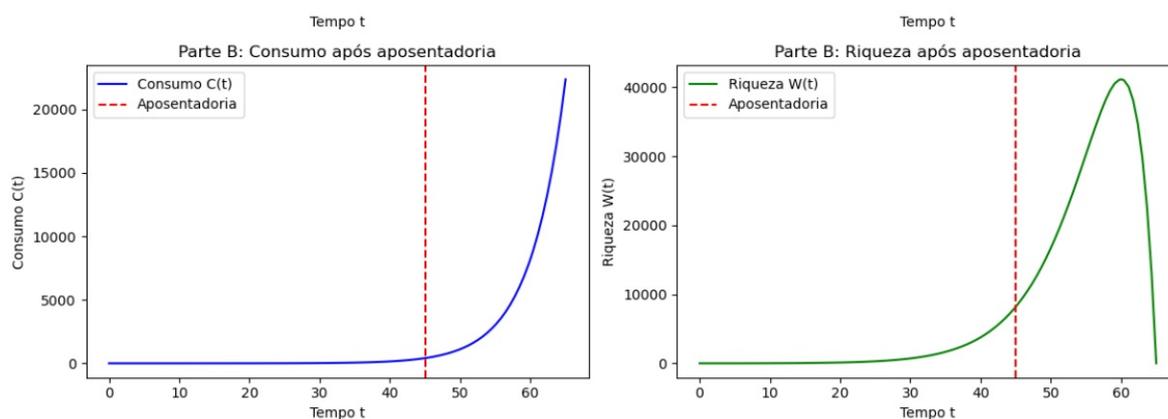


Figura 14 – Trajetórias de Consumo e Riqueza Após a Aposentadoria (Parâmetros Alterados).

Fonte: Elaboração própria

#### 4.3.1 VALIDAÇÃO DO MODELO: CASO ESPECIAL $\rho = r$

Para validar a implementação computacional do modelo, foi testado o caso especial do problema de consumo ótimo (SYDSÆTER et al., 2008), onde a taxa de impaciência  $\rho$  é igual à taxa de juros  $r$ , diretamente no código original. Conforme já foi visto, nesse cenário, o consumo deve ser constante ao longo do tempo.

Ajustando os parâmetros do modelo para  $\rho = r = 0.1$ , mantendo os demais parâmetros inalterados, foram obtidas as trajetórias de consumo e riqueza apresentadas nas Figuras 15 e 16.

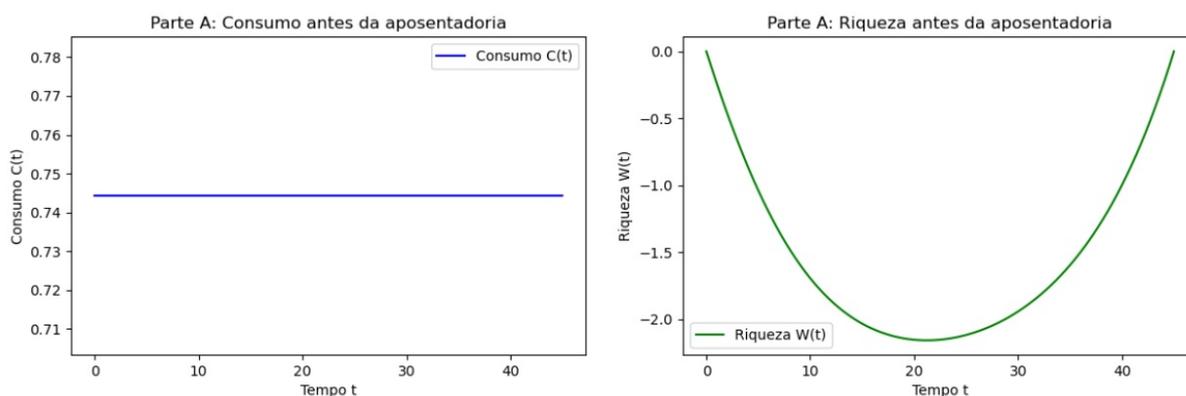


Figura 15 – Trajetórias de Consumo e Riqueza Antes da Aposentadoria ( $\rho = r$ ).

Fonte: Elaboração própria

Como podemos observar nos gráficos, o consumo se mantém constante ao longo do tempo, tanto antes quanto depois da aposentadoria, confirmando a previsão teórica. Essa constância reflete a ausência de preferência temporal entre consumo presente e futuro; o agente é indiferente entre consumir uma unidade adicional hoje ou no futuro. Esse resultado valida a implementação do modelo e reforça a confiabilidade dos resultados obtidos em outros cenários, além de ilustrar um princípio fundamental do modelo de ciclo

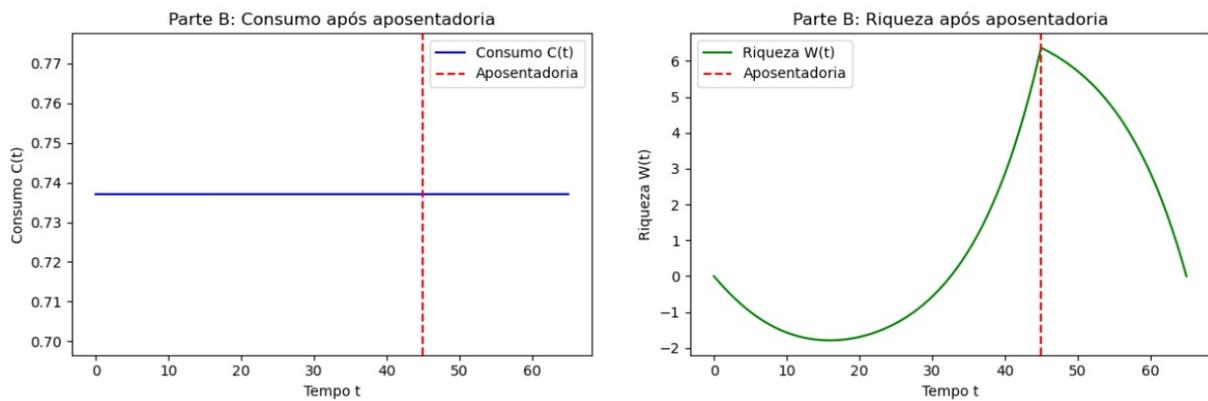


Figura 16 – Trajetórias de Consumo e Riqueza Após a Aposentadoria ( $\rho = r$ ).  
Fonte: Elaboração própria

de vida: a suavização do consumo ao longo do tempo.

A riqueza  $W(t)$ , no cenário sem aposentadoria, se inicia em zero (condição inicial), torna-se negativa (o agente se endivida para financiar o consumo constante, dado que sua renda inicial é menor do que o consumo) e, então, cresce à medida que a renda do trabalho aumenta, eventualmente atingindo zero no momento da aposentadoria  $T$ . No cenário com aposentadoria, a renda do trabalho cessa ( $w(t) = 0$  para  $t > T$ ). O consumo constante, agora, passa a ser inicialmente financiado por um aumento da poupança, e depois por uma "despoupança" da riqueza acumulada. A riqueza, atinge um pico, e logo depois, começa a decair, até chegar a zero em  $T$ .

Adicionalmente, os resíduos para consumo e riqueza, exibidos na Figura 17, permaneceram próximos de zero, comprovando a precisão numérica da solução.

Observe que a escala do eixo y para o resíduo do consumo é da ordem de  $10^{-16}$ , indicando valores muito próximos de zero. A pequena oscilação observada nos resíduos é típica de soluções numéricas e, dada a sua magnitude extremamente reduzida, não compromete a precisão dos resultados. Os resíduos para a riqueza também se mantêm próximos de zero, confirmando a convergência da solução numérica.

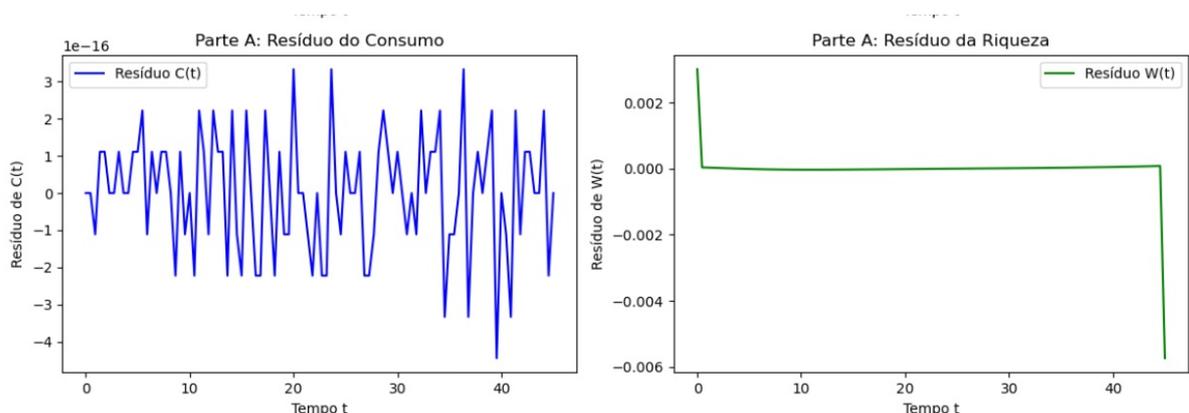


Figura 17 – Resíduos das Equações Diferenciais Antes da Aposentadoria ( $\rho = r$ ).  
Fonte: Elaboração própria

A validação demonstra que o modelo não apenas tem a capacidade de resolver o problema numericamente, mas também captura corretamente o comportamento previsto pela teoria em um caso específico com solução analítica conhecida.

Essa análise de sensibilidade demonstra como a mudança nos parâmetros impacta as decisões do agente. Com uma taxa de juros maior e menor impaciência, o agente é incentivado a poupar mais, resultando em maior acumulação de riqueza e um nível de consumo mais elevado, tanto antes quanto depois da aposentadoria. Trazendo para a realidade, um aumento na taxa de juros pode representar um cenário econômico mais favorável ao investimento, enquanto uma menor impaciência reflete uma maior preocupação com o bem-estar futuro. Esse teste reforça a importância de considerar o contexto econômico e as preferências individuais ao analisar as decisões de consumo e poupança ao longo da vida.

#### 4.4 INTERPRETAÇÃO DOS GRÁFICOS E RESULTADOS

Os resultados obtidos através da implementação computacional do modelo de consumo ao longo da vida, nos elucidam em alguns pontos interessantes sobre o comportamento do agente em diferentes cenários. A análise dos gráficos gerados, tanto para o cenário base quanto para o cenário com parâmetros alterados, permite uma compreensão aprofundada das decisões intertemporais de consumo e poupança, considerando a dinâmica da renda, a taxa de juros, a impaciência e a aversão ao risco.

Primeiramente, o código se mostrou eficaz na resolução do problema de otimização, convergindo para soluções numéricas precisas, como evidenciado pelos resíduos próximos de zero em todos os cenários analisados. A estrutura do código, utilizando a biblioteca SciPy, demonstrou ser flexível e adaptável, permitindo a modificação de parâmetros e a simulação de diferentes cenários com facilidade. Essa característica é crucial para explorar a sensibilidade do modelo e entender como as variáveis-chave influenciam o comportamento do agente.

No cenário base, com  $r = 0.1$  e  $\rho = 0.6$ , o agente exibe uma trajetória de consumo decrescente antes da aposentadoria, mesmo com a renda tendendo ao crescimento. Esse comportamento, aparentemente contraintuitivo, é explicado pela alta impaciência do agente, que prioriza o consumo presente em detrimento do consumo futuro. A riqueza, por sua vez, inicialmente negativa devido ao possível endividamento, aumenta gradualmente até atingir zero no momento da aposentadoria, cumprindo a restrição imposta pelo modelo. Após a aposentadoria, a constância observada no consumo e a riqueza mantida em zero divergem do comportamento teoricamente esperado. Em vez de uma queda abrupta seguida por um declínio gradual do consumo, e uma desacumulação contínua da riqueza, a solução numérica apresenta um consumo constante e uma riqueza que não

se altera. Isso sugere limitações na solução numérica, podendo mostrar um ponto de imprecisão da modelagem ou do método.

A análise de sensibilidade, com  $r = 0.2$  e  $\rho = 0.1$ , revela uma mudança drástica no comportamento do agente. Com uma taxa de juros maior e menor impaciência, o agente passa a poupar mais, resultando em uma trajetória de consumo crescente antes da aposentadoria e um nível de consumo significativamente maior durante a aposentadoria. A riqueza acumulada atinge valores muito mais altos, refletindo o incentivo à poupança proporcionado pela maior taxa de retorno e pela maior valorização do consumo futuro.

A comparação entre os cenários demonstra a importância da taxa de juros e da impaciência nas decisões intertemporais. Uma taxa de juros mais alta incentiva a poupança, enquanto uma menor impaciência leva o agente a postergar o consumo para desfrutar de um padrão de vida mais elevado no futuro. Esses resultados corroboram a teoria econômica do consumo ótimo, que prevê que os agentes ajustam suas decisões de consumo e poupança em resposta a mudanças nas taxas de juros e nas preferências intertemporais.

Além disso, os resultados obtidos validam a eficácia do método `solve_bvp` na resolução de problemas de valor de contorno em economia. A convergência das soluções numéricas e os baixos resíduos demonstram a precisão e a confiabilidade do método, reforçando sua aplicabilidade em problemas similares. A implementação em Python oferece uma alternativa acessível e flexível a softwares proprietários, democratizando o acesso a ferramentas computacionais para análise econômica.

Em resumo, o código desenvolvido se mostrou uma ferramenta robusta e versátil para simular e analisar o problema de consumo ao longo da vida. A análise dos gráficos gerados permitiu uma compreensão clara do impacto das variáveis-chave no comportamento do agente, corroborando a teoria econômica e validando o método numérico utilizado. A flexibilidade do código e a possibilidade de realizar análises de sensibilidade o tornam uma ferramenta valiosa para pesquisadores, educadores e profissionais da área econômica. A abordagem computacional utilizada reforça a importância da modelagem e simulação na análise de problemas econômicos complexos, permitindo explorar diferentes cenários e aprofundar a compreensão dos mecanismos subjacentes às decisões intertemporais de consumo e poupança.



## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho investigou a aplicação de métodos numéricos na resolução de problemas de otimização intertemporal do consumo, especificamente no contexto do modelo de ciclo de vida. O objetivo principal foi desenvolver e validar um modelo computacional capaz de simular as trajetórias ótimas de consumo e poupança de um agente econômico ao longo de sua vida, considerando diferentes cenários paramétricos. A escolha da linguagem de programação bem como suas ferramentas para a implementação numérica se justificaram pela sua flexibilidade, eficiência computacional e amplo acesso na comunidade científica, permitindo a reprodutibilidade e a adaptação do código para futuras pesquisas.

Para atingir o objetivo proposto, foi implementado um modelo matemático baseado em Equações Diferenciais Ordinárias, cuja solução numérica foi obtida por meio do método de colocação, utilizando a função `solve_bvp` da biblioteca SciPy (Jones et al., 2001). O modelo foi calibrado com parâmetros que refletem as preferências do agente (aversão ao risco, taxa de impaciência) e as condições do mercado (taxa de juros, renda projetada) considerando diferentes cenários paramétricos.

Os resultados obtidos, em consonância com a Hipótese do Ciclo de Vida (MODIGLIANI; BRUMBERG, 1954) e com as análises subsequentes de Deaton (1992) e Carroll (1997), confirmam que os agentes econômicos buscam suavizar seu consumo ao longo do tempo. A análise de sensibilidade revelou que a taxa de juros (ARROW, 1968) e a aversão ao risco (DIXIT, 1976) são fatores cruciais que influenciam as decisões de poupança e consumo.

A validação do código, realizada por meio da comparação com a solução analítica do problema de Sydsæter et al. (2008) e da análise dos resíduos, com valores próximos de zero em todos os cenários simulados, demonstrou concordância entre os resultados numéricos e a solução analítica, tanto para a trajetória de consumo quanto para a trajetória de riqueza. Isso reforça a validade do modelo e sua capacidade de reproduzir resultados teóricos conhecidos.

Esses testes confirmaram a acurácia da solução numérica e a convergência do método de colocação e das ferramentas do software empregado, corroborando a construção de um código preciso e flexível o suficiente para ser adaptado a diferentes cenários, como nas análises de sensibilidade (LINGE; LANGTANGEN, 2020; JONES et al., 2001).

---

A contribuição principal deste trabalho reside no desenvolvimento e disponibilização de uma ferramenta computacional sólida, acessível e flexível para a análise do problema de consumo ao longo da vida e problemas similares.

Essa ferramenta pode ser utilizada por pesquisadores, educadores e profissionais da área econômica com potencial para ser aplicada em diferentes contextos. O modelo implementado permite simular e analisar diferentes cenários econômicos, variando parâmetros e incorporando diversos aspectos relevantes para as decisões intertemporais de consumo e poupança.

A compreensão de como os agentes tomam decisões de consumo e poupança pode subsidiar o desenho de políticas públicas que promovam o bem-estar econômico, incentivem o planejamento financeiro de longo prazo e contribuam para a segurança financeira na aposentadoria. O modelo permite simular o impacto de diferentes políticas, como impostos, subsídios e programas de transferência de renda, auxiliando na avaliação de sua efetividade e na escolha das melhores estratégias a serem aplicadas.

O modelo pode ser adaptado para auxiliar na criação de estratégias de investimento personalizadas, considerando o perfil de risco e as preferências intertemporais dos clientes, bem como ser aplicado pelo próprio agente a fim de estudar os possíveis cenários aos quais ele pode estar inserido e planejar seu consumo e poupança de maneira mais eficaz e embasada.

Academicamente, o modelo oferece uma ferramenta robusta e acessível para o ensino e a pesquisa em economia, permitindo explorar conceitos teóricos e métodos numéricos de forma prática, bem como a validação e replicabilidade dos modelos analíticos já conhecidos.

Apesar dos resultados promissores, é importante reconhecer as limitações do modelo. As hipóteses simplificadoras, como a racionalidade perfeita, a informação perfeita e a ausência de restrições de liquidez, podem não se verificar em todos os contextos reais. Além disso, a função de utilidade CARA, embora conveniente, assume uma aversão ao risco constante, o que pode não refletir o comportamento de todos os agentes.

Em resumo, este trabalho atingiu seus objetivos propostos, desenvolvendo e validando um modelo computacional em Python para simular as trajetórias ótimas de consumo e poupança de um agente econômico ao longo da vida. O modelo, baseado em EDOs e resolvido numericamente pelo método de colocação com a função `solve_bvp`, permitiu investigar a influência de parâmetros econômicos como taxa de juros e aversão ao risco, corroborando a Hipótese do Ciclo de Vida e demonstrando a busca do agente pela sua-  
vização do consumo. A validação, por meio da comparação com a solução analítica do problema de consumo ótimo e da análise de resíduos, confirmou a precisão e a flexibilidade do modelo.

---

Assim, o trabalho cumpriu seu objetivo geral de fornecer uma ferramenta computacional robusta para análise de otimização intertemporal do consumo e seus objetivos específicos de compreender os fundamentos teóricos, implementar métodos numéricos, analisar o impacto dos parâmetros econômicos e validar o modelo computacional.

Como sugestões para trabalhos futuros, destacam-se:

- **Incorporação de incerteza:** Modelar a incerteza tanto na renda futura do agente quanto nos retornos dos investimentos, considerando diferentes distribuições de probabilidade e seus impactos nas decisões ótimas de consumo e poupança. Investigar como a volatilidade da renda e dos retornos afeta a propensão a poupar e o bem-estar do agente ao longo do tempo.
- **Restrições de liquidez:** Introduzir restrições de liquidez que limitem a capacidade do agente de tomar empréstimos ou impor custos para a obtenção de crédito. Analisar como essas restrições afetam as trajetórias de consumo e riqueza, especialmente em momentos de dificuldades financeiras ou incerteza econômica.
- **Funções utilidade alternativas:** Explorar funções utilidade mais gerais, como a CRRA, que permitem modelar diferentes perfis de aversão ao risco e suas implicações nas decisões intertemporais. Comparar os resultados obtidos com diferentes funções utilidade e avaliar a sensibilidade do modelo a essa escolha.
- **Impacto de políticas públicas:** Investigar o impacto de diferentes políticas públicas, como impostos sobre a renda e o consumo, subsídios e transferências governamentais, sobre as decisões de consumo e poupança dos agentes. Analisar como essas políticas afetam o bem-estar e a distribuição de renda na economia.
- **Métodos numéricos alternativos:** Explorar outros métodos numéricos para a resolução do problema de otimização, como métodos de elementos finitos, métodos espectrais e métodos de diferenças finitas. Comparar a eficiência e a precisão desses métodos com o método de colocação utilizado neste trabalho.
- **Heterogeneidade dos agentes:** Expandir o modelo para considerar a heterogeneidade entre os agentes econômicos, incorporando diferenças em termos de renda, preferências, aversão ao risco e horizonte de planejamento. Analisar como a heterogeneidade afeta a dinâmica agregada do consumo e da riqueza na economia.
- **Calibração com dados reais:** Calibrar o modelo com dados reais da economia brasileira, utilizando séries temporais de consumo, renda, taxa de juros e outros indicadores econômicos relevantes. Comparar os resultados da simulação com os dados observados e avaliar a capacidade do modelo de reproduzir a dinâmica da economia brasileira.

- **Inclusão de herança:** Modelar a possibilidade de deixar herança para as gerações futuras e analisar como essa perspectiva afeta as decisões de consumo e poupança ao longo da vida do agente. Investigar como a inclusão da herança altera a dinâmica da riqueza e a distribuição intergeracional de recursos.
- **Consideração de custos de transação:** Incorporar custos de transação na compra e venda de ativos financeiros, analisando como esses custos afetam a frequência e o volume das transações realizadas pelo agente e suas implicações para a acumulação de riqueza.
- **Análise de cenários macroeconômicos:** Simular diferentes cenários macroeconômicos, como crescimento econômico, recessão, inflação e mudanças nas taxas de juros, e avaliar o impacto desses cenários nas decisões de consumo e poupança dos agentes.

Finalmente, a aplicação empírica do modelo, utilizando dados reais da economia brasileira, poderia fornecer um arcabouço de informações pautado na realidade sobre o comportamento de consumo e poupança no contexto nacional, permitindo uma análise mais aprofundada das implicações de política econômica. A comparação dos resultados da simulação com dados empíricos permitiria avaliar a capacidade do modelo de reproduzir a dinâmica observada na economia brasileira e identificar possíveis discrepâncias entre o modelo teórico e a realidade, contribuindo para a validação do modelo e para a formulação de políticas econômicas mais eficazes e direcionadas à realidade brasileira.

## REFERÊNCIAS

- 1 ALMEIDA, G. O.; STERZA, R. L.; BRANDI, A. C. Solução numérica de problemas de valor de fronteira por diferenças finitas e shooting linear. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 106–116, 02 2020.
- 2 ANDO, A.; MODIGLIANI, F. The "life cycle" hypothesis of saving: Aggregate implications and tests. **The American Economic Review**, American Economic Association, v. 53, n. 1, p. 55–84, 1963. ISSN 00028282. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1817129>.
- 3 ARROW, K. J. Applications of control theory to economic growth. In: **Mathematics of the Decision Sciences, Part 2**. American Mathematical Society, 1968. p. 85–119. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:153229160>.
- 4 ASCHER, U.; MATTHEIJ, R.; RUSSELL, R. **Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations**. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1994. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 9781611971231. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=0RvOrnO4WgwC>.
- 5 BLANCHARD, O. J.; FISCHER, S. **Lectures on Macroeconomics**. 1. ed. The MIT Press, 1989. v. 1. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:mtp:titles:0262022834>.
- 6 BODIE, Z.; TREUSSARD, J.; WILLEN, P. S. The theory of life-cycle saving and investing. **Boston University Questrom School of Business Research Paper Series**, 2007. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:7899118>.
- 7 BOYCE, W.; DIPRIMA, R.; MEADE, D. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC, 2020. ISBN 9788521636946. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=DRr8zwEACAAJ>.
- 8 BOYD, J. **Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition**. Dover Publications, 2013. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486141923. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=b4TCAgAAQBAJ>.
- 9 CARROLL, C. D. Buffer-stock saving and the life cycle/permanent income hypothesis\*. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 112, n. 1, p. 1–55, 02 1997. ISSN 0033-5533. Disponível em: <https://doi.org/10.1162/003355397555109>.
- 10 CARROLL, C. D. Death to the log-linearized consumption euler equation! (and very poor health to the second-order approximation). **The B.E. Journal of Macroeconomics**, v. 1, n. 1, 2001. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:bjp:bejmac:v:advances.1:y:2001:i:1:n:6>.

- 11 CHIANG, A. **Elements of Dynamic Optimization**. Waveland Press, 1999. ISBN 9781478608349. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=IcMSAAAAQBAJ>.
- 12 DEATON, A. S. Franco modigliani and the life cycle theory of consumption. **National Bureau of Economic Research (NBER)**, 2005.
- 13 DEATON, A. **Understanding Consumption**. Oxford University Press, 1992. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:oxp:obooks:9780198288244>.
- 14 DEGROOT, M. H.; SCHERVISH, M. J. **Probability and Statistics**. 4. ed. Addison-Wesley, 2012. ISBN 9780321500465. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=4TIEPgAACAAJ>.
- 15 DIXIT, A. K. **The Theory of Equilibrium Growth**. Oxford University Press, 1976. ISBN 9780198770800. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TyxAAAAIAAJ>.
- 16 DORFMAN, R. An economic interpretation of optimal control theory. **American Economic Review**, v. 59, n. 5, p. 817–831, 1969. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:aea:aecrev:v:59:y:1969:i:5:p:817-31>.
- 17 EATWELL, J. L. R. m. solow. growth theory: An exposition. **The Economic Journal**, v. 80, n. 320, p. 936–938, 12 1970. ISSN 0013-0133. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2229908>.
- 18 FEHR, H.; KINDERMANN, F. **Introduction to Computational Economics Using Fortran**. Oxford University Press, 2018. ISBN 9780198804406. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=eWK9tAEACAAJ>.
- 19 FRIEDMAN, M. **A Theory of the Consumption Function**. National Bureau of Economic Research, Inc, 1957. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:nbr:nberbk:frie57-1>.
- 20 JONES, E. D.; OLIPHANT, T. E.; PETERSON, P. **SciPy: Open Source Scientific Tools for Python**. 2001. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:215874460>.
- 21 JUDD, K. L. Projection methods for solving aggregate growth models. **Journal of Economic Theory**, v. 58, n. 2, p. 410–452, 1992. ISSN 0022-0531. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002205319290061L>.
- 22 JUDD, K. **Numerical Methods in Economics**. MIT Press, 1998. (Mit Press). ISBN 9780262100717. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?id=9Wxk\\_z9HskAC](https://books.google.com.br/books?id=9Wxk_z9HskAC).
- 23 LINGE, S.; LANGTANGEN, H. P. **Programming for Computations - Python: A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6**. 2. ed. Springer International Publishing, 2020. (Texts in Computational Science and Engineering, 15). ISBN 9783030168773. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=oCa7DwAAQBAJ>.
- 24 MEDEIROS A. A. E OLIVEIRA, M. L. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2006. Disponível em: [https://mat.ufpb.br/milton/disciplinas/edo/livro\\_edo.pdf](https://mat.ufpb.br/milton/disciplinas/edo/livro_edo.pdf).

- 25 MIRANDA, M. J.; FACKLER, P. L. **Applied Computational Economics and Finance**. MIT Press, 2004. (The MIT Press). ISBN 9780262291750. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=yMXxCwAAQBAJ>.
- 26 MODIGLIANI, F.; BRUMBERG, R. Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data. In: **The Collected Papers of Franco Modigliani, Volume 6**. The MIT Press, 2005. ISBN 9780262280051. Disponível em: <https://doi.org/10.7551/mitpress/1923.003.0004>.
- 27 MODIGLIANI, F. Life cycle, individual thrift, and the wealth of nations. **The American Economic Review**, American Economic Association, v. 76, n. 3, p. 297–313, 1985. ISSN 00028282. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1813352>.
- 28 NICHOLSON, W.; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 10. ed. Thomson South-Western, 2007. Disponível em: <https://dl.icdst.org/pdfs/files4/d6f25b42b2d4d4fe41fab7f819d5a28.pdf>.
- 29 SHELL, K. Optimal programs of capital accumulation for an economy in which there is exogenous technical change. **Essays on the Theory of Optimal Economic Growth**, p. 1–30, 1967. Disponível em: <https://karlshell.com/wp-content/uploads/2015/03/optimal.pdf>.
- 30 SOLOW, R. **Growth Theory: An Exposition**. Oxford University Press, 1988. (NOBEL PRIZE LECTURES. Economics). ISBN 9780195056099. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=BjC5AAAAIAAJ>.
- 31 SYDSÆTER, K.; HAMMOND P. J.; STRØM, A.; CARVAJAL, A. **Essential Mathematics for Economic Analysis**. Pearson Deutschland, 2021. 976 p. ISBN 9781292359281. Disponível em: <https://elibrary.pearson.de/book/99.150005/9781292359298>.
- 32 SYDSÆTER, K.; SEIERSTAD, A.; STRØM, A. **Further Mathematics for Economic Analysis**. 2. ed. Financial Times Prentice Hall, 2008. (Pearson Education). ISBN 9780273713289. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=mqgK08S94NAC>.
- 33 THOMSON, W. **A Guide for the Young Economist**. 2. ed. The MIT Press, 2011. ISBN 9780262515894. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt5hhbjj>.
- 34 TOBIN, J. Life-cycle saving and balanced growth. In: FELLNER, W. e. a. (Ed.). **Ten economic essays in the tradition of Irving Fisher**. [S.l.]: Wiley, 1967. p. 231–256.
- 35 WAN, H. **Economic Growth**. Harcourt Brace Jovanovich, 1971. (Harbrace series in business and economics). ISBN 9780155187931. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=kBDhwAEACAAJ>.



## A APÊNDICE

### A.1 CONSUMO AO LONGO DA VIDA\*

Um modelo simples de escolha de poupança/consumo ao longo da vida considera um agente com um fluxo de renda projetado dado por  $w(t)$ , que deve escolher uma taxa de consumo  $c(t)$  para maximizar a utilidade ao longo da vida descontada:

$$\max_{C(t)} \int_0^T e^{-\rho t} U(C(t)) dt$$

sujeito a uma restrição intertemporal de riqueza  $\frac{dW}{dt} = rW + w(t) - C$ , onde  $r$  é a taxa de retorno sobre investimentos (ou a taxa de juros sobre fundos emprestados, se  $W < 0$ ). A solução para este problema de controle ótimo pode ser expressa como o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$C' = -\frac{U'(C)}{U''(C)}(r - \rho)$$

e

$$W' = rW + w(t) - C.$$

Assume-se que o agente começa sem riqueza ( $W(0) = 0$ ) e não deixa herança ( $W(T) = 0$ ).

a) Use BVPSOLVE para resolver este PVC usando a função utilidade CARA  $U(C) = \frac{(C^{1-\lambda}-1)}{(1-\lambda)}$  e os valores dos parâmetros  $T = 45$ ,  $r = 0.1$ ,  $\rho = 0.6$ ,  $\lambda = 0.5$  e  $w(t) = \frac{w_0}{(1+e^{-at})}$ , com  $w_0 = 1$  e  $a = 0.15$ . Plote a função solução e as funções residuais.

b) Na parte (a), o agente trabalha até o tempo  $T$  e então morre. Suponha, em vez disso, que o agente se aposenta no tempo  $T$  e vive por mais  $R = 20$  anos de aposentadoria sem renda adicional ( $w(t) = 0$  para  $T < t \leq T+R$ ). Resolva o problema com essa suposição. Qual problema adicional é encontrado? Como o problema pode ser resolvido?

---

Esse problema pode ser encontrado no livro *Applied Computational Economics and Finance*, escrito por Miranda e Fackler, publicado em 2004 pela MIT Press. O exercício em questão é o 6.6, localizado na página 173-174 da obra.

## A.2 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DO CONSUMO\*

Considere um consumidor que espera viver do presente ( $t = 0$ ) até o tempo final  $T$ . Seja  $c(t)$  seu gasto com consumo no tempo  $t$  e  $y(t)$  sua renda prevista. Seja  $w(t)$  a riqueza do consumidor no tempo  $t$ . Então:

$$\dot{w}(t) = r(t)w(t) + y(t) - c(t) \quad (\text{A.1})$$

onde  $r(t)$  é a taxa de juros instantânea no tempo  $t$ . Suponha que o consumidor queira maximizar a *função utilidade intertemporal ao longo da vida*:

$$\int_0^T e^{-\alpha t} u(c(t)) dt$$

onde  $\alpha > 0$ ,  $u'(c) > 0$ ,  $u''(c) < 0$  para todo  $c > 0$ . A equação dinâmica é dada acima. Além disso,  $w(0) = w_0$  é dado e existe a restrição terminal  $w(T) \geq 0$ , prevenindo o consumidor de terminar com dívida.

Este é um problema de controle ótimo, onde  $w(t)$  é a variável de estado e  $c(t)$  a variável de controle. Assumimos que  $c(t) > 0$ , de modo que a região de controle seja  $(0, \infty)$ . Primeiramente, caracterizamos a trajetória ótima do consumo em geral e depois encontramos uma solução explícita para alguns casos específicos instrutivos.

O Hamiltoniano para este problema é dado por:

$$H(w, c, p) = e^{-\alpha t} u(c) + p[r(w) + y - c],$$

com  $p_0 = 1$ . Seja  $c^* = c^*(t)$  uma solução ótima. Então, a condição de primeira ordem  $H'_c = 0$  implica que:

$$e^{-\alpha t} u'(c^*(t)) = p(t)$$

Ou seja, a variável adjunta é igual à utilidade marginal descontada. Além disso,

$$\dot{p}(t) = -H'_w = -p(t)r(t)$$

De modo que a variável adjunta decresce a uma taxa proporcional à taxa de juros. Note que a equação acima é uma equação diferencial separável, cuja solução é:

$$p(t) = p(0) \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)$$

**A.2.1 CASO ESPECIAL: CONSUMO CONSTANTE**

Suponha que  $r(t) = r$ , independente do tempo, e  $\alpha = r$ . Então (ii) reduz-se a  $p(t) = p(0)e^{-rt}$ , e (i) torna-se  $e^{-rt}u'(c^*(t)) = p(0)e^{-rt}$ , ou  $u'(c^*(t)) = p(0)$ . Segue que  $c^*(t)$  é uma constante,  $c^*(t) = \bar{c}$ , independente do tempo.

Agora (A.1) torna-se  $w' = rw + y(t) - \bar{c}$ , cuja solução é:

$$w^*(t) = e^{rt} \left[ w_0 + \int_0^t e^{-rs} y(s) ds - \bar{c} \frac{(1 - e^{-rt})}{r} \right] \quad (iv)$$

Devido a (7)(b), a restrição terminal  $w^*(T) \geq 0$  implica que

$$p(T) \geq 0, \quad \text{com } p(T) = 0 \quad \text{se } w^*(T) > 0$$

Segue que se  $w^*(T) > 0$ , então  $p(T) = 0$ , o que contradiz (i). Assim,  $w^*(T) = 0$ , então é ótimo para o consumidor não deixar herança após o tempo  $T$ . A condição  $w^*(T) = 0$  determina o nível ótimo de  $\bar{c}$ , que é:

$$\bar{c} = \frac{r}{1 - e^{-rT}} \left[ w_0 + \int_0^T e^{-rs} y(s) ds \right]$$

---

Este modelo foi retirado do livro *Further Mathematics for Economic Analysis*, de autoria de Sydsæter et al., publicado em 2008 pela Financial Times Prentice Hall (2ª edição). O exemplo 2 está localizado nas páginas 317-318 da obra.

## A.3 CÓDIGO ORIGINAL: PROBLEMA DO CONSUMO AO LONGO DA VIDA

```
1  #!/usr/bin/env python
2  # coding: utf-8
3
4  # In[3]:
5
6
7  import numpy as np
8  from scipy.integrate import solve_bvp
9  import matplotlib.pyplot as plt
10
11 # =====
12 # Definir parâmetros
13 # =====
14 T = 45          # Horizonte temporal até a aposentadoria
15 T_ret = T + 20 # Período adicional após aposentadoria
16 r = 0.2        # Taxa de juros
17 lambda_ = 0.5  # Aversão ao risco
18 rho = 0.6      # Taxa de impaciência
19 w0 = 1         # Renda inicial máxima
20 alpha = 0.15   # Taxa de crescimento da renda
21
22 # Função de utilidade CARA e suas derivadas
23 def U(C):
24     return (C**(1 - lambda_) - 1) / (1 - lambda_)
25
26 def U_prime(C, epsilon=1e-6):
27     C = np.maximum(C, epsilon)
28     return (C + epsilon)**(-lambda_)
29
30 def U_double_prime(C, epsilon=1e-6):
31     C = np.maximum(C, epsilon)
32     return -lambda_ * (C + epsilon)**(-lambda_ - 1)
33
34 # =====
35 # Parte A: Fluxo de renda antes da aposentadoria
36 # =====
37 def w(t):
38     """Fluxo de renda antes da aposentadoria."""
39     return w0 / (1 + np.exp(-alpha * t))
40
```

```

41 # =====
42 # Parte A: Equações diferenciais
43 # =====
44 def odes_a(t, y):
45     """Equações diferenciais para a parte A."""
46     C, W = y # C(t): Consumo; W(t): Riqueza
47     dC_dt = -(U_prime(C) / U_double_prime(C)) * (r - rho) # Dinâmica
48     do consumo
49     dW_dt = r * W + w(t) - C # Dinâmica da riqueza
50     return [dC_dt, dW_dt]
51 # =====
52 # Parte A: Resíduos das equações diferenciais
53 # =====
54 def residuals_a(t, y):
55     """Resíduos das equações diferenciais da parte A."""
56     C, W = y
57     dC_dt, dW_dt = odes_a(t, y)
58     return np.gradient(C, t) - dC_dt, np.gradient(W, t) - dW_dt
59 # =====
60 # Parte A: Condições de contorno
61 # =====
62 # =====
63 def bc_a(ya, yb):
64     """Condições de contorno para a parte A."""
65     return [ya[1], yb[1]] # W(0) = 0, W(T) = 0
66 # =====
67 # =====
68 # Parte B: Fluxo de renda após aposentadoria
69 # =====
70 def w_ret(t):
71     """Fluxo de renda com aposentadoria."""
72     return np.where(t <= T, w(t), 0)
73 # =====
74 # =====
75 # Parte B: Equações diferenciais
76 # =====
77 def odes_b(t, y):
78     """Equações diferenciais para a parte B."""
79     C, W = y
80     dC_dt = -(U_prime(C) / U_double_prime(C)) * (r - rho)
81     dW_dt = r * W + w_ret(t) - C

```

```

82     return [dC_dt, dW_dt]
83
84 # =====
85 # Parte B: Resíduos das equações diferenciais
86 # =====
87 def residuals_b(t, y):
88     """Resíduos das equações diferenciais da parte B."""
89     C, W = y
90     dC_dt, dW_dt = odes_b(t, y)
91     return np.gradient(C, t) - dC_dt, np.gradient(W, t) - dW_dt
92
93 # =====
94 # Parte B: Condições de contorno
95 # =====
96 def bc_b(ya, yb):
97     """Condições de contorno para a parte B."""
98     return [ya[1], yb[1]] # W(0) = 0, W(T+R) = 0
99
100 # =====
101 # Valores iniciais aproximados para a solução numérica
102 # =====
103 t_a = np.linspace(0, T, 100)
104 y_a = np.zeros((2, t_a.size))
105 y_a[0] = 0.1 # Consumo inicial aproximado
106
107 t_b = np.linspace(0, T_ret, 100)
108 y_b = np.zeros((2, t_b.size))
109 y_b[0] = 0.1 # Consumo inicial aproximado
110
111 # =====
112 # Resolver o problema de valor de contorno para a parte A
113 # =====
114 sol_a = solve_bvp(odes_a, bc_a, t_a, y_a)
115
116 # =====
117 # Resolver o problema de valor de contorno para a parte B
118 # =====
119 sol_b = solve_bvp(odes_b, bc_b, t_b, y_b)
120
121 # =====
122 # Plotagem dos Gráficos
123 # =====

```

```
124 plt.figure(figsize=(12, 12))
125
126 # Parte A: Solução
127 plt.subplot(3, 2, 1)
128 plt.plot(sol_a.x, sol_a.y[0], label='Consumo C(t)', color='blue')
129 plt.xlabel('Tempo t')
130 plt.ylabel('Consumo C(t)')
131 plt.title('Parte A: Consumo antes da aposentadoria')
132 plt.legend()
133
134 plt.subplot(3, 2, 2)
135 plt.plot(sol_a.x, sol_a.y[1], label='Riqueza W(t)', color='green')
136 plt.xlabel('Tempo t')
137 plt.ylabel('Riqueza W(t)')
138 plt.title('Parte A: Riqueza antes da aposentadoria')
139 plt.legend()
140
141 # Parte A: Resíduos
142 res_c_a, res_w_a = residuals_a(sol_a.x, sol_a.y)
143 plt.subplot(3, 2, 3)
144 plt.plot(sol_a.x, res_c_a, label='Resíduo C(t)', color='blue')
145 plt.xlabel('Tempo t')
146 plt.ylabel('Resíduo de C(t)')
147 plt.title('Parte A: Resíduo do Consumo')
148 plt.legend()
149
150 plt.subplot(3, 2, 4)
151 plt.plot(sol_a.x, res_w_a, label='Resíduo W(t)', color='green')
152 plt.xlabel('Tempo t')
153 plt.ylabel('Resíduo de W(t)')
154 plt.title('Parte A: Resíduo da Riqueza')
155 plt.legend()
156
157 # Parte B: Solução
158 plt.subplot(3, 2, 5)
159 plt.plot(sol_b.x, sol_b.y[0], label='Consumo C(t)', color='blue')
160 plt.axvline(T, color='red', linestyle='--', label='Aposentadoria')
161 plt.xlabel('Tempo t')
162 plt.ylabel('Consumo C(t)')
163 plt.title('Parte B: Consumo após aposentadoria')
164 plt.legend()
165
```

```
166 plt.subplot(3, 2, 6)
167 plt.plot(sol_b.x, sol_b.y[1], label='Riqueza W(t)', color="green")
168 plt.axvline(T, color='red', linestyle='--', label='Aposentadoria')
169 plt.xlabel('Tempo t')
170 plt.ylabel('Riqueza W(t)')
171 plt.title('Parte B: Riqueza após aposentadoria')
172 plt.legend()
173
174 plt.tight_layout()
175 plt.show()
176
177
178 # In[ ]:
```

Listing A.1 – Implementação do Código

## A.4 CÓDIGO DE VALIDAÇÃO: PROBLEMA DO CONSUMO ÓTIMO

```
1  #!/usr/bin/env python
2  # coding: utf-8
3
4  # In[8]:
5
6
7  import numpy as np
8  from scipy.integrate import solve_bvp
9  import matplotlib.pyplot as plt
10
11 # =====
12 # Definir parâmetros para o problema
13 # =====
14 T = 20          # Horizonte temporal
15 r = 0.15       # Taxa de juros
16 rho = 0.1      # Taxa de impaciência
17 w0 = 1         # Renda inicial máxima
18 lambda_ = 0.5  # Aversão ao risco
19 alpha = 5      # Parâmetro da função de renda
20
21 # =====
22 # Função de utilidade CARA e suas derivadas
23 # =====
24 def U(C):
25     """Função de utilidade CARA."""
26     return C**(1 - lambda_) - 1 / (1 - lambda_)
27
28 def U_prime(C):
29     """Primeira derivada da função de utilidade CARA."""
30     return C**(-lambda_)
31
32 def U_double_prime(C):
33     """Segunda derivada da função de utilidade CARA."""
34     return -lambda_ * C**(-lambda_ - 1)
35
36 # =====
37 # Função de renda
38 # =====
39 def w(t):
40     """Renda."""
```

```

41     return w0 * np.ones_like(t) # Renda constante
42
43 # =====
44 # Hamiltoniano
45 # =====
46 def hamiltonian(C, W, p, t):
47     """Hamiltoniano."""
48     return np.exp(-rho * t) * U(C) + p * (r * W + w(t) - C)
49
50 # =====
51 # Sistema de equações diferenciais (estado e co-estado)
52 # =====
53 def equations(t, y):
54     """Sistema de equações diferenciais."""
55     C, W = y
56     # Equação de estado (riqueza)
57     dWdt = r * W + w(t) - C
58     # Equação de co-estado (multiplicador de Lagrange) - da condição
59     # de primeira ordem
60     p = np.exp(-rho * t) * U_prime(C)
61     dpdt = -p * r
62
63     # Como estamos resolvendo para C e W, e não para p,
64     # usamos a condição de primeira ordem para expressar C em termos
65     # de \rho:
66     # dCdt = (r - rho) * C
67
68     dCdt = -(U_prime(C) / U_double_prime(C)) * (r - rho)
69
70     return np.vstack((dCdt, dWdt))
71
72 # =====
73 # Condições de contorno
74 # =====
75 def boundary_conditions(ya, yb):
76     """Condições de contorno."""
77     W0 = 1 # Alterar aqui a riqueza inicial
78     WT = 0 # Alterar aqui a riqueza final
79     return np.array([ya[1] - W0, yb[1]]) # W(0) = W0, W(T) = 0
80
81 # =====
82 # Grade de tempo e chute inicial

```

```
81 # =====
82 t_values = np.linspace(0, T, 100)
83 y_guess = np.zeros((2, t_values.size))
84 y_guess[0] = 0.1 # Chute inicial para consumo
85 y_guess[1] = 0.1 # Chute inicial para riqueza
86
87 # =====
88 # Resolver o problema de valor de contorno
89 # =====
90 sol = solve_bvp(equations, boundary_conditions, t_values, y_guess)
91
92 # =====
93 # Plotagem dos resultados
94 # =====
95 if sol.success:
96     # Resultado consumo constante
97     if abs(r - rho) < 1e-5:
98         print("Caso especial: rho = r. Consumo constante.")
99
100     plt.figure(figsize=(10, 5))
101
102     # Consumo Ótimo
103     plt.subplot(1, 2, 1)
104     plt.plot(sol.x, sol.y[0], label='Consumo C(t)', color='blue')
105     plt.xlabel('Tempo t')
106     plt.ylabel('Consumo C(t)')
107     plt.title(f'Consumo (\rho = {rho}, r = {r})')
108     plt.legend()
109
110     # Riqueza
111     plt.subplot(1, 2, 2)
112     plt.plot(sol.x, sol.y[1], label='Riqueza W(t)', color='green')
113     plt.xlabel('Tempo t')
114     plt.ylabel('Riqueza W(t)')
115     plt.title('Evolução da Riqueza')
116     plt.legend()
117
118     plt.tight_layout()
119     plt.show()
120 else:
121     print("Falha na solução do problema de valor de contorno.")
122
```

```
123  
124 # In[ ]:
```

Listing A.2 – Validação do Código