UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – UFOP
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS - ICEB
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – DEEMA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

RAFAEL PEREIRA DOS SANTOS

OFICINAS DE PROBABILIDADE: uma proposta voltada para o professor de matemática da educação básica

Ouro Preto – Minas Gerais - Brasil

Outubro de 2024

RAFAEL PEREIRA DOS SANTOS

OFICINAS DE PROBABILIDADE: uma proposta voltada para o professor de matemática da educação básica

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto sob orientação do Prof. Dr. André Augusto Deodato e coorientação do Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu.

Ouro Preto – Minas Gerais – Brasil

Outubro de 2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S237o Santos, Rafael Pereira dos.
Oficinas de Probabilidade [manuscrito]: uma proposta voltada para o professor de matemática da educação básica. / Rafael Pereira dos Santos. - 2024.
81 f.: il.: color., tab..

Orientador: Prof. Dr. André Augusto Deodato.
Coorientador: Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Ensino de Probabilidade. 2. Educação Básica. 3. Sala de Aula de Matemática. 4. Oficina de Matemática. I. Deodato, André Augusto. II. Torisu, Edmilson Minoru. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 519.2

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Rafael Pereira dos Santos

Oficinas de Probabilidade: uma proposta voltada para o professor de matemática da educação básica

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em 11 de outubro de 2024.

Membros da banca

Dr. André Augusto Deodato - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Edmilson Minoru Torisu - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Ms. Érica Resende Malaspina - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr.ª Marli Regina dos Santos - Universidade Federal de Ouro Preto

André Augusto Deodato, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 23/01/2025

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Edivaldo e Sônia, pelo apoio incondicional durante toda a minha trajetória e por sempre me motivarem, especialmente no meu processo de retomada dos estudos. Agradeço à minha irmã por todos os momentos de conversa e por me ensinar a ser mais paciente. Amo vocês.

Agradeço a todo o corpo docente com quem pude aprender um pouco a cada dia na universidade, em especial, aos professores do DEMAT, DEEMA e DEEDU, entre os quais destaco meu orientador, André Augusto Deodato, e meu coorientador, Edmilson Minoru Torisu.

E, claro, agradeço a todos os amigos que tive a oportunidade de conhecer durante minha jornada nesta cidade incrível, seja nos estágios, nas festas ou nas aulas. Um agradecimento especial aos amigos de curso do 20.1 e aos amigos da república Peripatus.

Obrigado a todos, vocês tornaram tudo muito mais divertido e interessante.

RESUMO

O ensino de probabilidade na Educação Básica e a formação de professores de matemática ainda são objeto de reflexão no contexto brasileiro. Nesse cenário, notamos que existe espaço para se pensar sobre alternativas ao paradigma de exercício, especialmente, quando o foco é o trabalho com conceitos probabilísticos. Assim, motivados por esse desafio, buscamos descrever analiticamente duas propostas de atividades que envolvem conceitos probabilísticos, pensadas para auxiliar o professor de Matemática na Educação Básica. Para tanto, com vistas a construir um acervo teórico, colocamos em relevo alguns fatos históricos relacionados à probabilidade. Além disso, colocamos em perspectiva aspectos de como esse tema é abordado nos documentos oficiais direcionadores dos currículos nacionais, em especial, nos PCN e na BNCC. Ademais, realçamos alguns resultados e teoremas da probabilidade clássica e frequentista. Assim, neste estudo monográfico, cuja estrutura se aproxima do paradigma qualitativo, realizamos uma descrição analítica de duas oficinas relacionadas à Probabilidade. Uma delas intitulada “Corrida de Cavalos”, baseada em um dos trabalhos do professor Ole Skovsmose, pensada para o Ensino Fundamental e fomentadora de reflexões sobre os quatro pilares da probabilidade (acaso, experimento aleatório, espaço amostral e evento); a outra, intitulada “Oficina das Três Portas”, baseada no problema de Monty Hall, voltada ao Ensino Médio, centrada em conceitos da probabilidade condicional. Nesse processo, ancorados no conceito de “cenários para investigação” percebemos que é possível aventar a abordagem de conceitos probabilísticos por meio de oficinas, em um ambiente no qual os alunos sejam convidados a participar ativamente de seus processos de aprendizagem. Além disso, consideramos que as propostas construídas revelam que é possível desenvolver alternativas aos modos tradicionais de se ensinar probabilidade na Educação Básica.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade; Educação Básica; Sala de Aula de Matemática; Oficina de Matemática; Cenários para Investigação.

ABSTRACT

In the Brazilian context, the teaching of probability within the Basic Education cycle, as well as the training of mathematics teachers, remains a subject of ongoing reflection and analysis. In this context, its noticeable that there is still space for thinking about alternatives for the exercise paradigm, particularly when the emphasis is placed on probabilistic concepts. Therefore, motivated by this challenge, this study aims to analytically describe two proposed activities involving probabilistic concepts, designed to assist the Basic Cycle mathematics professors. For such, with the intention of constructing a theoretical collection, this paper highlights some historical facts related to probability. Furthermore, it puts into perspective aspects of how this topic is addressed in the official documents guiding the national educational curriculum, especially, in the PCN and BNCC. Moreover, this study emphasizes several results and theorems pertaining to classical and frequentist probability. This way, in this monographic study, of witch the structure approches to the qulitative paradgim it carries out an analitical description of two probabilitie related workshops. One of them, entitled“Corrida de Cavalos”, based on one of the works of professor Ole Skovsmose, structuref for Elementary School and encouraging reflections on the four pillars of probability (chance, random experiment, sample space and event); The second activity, entitle "Oficina das tres portas" based on Monty Hall's problem and is intended to High School students, centered around conditional probabilities problems. In this processes, fundamented in the concept of "scenes for investigation" it was determined that it is possible to consider approaching probabilistic concepts through workshops, in enviroments where students are encouraged to actively engage in their learning processes. In addition, this study consider that the proposals built revealed that it is possible to develop alternatives to the traditional methods of teaching probabilities in the Basic Education.
Keywords: Probability Teaching; Basic Education; Mathematics Classroom; Mathematics Workshop; Scenes for Investigation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta Monografia, optei por discorrer sobre atividades e conceitos relacionados ao tema probabilidade focado na Educação Básica. A escolha do tema, destaco, não se deu por acaso. Trata-se de uma área da Matemática que, por um lado, é de grande interesse pessoal. Por outro lado, nela encontro muitos desafios.

Assim, começarei minhas reflexões sobre o tema referido a partir do início da minha trajetória acadêmica. A construção das etapas não será linear, no sentido de que os episódios relatados não ocorreram em ordem cronológica necessariamente, mas, sim, de maneira significava para minhas memórias. E, assim, pretendo pontuar e dissertar sobre fatos e feitos que marcaram minha trajetória até a redação deste trabalho.

Posto isso, exponho que meu interesse pela Matemática e pelo “universo da docência” foi construído em etapas. Como ponto de partida, inicio meu relato pelos meus estudos em Filosofia, em especial, menciono a Filosofia Analítica[1]. Trata-se de um ramo da Filosofia que busca explorar conceitos voltados para as relações lógicas. Assim, meu interesse começou como um passatempo, durante meu horário de almoço do trabalho[2].

Nessa direção, conforme eu aprofundava minhas leituras sobre o tema, seja por textos ou pequenos desafios de lógica, eu comecei a perceber uma certa matemática na Filosofia. Assim, a Matemática tornou-se mais e mais presente em minha vida. Foi, pois, mobilizado por esse contexto - que se iniciou após o fim do meu ciclo na Educação Básica - que decidi retomar os estudos e dar continuidade à minha vida escolar, mirando a Educação Superior.

Embora essa situação tenha despertado meu interesse por voltar a estudar, eu ainda não havia decidido o curso que pretendia realizar. Aos poucos, percebi que o estudo relacionado à Filosofia Analítica dizia mais sobre meus interesses em desafios de raciocínio do que sobre a área na qual eu pretendia me dedicar profissionalmente. Assim, enquanto me decidia, optei por ingressar em um cursinho preparatório para o Exame Nacional do Ensino Médio. Esse período não só se tornou uma experiência gratificante, como também foi durante o cursinho que meu interesse pelo campo da docência se despertou.

Escolhida à docência, decidi-me pela Matemática porque retomar os estudos foi um processo gratificante. Durante o período em que realizei o cursinho pré-vestibular, embora

---

1 Corrente filosófica cuja fundação é atribuída ao alemão Gottlob Frege, Nela, a análise de significado dos enunciados (sentenças) é reduzida à linguagem e implicações lógicas (Branquinho *et al*, 2006).

2 Refiro-me ao período compreendido pelos anos de 2016 e 2019. Na ocasião, já tendo terminado meu “ciclo” na Educação Básica e não iniciado a Educação Superior em Matemática exercia uma atividade profissional.

indeciso sobre a área que queria seguir, dediquei uma atenção especial às aulas de Matemática. Talvez pelas dificuldades com o conteúdo, mas também pela dinâmica das aulas em si. O professor que ministrava essas aulas, sempre que possível, promovia discussões sobre os resultados encontrados nos exercícios. Essa noção de aula mais interativa e desafiadora, provavelmente, não só me cativou como talvez tenha sido o que me levou a optar pela Licenciatura em Matemática.

Assim, em 2020, ingressei-me na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Após o ingresso nesse curso, ainda que de maneira conturbada, dado o contexto de pandemia de Covid-19, tive a oportunidade de conhecer e participar do projeto de extensão intitulado *Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à* Docência (PIBID)[3]. O programa foi essencial para minha permanência durante o período de pandemia na UFOP.

Dentre os aprendizados que atribuo ao PIBID, destaco que tive a oportunidade de aprender e criar planos de aula. A ideia de trabalhar com um tema em que professor pode fazer uso de oficinas[4] ou de resoluções de problemas, por exemplo, mostrou-se, para mim, uma das potências da docência.

Destaco ter percebido, no PIBID, que era possível ensinar fazendo uso de oficinas. Essa percepção foi um aprendizado que levei para outros programas dos quais participei, por exemplo, o *Programa de Educação Tutorial* (PET)[5] e o *Programa Residência Pedagógica* (PRP)[6].

---

3 De acordo com o site da CAPES, o PIBID "é uma iniciativa que integra a Política Nacional de Formação de Professores do Ministério da Educação e tem por finalidade fomentar a iniciação à docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria de qualidade da educação básica pública brasileira". Maiores informações em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/pibid/pibid>. Acesso em 27/09/24.

4 Acerca das oficinas, tanto quanto Deodato e David (2015), optei nesta monografia por não apresentar uma definição que "aprisionasse" esse tipo de atividade, mas no lugar disso, caracterizo meu entendimento sobre o termo "oficina" na descrição que será realizada nos capítulos 6 (seis) e 7 (sete).

5 De acordo com o site da Pró-reitoria de Graduação da UFOP, o PET trata-se de um programa cujos objetivos são "desenvolver atividades acadêmicas em padrões de qualidade de excelência com grupos de aprendizagem tutorial de natureza coletiva e interdisciplinar; contribuir para a elevação da qualidade da formação acadêmica dos alunos de graduação; promover a formação de profissionais com qualificação técnica, científica e acadêmica; formular novas estratégias de desenvolvimento e modernização do ensino superior no país; estimular o espírito crítico, bem como a atuação profissional pautada pela ética, pela cidadania e pela função social da educação superior". Maiores informações em: <https://www.prograd.ufop.br/%3Cnolink%3E/pet-programa-de-educacao-tutorial>. Acesso em 27/09/24.

6 De acordo com o site da CAPES, o PRP é um programa que tinha por "finalidade fomentar projetos institucionais de residência pedagógica implementados por Instituições de Ensino Superior, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação inicial de professores da educação básica nos cursos de licenciatura".

Tendo em vista todos esses programas, dentre as oficinas que ministrei destaco uma sobre frações, elaborada para turmas do 7° (sétimo) e 8° (oitavo) ano. Nela, pude abordar o assunto referido intercalando desafios em forma de questões e jogos, tais como, jogo da memória e quiz, ambos desenvolvidos na plataforma WordWall[7] dado o contexto de isolamento social.

Outra oficina que me marcou, ocorreu durante meu período de estágio e envolveu trigonometria. Ela foi aplicada em duas turmas do 1° ano do Ensino Médio. Contudo, somente em uma das turmas pude desenvolver o conteúdo de modo que os alunos pudessem participar como planejado. A oficina exigia que parte da atividade fosse realizada fora da sala de aula, visto que seu objetivo consistia em medir altura de objetos de difícil acesso e parte de sua execução demandava a manipulação de um teodolito e conceitos trigonométricos.

Se as primeiras experiências com oficinas produziram em mim visões quase ingênuas sobre esse formato, essa de trigonometria fomentou em mim um olhar mais paciente e crítico. Explico: uma das turmas acompanhadas funcionava no turno da noite, o que acabou dificultando a realização de ações fora de sala de aula. Ademais, a manipulação de valores aproximados, inerentes ao instrumento (teodolito) no uso de conceitos trigonométricos fez com que ocorressem imprecisões significativas nos resultados. Compete elucidar que nesse tipo de trabalho, os resultados tornam-se satisfatórios quando, por exemplo, mensura-se a altura de objetos grandes, como postes de iluminação ou árvores. Já a realização de toda a atividade em sala de aula não trouxe resultados plausíveis, dado que os objetos eram pequenos e a aproximação de valores impactou significativamente no valor final. Assim o problema experimentado na turma noturna, não se repetiu na turma da manhã.

Enfim, essas vivências em sala me ensinaram que oficinas não solucionam todos os problemas do ensino de Matemática, ou seja, a meu ver, elas não devem ser consideradas como a única alternativa ao *paradigma do exercício* (Skovsmose, 2000). Contudo, acredito que lançar mão de uma oficina é uma dentre diversas estratégias que o professor pode utilizar para promover um ambiente no qual os alunos desenvolvam os conceitos pretendidos.

Acrescento ainda que, de certo modo, ao trabalhar com oficinas, vejo um processo muito importante para os docentes, sobretudo, os que atuam na Educação Básica. Refiro-me

---

Maiores informações em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/programas-encerrados/programa-residencia-pedagogica>. Acesso em 27/09/24.

7 Plataforma que possui como recurso ferramentas de alfabetização online por meio de jogos interativos.

ao processo do inacabamento e ao fato de como ele está ligado ao ato de ensinar. Alinho-me, portanto, com Paulo Freire, para quem:

> A consciência do mundo e a consciência de si como ser inacabado necessariamente inscrevem o ser consciente de sua inconclusão num permanente movimento de busca. Na verdade, seria uma contradição se, inacabado e consciente do inacabamento, o ser humano não se inserisse em tal movimento [...]. É na inconclusão do ser, que sabe como tal, que se funda a educação como processo permanente (Freire, 1996, p. 21).

Ora, assim sendo, vislumbrei a possibilidade de, neste trabalho monográfico, pensar em alternativas para abordar a temática que antes referi que me fascina e na qual sinto dificuldade: a probabilidade. Por exemplo: considero que grande parte das operações demandadas para o cálculo da probabilidade de um evento envolve, de certo modo, operações simples. Todavia, a interpretação de fenômenos e resultados pode ser complexa. Pensei, então: por que não pensar em oficina de probabilidade? Por que não contextualizar alguma situação com problemas que possa desafiar os alunos da Educação Básica? Por que não fazer uso das oficinas como ferramentas capazes de auxiliar o professor na explicação e na contextualização de definições e teoremas probabilísticos?

A escolha de apresentar oficinas sobre o tema de probabilidade está em consonância com a noção de que essas atividades podem ser “como instrumentos de apoio didático e pedagógico, [as] oficinas visam superar as dificuldades dos alunos de forma descontraída, sem a pressão de sala de aula, deixando o aluno mais à vontade para participar” (Monteiro, 2019, p.1). Além disso, acredito que a Matemática também possa ser divertida. Por que não? Parece-me fundamental que o espírito de curiosidade e o prazer em aprender nunca se percam.

Assim, considero que poderei colaborar ao propor alternativas ao ensino da Matemática que, em sala de aula é, por vezes, um processo que ocorre de maneira linear, onde resultados e teoremas são enunciados e dados como a última palavra sobre o assunto. E, por outro lado, aos estudantes, cabe a reprodução desses conceitos em situações, na maioria das vezes, estritamente matemáticas, como se a Matemática fosse um fim em si mesma. Nesse cenário, como Viana *et al.* (2013), entendo que:

> Diante disso é importante ressaltar que a matemática não se resume apenas a listas de atividades, fórmulas que devem ser decoradas e fatos memorizados, ela vai muito além do que muitas vezes se pode imaginar. Desse modo, a matemática deve ser iniciada com a criança de forma concreta, propiciando construir um conhecimento lógico matemático adequado, de modo que tais ensinamentos possam ser aprimorados a medida que seus conteúdos são aprofundados, inibindo barreiras e traumas comuns aos alunos durante o ensino de matemática (Viana *et al*., 2013, pp. 93-94).

Em suma, minhas experiências sugerem a mim que o ensino da Matemática na Educação Básica tem sido permeado por diversos limitadores. Incomodado com tal situação, ao longo dos capítulos desta monografia, refletirei sobre alternativas a essas limitações, especificamente com foco no ensino de probabilidade na Educação Básica. Ademais, ressaltarei reflexões que incidirão sobre atividades pensadas para o formato de oficinas.

Na literatura especializada, por exemplo, Handaya (2017) e Pessoa (2009) destacam como um dos limitadores para o ensino de probabilidade o desenvolvimento do raciocínio combinatório e probabilístico tanto por parte dos estudantes quanto dos professores. Além disso, Castilhos (2016) aponta outro aspecto, qual seja, a necessidade excessiva do uso de fórmulas, abstendo-se da lógica e noções intuitivas. Nesse mesmo horizonte, Morais (2017), por sua vez, identifica como uma limitação a introdução abstrata de tópicos, com uso excessivo de teoremas e fórmulas, prejudicando a aprendizagem e atrapalhando o desenvolvimento do raciocínio autônomo.

Posto isso, ressalto concordância com Soares *et al*. (2022) quando os autores consideram que a ação do professor pode, em alguns casos, minimizar os efeitos desses limitadores. No caso da probabilidade, acredito que o emprego de oficinas, com vistas à aprendizagem desse conteúdo, seja uma alternativa promissora para a atuação do professor. Sendo assim, este trabalho tem como principal objetivo **descrever analiticamente duas propostas de atividades que envolvem conceitos probabilísticos, pensadas para auxiliar o professor de Matemática na Educação Básica**.

Para tal fim, este texto foi organizado da seguinte forma: no **capítulo dois** exploro alguns fatos históricos relacionados a probabilidade, especialmente aqueles ligados a problemas e desafios como o problema da divisão de apostas; no **capítulo três,** analiso como o assunto probabilidade é tratado em documentos oficiais, destacadamente nos PCN e na BNCC; no **capítulo quatro**, apresento ponderações sobre aspectos metodológicos considerados para o desenvolvimento da monografia. Depois disso, no **capítulo cinco**, coloco em relevo resultados e teoremas da probabilidade clássica[8] e frequentista. Em seguida, nos **capítulos seis** e **sete**, descrevo analiticamente duas oficinas intituladas: “Corrida de Cavalos” e “Oficina das Três Portas”. Por fim redijo, na conclusão da monografia, uma seção de considerações finais, seguida das referências bibliográficas.

8 Também denominada de Probabilidade Laplaciana, a Probabilidade Clássica é definida como quociente entre os casos favoráveis pelos casos totais.

2 RESGATE SUCINTO DA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Consideramos[9] que, dada a relação deste trabalho com o ensino de probabilidades, uma demanda que a nós se coloca seja discorrer, ainda que brevemente, sobre a dimensão histórica dessa área da matemática. Todavia, antes de fazê-lo, colocamos realce em duas posições assumidas: i) partilhamos a ideia de que não existe “a” história, mas sempre “uma” versão da história; ii) entendemos que a ideia de apresentar o lado histórico de uma determinada área da matemática é, possivelmente, uma forma de favorecer ao estudante vislumbrar uma nova trilha rumo à aprendizagem matemática. Acrescentamos ainda que, ao entrar em contato com aspectos históricos, o estudante pode explorar e conhecer não somente os autores, mas também as suas motivações e os desafios enfrentados por eles em suas empreitadas ao longo dos séculos.

Para o caso da probabilidade, em linhas gerais, daremos destaque à história da matemática ocidental[10], desenvolvida no continente europeu, com raízes na cultura grega; é por onde iniciaremos nosso estudo.

Nessa direção, parece haver consenso entre os autores das pesquisas consultadas (Mlodinow, 2009; Silva, 2020) sobre o marco inicial registrado para o início do pensamento sobre o acaso ter se configurado a partir do interesse pelos jogos de azar e pelas ligações entre o acaso e um conjunto de crenças.

Leonard Mlodinow, autor do livro – **O andar do bêbado** (Mlodinow, 2009), destaca o jogo “Astrágalo” como um dos primeiros com esse viés. Segundo ele, as peças do jogo eram ossos de animais, desempenhando o papel de nossos atuais dados, e seu objetivo era lançar uma “peça do jogo” e obter uma das 4 (quatro) faces estáveis, mesmo que as peças possuíssem 6 (seis) faces.

Em função da anatomia dos ossos, a chance de cada uma das faces não era equiprovável[11], de modo que duas delas tinham probabilidade de 40% de ser o resultado,

---

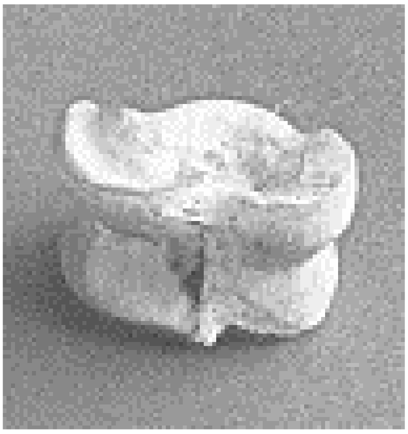
9 A partir do presente capítulo, o texto alterará entre primeira pessoa do plural, para diferenciar o desenvolvimento conjunto de orientando e orientador, e a primeira pessoa do singular, para evidenciar considerações pessoais do autor.

10 Destacamos que, como toda escolha, a nossa apresenta limitações. Com isso queremos ressaltar nossa ciência sobre o recorte eurocentrado que realizamos neste trabalho. Todavia, temos a consciência de que já existem linhas de pesquisa e trabalhos que ajudam a ampliar os olhares promovidos por visões hegemônicas sobre a história da Matemática. Por exemplo, Soares (2023). em sua dissertação. revela que havia ampla produção matemática na região africana do Magrebe durante a Idade Média, período em que a Europa passava por uma realidade bem diferente dessa.

enquanto as outras duas, algo próximo de 10% (Mlodinow, 2009). De acordo com o mesmo autor:

> Os gregos também utilizavam astrágalos ao consultarem seus oráculos. As respostas que obtinham eram tidas como palavras dos deuses. [..]. Porém, apesar da importância do jogo de astrágalos, tanto nas apostas como na religião, os gregos não fizeram nenhum esforço por entender as regularidades desse jogo (Mlodinow, 2009, p. 38).

Figura 1 - Peças do jogo Astrágalos



Fonte: Viali (2008)

O autor supracitado afirma que pouco foi desenvolvido sobre o estudo das probabilidades em sociedades como a grega e a romana, e até mesmo as mesopotâmicas, nas quais foram encontrados registros de jogos semelhantes. Isso seria devido à crença generalizada de que “[...] o futuro se desvelava conforme a vontade dos deuses” (Mlodinow, 2009, p. 38).

Sobre o jogo Astrágalos, destacamos que um exemplo de resultado é a chamada jogada vênus, que consiste no resultado obtido com 4 (quatro) peças do jogo, cada uma com uma das 4 (quatro) faces voltadas para cima, configurando o resultado mais valorizado. No entanto, essa não era a configuração de peça mais difícil de se obter no jogo, o que sugere o desconhecimento sobre quais casos eram mais ou menos prováveis (Mlodinow, 2009).

Dessa forma, elucidamos que uma hipótese para o início do estudo daquilo que veio a se tornar um campo de estudo da Matemática, a teoria de probabilidades, pode ser a realização de jogos aparentemente simples. Acerca dos jogos, eles, além de uma competição, eram

11 Dizemos que um certo experimento aleatório com um número finito de elementos em seu espaço amostral é equiprovável se, para cada evento unitário pertencente ao conjunto, todos possuem a mesma probabilidade de ocorrência. Assim, podemos determinar a probabilidade de ocorrência de um evento dado o quociente entre o número de casos favoráveis sobre casos possíveis (Santos, 2015).

utilizados em apostas, para a realização de previsões sobre o futuro, para mediar a decisão de conflitos ou mesmo na divisão de heranças (Junqueira, 2015).

A partir dos séculos XV e XVI, alguns italianos foram pioneiros em termos de efetuar cálculos probabilísticos. Tendo em vista o que conseguimos acessar, todavia, não identificamos, por parte deles, formulações de teoremas ou conceitos de “peso”. O que percebemos é que eles trabalharam com algumas situações concretas, indo além da mera enumeração ou atribuição de “intervenção divina”. Entretanto, o “pano de fundo” para os estudos ainda eram os jogos de azar: frequência de resultados e ganhos (Silva, 2020).

Nessa direção, Girolamo Cardano (1501 - 1576), Niccolò Fontana (Tartaglia – 1499 - 1557), personagens notórios no campo da Matemática pelas disputas relacionadas à descoberta da solução de expressões algébricas de grau três, assim como Galileu Galilei (1564 - 1642), famoso astrônomo, físico, matemático e filósofo, são exemplos de estudiosos italianos que se destacaram na história das probabilidades.

Sobre esses personagens, destacamos que os dois primeiros teriam iniciado os estudos do que, mais tarde, ficaria conhecido como “problema da divisão de apostas”, que será enunciado posteriormente ainda nesta seção. Não obstante, ele também, participou do início do que seria um estudo sobre espaço amostral. O último dos personagens supracitados, contribuiu com a solução do problema do desequilíbrio entre a soma 9 (nove) e a soma 10 (dez) no lançamento de três dados (Silva, 2020).

Acerca da contribuição de Galileu, tendo em vista o referido problema, Silva (2020) assevera que os jogadores, pela prática, haviam percebido que a soma 10 ocorria mais vezes que a soma 9, embora (aparentemente) houvesse seis combinações para formar cada um dos resultados:

- Soma 9: [1;2;6], [1;3;5], [1;4;4], [2;2;5], [2;3;4] e [3;3;3];

- Soma 10: [1;3;6], [1;4;5], [2;2;6], [2;3;5], [2;4;4] e [3;3;4].

Isso parecia um problema sem solução, fazendo com que a prática desafiasse a lógica, pois quanto mais jogavam, mais ficava aparente a vantagem da soma 10. Ainda de acordo com Silva (2020), Galileu notou que havia mais inversões, ou modos diferentes, de se obter cada uma dessas combinações, verificando que o total para a soma 10 era de 27, enquanto para soma 9 era de 25 inversões. Por exemplo, para se obter a somatória 10 com as faces 1, 3 e 6, havia seis possibilidades [1;3;6], [1;6;3], [3;1;6], [3;6;1], [6;1;3] e [6;3;1], e não apenas uma combinação, como imaginavam os jogadores.

Nesse direcionamento, problemas relacionados com a avaliação do espaço amostral ou com a comparação entre resultados que contrariam a intuição, a nosso ver, podem favorecer a construção do conhecimento matemático no ambiente escolar. Um exemplo de atividade em que isso pode ocorrer, e que será detalhado no capítulo 5 (cinco), é a "Corrida de Cavalos" (Skovsmose, 2000). Por meio dela, cuja realização pode se efetivar no ambiente de uma oficina, é possível realizar uma avaliação da recorrência de resultados de um jogo de dados e, além disso, introduzir conceitos relacionados ao campo da probabilidade.

Acrescenta-se ao exposto que outros autores, dessa vez franceses, tem parte de sua produção registrada na história da probabilidade. Referimo-nos a Pierre de Fermat (1607 - 1665) e a Blaise Pascal (1623 - 1662). Segundo Junqueira (2015), Fermat e Pascal teriam sido reconhecidos como cientistas, filósofos e matemáticos de suas épocas. Ademais, contemporâneos, teriam sua contribuição reconhecida no campo da teoria das probabilidades (Junqueira, 2015).

Ainda sobre Fermat e Pascal, acredita-se que eles, motivados por dois problemas apresentados por um desafiante, Cavaleiro de Méré, buscaram soluções e obtiveram certos resultados. Sobre isso:

> Segundo boa parte das fontes consultadas foi um destes dois problemas (1) **problema dos pontos (divisão de apostas)** e (2) **dos dados** que motivou a correspondência entre Pascal e Fermat e, portanto, iniciou a teoria da probabilidade. [...] levando ao nascimento de mais uma disciplina matemática. (Viali, 2008, p. 148, grifos do original).

Isso posto, passamos a discorrer sobre o mencionado problema da divisão das apostas. Ele pode ser enunciado da seguinte forma: dois jogadores, de habilidades equivalentes e com chances equiprováveis de vitória em cada rodada, disputam uma série de partidas tais que, três lançamentos favoráveis a um deles garantem a vitória. Fermat e Pascal, criaram alguns cenários para investigar como poderia ocorrer a divisão das apostas caso o jogo fosse interrompido antes que qualquer um dos jogadores alcançasse os três lançamentos favoráveis. Dentre esses cenários, destacamos o que o jogador 1 (um) encontra-se com dois pontos e o jogador 2 (dois) com apenas um ponto. Suponha que cada jogador apostou 32 moedas e o vencedor levará todas elas. Suponha, também, que a partida, por alguma eventualidade, tenha sido interrompida dado o cenário descrito acima. Nesse horizonte, uma provocação se coloca: como a aposta deve ser dividida (Viali, 2008)?

A solução proposta por Pascal foi analisar todas as possibilidades futuras do desenvolvimento do jogo (Silva, 2020). Desse modo, Pascal buscava avaliar a divisão baseada na probabilidade de vitória para cada jogador. Em Pombo[12] (s.d) apud Calabria e Cavalari (2013, pp. 13 e 14) temos um trecho traduzido da carta que apresenta a seguinte solução:

> Suponhamos que o primeiro [jogador] tem 2 pontos e outro 1 ponto. Eles jogam agora uma vez na qual as hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, ele ganhará a totalidade do que está apostado, ou seja, 64 pistolas[13]. Se o outro ganhar eles ficarão 2 para 2 e, consequentemente, se pretenderem dividir acontecerá que cada um retirará o valor da sua aposta, ou seja, 32 pistolas. Considere então Sr. que se o primeiro ganha 64, serão dele. Se perder, 32 serão dele. Então, se eles não quiserem jogar este ponto e queiram dividir, sem o fazer, o primeiro jogador deverá dizer: "Eu tenho 32 pistolas, porque, mesmo que perca elas são minhas. Quanto às outras 32 pistolas, talvez as venha a ganhar ou talvez você as ganhe, o risco é igual. Assim, vamos dividir as 32 pistolas a meias, e eu fico com as 32 que são realmente minhas" Ele terá então 48 e o outro 16.

A solução acima também pode ser abordada por intermédio da árvore de probabilidade. Acrescentamos que a solução enunciada por Pascal, com base no conceito de árvore de probabilidade, pode ser apresentada da seguinte forma: a solução está apoiada na chance de vitória de cada jogador e o total máximo de rodadas; no primeiro caso, se o jogador 1 (um) ganhar a próxima rodada, ele levará o prêmio; caso perca, cada jogador terá duas vitórias e uma nova rodada é disputada; caso vença a próxima rodada, qualquer um dos jogadores será declarado o vencedor e levará o prêmio total.

O raciocínio de Pascal, como podemos confirmar em Calabria e Cavalari (2013), era baseado no fato do jogador 1 (um) possuir dois pontos e o jogador 2 (dois) somente um ponto. O jogo, deveria ser encerrado em, no máximo, duas rodadas. Para tanto, Pascal buscou descrever todos os resultados possíveis, independente do fato de que o jogo poderia ser decidido em uma rodada, situação essa que ocorre se o jogador 1 (um) ganhar a próxima rodada. A estratégia adotada para realizar o cálculo de uma divisão justa "considera que mesmo que o primeiro jogador ganhe na primeira jogada, os dois jogadores devem efetuar o número máximo de jogadas" (Calabria e Cavalari, 2013, p. 35). Assim, a árvore de

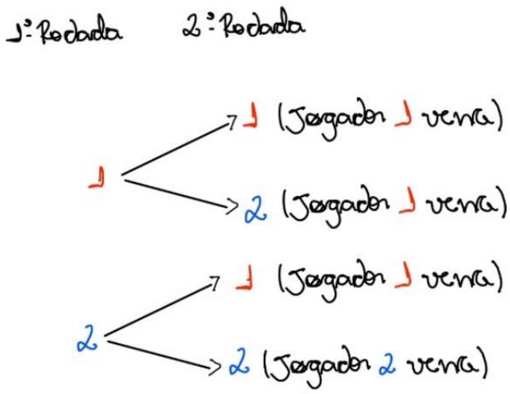
---

12 POMBO, Olga. Cartas de Pascal de Fermat. s/d. <Disponível em: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/7cartas/pascalfermat.htm>. Acesso: 17/09/2024.

13 A palavra Pistolas faz referência à moeda da época.

possibilidade abaixo descreve os resultados possíveis a partir do fato enunciado acima, isto é, o jogador 1 (um) com dois pontos e o jogador 2 (dois) com um ponto somente.

Figura 2 – Árvore de Probabilidade do desafio da Divisão de Apostas



Fonte: Elaboração Própria

Em termos probabilísticos, o jogador 1 possui $\frac{3}{4}$ de chance de vitória. Restando $\frac{1}{4}$ de chance para o jogador 2 (Viali, 2008). Dessa forma, dados os resultados enunciados acima, e com base em nossos estudos que realizamos, tanto Pascal quanto Fermat assumem que uma divisão honesta do prêmio deve ser baseada no produto da probabilidade de vitória de cada jogador pelo prêmio total em disputa. Logo, tomando o cenário enunciado, o jogador 1 deverá receber $\frac{3}{4}.64 = 48$, e o jogador 2 receberá $\frac{1}{4}.64 = 16$. Por meio de raciocínio análogo ao apresentado para o caso acima, Pascal descreveu outras duas situações. A primeira, diz respeito ao fato do jogador 1 (um) possuir duas vitórias e o jogador 2 (dois) nenhuma, já para segunda situação, Pascal supõe o fato do jogador 1 (um) possuir uma vitória e o jogador 2 (dois) nenhuma. Resultados que podem ser encontrados em Viali (2008).

Em prosseguimento, colocamos em relevo as contribuições de Christiaan Huygens (1629 - 1695). Nascido nos países baixos, segundo Silva (2020), ele foi o primeiro a formalizar e escrever um livro exclusivamente sobre o assunto de probabilidade. Destacamos que a ele são creditadas as regras de probabilidade e o conceito de esperança (Silva, 2020).

Nesse grupo de estudiosos a quem se credita o desenvolvimento de conceitos e teoremas no campo da probabilidade, também se reconhecem nomes como: Jakob, Johann e Nicolaus I, todos pertencentes à família de Bernoulli. Vale um destaque para a obra *Ars*

Conjectandi[14], que compilou diversos resultados relacionados ao campo da probabilidade e apresentava uma visão frequentista sobre os resultados, uma interpretação que é discutida no capítulo 5 (cinco). Além disso, o documento referido serviu de base para a lei dos grandes números, assim apresentada:

> Se um evento de probabilidade **p** é observado repetidamente em ocasiões independentes, a proporção da frequência observada deste evento em relação ao número total de repetições converge em direção a **p** à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande (Caire, 2013, p. 34, grifo nosso).

Para ilustrar um resultado que decorre da lei dos grandes números apresentamos um exemplo. No lançamento de uma moeda honesta, onde os resultados tendem para ½ (ou cara ou coroa), a chance de sair cada uma das faces, a partir de n lançamentos sendo n um valor grande, será ½. "Ou seja, cálculo das probabilidades de resultados futuros com base em resultados limitados do passado" (Zindel, 2018, p.12).

Para compor esse olhar histórico que propusemos na Monografia, também direcionamos nosso olhar para estudiosos da probabilidade condicional. Nessa direção, destacamos que ao se tratar de probabilidade condicional um nome que recorrentemente é lembrado é o do pesquisador Thomas Bayes (1702 - 1761). A Probabilidade Bayesiana baseia-se na "maneira de entender como a probabilidade de uma teoria ser verdadeira é afetada por uma nova evidência" (Tietz, 2018[15] *apud* Silva, 2020, p.40).

Acerca disso, Rossatto *et al* (2016, p.4) afirmam que: "O Teorema de Bayes, também é conhecido como Teorema das Causas e, sua aplicação, pode ser usada para obter vários resultados nas mais diversas áreas do conhecimento, desde o mercado financeiro até a medicina".

Ainda sobre esse tipo de probabilidade, em Coutinho (1994) é destacado que: "Os métodos Bayesianos têm sua origem na ideia de atribuir uma probabilidade às causas de um evento observado a partir de um valor tomado "a priori" e recalculado em função dessa observação". Resultado semelhante foi explorado na oficina das Três Portas, descrita no capítulo 6 (seis).

---

14 Ars Conjectandi é uma obra creditada a Jacob Bernoulli com publicação póstuma por seu sobrinho Nikolas Bernoulli. Nessa obra foram compilados alguns resultados como: um ensaio geral sobre a teoria de combinações, a solução de problemas relacionados aos jogos de azar e o uso de resultados matemáticos aplicados a problemas-cívicos, morais e econômicos (Zindel, 2018).

15 TIETZ, Tabea. The Important Theorem of Thomas Bayes. Disponível em: <http://scihi.org/theorem-thomas-bayes/>. Acesso em: 02 out. 2024.

Ademais, para ilustrar um caso que envolve esse tipo de probabilidade, apresentamos, a seguir, uma situação-problema cuja solução envolve Probabilidade Bayesiana.

> A probabilidade de câncer de mama é de 1% para uma mulher de quarenta anos de idade que participa de exames de rotina. Sabe-se que a mamografia apresenta resultado positivo em 80% das mulheres com câncer de mama, mas esse mesmo resultado ocorre também com 9,6% das mulheres sem o câncer. Uma paciente nessa faixa etária tinha uma mamografia positiva em um exame de rotina. Qual é a probabilidade dessa paciente realmente ter um câncer de mama? (Junqueira, 2015, p. 9).

Compete ressaltar que, dois outros matemáticos também são lembrados por construções relacionadas com a probabilidade bayesiana, quais sejam: Richar Price (1723 - 1791), por meio da documentação e publicação dos resultados e Pierre - Simón Laplace, reconhecido no campo da probabilidade por formalizar e definir as bases de uma teoria, como a multiplicação de eventos, a definição clássica de eventos como a razão entre casos favoráveis pelos casos possíveis, e a aplicação em tribunais no direito (Silva, 2020).

No entanto, o desenvolvimento de qualquer campo do conhecimento não ocorre apenas com “feitos notáveis”, mas também a partir de erros e equívocos, ou seja, entendemos que o caminho para uma teoria refinada e bem definida não é reto, mas, sim, “tortuoso e cheio de pedras”. Ilustra essa nossa afirmação o excerto abaixo com o “erro” de raciocínio de D’ Alembert (1717 – 1783) para a probabilidade de tirar, em até duas jogadas, a face cara no lançamento de uma moeda.

> Entretanto, mesmo o conceituado matemático do século XVIII, Jean Le Rond D’ Alembert, à época um dos mais influentes cientistas franceses, sustentou que a probabilidade de se conseguir uma cara em dois lançamentos consecutivos era de 2/3, por entender que haveria apenas três casos possíveis equiprováveis, ou seja, C, KC e KK. Na verdade, ao pensar num primeiro lançamento sendo cara, nem cogitou o segundo lançamento neste caso, por já ter obtido o resultado esperado (Junqueira, 2015, p.8).

Assim, à guisa de síntese, destacamos que o presente capítulo buscou: trazer alguns achados históricos que colocassem em relevo resultados e problemas semelhantes aos apresentados na Educação Básica, bem como ressaltar o trabalho de pessoas que contribuíram para tais resultados.

Cabe reafirmar que não foi nossa intenção produzir o entendimento de que existe uma história absoluta, mas, sim, um olhar recortado pelo presente, para um cenário do passado, ou, em outros termos: “Antes de tudo, devemos ter em mente que escrever história é gerar um passado, circunscrevê-lo, organizar material heterogêneo dos fatos para construir no presente uma razão (Chaquiam, 2017[16], *apud* Vasconcelos et al, 2022, p. 33)". Sobre isso, a questão é que optamos por resgatar parte da história da probabilidade para localizar seu estudo no passado (gerar um passado). Afinal, entendemos que esse recorte da história nos proporcionaria uma base mais sólida para abordar o assunto.

16 CHAQUIAM, Miguel. Ensaios Temáticos: história e matemática em sala de aula. SBEM-PA, Belém, 2017.

3 A PROBABILIDADE EM DOCUMENTOS CURRICULARES OFICIAIS

No Brasil, a temática de probabilidade é trazida à tona nos documentos oficiais do governo federal, que são utilizados na elaboração dos currículos das disciplinas escolares. Portanto, o presente capítulo tem como objetivo principal apresentar uma reflexão sobre como a temática probabilidade é abordada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017), que é um documento normativo dos currículos escolares no Brasil. Ademais, pretendemos refletir também sobre probabilidade à luz do que encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997).

Isso posto, ressaltamos na primeira seção do capítulo, de maneira resumida, que abordaremos a criação da BNCC tendo em vista o contexto de influência de movimentos e documentos históricos anteriores a ela. Nas seções 3.2 e 3.3, respectivamente, discorreremos sobre o tema probabilidade nos PCN e na BNCC.

3.1 Da Educação Para Todos à BNCC: um olhar para o contexto

A Declaração Universal dos Direitos Humanos, proclamada pela Assembleia Geral das Nações Unidas (ONU), em 10 de dezembro de 1948, estabeleceu que "toda pessoa tem direito à educação". Entretanto, embora tenham sido empreendidos esforços com o objetivo de garantir a todos esse direito, diversos problemas parecem evidenciar que ainda falta muito para conseguirmos esse status (UNICEF, 1994).

Diante desse cenário, surgiram reações de alguns setores da sociedade, refletidas, por exemplo, em debates em eventos ao redor do mundo, com o objeto de encontrar caminhos para proporcionar educação a todos e todas. Um desses eventos foi a Conferência Mundial de Educação para Todos, ocorrida em Jomtien, na Tailândia em 1990, que aprovou a Declaração Mundial de Educação para Todos (UNICEF, 1994).

Sobre essa conferência, de acordo com Flach (2015, p.742):

> O evento foi marcado pela participação de governos, agências internacionais, organismos não governamentais, associações profissionais e autoridades educacionais provenientes do mundo inteiro. Os 155 países (dentre os quais o Brasil) que subscreveram a Declaração assumiram o compromisso de garantir a educação básica de qualidade para todas as pessoas (crianças, jovens e adultos).

Ainda sobre a conferência, no artigo 1° de seu relatório, foi estabelecida a seguinte meta: satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem. Cada pessoa, seja criança, jovem ou adulto, deveria estar em condições de aproveitar as oportunidades educativas voltadas para satisfazer suas necessidades básicas de aprendizagem (UNESCO, 1990). Ademais, a conferência influenciou a definição de parâmetros a serem alcançados por instituições e entes federativos, além de definir o papel de agentes formadores, com destaque para professores. Em particular:

> [...]podemos afirmar que o compromisso [assumido na conferência de Jomtien] de universalizar a educação básica no contexto brasileiro ficou entendido como a necessidade de democratizar o ensino fundamental. Isso ocorreu, principalmente, em relação à universalização do acesso, sem a devida contrapartida de melhoria interna do sistema educativo, tais como currículo, formação de professores, avaliação, etc (Flach, 2015, p. 742).

Cabe acrescentar ainda que, ao longo dos anos, esse documento influenciou a criação de políticas públicas ao redor do mundo, visando alcançar o objetivo da educação para todos. A despeito disso, parece-nos necessário não produzir um olhar ingênuo sobre esse objetivo. Por exemplo, destacamos que a partir da Conferência e da Declaração Mundial de Educação para Todos, o Banco Mundial mudou seu eixo de atuação nos países em desenvolvimento, tais como o Brasil. Segundo Flach (2015) tal instituição passou a agir na definição das políticas em detrimento de apenas no financiamento delas. Sobre isso, a autora assevera que:

> A reforma educativa para os países em desenvolvimento proposta pelo Banco Mundial a partir de 1995 demonstra vinculação com os interesses econômicos do capitalismo mundial, o qual pressupõe estreita ligação entre as demandas do setor produtivo requerendo trabalhadores mais flexíveis e que atendam rapidamente as necessidades daquele setor (Flach, 2015, p. 744).

Assim, parece-nos considerável afirmar que a legislação educacional brasileira foi influenciada por esse contexto. Em particular, a Lei de Diretrizes e Bases – LDB, que passou a regular a organização da educação brasileira, foi promulgada em 1997. No parágrafo 1º do Art. 87 desse documento, está escrito:

> 1º. A União, no prazo de um ano a partir da publicação desta Lei, encaminhará, ao Congresso Nacional, o Plano Nacional de Educação, com diretrizes e metas para os dez anos seguintes, em sintonia com a **Declaração Mundial sobre Educação para Todos** (Brasil, 1997, p. 32, grifo nosso).

O artigo referido evidencia que o plano nacional de educação sofreria influências da declaração mundial aprovada na Tailândia. Um dos documentos que contém diretrizes para o ensino, influenciado pela LDB e, consequentemente, pela Declaração Mundial sobre Educação para todos, foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997), que nortearam a criação de currículos e a prática de professores desde sua implementação.

Mais recentemente, em 2017, foi promulgada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um “documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (Brasil, 2017, p.5). Embora tenha sofrido influência dos PCN, a BNCC é um documento de caráter normativo, enquanto os PCN se apresentam como “parâmetros”. Em outros termos, a BNCC possui força de lei, isto é, trata-se de um documento que deve ser seguido na construção do Projeto Político Pedagógico (PPP) das escolas.

Outro ponto estrutural que diferencia a BNCC dos PCN é a organização do conteúdo. A BNCC organiza individualmente, por ano escolar, as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, ao passo que os parâmetros trabalham com a noção de ciclos formativos, sugerindo temáticas a serem abordadas sem detalhar formas específicas de progressão dessas habilidades.

No caso específico da probabilidade, que é nosso interesse particular no presente estudo, há diferenças na forma como o assunto é proposto nesses documentos. Na próxima seção, apresentaremos como o tema probabilidade é abordado nos PCN e, depois disso, na BNCC. Antes contudo, vale ressaltar que, embora a BNCC seja o documento mais recente que influencia a elaboração de currículos e o desenvolvimento de práticas dos docentes, tendo em vista as experiências que conhecemos, afirmamos que os PCN ainda têm forte influência na abordagem de diversos professores.

3.2 Probabilidade nos PCN

De acordo com Pinheiro *et al* (2020), os PCN foram os primeiros documentos nacionais com referência e seção específica destinada ao tema da probabilidade. Para as autoras:

> Nele [PCN], o ensino de Probabilidade foi indicado no Brasil em documentos oficiais de ensino pela primeira vez. Esses documentos referem-se à probabilidade como sendo um conhecimento necessário à vida em sociedade e sugere que, aos demais conteúdos já propostos para o Ensino Fundamental, fossem acrescentados “aqueles que permitem ao cidadão **tratar as informações** que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a **raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade** [...]” (Pinheiro *et al*, 2020, p. 143, grifos no original).

Os conceitos associados à probabilidade estão contidos no bloco de conteúdo intitulado “Tratamento da Informação” que consideramos mais amplo que o da BNCC, por exemplo (Probabilidade e Estatística). Esse bloco abrange conteúdos matemáticos relacionados à estatística, análise combinatória e probabilidade. A discussão e orientação dessas temáticas começa a partir do segundo ciclo do segundo ano do ensino fundamental, visando proporcionar uma compreensão de que grande parte dos eventos do cotidiano é de natureza aleatória, e que parte desses eventos pode ser quantificada em termos de ocorrência. Adicionalmente, são introduzidas noções de acaso e incerteza, considerando as probabilidades associadas a esses eventos (Pinheiro *et al*, 2020).

De caráter orientador, os PCN possuem adesão facultativa. Logo, escolas e instituições de ensino não necessitam "obrigatoriamente" aderir ao que nele se recomenda. Os parâmetros podem ser vistos, portanto, como documentos orientadores, mas não detêm força de lei na prática de ensino em comparação com a BNCC.

3.3 Probabilidade na BNCC

Como mencionado, a BNCC opera com base em um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais, as quais são apresentadas em cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, estatística e probabilidade. Como habilidade geral, portanto, atravessando essas diferentes unidades temáticas, considera-se como obrigatório que o estudante ao longo do currículo seja capaz de: "desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas" (Brasil, 2017, p.274). Nessa direção, Pinheiro *et al* (2020, p. 144) afirmam que a BNCC indica: "[...] o estudo de noções de probabilidade que promovam a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos".

Acrescentamos que na BNCC, na seção que discorre sobre probabilidade e estatística, foca-se em dois aspectos que contemplam todos os anos da Educação Básica: incerteza e tratamento de dados. O documento propõe a abordagem de conceitos e fatos ligados ao cotidiano dos alunos, assim como o uso de tecnologias para o desenvolvimento de habilidades.

Compete ainda destacar que a BNCC apresenta recomendações distintas de abordagem da probabilidade e estatística tendo em vista os anos iniciais (1° ao 5° ano) e os anos finais (6° ao 9°) do Ensino Fundamental. Para os anos iniciais, a BNCC (Brasil, 2017, p.274) demanda:

> Promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no

> desenvolvimento na noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis.

Já para os anos finais:

> O estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividade nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral (Brasil, 2017, p.274).

Assim, mesmo que reconheçamos a existência de diferenças entre a BNCC e os PCN, parece-nos plausível afirmar que ambos orientam que seja garantido ao estudante o entendimento de eventos aleatórios, frequência de ocorrência de um evento e quantificação de eventos. Sobre isso, os PCN sugerem que seja iniciado o estudo da temática no ciclo de 9° e 10° ano do estudante (9° ano do Ensino Fundamental e 1° ano do Ensino Médio, respectivamente), ao passo que a BNCC determina que tal iniciação ocorra desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ademais, com a intenção de ilustrar para o leitor a natureza das habilidades relacionadas à probabilidade e estatística, na BNCC, apresentamos quatro delas, abaixo.

> -(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos (6°ano).
> -(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidade ou estimativas por meio de frequência de ocorrências (7°ano).
> -(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1 (8°ano).
> -(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos (9°ano) (Brasil, 2017, p 305 – 319).

Assim, finalizamos o presente capítulo após uma reflexão sobre o contexto político e sobre aspectos educacionais dos documentos oficiais (PCN e BNCC) que tratam da inserção da probabilidade no currículo da Educação Básica.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA MONOGRAFIA

Conforme o PPC do curso de Licenciatura em Matemática da UFOP (Ouro Preto, 2023):

> Os Trabalhos de Conclusão devem constituir-se em um momento reflexivo no qual o estudante, já em fase adiantada do curso, tenha a oportunidade de desenvolver habilidades de pesquisa em sua área de atuação, produzindo uma monografia cujo tema traga contribuições para o ensino e aprendizagem da Matemática ou para a prática docente, apresentando com precisão as ideias, as pesquisas, os dados e os resultados dos estudos realizados (Ouro Preto, 2023, p. 45).

Assim sendo, assumimos o trabalho realizado nesta monografia como um “momento reflexivo”. Para conferir algum nível de rigor e precisão às reflexões produzidas nesta monografia, estabelecemos como seu principal objetivo descrever analiticamente duas propostas de atividades que envolvem conceitos probabilísticos, pensadas para auxiliar o professor de Matemática na Educação Básica.

Para alcançar esse objetivo, realizamos três etapas. Na primeira delas, estudamos parte da literatura voltada para o ensino de probabilidade. Esse estudo foi dividido em dois enfoques. O primeiro, buscou um resgaste sucinto da história da probabilidade. O que nos mobilizou a tal enfoque foi a expectativa de que a partir desse resgate histórico pudéssemos oferecer suporte ao professor para contextualizar alguns problemas. Além disso, intencionamos explicitar a ideia de que a Matemática, como qualquer outro conhecimento humano, também se constrói no tempo, portanto, revela-se histórica.

> A história deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim, pode promover uma aprendizagem significativa, pois propicia ao estudante entender que o conhecimento matemático é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais (Paraná, 2008, p.66 apud[17] Miguel;Miorim, 2004).

Um segundo enfoque, ainda nessa primeira etapa, nos mobilizou a examinarmos, em documentos oficiais de currículo, como se recomendava a abordagem de probabilidade tendo em vista a sala de aula de Matemática da Educação Básica.

Já na segunda etapa do estudo, tendo assumido um compromisso com o olhar histórico e tendo dimensionado nossas concepções nos modos de como probabilidade aparece em documentos direcionadores de currículos no Brasil, pareceu-nos necessário um movimento de

17 MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela História na educação matemática: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

compreensão teórica de alguns conceitos da probabilidade. Para tanto, realizamos a leitura de - e nos aprofundamos teoricamente em - Hazzan (2013), Caberlim (2015), Santos (2015) e Fernandes (2018). Ressaltamos que as elaborações sobre essas leituras estão registradas no capítulo 5 (cinco).

Por fim, depois de estudar teoricamente parte do universo conceitual da probabilidade, desenvolvemos a terceira etapa da monografia. Referimo-nos ao fato de que formulamos duas propostas de oficinas com base nos resultados probabilísticos anteriormente estudados. Cabe ressaltar que essa formulação – e a análise que direcionamos sobre ela - foi influenciada por alguns pontos levantados por Skovsmose (2000) e Carvalho (2015).

Acerca da proposta dessa terceira etapa - apresentada nos capítulos 6 (seis) e 7 (sete) desta monografia -, entendemos que alguns destaques são necessários. Um primeiro é que a proposta de oficinas de probabilidade se explica porque notamos que a formação dos professores de Matemática parece frágil para dar-lhes condições para isso. Fundamenta essa afirmação, a reflexão de Fernandes, Sousa e Ribeiro (2004), sobre a formação inicial de professores de Matemática. Para os autores, a maioria dos professores de Matemática faz uma única cadeira semestral com foco em estatística e probabilidade. Isso traz, como consequência, ainda segundo eles, uma insegurança desse profissional para ensinar estatística e probabilidade. Sendo assim, pareceu-nos plausível que uma proposta relacionada com o ensino de conceitos introdutórios de probabilidade, em formato de oficina, pudesse ir ao encontro da lacuna indicada na literatura e, assim sendo, facilitasse a aprendizagem dos estudantes e o trabalho dos professores.

Mais que isso, entendemos que é possível a proposição de oficinas suficientemente atraentes para que os estudantes que nela se envolvam, assumam o papel de protagonistas, questionando, buscando respostas e investigando. Ou ainda, consideramos possível propor oficinas com potencial de se fazerem ambientes de aprendizagem do tipo Cenários para Investigação (Skovsmose, 2000). Cabe relembrar que um Cenário para Investigação é um ambiente para o qual os estudantes são convidados a participar de modo mais autônomo na busca pelo conhecimento. Nesse processo, seus modos de pensar, de problematizar, de investigar, de descobrir, aliados ao trabalho em cooperação com os colegas, podem ser (mais) valorizados.

Em particular, para a construção da primeira oficina, baseada nas noções vistas em Deodato e David (2015), foram correlacionados quatro conceitos, denominados de quatro pilares da probabilidade: acaso, experimento aleatório, espaço amostral e evento. De maneira que os conceitos podem ser explorados em etapas da oficina por meio de intervenções dos alunos e do professor.

Já para a construção da segunda oficina temos como foco os conceitos de probabilidade condicional. Essa oficina foi desenvolvida a partir dos trabalhos de Carvalho (2015), Santos (2015) e Ramos (2023). Com ela, apresentada no capítulo 7 (sete) da monografia, buscamos, por meio da oficina **das Três Portas,** explorar as relações entre eventos condicionados.

Por tudo isso, sobretudo pelo carácter descritivo interpretativo, destacamos que, em nosso entendimento, a natureza deste trabalho monográfico, o aproxima do paradigma qualitativo que para Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1998, p.131), tem como característica principal acolher investigações que:

> [...] seguem a tradição “compreensiva” ou interpretativa. Isto significa que essas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado.

Tendo, pois, essa compreensão, ressaltamos que nos entendemos nesse paradigma porque as concepções - que se revelam na proposta da construção das oficinas e na análise que empreendemos sobre esse material - revelam um certo modo de ver do licenciando autor deste trabalho sobre problemas que reconhece no ensino e na aprendizagem de probabilidade na Educação Básica.

Assim, tendo, pois, discorrido sobre os aspectos metodológicos, passamos a caracterizar a base matemática que dá suporte para as oficinas que serão, depois disso, apresentadas nos capítulos 6 (seis) e 7 (sete).

5 CONCEITOS PROBABILÍSTICOS

As oficinas que serão objeto de nossa reflexão nos capítulos 6 (seis) e 7 (sete) estão intituladas de “Corrida de Cavalos” e “Oficina das Três Portas”. Por meio delas, refletiremos sobre modos de explorar o tema probabilidade na Educação Básica.

Assim, embora entendamos que não existe uma “obrigatoriedade” em discorrer sobre a Matemática que está por “trás” delas, sentimos a necessidade de abrir este capítulo com tal finalidade. Esse desejo se justifica porque o licenciando autor desta monografia entende que tal exercício reflexivo pode colaborar com professoras e professores de Matemática interessados em ensinar probabilidade.

Posto isso, ressaltamos que o estudo da probabilidade apresentado neste capítulo será iniciado pelo que se reconhece como 4 (quatro) pilares da probabilidade (Caberlim, 2015): acaso, experimento aleatório, espaço amostral e eventos.

5.1 Acaso

Dentre os primeiros conceitos a serem explorados, entender as intuições e o que os alunos pensam por palavras como: sorte, chance, azar e acaso parece-nos ser um caminho promissor para o diálogo e possível refinamento teórico de algumas noções probabilísticas.

Assim, o acaso pode ser visto como as variações que ocorrem entre os experimentos que, submetidos sob as mesmas condições, apresentam diferenças em seus resultados. Algo que nos escapa à previsibilidade, que foge ao controle. De acordo com Caberlim (2015):

> Percebe-se aqui a percepção do acaso sob um ponto de vista determinista: o resultado de um processo aleatório devido a uma complexidade de causas imperceptíveis, complexidade esta que escapa à compreensão do homem e seus instrumentos (Caberlim, 2015, p.22).

Nesse sentido, em linhas gerais, acaso pode ser visto como a “imprevisibilidade de um determinado acontecimento” (Caberlim, 2015, p. 21). Cabe ressaltar que, em nosso ponto de vista, a discussão do acaso não se encerra na imprevisibilidade. Contudo, entendemos que uma construção do pensamento probabilístico sem menções ao acaso pode deixar lacunas na construção do pensamento voltado para probabilidade. Tal cenário, relaciona-se com a imprecisão de nossas ferramentas para avaliar e prever resultados ou algo que seja por essência não previsível.

5.2 Experimento aleatório

Durante o estudo sobre probabilidade, estaremos interessados em um tipo particular de experimento. O estudo focará em experimentos que, ainda que sejam observados em condições idênticas, poderão apresentar diferentes resultados. É por meio dessa noção que enxergamos experimentos aleatórios. Hazzan (2013, p. 69) nos apresenta, a seguir, uma definição de experimento aleatório:

> Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de **todos os resultados possíveis** que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos **acaso** (Hazzan, 2013, p. 89, grifos do original).

Nessa direção, os resultados obtidos podem variar de experimento para experimento. As causas de ocorrência dessas variações, ainda que os experimentos sejam submetidos às mesmas condições, isto é, que permitam sua reprodução, são múltiplas. Pela seção anterior, o acaso tem papel fundamental nesse processo. Há outro aspecto igualmente importante sobre os experimentos aleatórios qual seja, ainda que o resultado final seja imprevisível, a descrição dos resultados possíveis e, o conjunto de eventos, ambos são igualmente importantes no processo de avaliar um experimento aleatório.

A discussão sobre o que queremos dizer ao falar sobre probabilidade está apoiada fortemente na noção de experimento aleatório. É por meio da sua identificação que podemos classificar, fazer a distinção entre experimentos aleatórios, que são reprodutíveis, e de fenômenos acidentais, que, segundo Coutinho (2007) não é objeto de cálculo de probabilidades. A reprodução do experimento aleatório é uma etapa fundamental para entendermos os resultados possíveis do fenômeno estudado. Ilustra essa reprodução: retirar uma carta de um naipe específico de um baralho com 52 cartas, obter “cara” em uma moeda não viciada, ou mesmo tirar 6 (seis) no lançamento de um dado honesto.

5.3 Espaço amostral

O espaço amostral é um conceito que se relaciona com a quantificação dos resultados. É por meio dele que podemos caracterizar todos os resultados possíveis dado um experimento aleatório. E, em certa medida, é o espaço amostral que garante a reprodução de um dado experimento. Conforme Hazzan (2013, p. 90), ele é definido como “um conjunto formado por

todos dos resultados possíveis de um experimento aleatório". Isso pode ser exemplificado por meio de situações práticas, como o lançamento de uma moeda, que possui como espaço amostral as faces "cara" ou "coroa". Em notação matemática, podemos utilizar o símbolo S para nomear o conjunto que contém todos os resultados possíveis. Tomando C = cara, K = coroa. Assim, como visto em Caberlim (2015), o espaço amostral do lançamento de uma moeda é dado por $S = \{C, K\}$.

Uma outra maneira de compreender o espaço amostral, como observado por Santos (2015), é por meio da associação de resultados probabilísticos a uma função de probabilidade, definido como uma abordagem axiomática da probabilidade. O espaço amostral, nesse caso, contém todos os resultados possíveis, implicando que qualquer resultado de um dado experimento, ainda que imprevisível, recaia em um resultado esperado, dado o espaço amostral dos resultados. Assim, o espaço amostral é um evento certo, portanto, há 100% de chance de o resultado de um experimento aleatório pertencer a esse conjunto. A notação percentual está intimamente relacionada à abordagem probabilística, que considera a probabilidade como uma função que associa um determinado resultado (posteriormente denominado de evento A) a um número real P(A). Considerado o espaço amostral S, temos que $P(S) = 1$.

A construção do espaço amostral pode ser realizada por meio de algumas situações, em que cada conjunto possui um número finito de elementos. Perguntas direcionadas, como "no lançamento de uma moeda, quais os possíveis resultados?" ou "para o lançamento de duas moedas simultaneamente, quais são os resultados possíveis?" são formas de conduzir o tema da probabilidade para a avaliação de um espaço amostral sem ficar preso no paradigma do "conjunto com todos os resultados possíveis". Essa abordagem pode permitir que a conclusão da possível investigação seja a identificação do conjunto completo dos resultados, e não o ponto de partida.

5.4 Eventos

Tomando o que foi estabelecido por espaço amostral em Hazzan (2013) e Santos (2015), temos os "eventos" como "último pilar" para as noções fundamentais do que vem a ser probabilidade. Os eventos de um experimento aleatório são os resultados parciais do espaço amostral, que, por sua vez, é o conjunto que contém todos os eventos. O desenvolvimento da probabilidade pode, portanto, ser entendido como o estudo desses quatro pontos: acaso, experimento aleatório, espaço amostral e eventos. Esse estudo também abrange os valores (pesos) atribuídos a cada eventos de um experimento aleatório. É por meio dessa noção que podemos quantificar as chances dos eventos que nos interessam em razão dos casos possíveis. A atribuição desses está de acordo com os axiomas apresentados em Santos (2015).

Durante o estudo dos eventos e as relações entre os eventos, que serão apresentadas mais a frente, destacaremos dois eventos fundamentais: o evento certo, que representa o espaço amostral e o evento vazio, que não é um resultado possível dado o experimento aleatório realizado.

5.4.1 Notação matemática e definição de probabilidade

Para o estudo dos Eventos probabilísticos e das relações entre eles, algumas definições serão explanadas para embasar nossos resultados. Também utilizaremos de outras noções matemáticas fundamentais, notadamente a teoria dos conjuntos e funções.

Em notação matemática, os Eventos serão denotados por letras maiúsculas. Podemos nomear, por exemplo, o evento – “tirar um número par ao lançarmos um dado regular de 6 (seis) faces”, por $A = \{2,4,6\}$. Donde os elementos do Evento A estão dentro das chaves e n(A) representa o número de elementos do conjunto A. Já para o evento certo – todos os resultados possíveis ao lançarmos um dado regula$r$-, uma notação possível é: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $n(S) = 6$.

Em prosseguimento, tendo em vista a segunda definição de probabilidade - por meio de uma função -, pode-se denotar por P a função probabilidade. Nessa função, o domínio é o conjunto de eventos e a imagem são os valores atribuídos a cada evento. A função probabilidade está apoiada em três afirmações axiomáticas, que associam a função P de probabilidade à valores reais (Santos 2015). São elas:

1. $P(S) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$;
2. $0 \leq P(A) \leq 1$, para qualquer evento A associado ao experimento aleatório;
3. Para quaisquer dois ou mais eventos mutuamente exclusivos[18], que não possuem elementos em comum, temos que a interseção desses eventos, que podemos enxergar como a interseção entre conjuntos é igual a $\emptyset$. Em notação matemática temos: $A_1, A_2 \dots, A_n$, donde i $\neq j;\ A_i \cap A_j = \emptyset$.

5.4.1.1 Probabilidade clássica e probabilidade frequentista

Por meio dos axiomas da definição axiomática de Probabilidade, podemos obter algumas relações e resultados associados aos eventos de um experimento aleatório. O primeiro deles pode ser exemplificado por meio do lançamento de uma moeda.

Uma moeda não viciada, possui como espaço amostral os seguintes resultados $S = \{cara, coroa\}$, em que o número de eventos totais e independentes é $n(S) = 2$. Sabemos que, o "peso" atribuído ao evento $A = \{cara\}$é igual à probabilidade do evento $B = \{coroa\}$, e ambos possuem $n(A) = n(B) = 1$ elementos. A soma dos dois eventos, que são possíveis e que não possuem elementos em comum, é o espaço amostral S.

Partindo do primeiro axioma, a nossa função de probabilidade nos diz que $n(A) + n(B) = n(S)$. Temos que $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$. Com isso, obtemos um resultado que consideramos importante, qual seja, a probabilidade de um evento $P(A)$ ocorrer, dado um conjunto de eventos equiprováveis, é dado por:

$$P(A) = \frac{Números\ de\ casos\ favoráveis\ do\ evento\ A}{Número\ total\ de\ casos\ possíveis}$$

Assim, a definição clássica de probabilidade foi um processo que ajudou a elucidar o cálculo de ocorrência de fenômenos imprevisíveis. Uma generalização do resultado acima, baseada naquela apresentada por Fernandes (2018), pode ser exibida da seguinte maneira: em um espaço amostral S, composto por "n" elementos, $S = \{x_{,1} x_2, x_3 \dots x_n\}$, em que todos os eventos unitários têm a mesma probabilidade de ocorrer, seguindo o modelo de eventos

18 Uma relação entre Eventos é dita mutuamente exclusiva se eles possuírem interseção vazia. Dessa forma, dois Eventos mutuamente exclusivos não podem ocorrer, ambos, simultaneamente.

equiprováveis, ou seja, $P\{x_1\} = P\{x_2\} = P\{x_3\} = \cdots = P\{x_n\} = K$, pode então, definir assim probabilidade:

$$1 = P(S) = P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
$$P(\{x_1\}U\{x_2\}U\{x_3\}U \ldots U\{x_n\})$$
$$P\{x_1\} + P\{x_2\} + P\{x_3\} + \cdots P\{x_n\}$$
$$K + K + K + \cdots K = nK$$

Portanto, temos a equação $1 = nK$, o que implica que $K = \frac{1}{n}$. Ou seja, a probabilidade de um evento unitário ocorrer é de $\frac{1}{n}$, e para o caso de um Evento U, composto[19] por r elementos, temos que a chance de ocorrência do evento U é dado por $P(U) = \frac{r}{n} = \frac{n(U)}{n(S)}$. Desse modo, podemos calcular a ocorrência de eventos que são compostos por mais de dois elementos do espaço amostral.

Um outro modelo – para se pensar em probabilidade, diferente do modelo clássico, consiste no cálculo da "confiança na capacidade de um evento ocorrer" (Fernandes, 2018, p.20). Nesse caso, a "chave" desse modelo está na observação de fenômenos para a descoberta de resultados. Todavia, a mera observação pode, por vezes, enviesar o resultado. Essa ideia de observação da prática, a nosso ver, está no gérmen da probabilidade em termos da frequência dos resultados possíveis.

Para a probabilidade frequentista, a chance de ocorrência de um Evento A é definida com base na frequência relativa do evento. A probabilidade é estimada observando-se a proporção de vezes que um evento ocorre dada a uma série de repetições do experimento observado. Baseado em resultados disponíveis na publicação de Paula (2020), podemos inferir o seguinte resultado para o cálculo da probabilidade de um Evento A com base em sua frequência relativa dada n repetições de um determinado experimento. Seja $f(A)$ o número de vezes que A ocorre, segue que:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(A)}{n}$$

19 São eventos formados por dois ou mais elementos do espaço amostral.

Desse modo, a abordagem frequentista está apoiada na observação empírica, ou seja, à medida que repetimos o evento, em uma quantidade grande de vezes, a frequência relativa de um evento converge para a probabilidade do evento, isso é, seu “valor esperado[20]” (Caberlim, 2015). O princípio fundamental que justifica a probabilidade frequentista é a **Lei dos Grandes Números**. Ela sustenta que, à medida que um experimento aleatório aumenta $n \to \infty$ (tende a infinitas repetições), a frequencia relativa de um Evento se aproxima de sua probabilidade real, de modo que o valor médio das observações tende a se estabilizar em torno do valor esperado. Como afirmado em Paula (2020):

> Na abordagem frequentista, o cálculo da probabilidade de um evento é permitido por um processo de experimentação. Nesse caso, a probabilidade é compreendida como a frequência relativa de sucessos obtidos durante a realização de um experimento. Aqui, a probabilidade é obtida por uma aproximação que depende da quantidade de realizações do experimento e está amparada em um importante teorema conhecido como Lei dos Grandes Números (Paula, 2020, p. 399).

5.4.2 Complementar de um evento

Em algumas situações, quando discorremos sobre eventos, podemos avaliar quais resultados não fazem parte dos casos favoráveis. Essa é uma maneira diferente de enxergar os resultados de um experimento aleatório, além de ser uma estratégia para solucionar alguns problemas. Por exemplo: Qual a chance de o resultado do lançamento de um dado regular de seis faces ser par? Para a solução desde problema temos como evento favorável o evento $A = \{2,4,6\}$, e seu complementar é todo evento que não pertence ao evento A, que possui como notação $A^c = \{1,3,5\}$. Pelo terceiro axioma podemos deduzir que $P(S) = P(A) + P(A^c)$. O evento complementar é formado por todo elemento que não pertence a um determinado “evento favorável” avaliado. Dado o evento A, segue que: $A \cap A^c = \emptyset$. Temos como consequência: $P(A) = 1 - P(A^c)$ (Fernandes 2018).

Nesse horizonte, consideramos que pensar sobre o complementar de um evento pode ser uma boa maneira de buscar a solução de um problema. Por exemplo, vejamos a seguinte questão do ENEM 2019:

20 O valor esperado, também chamado de esperança de uma variável aleatória, é uma medida central que fornece o que se espera obter ao realizar um experimento aleatório.

Figura 3: Questão Enem 2019 – Prova Cinza

Questão 154

O dono de um restaurante situado às margens de uma rodovia percebeu que, ao colocar uma placa de propaganda de seu restaurante ao longo da rodovia, as vendas aumentaram. Pesquisou junto aos seus clientes e concluiu que a probabilidade de um motorista perceber uma placa de anúncio é $\frac{1}{2}$. Com isso, após autorização do órgão competente, decidiu instalar novas placas com anúncios de seu restaurante ao longo dessa rodovia, de maneira que a probabilidade de um motorista perceber pelo menos uma das placas instaladas fosse superior a $\frac{99}{100}$.

A quantidade mínima de novas placas de propaganda a serem instaladas é

Ⓐ 99.
Ⓑ 51.
Ⓒ 50.
Ⓓ 6.
Ⓔ 1.

Fonte: Site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira

Nesse exemplo, podemos inferir que a chance de nenhuma das n placas instaladas serem notadas é dada pela chance de uma placa não ser vista elevado ao número de placas. Esse resultado decorre do complementar do Evento “enxergar uma placa”, que possui também probabilidade ½ de ocorrer, segundo o enunciado. Como não ver nenhuma das n placas é uma sucessão de eventos, podemos denotar o evento “não enxergar nenhuma placa” por:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Para calcularmos a chance de pelo menos uma placa ser observada ter probabilidade maior que 99% podemos calcular a diferença entre todos os eventos possíveis, exceto o Evento “não enxergar nenhuma placa” ser maior que 99%.

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} > \frac{99}{100}$$

5.4.3 União de eventos

No estudo da probabilidade, em particular, no estudo das relações entre eventos, temos o caso em que precisamos avaliar a probabilidade da união de eventos distintos. Suponha o caso em que temos o lançamento de um dado regular de 6 (seis) faces. Com o lançamento queremos obter um número par, nosso Evento A, ou um número ímpar, Evento B, em um único lançamento. Segue que $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e, não existe um Evento em que ocorram os dois resultados em um único lançamento $P(A \cap B) = 0$. Como $P(A) + P(B)$ contempla todos os resultados possíveis e, avaliando os resultados à luz da teoria dos conjuntos, isto é, nenhum resultado foi mensurado mais de uma vez.

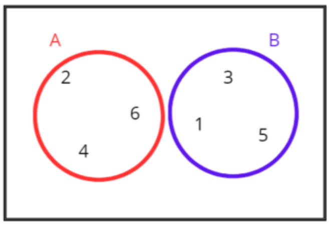
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

Em continuidade, apresentamos, a seguir, uma situação diferente. Nela, a interseção entre eventos é não vazia. Suponhamos que o interesse no resultado seja em obter, no lançamento de um dado, algum número múltiplo de 2 (dois) ou 3 (três). Para essa questão, definiremos múltiplos de 2 (dois) como evento A e múltiplos de 3 (três) como Evento B. $A = \{2,4,6\}$ e $B = \{3,6\}$. Segue que: $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$, entretanto $P(A \cap B)$ não é a zero. O elemento 6 (seis) aparece nos dois conjuntos. Para que um elemento não seja contado duas vezes, erroneamente, devemos retirar uma contagem, a saber, a interseção. O evento $P(A \cup B)$ é contabilizado da seguinte forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

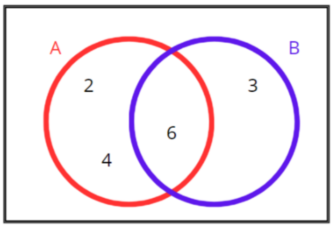
Assim, o resultado acima elimina a contagem duplicada do elemento 6 (seis) e contempla tanto os múltiplos de 2 (dois) quanto de 3 (três).

Figura 4: Eventos com interseção nula



Fonte: Elaboração Própria

Figura 5: Eventos com interseção não nula



Fonte: Elaboração Própria

O resultado abaixo é baseado na justificativa encontrada em Santos (2015) do resultado anterior:

Temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

Contudo, $P(B)$ é calculado como:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B).$$

Isolado o termo $P(A^c \cap B)$, podemos substituir na primeira equação

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Para o caso em que a interseção entre os Eventos A e B é vazia (eventos disjuntos), temos:

$$P(A \cap B) = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

5.4.4 Eventos Condicionais

Ainda sobre as relações entre Eventos temos a probabilidade condicional. A probabilidade condicional entre dois eventos é vista como a probabilidade de ocorrer o evento A dado que o B ocorre. Sua notação é $P(A|B)$. Calcular eventos condicionais, em certo sentido, é calcular a ocorrência do evento A no espaço amostral do evento B (Fernandes, 2018).

Para definirmos uma expressão para o cálculo da probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B ocorreu, podemos resgatar o conceito de frequência relativa, apresentado na seção **5.4.1.1**. Suponha um experimento aleatório que foi replicado n vezes, sendo n um número grande.

Suponha que $n(A) > 0$. Tomado os resultados de um experimento em que B ocorre, teríamos $n(B)$ como espaço amostral em que A pode ocorrer. Segue que, a frequência relativa de A, quando ocorre B é igual a: $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$. Ao dividirmos numerador e denominador por n, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{\frac{n(A \cap B)}{n}}{\frac{n(B)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

O resultado acima é apoiado no conceito de frequência relativa de A nos resultados em que B ocorre. Para um n grande de repetições, segue-se uma expressão fechada para eventos condicionais. Assim, como o resultado acima, em Fernandes (2018) é expressa uma consequência do resultado sobre eventos condicionais da seguinte forma:

$$P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

A probabilidade de que ambos os eventos A e B ocorram é igual ao produto da probabilidade de um dos eventos pela probabilidade do outro evento, considerando que o primeiro evento ocorreu.

Exemplo de aplicação: o quadro (1) apresenta algumas raças de um determinado rebanho, divididas em sexo e quantidades:

Quadro 1: Rebanho

Raça	Macho	Fêmea (F)	Total
Nelore (N)	70	40	110

Guzerá (G)	15	15	30
Canchim (C)	10	20	30
Indubrasil (I)	20	10	30
Total	115	85	200

Fonte: Adaptado de Ilambwetsi[21] (2022)

Dados os valores, responda os itens abaixo:

1) Seja F o evento escolher um animal ao acaso que seja fêmea. Qual a probabilidade dessa escolha?

2) Após ser escolhido um animal fêmea, qual a probabilidade de ser da raça Nelore?

Como solução para o primeiro item, dado os valores do quadro, a escolha de um animal fêmea do rebanho dentre as diversas raças e os dois sexos, temos: 85 fêmeas dentre 200 animais. Logo, $P(F) = \frac{85}{200}$.

Para o segundo item, devemos calcular a chance da escolha de um animal ser da raça Nelore, sabendo que é fêmea. Nessa situação, temos uma condição, isto é, o nosso espaço amostral foi modificado dada a informação de que sabemos previamente uma condição sobre o animal. Seja F (ser fêmea) e N (ser da raça Nelore). Então $P(N|F)$ é expresso por:

$$P(N|F) = \frac{P(N \cap F)}{P(F)}$$

Avaliado de forma independente, o numerador do quociente acima indica um animal que seja da raça Nelore e fêmea. Pelo quadro, há 40 animais dentre 200 que cumprem essa exigência. Analogamente, o item anterior nos indica que há 85 animais que cumprem o requisito de ser fêmea.

À luz dos resultados desenvolvidos no início desta seção, devemos encontrar a frequência relativa a N, restrito ao fato de que F ocorreu.

21 Trata-se das notas de aula da professora Patrícia Sousa Ilambwetsi, por ocasião da disciplina Estatística e Probabilidade (EST 202).

$$\frac{P(N \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{40}{200}}{\frac{85}{200}} = \frac{40}{85} = P(N|F)$$

5.4.5 Eventos independentes

A probabilidade entre Eventos Independentes é a última das relações entre Eventos que será abordada neste capítulo. O resultado que expressa que dois Eventos são independentes é o produto da probabilidade de ocorrência de cada um dos Eventos (Santos, 2015).

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Recorremos ao experimento do lançamento de duas moedas para exemplificar uma situação entre Eventos independentes. Sabe-se que o espaço amostral para esse experimento é dado por $S = \{(C;C),(C;K),(K;C),(K;K)\}$. Dados os resultados possíveis, qual a chance de sair coroa como resultado no segundo lançamento? Ao avaliarmos cada lançamento, percebemos que o segundo lançamento em nada é influenciado pelo primeiro. Assim, o resultado obtido do primeiro lançamento (Cara) ou (Coroa) em nada modifica o possível resultado do lançamento da segunda moeda. O próprio espaço amostral já entrega em quais casos temos os resultados de interesse, ou seja, (C; K) ou (K; K) – que expresso em valores é igual a $\frac{1}{2}$.

Para o caso que trata da independência de Eventos, é fato que $P(A|B) = P(A)$ e, de forma análoga, $P(B|A) = P(B)$. A relação acima, que trata do caso entre Eventos Condicionais, é um caso particular que evidencia que um evento não influencia no resultado de outro. Para a notação $P(A|B)$, temos a ocorrência de A dado que B ocorreu.

Durante o desenvolvimento dos resultados teóricos relacionados aos Eventos de um experimento aleatório, devemos nos atentar para a distinção entre Eventos Independentes e Eventos Dependentes, assim como saber diferenciá-los. O exemplo abaixo, nos mostra que os resultados entre os dois eventos podem ser numericamente diferentes.

Considere que um grupo de pessoas foi classificada quanto ao peso e pressão arterial, apresentando as proporções no quadro a seguir:

Quadro 2: Pressão Arterial

Pressão	Peso			Total
	Acima do Peso (E)	Normal	Abaixo do Peso	
Alterada (A)	0,10	0.08	0,02	0,20
Normal	0,15	0,45	0,20	0,80
Total	0,25	0,53	0,22	1,00

Fonte: Adaptado de Ilambwetsi (2022)

Verifique se os eventos A (Pressão Alterada) e E (Acima do Peso) são independentes. Em notação matemática: $P(A|E) = P(A)$?

Pelo quadro 2 (dois) pode-se verificar que $P(A) = 0{,}20$. Todavia, para o cálculo de $P(A|E)$ devemos encontrar os valores do Evento A dado o Evento E, no espaço amostral de E. $\frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = 0{,}40$. Logo, podemos verificar que $P(A) \neq P(A|E)$. Como consequência, podemos afirmar que a probabilidade de ocorrência entre dois Eventos é dada pelo produto da probabilidade de cada um deles. Essa relação pode ser interpretada como uma sequência de decisões (resultados) consecutivas e que a probabilidade de nenhuma decisão é influenciada por uma decisão anterior. Caso que não ocorre ao avaliarmos os grupos acima, isto é, Probabilidade de uma pessoa ter a Pressão Alterada dado que está acima do Peso.

$$P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$$

Assim, apresentados tais conceitos, passamos a analisá-los nas oficinas que propusemos e que serão caracterizadas em seguida.

6 A OFICINA CORRIDA DE CAVALOS COMO ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE CONCEITOS PROBABILÍSTICOS

O intuito deste capítulo é apresentar e refletir sobre uma proposta de oficina que possibilite, ao professor, explorar conceitos probabilísticos em sala de aula. A proposta se baseia na oficina "corrida de cavalos" (Deodato e David, 2015) que, por sua vez, inspirou-se na discussão de Skovsmose (2000) em torno dos cenários para investigação. Sobre esses cenários, trataremos, a seguir.

6.1 Cenário para Investigação

Skovsmose (2000) critica a forma como, comumente, são ministradas as aulas de Matemática. O autor acredita que elas se inserem dentro do chamado paradigma do exercício.

> Conforme observações efetivadas em diversos lugares, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Esse paradigma se diferencia do paradigma da investigação, no qual os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada (Skovsmose, 2000, p. 1).

Uma forma de se contrapor a esse paradigma, de acordo com o autor, é propor situações que possam promover Cenários para Investigação. Um cenário é "um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação" (Skovsmose, 2000, p. 3). Em um primeiro momento, os estudantes são convidados a participar. Contudo, não se trata de um convite formal, mas de uma proposta de investigação. O convite será aceito quando os estudantes se envolverem no processo investigativo, formulando questões, procurando explicações. Para Skovsmose (2000, p. 7)

> As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente das baseadas em exercícios. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a ver com as "referências" que visam levar os estudantes a produzirem significados para conceitos e atividades matemáticas.

As referências podem ser de variados tipos: à matemática e somente a ela; a uma semirrealidade, que não é uma realidade que "de fato" observamos, mas uma realidade criada; a situações da vida real. Todas essas referências podem ser consideradas para práticas no paradigma do exercício ou que utilizem Cenários para Investigação. A combinação dessas referências dentro dessas duas práticas resulta em uma matriz com seis tipos de ambientes de aprendizagem, como podemos ver no quadro abaixo.

Quadro 3 – Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade[22]	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000)

Acreditamos que a corrida de cavalos possa ser explorada de forma a possibilitar um ambiente do tipo 4. Essa classificação, tendo em vista o que está detalhado no artigo, decorre das etapas de construção da atividade, como a análise e comparação de resultados, a repetição do experimento e as indagações voltadas para os alunos, permitindo a participação na obtenção dos resultados, conferindo a essa atividade seu aspecto investigativo.

Isso posto, discorremos, a seguir, sobre como propor essa oficina de tal modo que ela possa se constituir como um cenário para investigação a partir do momento em que os estudantes aceitam o convite.

6.2 Oficina Corrida de Cavalos

Nesta etapa, detalhamos alguns dos recursos e um possível roteiro para a confecção e possível aplicação da oficina que nomeia a presente seção. O caminho sugerido para a criação dessa oficina se assemelhará ao roteiro descrito em Deodato e David (2015).

De início, explicamos que na oficina "Corrida de Cavalos" pode-se abordar os quatro conceitos probabilísticos caracterizados nesta monografia: acaso, experimento aleatório, espaço amostral e evento. Essa atividade pode se configurar como uma alternativa para o professor de Matemática que ensina probabilidade na Educação Básica. Nesse sentido, propomos um roteiro de aplicação que visa possibilitar o estabelecimento de um Cenário para Investigação, se assim o for, almeja oferecer uma alternativa ao paradigma do exercício Skovsmose (2000).

A oficina foi pensada para ser aplicada em turmas da Educação Básica, permitindo ao professor que se contextualizem alguns dos resultados formais apresentados no Capítulo 5 (cinco) a partir de uma atividade que, de certa forma, pode proporcionar espaço para a investigação e discussão de conceitos e resultados. Em prosseguimento, destacamos como

---

22 Por ocasião do artigo, o novo acordo ortográfico ainda não havia sido aprovado, razão pela qual a palavra-semirrealidade ainda era escrita com apenas um "r".

recurso a ser usado pelo professor – em uma atividade para ser trabalhada em grupos de 3 (três) alunos -, o seguinte:

- 1 (um) tabuleiro confeccionado com 12 raias, numeradas de 1 a 12. Recomenda-se que ela seja quadriculada, de modo que cada espaço represente uma “casa”, assim como apresentado na figura 6.

Figura 6: Tabuleiro Corrida de Cavalos

Fonte: Elaboração Própria

- 12 peças, que representarão os cavalos na aplicação do jogo;
- Lápis e folha para anotações como: ganhadores da rodada, apostas, “cavalos” de cada jogador e observações sobre o jogo de cada jogador;
- 2 (dois) dados regulares de 6 (seis) faces cada;
- 1 (um) dado regular de 12 faces;
- Quadro;
- Pincel/giz de quadro;
- Ficha de avaliação dos alunos;

6.3 Regras para aplicação da atividade

Todas as peças partem inicialmente do número (raia) a que se referem. De modo alternado, cada jogador deve lançar os 2 (dois) dados de maneira simultânea. Em seguida, os discentes devem realizar a soma das faces voltadas para cima em decorrência do lançamento dos dados. Assim, por exemplo, se as faces voltadas para cima forem 1 (um) e 6 (seis), o jogador da raia 7 (sete) avança um espaço no tabuleiro. O jogo termina quando uma das peças alcança a linha de chegada.

Destacamos que, para a análise dos resultados, os alunos devem registrar em um papel suas impressões acerca dos padrões percebidos nas somas, assim como ponderar sobre quem é o ganhador de cada rodada.

6.4 Dinâmica de aplicação (situação em que há 3 alunos por tabuleiro):

A oficina, como mencionado, busca criar um ambiente que envolva os estudantes em um processo investigativo. Para tal fim, uma estratégia que pode ajudar a manter essa característica é a aplicação da atividade em etapas, que deve ser adaptada à realidade em que será aplicada. A proposta que idealizamos está voltada para estudantes que estejam experimentando o primeiro contato com a probabilidade.

Uma proposta de aplicação da oficina utiliza como cenário fictício um tabuleiro para três alunos, sendo essa escolha motivada por dois objetivos: (i) permitir que cada aluno tenha a mesma quantidade de raias, com três opções para cada um; (ii) possibilitar que os alunos escolham as raias que considerem ter maior probabilidade de sucesso. Dessa forma, enxergamos essa configuração como um caminho possível para que seja permitido ao aluno comparar suas escolhas entre as diferentes raias, favorecendo a investigação da "raia de maior destaque", ou seja, aquela que apresenta a soma mais recorrente com base nas combinações resultantes dos dados lançados. Outro ponto, está apoiado na ideia de o aluno perceber e ter a possibilidade de mudar sua estratégia de escolha das raias. Caso um aluno identifique previamente que a soma 1 (um), por exemplo, é impossível, fato que ocorre para a aplicação com dois dados de seis faces, ele não será "forçado" a escolher uma raia que inviabilize sua vitória no jogo.

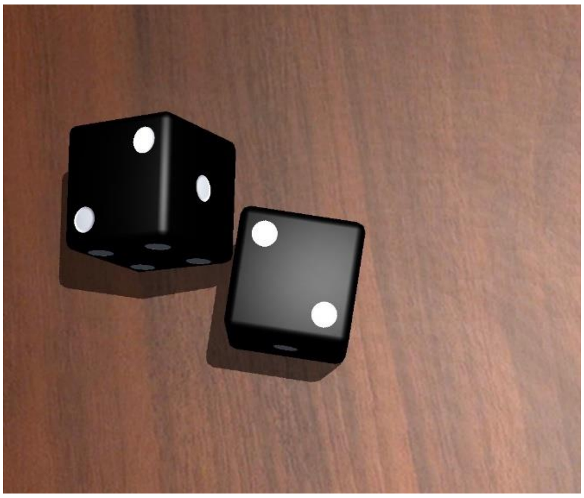
No entanto, o professor pode adaptar a aplicação da atividade conforme os recursos disponíveis, optando por incluir mais jogadores em cada tabuleiro. O docente, por exemplo, pode formar grupos de 12 alunos para cada tabuleiro ou mesmo dividir os estudantes em pequenos grupos, para juntos, ocuparem uma das raias.

Além disso, um aspecto que pode ser explorado tanto pelo docente quanto pelos discentes é a variação do número de casas (espaços) que cada "cavalo" deve percorrer até a linha de chegada. Em outros termos, pode-se usar um tabuleiro com cinco, sete, treze enfim, pode-se escolher quantos espaços por raia haverá no tabuleiro utilizado. A ampliação do número de espaços no tabuleiro pode ensejar uma análise do comportamento da distribuição dos resultados, ou seja, nos tabuleiros maiores os estudantes que escolherem as somas mais prováveis vencerão mais vezes. Ou ainda, estudantes que optarem por somas menos prováveis terão melhor chance de vencer em tabuleiros com número menor de espaços.

Isso se dá porque, baseado nos resultados levantados no capítulo 5 (cinco) referente a **Lei dos Grandes Números**, com um número maior de espaços a serem percorridos em cada raia também aumentamos a quantidade de vezes que realizamos o experimento, lançamento dos dados, e os Eventos tendem a se aproximarem de sua probabilidade real. No jogo, isso se traduz em uma maior ocorrência das somas mais prováveis.

Em prosseguimento, definido o tamanho do tabuleiro e modo de organização dos estudantes. Cada grupo receberá dois dados de 6 (seis) faces. A figura 7 apresenta um resultado possível para o lançamento de dois dados de 6 (seis) faces.

Figura 7: Dados de seis faces



Fonte: Elaboração Própria

As três primeiras rodadas podem ser livres, sem intervenções do professor(a), ou seja, sugerimos que o docente apenas instrua os alunos sobre o lançamento dos dados e sobre a necessidade de realizar a soma como critério para fazer avançar o cavalo.

Já para as rodadas seguintes, recomendamos que o professor instigue os alunos de modo que eles exponham suas impressões sobre o jogo, façam anotações dos resultados obtidos a cada lançamento e estabeleçam comparações da ocorrência de resultados com as raias. Depois disso, a recomendação é que os alunos exponham suas impressões sobre o jogo, sobretudo, tendo em vista aspectos matemáticos que tenham sido observados ao longo das rodadas disputadas.

Ademais, consideramos que intervenções do professor ao longo do jogo com perguntas direcionadas aos alunos pode favorecer o trabalho. Por exemplo, para fomentar uma análise das características do jogo, pode-se questionar: quem foi o jogador mais "sortudo", isto é, quem foi o jogador cujo cavalo andou mais vezes no tabuleiro ao lançar os dados? Será que foi "sorte" mesmo? Existe alguma forma de prever os resultados? Existe alguma forma de saber quais resultados são possíveis?

A nosso ver, nesses momentos iniciais os estudantes podem começar a construir e/ou mobilizar os conceitos probabilísticos. As perguntas acima são apenas exemplos, de outras várias que podem favorecer que os alunos aceitem o convite, investiguem (Skovsmose, 2000) e passem a explorar o tema matemático da aula. Como ponto de partida para esse primeiro contato com o tema de probabilidade sugerimos que as perguntas girem em torno de quatro pilares: acaso, experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Torna-se imperativo ressaltar que essa oficina foi pensada para ser desenvolvida em duas etapas. Na primeira, como descrito anteriormente, o foco está nas intuições dos alunos e na identificação de padrões. Abaixo apresentamos um quadro com perguntas que podem ser utilizadas pelo professor, nessa primeira etapa.

Quadro 4: Questões para a primeira etapa

1) O que você considera como sorte ou azar no contexto do jogo? Do grupo que estava jogando com você, alguém teve mais sorte?
2) Se você pudesse escolher um novo cavalo, qual seria?
3) Ao lançar o dado, é possível de alguma forma controlar ou manipular o resultado?
4) Se você pudesse escolher 2 cavalos para apostar, qual seria a aposta ideal para você? Essa aposta é única?
5) Você considera esse jogo justo?

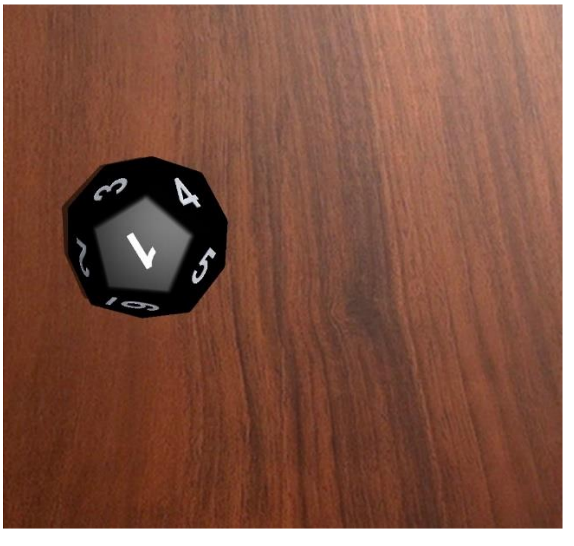
Fonte: Elaboração própria

Com essas perguntas na primeira aplicação, consideramos que os alunos podem empregar o conceito de Acaso e compreender como ele está presente nos resultados obtidos em cada lançamento, assim como a imprevisibilidade de cada um deles. Eles também podem utilizar o conceito de Experimento Aleatório, vinculado à reprodutibilidade do experimento e à identificação dos resultados possíveis.

Na segunda aplicação, a expectativa é que os estudantes consigam dar início à formalização de alguns conceitos (Espaço Amostral e Eventos). Além disso, na segunda aplicação, os dois dados de seis faces podem ser substituídos por um dado de doze faces, como apresentado na figura 8. O intuito da alteração é modificar os Eventos possíveis e impossíveis bem como a frequência de ocorrência deles.

Na situação envolvendo o dado de doze faces, em detrimento de pensar em somas, espera-se que os alunos avaliem a equiprobabilidade dos Eventos (face 1, face 2, face 3, ..., face 12). Além disso, a soma 1 (um), resultado impossível no jogo com dois dados de seis faces, pode ser comparada com o Evento face 1 (um) no dado de doze faces. Assim, a modificação dos dados busca favorecer um (novo) ambiente que, contrastado com o primeiro, fomente investigações por parte dos estudantes e, caso aceitem o chamado, revele-se um Cenário para Investigação.

Figura 8: Dado de doze faces



Fonte: Elaboração Própria

Durante a segunda aplicação, novas questões serão levantadas para os alunos tais como: quais os resultados possíveis? Quais resultados impossíveis? Qual a frequência em que esses resultados se manifestam?

O objetivo das ideias apresentadas até o momento é de nortear a atividade e permitir a introdução dos conceitos de Espaço Amostral e Eventos. Para a formalização dos conceitos matemáticos serão levantadas questões em uma ficha. No quadro 5 (cinco), apresentamos um quadro com perguntas que podem ser utilizadas pelo professor, na segunda etapa.

Quadro 5: Questões para a segunda etapa

1) Descreva o espaço amostral do jogo**.**
2) Classifique quais Eventos são simples e quais Eventos são compostos.
3) Qual o Evento com maior probabilidade de ocorrer?
4) Os Eventos são equiprováveis?
5) O que mudou do jogo com dois dados de seis faces para o jogo com um dado de doze faces?
6) É possível adaptar o jogo com dois dados de seis faces de modo que se torne um jogo mais justo?

Fonte: Elaboração Própria

Assim, apresentada a oficina, passamos a análise dos conceitos que incidem sobre ela.

6.5 Uma análise da oficina Corrida de Cavalos

Nesta seção, exporemos alguns pontos em que o jogo resgata os conceitos apresentados anteriormente, em particular, os chamados quatro pilares (Caberlim, 2015). O primeiro deles está relacionado ao acaso, sendo esse um possível ponto de partida para discussão dos resultados do jogo.

A partir de perguntas – como, por exemplo, seriam os cavalos 2 (dois) e 12 apostas “azaradas”? O jogo depende exclusivamente da sorte do jogador? Há previsibilidade nos resultados apresentados? - os alunos podem verbalizar suas ideias, construir conjecturas, enfim, podem assumir uma postura ativa em relação aos seus próprios processos de aprendizagem. Sendo assim, podem questionar as rotinas típicas do paradigma do exercício (copiar matéria do quadro, realizar resoluções mecânicas de exercícios, etc). Além disso, os estudantes, podem aceitar o convite e, ao procurarem explicações para além das típicas do senso comum, desenvolverem ações investigativas que são características dos Cenários para Investigação (Skovsmose, 2000).

No âmbito do jogo, consideremos que é sutil a diferença entre o acaso e o que podemos entender sobre experimento aleatório. Em minha[23] concepção, o primeiro pode ser visto como a motivação para o estudo de fenômenos que se encaixem no que seria um experimento aleatório, no sentido de que o acaso se refere a um processo que ocorre sem um padrão previsível. Isso, no contexto do jogo, pode ser referenciado no lançamento dos dados. Já o experimento aleatório está relacionado aos processos que podem ser reproduzidos sob as mesmas condições, ainda que não saibamos qual o resultado final de cada experimento.

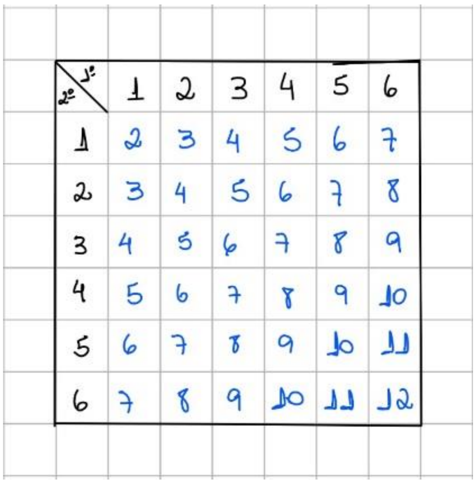
Ademais, promover discussões que favoreçam o confronto de concepções dos estudantes, acerca de determinado conceito com as suas definições formais pode contribuir para que eles reflitam em torno dele. Caso ocorram, essas discussões podem ser um indício de que os estudantes se envolveram em um Cenário para Investigação (Skovsmose, 2000).

Destacamos também que Pinheiro *et al* (2020) enfatizam a relevância do estudo do espaço amostral, que frequentemente é subestimado. O entendimento desse conceito em um experimento aleatório "constitui-se essencial para a resolução de qualquer problema de probabilidade" (Pinheiro *et al,* 2020, p. 141). Além disso, as autoras reforçam que a análise do espaço amostral serve como fundamento para o raciocínio contrafactual, espaço em que o contingente[24] também é estudado. A avaliação do espaço amostral, resultado obtido na figura 9, pode surgir a partir das repetições das rodadas. Consideramos que seja importante que o aluno se convença de que o resultado do dado é aleatório, mas possui um número limitado de resultados possíveis.

23 A alternância entre singular e plural é intencional. O singular será utilizado para caracterizar reflexões pessoais do licenciando.

24 Uma situação contingente é uma eventualidade, um acontecimento que se fundamenta como possível, mas que outrora poderia não ter ocorrido (Branquinho *el al*, 2006).

Figura 9: Espaço Amostral



2º \ 1º	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: Elaboração Própria

A partir daí, entendemos que se pode provocar os alunos a estabelecerem uma comparação que os leve a solucionarem questões como o “problema” do cavalo 1 para o jogo com dois dados de seis faces, ou seja: levá-los a elaborarem uma explicação para a inexistência de possibilidade de sair soma 1 (um) nessa circunstância. Ou mais, levá-los a interpretarem tal fato como um evento impossível.

Outro ponto é que ao solicitar que o conjunto de resultados possíveis para o lançamento de dados seja caracterizado, a partir da empiria, pelos discentes, pode ajudá-los a entenderem o conceito de espaço amostral,

A oficina também pode favorecer que o professor dê autonomia intelectual ao estudante, em detrimento de simplesmente entregar a ele uma tarefa pronta e acabada, típica do paradigma do exercício (Skovsmose, 2000).

Por meio da avaliação de cada Evento e da soma dos resultados, espera-se que, durante a realização das rodadas da oficina “Corrida de Cavalos”, os alunos consigam diferenciar os Eventos com maior probabilidade de ocorrência entre os 11 resultados possíveis para o caso de dois dados de seis faces. Além disso, espera-se também que entendam a equiprobabilidade de cada um dos eventos quando a oficina for aplicada utilizando um único dado de doze faces. Por fim, consideramos relevante ressaltar que, durante a discussão sobre os eventos e as relações entre eles, é pertinente esclarecer a questão da ocorrência da equiprobabilidade. Caberlim (2015) observa que, em livros didáticos, há uma predominância de casos em que os eventos são equiprováveis, com pouca ou nenhuma referência a eventos compostos, como ocorre na atividade “Corrida de Cavalos”.

7 OFICINA DAS TRÊS PORTAS

A segunda oficina proposta tem como objetivo central explorar os conceitos probabilísticos relacionados à **probabilidade condicional**. Para tanto, ela - que envolve o jogo das três portas, também conhecido como problema de Monty Hall[25] - é o ambiente que escolhemos para explorar e discutir os conceitos outrora apresentados na seção 5.4.5.

A escolha de uma oficina centrada em resultados associados à probabilidade condicional almeja ser uma alternativa, diferente dos modos tradicionais, para o professor investigar como os alunos do ensino médio lidam com as relações entre eventos de um experimento aleatório. Nessa direção, Carvalho (2015) enfatiza que:

> A natureza da probabilidade condicional precisa de uma atenção especial dos professores de matemática porque o mapeamento do espaço amostral se revela mais complexo. A utilização apenas procedimental da fórmula não propicia uma compreensão deste conceito (Carvalho, 2015, p. 189).

Além disso, o autor defende ainda que:

> [...] os licenciandos devem na sua formação inicial entrar em contato com atividades que mobilizem e avancem os conhecimentos necessários para os processos de construção do conceito de probabilidade. Devem dominar os diferentes significados de probabilidade, da probabilidade condicional e das noções que sustentam este conhecimento. Devem ter em seu repertório situações didáticas para a sua futura prática profissional (Carvalho, 2015, p. 195).

Com base nessas ponderações levantadas por Carvalho (2015), as soluções apresentadas, disponíveis em Santos (2015) e Ramos (2023), buscam dar ênfase no mapeamento do espaço amostral em oposição a, apenas, valer-se da utilização de fórmulas fechadas.

Isso posto, de início, ressaltamos que a oficina em questão se remete ao conhecido jogo das três portas (problema de Monty Hall). Ele é um jogo que originalmente foi proposto para um programa de televisão estadunidense. Monty Hall inclusive, é o nome do âncora do

---

25 O Problemas das Três Portas, popularmente conhecido como Problema de Monty Hall, recebe esse nome dado o sucesso do quadro “Let’s Make a Deal” apresentado por Monty Hall (Santos, 2015).

programa “Let’s make a deal” e que popularizou o famoso problema do campo da probabilidade (Santos, 2015).

Em linhas gerais, o jogo pode ser formulado da seguinte maneira: uma pessoa é convidada a escolher uma dentre três portas, todas fechadas, aleatoriamente. Uma dentre as três portas contém um prêmio, o jogo televisionado possuía um carro como prêmio. E, as demais portas possuíam cabras. Por suposto, os jogadores objetivavam acertar a porta que continha o automóvel, prêmio de maior valor.

Figura 10: O Enigma de Monty Hall

Fonte: Elaboração Própria

O roteiro do jogo é o seguinte: após serem apresentadas as três possibilidades, o participante deve escolher uma dentre as opções de portas disponíveis; a partir da escolha, o apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma porta não escolhida pelo participante. Com isso, permanecem fechadas duas portas: a do participante e a que não foi aberta pelo apresentador.

O principal ponto do jogo ocorre no momento em que a primeira porta é aberta. O apresentador dá ao participante a possibilidade de trocar a porta escolhida inicialmente pela porta que ainda está fechada. Obviamente, ao abrir a porta após a escolha do participante, o apresentador escolhe uma porta em que há uma cabra, de modo que o jogador seja confrontado com a possibilidade de trocar de porta entre as duas restantes, uma das quais contém o carro.

Então, a grande questão do jogo, a qual será explorada por meio de resultados matemáticos é: para o participante, é mais vantajoso trocar de porta ou manter sua escolha inicial?

7.1 Probabilidade no jogo de Monty Hall

Como detalhado anteriormente, o jogo consiste na escolha de uma dentre das três portas disponíveis. Nesse cenário, existe um resultado desejado (porta com o carro) e dois resultados indesejados (portas com as cabras). Portanto, o participante, de início, possui $\frac{1}{3}$ de chance de escolher a porta que contém o prêmio máximo.

Contudo, o jogo possui um roteiro no qual o apresentador deve abrir uma porta não selecionada pelo participante, porta essa que só ele sabe, mas que não contenha o prêmio. Ao permitir que o participante faça uma nova escolha, isso é, que mantenha a porta que escolheu inicialmente ou troque pela porta que ainda está fechada o participante é levado a questionar suas intuições.

Figura 11: Oficina das Três Portas (Adaptado)

Fonte: Salomão 2014, p. 44

Quando o jogo começou a ser apresentado ao público, sua solução, que será caracterizada na seção 7.2, era vista de maneira contraintuitiva, tanto que inúmeras discussões foram levantadas sobre o tema. Em especial, por Marilyn Von Savant que possuía uma coluna em um jornal, intitulada “Ask Marilyn” na qual a jornalista respondia diversas indagações de seus leitores, principalmente aquelas relacionadas a ciências e raciocínio lógico (Ramos, 2023). Quando questionada sobre o problema de Monty Hall, Marilyn concluiu que as chances de ganhar o prêmio máximo aumentavam ao trocar de porta. E mais, a porta que não foi selecionada pelo participante e nem aberta pelo apresentador possuía $\frac{2}{3}$ de chance de conter o prêmio máximo em comparação com $\frac{1}{3}$ da porta selecionada (Ramos, 2023).

Para elucidar seu controverso resultado, Marilyn desenvolveu o seguinte exercício mental:

> Esta é uma boa forma de visualizar o que aconteceu. Vamos supor que haja um milhão de portas e você escolhe a porta n° 1. O apresentador, que sabe que há por trás das portas e irá sempre evitar a que tem o prêmio, abre todas, exceto a porta 777.777. Você irá rapidamente mudar a sua porta, não? (BBC[26], 2023)

O raciocínio acima, em que mais portas foram adicionadas, nos ajuda a enxergar o porquê devemos tratar com mais cautela uma ideia diretamente relacionada ao jogo porque realça um fato: o conhecimento do apresentador sobre o que há em cada porta. O apresentador influencia o jogo a cada porta revelada que não contém o prêmio. Vejamos a análise desse resultado à luz dos conceitos da probabilidade condicional.

7.2 Solução por meio da definição de probabilidade condicional

A solução que compartilhamos foi retirada da dissertação de Santos (2015). A estratégia utilizada pelo autor consiste em aplicar a definição de probabilidade em um conjunto definido S. Conjunto esse que contém todas as possibilidades de resultados para o jogo. Nesse conjunto, identificamos cada elemento por s, de tal modo que $s \in S$. Assim:

$$s = (\text{Porta escolhida, Porta do prêmio, Porta aberta, Trocou de Porta}).$$

Cada entrada da quádrupla do elemento s possui um significado. O nosso objetivo será identificar o espaço amostral do jogo, caracterizar cada situação e aplicar as definições para probabilidade condicional. Então, para cada elemento s, as portas: escolhida, prêmio e aberta serão enumerados de 1 a 3. Já para a troca de porta teremos S (sim) ou N (não). A estratégia utilizada por Santos (2015) busca contemplar cada s como uma rodada do jogo e mostrar todos os caminhos que o jogador pode trilhar durante a partida. O elemento s = (2, 1, 3, S) refere-se a um jogo em que o participante escolheu a porta 2, a porta do prêmio era a 1, o

---

26 Excerto da matéria publicada no site da BBC News Brasil, disponível em: < https://www.bbc.com/portuguese/articles/cy90p2y5v1xo>. Acesso em 02/10/24.

apresentador abriu a porta 3 e o participante decidiu trocar de porta. Caso esse em que o participante ganhou o prêmio.

Explicada a notação da solução proposta por Santos (2015), destacamos que o espaço amostral S é dado por:

S={(1,1,2,S), (1,1,3,S), (1,1,2,N), (1,1,3,N), (1,2,3,S), (1,2,3,N), (1,3,2,S), (1,3,2,N), (2,2,1,S), (2,2,3,S), (2,2,1,N), (2,2,3,N), (2,1,3,S), (2,1,3,N), (2,3,1,S), (2,3,1,N), (3,3,1,S), (3,3,2,S), (3,3,1,N), (3,3,2,N), (3,1,2,S), (3,1,2,N), (3,2,1,S), (3,2,1,N)}

O espaço amostral do jogo possui 24 possibilidades de resultados para o jogo de Monty Hall. Dentre essas possibilidades temos 12 casos em que o participante ganha o jogo e 12 casos em que o participante não ganha o jogo.

O estudo que desejamos justificar com o problema de Monty Hall consiste em mostrar por meio de uma análise do espaço amostral que podemos aumentar nossas chances de ganhar o prêmio máximo, a partir da troca de porta.

Vejamos, em seguida, alguns exemplos que ajudam a entender a notação e a solução do problema por meio dos elementos s definidos anteriormente. Para cada quádrupla do "vetor s" será atribuído uma probabilidade referente aos casos de interesse sobre os casos totais (definição de probabilidade clássica).

- Para o resultado $s=$(1,2,3,N), temos que o participante escolheu a porta número 1(um) dentre as 3 (três) portas disponíveis, e sabemos que o prêmio só pode estar dentre uma das três. Contudo, o participante não escolheu a porta do prêmio. E, dado o roteiro do jogo, o apresentador possui somente uma opção para abrir. Há ainda a possibilidade de o participante trocar ou não de porta. Como são eventos independentes, temos para cada situação em que o jogador não escolhe a porta que o prêmio inicialmente: $\frac{1}{3}$ (participante escolhe uma dentre as três portas possíveis); $\frac{1}{3}$ (chance de escolher a porta certa); 1 (portas que o apresentador pode abrir); $\frac{1}{2}$ (trocar ou não de porta). Como são eventos independentes, e por meio dos resultados de probabilidade, a jogada tem probabilidade P(1,2,3,N) = $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$.
- Agora, tomemos o resultado $s=$(3,3,1,S). Para essa situação, os dois primeiros "parâmetros" permanecem inalterados. Entretanto, o apresentador possui duas opções de porta para abrir visto que, o participante escolheu a porta que já contém o prêmio. Logo, com possibilidade de troca do participante, a jogada tem probabilidade P(3,3,1,S) = $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{36}$.

Os dois resultados avaliados contemplam a possibilidade de o participante escolher, ou não, a porta que contém o prêmio ainda na primeira escolha. Como só existem essas duas possibilidades, podemos extrapolar os resultados obtidos para todos os elementos do espaço amostral. Para cada um dos 24 resultados possíveis é atribuída uma probabilidade de ocorrência, conforme caracterizado no quadro 6.

Quadro 6: Resultados Possíveis da Oficina das Três Portas

$P_{(1)}=P(1,1,2,S)=\frac{1}{36}$	$P_{(2)}=P(1,1,3,S)=\frac{1}{36}$	$P_{(3)}=P(1,1,2,N)=\frac{1}{36}$	$P_{(4)}=P(1,1,3,N)=\frac{1}{36}$
$P_{(5)}=P(1,2,3,S)=\frac{1}{18}$	$P_{(6)}=P(1,2,3,N)=\frac{1}{18}$	$P_{(7)}=P(1,3,2,S)=\frac{1}{18}$	$P_{(8)}=P(1,3,2,N)=\frac{1}{18}$
$P_{(9)}=P(2,2,1,S)=\frac{1}{36}$	$P_{(10)}=P(2,2,3,S)=\frac{1}{36}$	$P_{(11)}=P(2,2,1,N)=\frac{1}{36}$	$P_{(12)}=P(2,2,3,N)=\frac{1}{36}$

$P_{(13)} = P(2,1,3,S) = \frac{1}{18}$	$P_{(14)} = P(2,1,3,N) = \frac{1}{18}$	$P_{(15)} = P(2,3,1,S) = \frac{1}{18}$	$P_{(16)} = P(2,3,1,S) = \frac{1}{18}$
$P_{(17)} = P(3,3,1,S) = \frac{1}{36}$	$P_{(18)} = P(3,3,2,S) = \frac{1}{36}$	$P_{(19)} = P(3,3,1,N) = \frac{1}{36}$	$P_{(20)} = P(3,3,2,N) = \frac{1}{36}$
$P_{(21)} = P(3,1,2,S) = \frac{1}{18}$	$P_{(22)} = P(3,1,2,N) = \frac{1}{18}$	$P_{(23)} = P(3,2,1,S) = \frac{1}{18}$	$P_{(24)} = P(3,2,1,N) = \frac{1}{18}$

Fonte: Elaboração Própria

Em Santos (2015), os 24 resultados representam todos as configurações de resultados possíveis, em outras palavras, o autor, com essa estratégia, elenca os casos que o jogador pode ganhar (ou não) o prêmio. A partir do resultado apresentado no Quadro 6, o autor destaca o conjunto nas situações em que o participante (jogador) ganha o prêmio, nomeado de conjunto G.

$$G = \{(1,1,2,N),(1,1,3,N),(1,2,3,S),(1,3,2,S),(2,2,1,N),(2,2,3,N),(2,1,3,S),(2,3,1,S),\\(3,3,1,N),(3,3,2,N),(3,1,2,S),(3,2,1,S)\}$$

Atribuída a probabilidade a cada um dos eventos, segue que a probabilidade de ganhar o jogo é dado por $P(G) = \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2}$.

O resultado nos garante que a chance de ganhar o desafio das três portas é de 50%. Contudo, o resultado que queremos mostrar é que trocar de porta é vantajoso, visto que há um aumento na chance de ganhar o jogo. Nesse sentido, Santos (2015) toma o conjunto que contém todas as rodadas em que o jogador trocou de porta, independentemente de ter ganho ou não a rodada. O conjunto, nomeado de T, possui os seguintes elementos:

$$T = \{(1,1,2,S),(1,1,3,S),(1,2,3,S),(1,3,2,S),(2,2,1,S),(2,2,3,S),(2,1,3,S),\\(2,3,1,S),(3,3,1,S),(3,3,2,S),(3,1,2,S),(3,2,1,S)\}$$

Associando cada elemento do conjunto T à função de probabilidade, temos como resultado:

$$P(T) = \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2}$$

Para que possamos encontrar o valor da probabilidade condicional $P(G|T)$, probabilidade de ganhar dado que houve a troca de porta. Definimos o evento em que o jogador troca a porta e ganha, a interseção entre os conjuntos G e T.

$$G \cap T = \{(1,2,3,S), (1,3,2,S), (2,1,3,S), (2,3,1,S), (3,1,2,S), (3,2,1,S)\}$$

Nesse caso, os valores associados à função de probabilidade são:

$$P(G \cap T) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$$

A definição de probabilidade desejada, $P(G|T)$ pode ser calculada pela relação dos dois últimos resultados obtidos anteriormente, e assim é confirmado que a chance de êxito no desafio aumenta ao trocarmos de porta.

$$P(G|T) = \frac{P(G \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Consideramos que a solução apresentada em Santos (2015) possui a vantagem de obter o valor de um resultado, ao nosso ver contraintuitivo, por meio da manipulação do espaço amostral e da definição de probabilidade condicional. Santos (2015) destaca também que o complementar do evento acima, ganhar sem trocar de porta, $P(G|T)^c$ possui probabilidade igual a $\frac{1}{3}$ de ocorrer.

7.3 Solução por meio da árvore de probabilidades

Outro caminho para explorar os resultados da probabilidade condicional no jogo das três portas é a solução apresentada por Ramos (2023). Nela, temos definidos três conjuntos. Cada um deles baseia-se em uma das três portas que o jogador deve escolher. O ponto central está em avaliar a probabilidade de cada caso por meio da árvore de probabilidades.

Ramos (2023) inicia sua solução ao definir três elementos do jogo C, E_1 e E_2. Cada elemento representa, respectivamente: escolha da porta premiada; a porta que o apresentador decidiu abrir (não contém o prêmio); a segunda porta, no caso, a que não contém o prêmio. Como exemplificado em Ramos (2023), suponha que o participante tenha escolhido a porta premiada C, sem que soubesse em qual porta está o prêmio; o apresentador, então, abre a segunda porta, aquela que não contém o prêmio do jogo. Nesse momento, o jogador decide trocar sua escolha pela porta restante E_1. Essa escolha é representada por:

$$(C, E_2, E_1)$$

Fixando uma porta que o jogador tenha escolhido, podemos nomear um conjunto que tenha essa porta como primeira escolha. Suponha que a porta escolhida inicialmente seja a porta com o prêmio. Segue que, o apresentador possui como opções para abrir, antes de oferecer a possibilidade de troca para jogador, as portas E_1 e E_2. Aberta uma das portas, o jogador possui duas opções: continuar com a porta que escolheu inicialmente ou trocar de porta. O primeiro conjunto, nomeado de A e cuja a primeira escolha seja a porta com o prêmio, é formado pelos seguintes elementos:

$$A = \{(C, E_1, C), (C, E_1, E_2), (C, E_2, C), (C, E_2, E_1)\}$$

Caso o participante tenha escolhido uma dentre as duas portas que não contém o prêmio em sua primeira rodada, podemos nomear um conjunto B de tal modo que a primeira escolha seja fixada na porta E_1. Diante disso, o apresentador só possui uma opção de escolha para abrir a porta, visto que a outra porta não selecionada possui o prêmio. Ao final, o jogador tem opção de manter ou trocar para a porta fechada. B é formado pelos seguintes elementos:

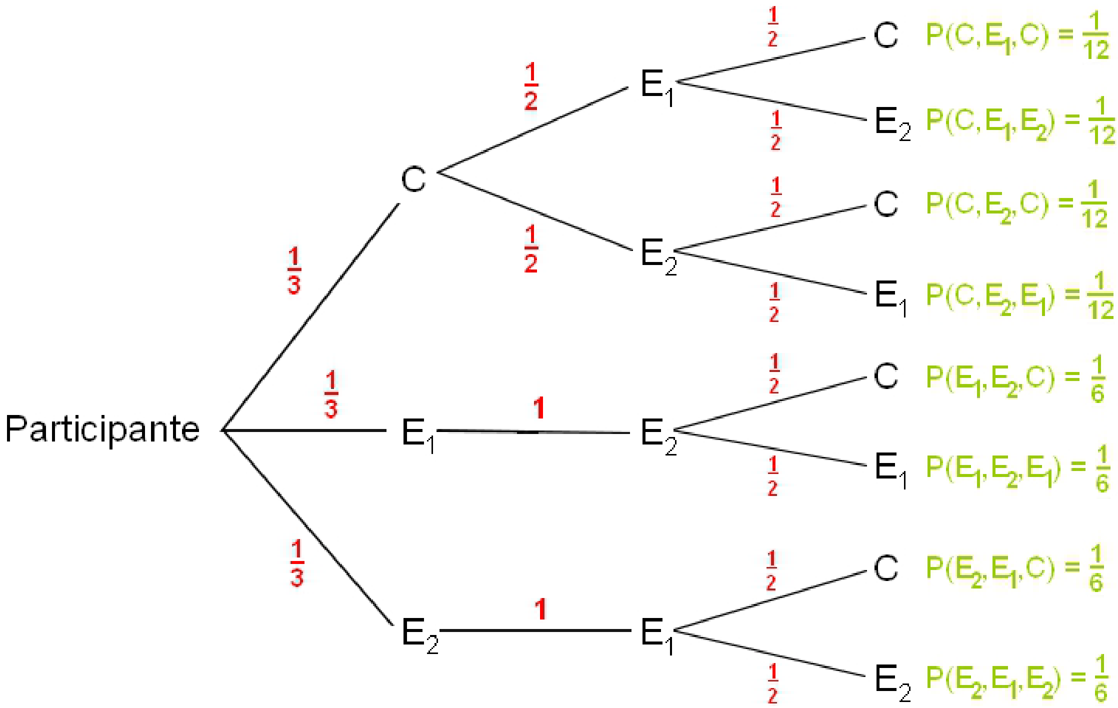
$$B = \{(E_1, E_2, C), (E_1, E_2, E_1)\}$$

De maneira análoga, Ramos (2023) deixa explicitado o conjunto C em que a porta fixada é E_2. Segue que o conjunto C possui os elementos:

$$C = \{(E_2, E_1, E_2), (E_2, E_1, C)\}$$

Ramos (2023) nos alerta para o seguinte ponto: a probabilidade de escolha de qualquer uma das três portas é $\frac{1}{3}$ e, para cada escolha, há uma opção de troca assim como a porta que será aberta. Desse modo, a porta com o prêmio até o final da rodada é preservada. O diagrama apresentado na figura 7 nos apresenta todos os casos de decisões consecutivas e como podemos associar tais resultados com a probabilidade condicional.

Figura 12: Árvore de Probabilidade



Fonte: Ramos, 2023, p. 65

Semelhante ao que foi obtido na solução apresentada em Santos (2015), na solução de Ramos (2023) devemos identificar na Árvore de Probabilidade cada ramo que contenha os resultados de interesse para o cálculo da probabilidade de ganhar o jogo dado que foi realizada a troca de porta. O Evento G(Ganhar o Jogo) e o Evento T(Trocar de Porta) são formados pelos seguintes ramos:

$$G = \{(C, E_1, C), (C, E_2, C), (E_1, E_2, C). (E_2, E_1, C)\}$$
$$T = \{(C, E_1, E_2), (C, E_2, E_1), (E_1, E_2, C), (E_2, E_1, C)\}$$

Para encontrar o resultado desejado, devemos considerar todos os casos em que o participante vence e troca de porta (casos de interesse) em relação a todos os casos em que há a troca de porta (casos possíveis). Com base nos resultados apresentados no capítulo 5 (cinco), temos, pela Probabilidade Condicional, que os casos em que o participante ganha, dado que houve a troca de porta, são expressos por:

$$P(G|T) = \frac{P(G \cap T)}{P(T)}$$

Sabendo que o conjunto $G \cap T$ contém os elementos $\{(E_1, E_2, C), (E_2, E_1, C)\}$. Pelo diagrama de Árvore (figura 7), temos que: $P(G \cap T) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Já para todos os casos em que há troca de porta temos: $P(T) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Segue que, a probabilidade de vitória, dado que houve a troca de porta é dado por:

$$P(G|T) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

7.4 O problema das três portas como Oficina

Após caracterizar o Problema das Três Portas, assim como sua possível solução nas seções anteriores, o objetivo da presente seção é desenvolver o problema nos moldes de uma oficina destinada à Educação Básica. Para esse propósito, foi proposto ao professor um caminho para fomentar um ambiente capaz de se tornar um possível Cenário de Investigação (Skovsmose, 2000) em sala de aula. A nossa abordagem do Problema das Três Portas, no contexto da oficina, foi dividida em duas etapas: a primeira destina-se à apresentação da atividade e a obtenção dos resultados teóricos; e, na segunda etapa, o professor pode explorar algumas variações do problema apresentado.

7.4.1 A Oficina das Três Portas - Primeira Etapa

Para o início da oficina, propomos que um aluno seja selecionado para desempenhar o papel de apresentador do "jogo". Esse aluno deverá ter conhecimento sobre em qual "porta" o prêmio se encontra no início de cada nova rodada. Além disso, ele deverá seguir o "roteiro" do jogo, conforme apresentado na seção 7.1. O "apresentador" não poderá abrir a porta contendo o prêmio na primeira rodada e deverá sempre oferecer a possibilidade de troca de porta ao participante. Os demais alunos assumirão o papel de participantes, sendo chamados, um por vez, para tentar localizar o prêmio principal do jogo. Prêmio esse que deve ser definido pelo professor.

Cada aluno, enquanto participante, receberá uma folha na qual deverá registrar todas as etapas realizadas durante sua participação, indicando a porta escolhida, a porta aberta pelo apresentador, a porta que continha o prêmio e se houve ou não a troca de porta. A imagem abaixo, ilustra um exemplo em que o participante selecionou a porta 1, o apresentador abriu a porta 2, o prêmio estava na porta 3, e o participante optou por trocar de porta.

Quadro 7: Ficha para a Oficina das Três Portas

Nome do aluno	Porta escolhida (1, 2 ou 3)	Porta Aberta (1, 2, ou 3)	Trocou de Porta (s/n)	Porta do Prêmio (1, 2, ou 3)	Ganhou (s/n)
	1	2	s	3	s

Fonte: Elaboração Própria

Em linhas gerais, o professor pode optar por não dar maiores detalhes sobre o jogo além das regras e do roteiro que o apresentador deve seguir. Após algumas rodadas com os alunos, recomendamos que o professor realize sua primeira intervenção na oficina. O principal objetivo dessa etapa está em comparar quais foram os casos que tiveram maior sucesso, isto é, em que os participantes puderam encontrar o prêmio máximo do jogo.

Dessa forma, será ofertada a possibilidade de os estudantes investigarem qual o resultado prevaleceu e também investigarem se algum os deixou desconfiados dados os resultados apresentados. É esperado que os casos em que houve maior prevalência de "vitória" sejam aqueles em que os alunos optaram pela troca de porta e essa tendência tende a se aproximar do valor esperado dado ao aumento do número de repetições do jogo. Resultado esse apoiado na **Lei dos Grandes Números**.

Com a proposta descrita acima, esperamos que os alunos sejam conduzidos aos porquês da prevalência do resultado da troca de porta em casos de vitória. Após o questionamento inicial, o professor pode descrever a atividade, origem e curiosidades, e buscar justificar o resultado acima.

Dado que a ficha acima (quadro 7) descreve a situação de uma aplicação do jogo, o professor pode utilizá-la como caminho para identificar o espaço amostral e assim obter o resultado desejado, ou seja, a probabilidade de vitória dado que houve a troca de porta. Para tanto, os alunos podem buscar de forma coletiva (comparando cenários) ou individual (enumeração de casos) todos os resultados possíveis no Problema que fomentou a oficina das Três Portas.

Acreditamos que o espaço amostral descrito em conjunto com o desenvolvimento teórico sobre a definição de probabilidade condicional, indicado na Seção 5.4.5, é ferramenta para justificar ao aluno o porquê dá prevalência desse resultado e cuja solução se aproxima da apresentada por Santos (2015). Acreditamos também que este é um momento oportuno para descrever o espaço amostral por meio da Árvore de Probabilidades.

Ademais, em síntese, consideramos que, cabe ao professor, conhecendo as singularidades de sua turma, adaptar a oficina e mobilizar a matemática nela envolvida de modo a fazer sentido para os estudantes.

7.4.2 A Oficina das Três Portas - Segunda Etapa

Para a segunda etapa, foram pensadas duas situações em que o professor pode favorecer a investigação de como obter resultados relacionados ao estudo da probabilidade condicional por meio da Oficina das Três Portas. A primeira situação busca avaliar o comportamento do jogo em que há uma variação no número de portas (de três para quatro), mas somente uma decisão a ser tomada (trocar ou não de porta uma vez). Já para segunda situação, temos o caso em que o número de portas varia (de três para quatro) e o participante deve tomar duas decisões no jogo (trocar ou não de porta até duas vezes). Com base no problema inicial descrito no início do presente capítulo, faz-se valer o seguinte questionamento: qual probabilidade de vitória caso o número de portas aumente para quatro?

Vislumbramos duas maneiras de explorar esse questionamento. A primeira delas diz respeito ao aumento no número de portas, mas que o jogador tenha como decisão manter a porta que escolheu inicialmente ou trocar pela única porta que o apresentador deixou fechada. Para essa aplicação está implícito que ao escolher uma dentre as 4 (quatro) portas iniciais, o apresentador, que ainda sim sabe qual porta contém o prêmio, deverá abrir duas portas, e não uma somente. Para esse caso, suponha que o participante tenha escolhido a porta de número 2 (dois) e suponha que o prêmio esteja na porta de número 4 (quatro). Dada a oficina descrita, o apresentador deverá abrir a porta 1 (um) e 3 (três) e ofertar a possibilidade de o participante trocar sua porta pela que ainda está fechada.

A segunda situação que consideramos igualmente interessante também pode ser explorada em sala. Agora, a variação do problema está no número de portas (quatro) e nas decisões que o participante pode tomar (até duas trocas). Diferente da situação anterior, após a escolha da porta do participante, a pessoa que está no papel de apresentador deverá abrir somente uma porta, e oferecer ao participante duas possibilidades de troca de portas. Suponha a situação em que o participante selecione a porta de número 2 (dois) e que nesta situação o prêmio esteja na porta de número 4 (quatro). O apresentador terá duas opções de portas para revelar, a saber, as portas 1 (um) e 3 (três). Caso o apresentador opte por revelar a porta número 1 (um), uma nova oferta de troca de porta deve ser dada ao participante. Suponha também que, o participante, opte por continuar com porta que escolheu inicialmente. Então, o apresentador deverá revelar a porta número 3 (três), que não contém o prêmio e também não é a porta selecionada pelo participante. Por fim, o apresentador deverá ofertar novamente a possibilidade de troca de porta, isso é, manter a porta número 2 (dois) ou permitir que o participante troque para a porta número 4 (quatro).

As duas variações acima propostas foram baseadas em Salomão (2014). Ao trazer os dois modos descritos, aventamos que se possa criar ensejo para estabelecimento de um possível Cenário para Investigação (Skovsmose, 2000) em que os alunos possam novamente confrontar resultados que outrora poderiam se apresentar contraintuitivos. Para a primeira proposta consideramos válido levantar o seguinte questionamento: ainda é vantajoso trocar de porta na situação em que temos 4 (quatro) portas e duas delas são reveladas simultaneamente?

Para a segunda proposta, podemos explorar quais são as situações possíveis para o caso em que são ofertadas duas vezes a possibilidade de troca de portas, indicando que somente uma porta é revelada por rodada. Nessa proposta também queremos saber qual a situação mais vantajosa. O quadro 8 (oito) sintetiza o que pode ocorrer na situação.

Quatro 8: Situações do jogo para o caso com 4 (quatro) portas e duas opções de troca

Quatro Portas para Escolher	Trocar ou Não de Porta (1° vez)	Trocar ou Não de Porta (2° vez)
Escolhe	Não Troca	Não Troca
Escolhe	Não Troca	Troca
Escolhe	Troca	Não Troca
Escolhe	Troca	Troca

Fonte: Elaboração Própria

Semelhante à proposta apresentada na seção anterior, recomendamos que os alunos façam suas anotações em relação às situações e escolhas vivenciadas em cada etapa da oficina. É esperado que o estudante chegue à conclusão de que, a probabilidade de vitória na primeira situação descrita – ocasião em que se troca ou não de porta única vez -, é de $\frac{3}{4}$.

Já para a situação em que uma porta é revelada por vez - ocasião em que se pode trocar até duas vezes de porta -, a estratégia mais vantajosa para o jogador que opta por não trocar de porta na primeira vez, mas troca de porta na segunda oportunidade tem probabilidade de $\frac{3}{4}$.

Isso posto, finalizamos o presente capítulo, realçando, por um lado, que as adaptações propostas na oficina se ancoraram na vontade de fazer com que os alunos fossem parte da construção dos resultados e não somente aprendizes de um “jogo específico”; por outro lado, as reflexões que produzimos nessa proposta de oficina não se pretenderam definitivas, mas, sim, revelam um modo de olhar do licenciando autor desta monografia para o ensino de probabilidade, neste momento. Assim, entendemos que existe abertura para ampliações e desenvolvimentos dessa proposta.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para concluir o texto desta monografia retomo a primeira pessoa do singular. De início, destaco que ela teve como objetivo descrever analiticamente duas propostas de atividades que envolvem conceitos probabilísticos, pensadas para auxiliar o professor de Matemática na Educação Básica.

Para atender ao objetivo supracitado, primeiramente, realizei uma etapa de reflexão teórica. Nessa etapa, comecei por um breve resgate da história da probabilidade. Sobre esse resgate, busquei, por meio do diálogo com literatura especializada, colocar em relevo problemas e fatos históricos que motivaram o desenvolvimento da probabilidade na matemática.

Nesse processo, fui percebendo que todo recorte histórico ou ainda que toda seleção de fatos históricos é enviesada. Assim, percebi, inclusive, que as escolhas históricas que realizei nesta monografia ilustram essa minha afirmação. Considero esse um limite de meu estudo. Dessa forma, tendo, pois, consciência de tal limite, no horizonte de minhas intenções encontra-se o desejo de conhecer, em estudos futuros, versões de outras matemáticas, cujas narrativas sejam não eurocentradas.

Ainda no âmbito da reflexão teórica que realizei, após o breve resgate histórico, busquei em documentos oficiais brasileiros direcionadores de currículo (PCN e BNCC), conhecer a expectativa do Estado para o ensino de probabilidade na educação básica. Dessa imersão nos documentos, identifiquei um fato, qual seja, sobretudo na BNCC o ensino de matemática pretendido, organiza-se a partir de uma série de habilidades. Tais habilidades são recomendadas para serem desenvolvidas desde os anos iniciais da Educação Básica. Cabe destacar, dado o foco deste estudo, que dentre as habilidades encontram-se algumas dedicadas ao pensamento sobre eventos aleatórios, frequência de ocorrência de eventos probabilísticos e quantificação de eventos.

Em seguida, portanto depois do exercício de reflexão teórica, apresentei os procedimentos metodológicos percorridos na monografia. Destaco que as ações que realizei aproximam meu estudo do paradigma qualitativo. Destaco ainda que, no percurso percorrido, influenciado pela parte teórica, construí duas propostas de oficinas voltadas para o desenvolvimento de conceitos probabilísticos. A primeira, intitulada “Corridas de Cavalos”, voltada para os anos finais do Ensino Fundamental; a segunda, intitulada “Oficina das Três Portas”, destinada ao Ensino Médio.

Depois disso, pareceu-me importante dedicar um capítulo para apresentar alguns resultados matemáticos referentes à probabilidade. A verdade é que, a meu ver, um capítulo como esse poderia ser útil a um professor de Matemática que desejasse conhecer parte dos conceitos que emergem nas propostas de oficinas que caracterizo nesta monografia. Ressalto que, para construir esse capítulo apoiei-me nas elaborações de Caberlim (2015), Coutinho (2007) e Hazzan (2013).

Assim, passei à descrição analítica das propostas de oficinas. Em relação a oficina Corrida de Cavalos, busquei apoio em Skovsmose (2000) e em Deodato e David (2015). Dessa forma, apoiado por esses trabalhos, primeiro, caracterizei o ambiente de aprendizagem no qual as propostas de oficinas que propus desejam se inserir (semirrealidade na perspectiva dos Cenários para Investigação). Após essa etapa, descrevi a oficina, em etapas de aplicação (construção e possíveis intervenções do professor). Apresentei, realço, fichas de questões e um possível roteiro de aplicação para a oficina. Como última etapa, refleti sobre conceitos probabilísticos presentes na proposta dessa primeira oficina.

Acerca da Oficina das Três Portas, consultei os trabalhos de Ramos (2023), Salomão (2014) e Santos (2015) para, de partida, descrever o Problema das Três Portas (Monty Hall) e, em seguida, sugerir o desenvolvimento de uma oficina baseada neste problema. Com isso objetivei apresentar uma segunda proposta por meio da qual os participantes pudessem construir o conceito de espaço amostral no âmbito da probabilidade Condicional. Em particular, meu interesse foi jogar luz em ações que pudessem levar o professor a fugir do paradigma do exercício, ou seja, de uso de fórmulas fechadas para ensinar conceitos da probabilidade.

Dessa forma, depois de descrever analiticamente essas duas propostas de oficinas, aponto, por um lado, como contribuição desta monografia: i) a construção de um capítulo que organiza conceitos matemáticos relativos à probabilidade; ii) a proposição de duas oficinas que podem auxiliar o professor da Educação Básica na abordagem da temática probabilidade em sala de aula. Por outro lado, como aspectos a serem aprofundados, aponto: i) a falta de fundamentação teórica sobre a origem do modelo da Árvore de Probabilidades; ii) a análise das propostas das oficinas poderia ter sido enriquecida com a aplicação delas em sala de aula.

Em síntese, concluo esta monografia ressaltando que nela pude: rememorar parte do meu perfil de formação até a universidade; enfrentar meus desafios pessoais com a temática estudada ao aprofundar meus conhecimentos relacionados ao campo da probabilidade; ampliar meus conhecimentos sobre propostas de ensino e diferentes ambientes de aprendizagem; por fim, conhecer alguns pontos relacionados à probabilidade em documentos oficiais de currículo.

9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J., & GEWANDSZNAJDER, F. (1998). *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa* (2a ed.). São Paulo: Pioneira.

BRANQUINHO, João; MURCHO, Desidério; GOMES, Nelson Gonçalves. Enciclopédia de termos lógico-filosóficos. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017.

CABERLIM, C. C. L. (2015). Letramento probabilístico no ensino médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. Dissertação de mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CAIRE, Elaine. A história da origem da curva normal. Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91024/caire_e_me_rcla.pdf?sequence=1. Acesso em: 19 set. 2023.

CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades. Campinas: SBHMat, 2013.

CARVALHO, J. I. F. (2015). Conhecimentos de futuros professores de matemática sobre probabilidade condicional por meio do jogo das três fichas. In: J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. M. Gea, & M.M. López (eds.),Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria, 2(pp. 189-196). Granada: Universidad de Granada

CASTILHOS, T. Reflexões e análises das dificuldades dos alunos e professores do Ensino Médio em Análise Combinatória e Probabilidade.REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 1, n. 2, 2016

COUTINHO, C. Q. S. (2007) CONCEITOS PROBABILÍSTICOS: QUAIS CONTEXTOS A HISTÓRIA NOS APONTA? São Paulo: Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática., v. 23, 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12991/12092. Acesso em: 12 ago. 2024.

COUTINHO, C. Q. S. (1994). Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista. Dissertação de Mestrado em Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil. Retirado em 15 de março, 2020, de https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11159/1/dissertacao_cileda_coutinho.pdf.

DEODATO, A.A; DAVID, M.M. Probabilidade em uma Oficina de Matemática: uma análise à luz da aprendizagem situada e da teoria da atividade. Educação Matemática Pesquisa, v.17, n.2, 281-308, 2015.

FERNANDES, Flávio Miguel dos Santos. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE SOROCABA 2018**.** 2018. 104 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/10761/DISSERTA%c3%87%c3%83O_FL%c3%81VIO_MIGUEL_DOS_SANTOS_FERNANDES.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 15 jul. 2024.

FERNANDES, J. A., SOUSA, M. V., & RIBEIRO, S. A. (2004). O ensino de estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. In J. A Fernandes, M. V Sousa & S. A Ribeiro. (Orgs.). Actas do 1.º Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola: Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística (pp. 165-193). Braga: Centro de Investigacão em Educacão da Universidade do Minho.

FLACH, Simone. Ensino Fundamental no Brasil: previsões legais e ações governamentais para a ampliação do atendimento, da duração e do tempo escolar. Ensaio: aval. pol. públ. Educ. Rio de Janeiro, v. 23, n. 88, jul./set. 2015, p. 739-762.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo, SP: Paz e Terra, 1996.

HANDAYA, A. Uma reflexão sobre dificuldade de aprendizagem de análise combinatória. Sinergia–Revista Científica do IFSP.v. 18, n. 1, p. 13-17. São Paulo:2017.

HAZZAN, Samuel. FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR Combinatória Probabilidade**.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 204 p

JUNQUEIRA, Ana Lucia Nogueira. A probabilidade que a história nos conta. 2015. 13 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Licenciatura em Matemática, Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

MLODINOW, Leonard. O andar do bêbado**.** Rio de Janeiro: Zahar, 2009. 324 p

MONTEIRO, H. R. de S. et al. A importância das oficinas pedagógicas no processo de ensino-aprendizagem. Epistemologia e Práxis Educativa-EPEduc, 2019. v. 2, n. 2, 2019.

MORAIS, D. A. M.; STURION, L.; REIS, M. C. dos. Um estudo exploratório da educação básica sobre o ensino de estatística e o uso de tecnologias midiáticas. RevistaEnsino de Matemática em Debate.v. 4, n. 2, p. 61-86. São Paulo,2017.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica (esse título em negrito). Secretaria Estadual de Educação. 82p. 2008

PAULA, Fernanda Vital de. O cálculo de probabilidades sob as abordagens clássica e frequentista. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 5, n. 2, p. 398-406, 2020.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 267p. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2009.

PINHEIRO, Maria Gracilene de Carvalho; SILVA, Angélica da Fontoura Garcia; GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. Dos PCN à BNCC: uma análise interpretativa das indicações de aprendizagens no tema probabilidade. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 9, n. 18, p. 137-157, 2020.

RAMOS, Débora Cristina Silva. Uma contribuição para o ensino de probabilidade na educação básica. 86f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, RN, 2023.

ROSSATTO, Felipe Copceski; DAMMANN, Julia; KAMPHORST, Eliane Miotto; KAMPHORST, Carmo Henrique; DONADEL; Ana Paula Do Prado. Teorema de bayes: estudo e aplicação. Anais da XXI Jornada de Pesquisa. Rio Grande do Sul, 2016

SALOMÃO, Marcelo Soares**. Estudo e generalizações do paradoxo de Monty Hall na educação básica. 71p. Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2014.

SANTOS, Leonardo Garcia dos. O problema de Monty-Hall: uma abordagem introdutória para o estudo da probabilidade condicional. 51p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2015.

SILVA, Welson Nogueira da. Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos. 88p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, PA, 2020.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, Sheila de Jesus Costa. AL-BANNA: LEVANTANDO O VÉU SOBRE AS POSSÍVEIS POTENCIALIDADES DIDÁTICO- PEDAGÓGICAS DE UM MANUSCRITO ISLÂMICO MEDIEVAL PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA**.** 2023. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Ppgedmat, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufop.br/server/api/core/bitstreams/b123dd24-13ae-4522-910f-28fbb3713aa9/content. Acesso em: 20 set. 2024.

SOARES, José Ailton Rodrigues; CARVALHO, Euvaldo de Souza; PEREIRA, Onésimo Rodrigues; SILVA, Roney Feliciano da; OLIVEIRA, Paulo Alexandre; SILVA, Warley Gramacho da; MARTINS, Glêndara Aparecida de Souza. Limitadores do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de probabilidade. DESAFIOS - Revista Interdisciplinar Da Universidade Federal Do Tocantins, 9 (Especial), 71–79, 2022.

UNESCO. Comision Economica para America Latina y el Caribe (CEPAL). Transformación productiva con equidad. Santiago de Chile: Cepal, 1990.

UNICEF. Anual Report, 1994.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO. Sistema de Bibliotecas e Informação. Guia para normalização de trabalhos acadêmicos. 3. ed. Ouro Preto, 2023. Disponível em: http://www.sisbin.ufop.br/servicos/normalizacao. Acesso em: 20/08/2024.

VASCONCELOS, V. B. de.; VASCONCELOS, G. B. de; CHAQUIAM, M. Um percurso pela história da probabilidade. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, *[S. l.]*, v. 9, n. 26, p. 31–46, 2022. DOI: 10.30938/bocehm. v9i26.7990. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/7990. Acesso em: 11 jan. 2023.

VIALI, Lorí. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008.

VIANA, Angela Rossini; VIANA, Giomar; SCHWANS, Ari; HOEFLICH, Vitor Afonso. Alternativas para o Ensino da Matemática em Escolas Públicas. Educação em Revista, v. 14, n. 2, 2013.

ZINDEL, Marcia Longen. Tomada de decisão e risco: a contribuição dos matemáticos e estatísticos. Estatística e Sociedade, n. 5, 2018.