



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO (UFOP)  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS (ICSA)  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS (DEECO)  
BACHARELADO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

PAULO ARAGÃO DALDEGAN

SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA UM MODELO DE TROCA PURA.

MARIANA / MG

2024

PAULO ARAGÃO DALDEGAN

SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA UM MODELO DE TROCA PURA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Ciências Econômicas no Instituto de Ciências Sociais Aplicadas (ICSA) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) - *Campus* Mariana, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea.

MARIANA / MG

2024

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

D138s Daldegan, Paulo Aragao.  
Soluções numéricas para um modelo de troca pura. [manuscrito] /  
Paulo Aragao Daldegan. - 2024.  
70 f.: il.: , gráf., tab.. + Scripts de Python.

Orientador: Prof. Dr. Martin Barrenechea.  
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas. Graduação em Ciências  
Econômicas .

1. Economia. 2. Equações - Soluções numéricas. 3. Microeconomia. I.  
Barrenechea, Martin. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 330.101.542

Bibliotecário(a) Responsável: Essevalter De Sousa - Bibliotecário Coordenador  
CBICSA/SISBIN/UFOP-CRB6a1407



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Paulo Aragão Daldegan**

### **Soluções Numéricas para um Modelo de Troca Pura**

Monografia apresentada ao Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas

Aprovada em 19 de dezembro de 2024

#### Membros da banca

Prof. Dr. - Martin Harry Vargas Barrenechea - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
Prof. Dr. - Carlos Eduardo da Gama Torres - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)  
Prof. Dr. - Alan André Borges da Costa - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Martin Harry Vargas Barrenechea, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 19/12/2024



Documento assinado eletronicamente por **Martin Harry Vargas Barrenechea, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 19/12/2024, às 19:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0832373** e o código CRC **C1B54846**.

## **AGRADECIMENTOS**

Quero agradecer primeiramente a toda a minha família, que lutou para eu conquistar o tão sonhado diploma, sempre me apoiando em todos os momentos. Agradeço também a Universidade Federal de Ouro Preto, a todos os funcionários, aos docentes do curso de Ciências Econômicas e a todos aos meus colegas que contribuíram muito, não somente para meu aprendizado, mas também para a vivência acadêmica. Agradeço a Deus por todas as oportunidades concedidas em minha vida e por essa etapa vencida.

## RESUMO

Este trabalho explora a teoria do equilíbrio geral, uma área fundamental da microeconomia que analisa a interação entre múltiplos mercados e agentes econômicos, buscando identificar preços e alocações que satisfaçam simultaneamente oferta e demanda. O objetivo principal é aplicar e comparar estratégias numéricas para resolver problemas de equilíbrio geral em um modelo simples, com dois bens e dois indivíduos, inspirado no exemplo clássico de [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#). A importância do estudo reside na complexidade inerente ao equilíbrio geral, onde as inter-relações entre mercados tornam inviável a solução manual de equações não lineares. Utilizando métodos computacionais, é possível modelar e resolver problemas de maneira precisa e eficiente, fornecendo perspectivas práticas sobre o comportamento econômico. O trabalho contribui para a análise de como algumas estratégias de solução para métodos numéricos reagem a um caso específico de estudo, com funções de utilidade e conseqüentemente de demandas um pouco mais complexas. Ao explorar métodos numéricos para resolver problemas de equilíbrio geral, o trabalho não apenas demonstra a aplicabilidade prática desses métodos, mas também ressalta sua relevância na análise econômica contemporânea. A modelagem de equilíbrio geral é apresentada como uma ferramenta essencial para entender problemas complexos. A comparação de estratégias numéricas reforça a aplicabilidade prática dos métodos estudados, tornando-os mais acessíveis a análises econômicas contemporâneas.

**Palavras chave:** Equilíbrio Geral; Modelagem Numérica; Otimização; Python.

## ABSTRACT

This work explores the theory of general equilibrium, a fundamental area of microeconomics that analyzes the interaction between multiple markets and economic agents, aiming to identify prices and allocations that simultaneously satisfy supply and demand. The primary objective is to apply and compare numerical strategies to solve general equilibrium problems in a simple model with two goods and two individuals, inspired by the classic example of [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#). The importance of this study lies in the inherent complexity of general equilibrium, where the interrelations between markets make it unfeasible to manually solve nonlinear equations. By using computational methods, it becomes possible to model and solve problems with precision and efficiency, providing practical insights into economic behavior. The work contributes to the analysis of how certain numerical solution strategies perform in a specific case study, involving slightly more complex utility and demand functions. By exploring numerical methods to solve general equilibrium problems, this work not only demonstrates the practical applicability of these methods but also highlights their relevance in contemporary economic analysis. General equilibrium modeling is presented as an essential tool for understanding complex problems. The comparison of numerical strategies underscores the practical applicability of the studied methods, making them more accessible for modern economic analyses.

**Keywords:** general Equilibrium; Numerical Modeling; Optimization; Python.





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>O MODELO DE EQUILÍBRIO GERAL DE TROCA PURA</b>	<b>13</b>
2.1	O modelo de troca pura	13
2.2	Eficiência e equilíbrio	16
2.3	Características	19
<b>3</b>	<b>O MODELO DE PURA TROCA VERSÃO GERAL E MÉTODOS DE SOLUÇÃO</b>	<b>21</b>
3.1	Características gerais do modelo genérico	22
3.2	Estratégia de Solução Numérica	22
3.2.1	Interação de ponto fixo	22
3.2.2	$E(\mathbf{p}) = 0$ como um sistema não linear	23
3.2.3	Métodos Numéricos Hierárquicos	23
3.2.4	Condições de primeira ordem e equilíbrio de mercado	24
3.2.5	O Método de Negishi	25
<b>4</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES</b>	<b>27</b>
4.1	O Método de Newton	27
4.2	O Método da Interação de ponto fixo	30
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO A UM MODELO PARTICULAR DE ESTUDO</b>	<b>33</b>
5.1	Um modelo de puras trocas com equilíbrios	33
5.2	Calculo da demanda, excesso de demanda e outras funções importantes	35
5.3	Implementação e teste dos Métodos numéricos	38
5.3.1	Iteração de ponto fixo	41
5.3.2	$E(p) = 0$ como um sistema não linear	43
5.4	Condições de primeira ordem	48
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>55</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>CÓDIGO PYTHON</b>	<b>61</b>
A.1	Código para a iteração do ponto fixo	61
A.2	$E(p) = 0$ como um sistema não-linear	62
A.3	Código para condições de primeira ordem	65



## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de Equilíbrio Geral compõe uma importante área da microeconomia. Nela, busca-se explicar o comportamento de vários mercados em uma economia, analisando a oferta, a demanda e os preços de equilíbrio de cada um, afim de chegar em um ponto em que tudo estará em equilíbrio.

A história da teoria do equilíbrio geral é uma narrativa de evolução intelectual que começa com os economistas clássicos, que já possuíam uma noção intuitiva de equilíbrio. Para eles, o equilíbrio representava o ponto em que a economia tendia a se estabilizar ao longo do tempo, retornando a esse estado após perturbações. Essa ideia foi expressa por Adam Smith na metáfora da "mão invisível", que descrevia um mecanismo de alocação orientado pelas interações de mercado.

No século XIX, economistas como Ricardo, Mill, Marx e Jevons reconheceram tendências de equilíbrio estáveis e a importância das interações entre mercados, mas não formalizaram essas ideias matematicamente. O primeiro avanço significativo nesse sentido veio com Augustin Cournot, em 1838, que articulou e apresentou matematicamente o conceito de equilíbrio parcial. Embora seu trabalho tenha precedido o de Alfred Marshall, foi este, que em 1890, quem popularizou o diagrama de oferta e demanda. Cournot, no entanto, entendia que a análise de equilíbrio parcial era um caso especial dentro de um contexto maior de interações de mercado.

A formalização do equilíbrio geral surgiu com Léon Walras, que, em 1874, publicou "Elementos de Economia Pura". Walras desenvolveu o primeiro modelo completo de equilíbrio geral, estabelecendo um sistema de equações que relacionava as demandas e ofertas de várias mercadorias, além de apontar a necessidade de igualdade entre o número de equações e incógnitas. Apesar do grande avanço proporcionado, seu método havia uma falha, pois não resolvia completamente os desafios impostos pela natureza não linear das equações e pelas restrições.

No final do século XIX, F. Y. Edgeworth contribuiu com novos conceitos de negociação e ferramentas analíticas em "Mathematical Psychics"(1881), influenciando futuras discussões sobre o equilíbrio geral. Esse trabalho foi aprofundado décadas depois, com estudos de Debreu e Scarf. Nos anos 1930, o cenário político e intelectual de Viena proporcionou outro avanço, com Karl Menger presidindo seminários que reuniram Abraham

Wald, um matemático húngaro, e Karl Schlesinger, um banqueiro vienense. Schlesinger apresentou a Wald o problema da existência do equilíbrio geral, levando Wald a elaborar provas matemáticas que representavam diferentes modelos de equilíbrio.

Nos anos 1950, Kenneth Arrow, Gerard Debreu e Lionel McKenzie impulsionaram o campo. Trabalhando inicialmente de forma independente, Arrow e Debreu eventualmente colaboraram, apresentando, em 1954, com McKenzie, os resultados fundamentais da teoria do equilíbrio geral à Econometric Society. Eles introduziram o uso de teoremas de ponto fixo, inspirados pelo trabalho de John Nash em teoria dos jogos, para demonstrar matematicamente a existência de equilíbrios econômicos. Este período consolidou a teoria, com contribuições adicionais de Arrow sobre bem-estar econômico e alocação sob incerteza, e de Debreu, que sintetizou o progresso no livro *Theory of Value* (1959).

A conexão entre o modelo de Edgeworth e o equilíbrio competitivo foi formalizada por Debreu e Scarf em 1963, que demonstraram como, em economias suficientemente grandes, os resultados de negociações coletivas convergiam para o equilíbrio de tomadores de preços. Arrow e Debreu foram reconhecidos por suas contribuições com prêmios Nobel em 1972 e 1983, respectivamente.

A teoria do equilíbrio geral continuou a se expandir em campos como incerteza, organização industrial, economia monetária e macroeconomia, com sua base conceitual firmemente ancorada no modelo Arrow-Debreu. Essa evolução reflete um esforço coletivo que atravessou séculos, combinando intuições iniciais com rigor matemático e permitindo novas fronteiras para a análise econômica.

Com a evolução nessa área, surgiu a modelagem de equilíbrio geral. Ela é uma abordagem que considera simultaneamente todos os mercados e agentes econômicos em uma economia. Em contraste, a modelagem de equilíbrio parcial examina um mercado específico, mantendo constantes as condições fora desse mercado. A expansão do uso da modelagem de equilíbrio geral reflete sua capacidade de lidar com questões complexas e inter-relacionadas, como incidência tributária, regulamentação ambiental, comércio internacional e desastres naturais. No entanto, apesar dessa crescente importância na pesquisa econômica aplicada, os cursos de microeconomia muitas vezes dedicam pouco tempo à compreensão dos conceitos de equilíbrio geral. Embora os conceitos clássicos, como otimização de Pareto, eficiência na produção e troca, e o "primeiro teorema fundamental" da economia do bem-estar sejam abordados, a modelagem de equilíbrio geral contemporânea muitas vezes é negligenciada [NICHOLSON; SNYDER, 2019](#).

Essa falta de atenção deixa os estudantes mal preparados para entender e analisar pesquisas econômicas modernas. A modelagem de equilíbrio geral não é apenas uma extensão técnica, mas sim uma abordagem que revela aspectos fundamentais dos princípios econômicos. Portanto, a falta de cobertura adequada desses tópicos pode obscurecer o entendimento de importantes conceitos econômicos pelos alunos. A importância

---

da modelagem de equilíbrio geral deveria ter mais ênfase, pois ela pode melhorar a compreensão dos estudantes sobre questões econômicas contemporâneas e prepará-los para uma análise mais aprofundada e crítica.

Como sabemos, em uma economia existem vários bens e vários mercados diferentes, que possuem uma inter-relação e estão suscetíveis a choques que interferem em seus equilíbrios, tornando a tarefa de chegar em um ponto de equilíbrio geral difícil e desafiadora. Além disso, o grande volume de dados e de cálculos a serem feitos torna quase impossível de ser feito a mão, podendo incorrer em falhas e muitas horas de trabalho cansativo e exaustivo.

Nos dias atuais, conseguimos por meio de programação em linguagens computacionais fazer o trabalho volumoso de cálculos e de modelagem, obtendo resultados precisos em questão de segundos. Assim, resolver um problema que envolva encontrar preços de equilíbrio (por exemplo) em equilíbrio geral se torna algo mais preciso e rápido.

Para fazer isso, deve-se fazer uso de equações não lineares para realizar o cálculo de equilíbrio competitivo. Existe uma complexidade inerente à análise de equilíbrio geral, principalmente quando se trata de uma análise das equações de demanda e oferta para os bens e insumos. Um modo de contornar essa dificuldade é utilizar a abordagem de simulação utilizando resultados numéricos. Desta forma, pode-se aplicar princípios qualitativos básicos da análise microeconômica para entender as mudanças nos preços de equilíbrio, permitindo visualizar e compreender as consequências de diferentes eventos, não somente para um bem ou insumo, mas para os vários que existem em uma economia. Essa metodologia de simulação proporciona uma compreensão prática e intuitiva das interações complexas que ocorrem em uma economia de equilíbrio geral. Assim, pode-se observar e analisar numericamente como as mudanças em um setor afetam todo o sistema econômico, sem a necessidade de se perderem em detalhes matemáticos complicados.

A especificação de qualquer modelo de equilíbrio geral começa ao determinar a quantidade de bens a serem incluídos no modelo. Os bens abrangem não apenas produtos de consumo, como também os bens intermediários utilizados na produção de outros produtos, insumos produtivos como mão de obra ou recursos naturais, e bens que devem ser produzidos pelo governo (bens públicos). A proposta do modelo é resolver os preços de equilíbrio para todos esses bens e analisar como esses preços variam diante de condições diversas e choques econômicos.

No contexto de um modelo de equilíbrio geral, alguns bens são gerados por empresas, cuja capacidade produtiva é especificada por funções específicas de produção. Neste trabalho, não iremos considerar o sistema de produção, partindo de uma análise de um modelo simples, com dois bens e dois indivíduos.

Em seu livro, [JUDD, 2023](#) apresenta estratégias utilizando métodos numéricos

para solucionar problemas simples de equilíbrio geral. Mais adiante no presente trabalho, iremos abordar essas estratégias, bem como suas aplicações. Para verificarmos como se comportam algumas dessas estratégias, utilizaremos o trabalho de [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#) como base, principalmente as utilidades utilizadas. O objetivo é observar qual estratégia se comporta melhor e se mostra mais eficiente diante do cenário apresentado.

[SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#) em seu trabalho, buscou representar de forma conveniente, segundo ele, "um exemplo numérico real de uma economia comercial tranquila com equilíbrio múltiplo parece quando representado em uma caixa de Edgeworth". Para isso, Shapley utilizou uma economia simples, com somente 2 turistas (Ivan e John) e 2 bens monetários (rublos e dólares) para efetuarem as trocas entre si; se tratando de um exemplo bem robusto, em que pequenas perturbações nos dados não afetariam as características qualitativas do modelo.

O presente trabalho terá 6 capítulos. No capítulo 2, abordaremos as concepções da teoria do equilíbrio geral. Entenderemos como se chega a um ponto de equilíbrio em um modelo, baseando-se em conceitos da caixa de Edgeworth, da lei de Walras, os teoremas de bem-estar e as preferências individuais. Além disso, será apresentado as formulações matemáticas para se chegar a um equilíbrio em um modelo simples, que sera utilizado no trabalho.

No capítulo 3, apresentaremos as características gerais de um modelo genérico. Posteriormente, será demonstrado as estratégias de soluções numéricas. No capítulo 4, especificaremos como funcionam os métodos numéricos que serão aplicados. No capítulo 5, iremos especificar o nosso modelo de estudo, baseado em [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#) e aplicaremos 3 estratégias de solução, apresentando os resultados de cada uma. Por fim, no capítulo 6, concluiremos o trabalho apresentando quais foram os resultados e comparando as estratégias.

## **2 O MODELO DE EQUILÍBRIO GERAL DE TROCA PURA**

Sendo a oferta e a demanda especificadas, o modelo de equilíbrio geral será resolvido para encontrar as quantidades e preços de equilíbrio. Encontrar a solução as vezes pode ser um trabalho difícil, como dito anteriormente, as vezes o número de bens e famílias é grande, por isso recorre-se a ajuda computacional. Primeiramente, uma solução inicial é especificada, posteriormente os preços são aumentados em mercados que se identifica um excesso de demanda e diminuídos em outros que possuem excesso de oferta até chegar a um ponto de equilíbrio. Neste ponto o excesso de demanda é igual a zero.

Um ponto de partida para fazer uma análise de equilíbrio geral é definindo a quantidade de indivíduos e de bens que haverá em um mercado. A partir disso, podemos analisar como serão feitas as trocas e o comportamento tanto dos bens, quanto dos indivíduos neste mercado. Primeiro, define-se como será a alocação destes bens, por meio das cestas de consumo, onde se quantidade total de bens consumidos for igual à quantidade de bens total disponível no mercado, teremos um caso de alocação factível, o que nos permite uma boa análise de como ocorrerá as trocas entre os indivíduos deste mercado. Um tipo interessante de alocação factível é a alocação dos bens por meio de uma dotação inicial de cada consumidor presente no mercado, consistindo em uma quantidade de cada bem que cada indivíduo irá trazer ao mercado. Somando-se todas as dotações iniciais de cada indivíduo, teremos o total de bens e suas respectivas quantidades neste mercado, assim, os consumidores trocarão os bens entre si até chegar em uma alocação final.

### **2.1 O MODELO DE TROCA PURA**

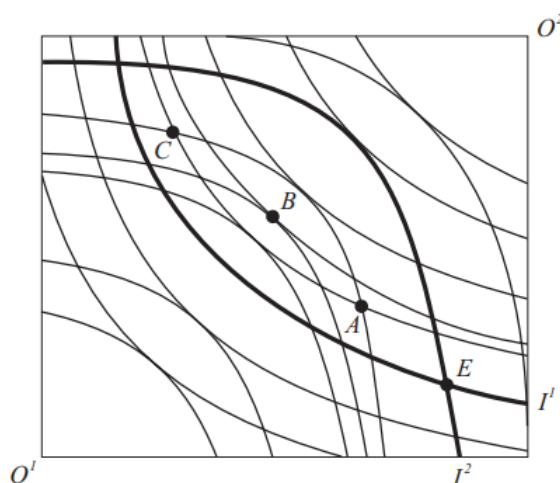
Dada as preferências de cada consumidor, as trocas ocorrerão até um ponto em que não ocorrerá melhora para um indivíduo sem que piore o outro indivíduo, portanto não havendo trocas que beneficiem os dois indivíduos. Neste ponto, ocorrerá uma alocação eficiente no sentido de Pareto, a qual cada pessoa situa-se em sua curva de indiferença mais alta possível, dada a curva de indiferença da outra pessoa. Nesta alocação, ocorre que:

1. Não há como fazer com que todas as pessoas envolvidas fiquem em situação melhor;  
ou

2. não há trocas mutuamente vantajosas para serem efetuadas, e assim por diante.

O equilíbrio competitivo em uma economia com dois bens, como utilizaremos neste trabalho, pode ser entendido a partir de conceitos fundamentais de alocação eficiente e da interação entre agentes econômicos. Um dos instrumentos mais usados para representar essas trocas é a caixa de Edgeworth, que permite visualizar as alocações iniciais de bens, as preferências dos agentes e as possíveis trocas mutuamente vantajosas. A curva de contrato dentro da caixa representa o conjunto de todas as alocações eficientes de Pareto, ou seja, as alocações em que não é possível melhorar a situação de um agente sem piorar a de outro.

Figura 1 – Caixa de Edgeworth



Fonte: STARR, 2011 pag. 33.

No contexto de uma troca bilateral entre dois agentes com preferências distintas sobre dois bens, representado graficamente pela caixa de Edgeworth, o ponto inicial de análise é a dotação inicial  $E$ . A partir desse ponto, os agentes podem realizar trocas mutuamente vantajosas movendo-se para o noroeste da área delimitada pelas curvas de indiferença de ambos. Nessa região, cada agente troca um bem que valoriza menos por outro que valoriza mais, ou seja, que tenha mais utilidade para ele, resultando em ganhos mútuos.

Ao longo desse processo, os agentes podem alcançar diferentes pontos, como  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . Inicialmente, em  $E$ , as curvas de indiferença dos agentes se cruzam, indicando taxas marginais de substituição  $MRS$  diferentes. Isso sugere que há espaço para trocas que beneficiem ambos. A troca para  $A$  melhora a utilidade de ambos, mas ainda deixa espaço para novos acordos. Movendo-se para  $B$ , as curvas de indiferença tornam-se tangentes, o que significa que as  $MRS$  dos agentes se igualam. Nesse ponto, não há mais trocas mutuamente vantajosas possíveis.



O ponto B é eficiente no sentido de Pareto, pois não existem mais realocações que possam melhorar a situação de um agente sem prejudicar o outro. Em contrapartida, os pontos E, A e C são ineficientes, pois ainda permitem ganhos mútuos. A eficiência de Pareto no ponto B reflete o uso ótimo dos recursos disponíveis, sem desperdício. Além disso, o ponto B também atende ao critério de racionalidade individual, pois ambos os agentes estão em uma posição ao menos tão boa quanto na dotação inicial. Essa combinação de eficiência e racionalidade caracteriza a solução ideal de negociação entre os dois indivíduos.

Embora uma curva de contrato mostre os pontos de eficiência de Pareto, ela não indica como os agentes chegam a uma alocação específica dentro dessa curva. Para resolver essa ambiguidade, podemos introduzir o conceito de equilíbrio competitivo, que descreve um processo de formação de preços em mercados descentralizados. Nesse modelo, assume-se a presença de um leiloeiro walrasiano, responsável por ajustar os preços de dois bens,  $p_x$  e  $p_y$ , até que a oferta se iguale à demanda em todos os mercados.

Os agentes econômicos, ao receberem os preços  $p_x$  e  $p_y$ , avaliam sua dotação inicial de bens e decidem quanto desejam consumir de cada bem, respeitando suas restrições orçamentárias. A maximização da utilidade de cada agente ocorre quando a taxa marginal de substituição (TMS) entre os dois bens é igual à razão dos preços, ou seja:

$$TMS_A = TMS_B = \frac{p_1}{p_2}.$$

Esse processo leva a uma alocação em que a soma das demandas líquidas dos agentes é zero para cada bem.

Um importante conceito da teoria do equilíbrio geral é a lei de Walras. De acordo com ela, se a demanda se igualar a uma oferta em um mercado, significa que necessariamente em outro mercado também ocorrerá o mesmo. Além disso, essa condição tem de valer para todos os preços, já que cada agente tem de satisfazer sua restrição orçamentária para cada um deles. Se encontrarmos um conjunto de preços ( $p_1$ ,  $p_2$ ) onde a demanda pelo bem 1 seja igual à oferta do bem 1, podemos garantir que a demanda pelo bem 2 também será igual à oferta do bem 2. Da mesma forma, se encontrarmos um conjunto de preços onde a demanda pelo bem 2 seja igual à oferta do bem 2, podemos assegurar que o mercado do bem 1 estará em equilíbrio. De maneira geral, se houver mercados para  $k$  bens, precisaremos encontrar apenas um conjunto de preços onde  $k - 1$  mercados estejam em equilíbrio. A lei de Walras implica que, nesse caso, o mercado do bem  $k$  automaticamente terá sua demanda igual à oferta.

A existência de um equilíbrio competitivo depende de certas condições matemáticas, como a continuidade da função de demanda agregada e a convexidade das preferências dos agentes. Essas condições garantem que pequenas variações nos preços resultem em pequenas variações na demanda, facilitando o ajuste de preços pelo chamado leiloeiro

até alcançar o equilíbrio.

Além da existência, o equilíbrio competitivo também é eficiente no sentido de Pareto. No ponto de equilíbrio, as curvas de indiferença dos agentes tangenciam a linha orçamentária comum, indicando que não há trocas adicionais que sejam mutuamente vantajosas. Assim, o equilíbrio competitivo satisfaz o Primeiro Teorema do Bem-Estar Econômico, que afirma que qualquer equilíbrio competitivo é eficiente no sentido de Pareto.

## 2.2 EFICIÊNCIA E EQUILÍBRIO

O Primeiro Teorema do Bem-Estar estabelece que um mercado competitivo maximiza todos os ganhos de troca, garantindo que a alocação de equilíbrio alcançada será necessariamente eficiente no sentido de Pareto. Isso significa que não será possível melhorar a situação de alguém sem prejudicar a de outro, no entanto, essa alocação pode não possuir outras propriedades desejáveis mesmo sendo eficiente.

O teorema não aborda a distribuição dos benefícios econômicos. O equilíbrio de mercado pode resultar em uma alocação desigual - se a pessoa A possuía tudo inicialmente, ela poderia continuar possuindo tudo após as trocas, o que pode não ser justo. Apesar disso, sabe-se que um mecanismo de mercado simples pode alcançar uma alocação eficiente, ainda que não garanta equidade.

Analisemos agora uma situação de monopólio. Vamos considerar um cenário onde não há leiloeiro e o agente A define os preços para o agente B, que decide quanto deseja trocar com base nesses preços. Suponha também que A conhece a “curva de demanda” de B e escolhe os preços para maximizar o próprio bem-estar, considerando a demanda de B.

Para entender o equilíbrio nesse processo, precisamos lembrar da definição de curva preço-consumo de um consumidor, que representa todas as escolhas ótimas dos consumidores aos diferentes preços. A curva preço-consumo de B mostra as cestas que ele comprará aos diferentes preços, descrevendo seu comportamento de demanda. O ponto onde a reta orçamentária de B intercepta a curva preço-consumo representa o consumo ótimo de B.

Para que A escolha os preços que maximizem seu bem-estar, ele deve encontrar o ponto na curva preço-consumo de B onde A obtém a maior utilidade. Essa escolha ótima é caracterizada por uma condição de tangência: a curva de indiferença de A deve tangenciar a curva preço-consumo de B. Se a curva preço-consumo de B cortasse a curva de indiferença de A, haveria outro ponto preferido por A, indicando que não estamos no ponto ótimo para A. A alocação de monopólio é ineficiente no sentido de Pareto. Na margem, A gostaria de vender mais aos preços de equilíbrio, mas só conseguiria fazer

isso reduzindo os preços de venda, o que resultaria em uma diminuição da renda obtida de todas as suas vendas anteriores que estavam acima desse novo preço.

O Primeiro Teorema do Bem-Estar afirma que qualquer equilíbrio competitivo em um mercado de bens é eficiente no sentido de Pareto. Isso significa que, em um mercado competitivo, onde os agentes buscam maximizar sua utilidade dentro de suas restrições orçamentárias e os preços refletem adequadamente a escassez relativa dos bens, a alocação resultante não pode ser melhorada sem prejudicar pelo menos um dos agentes. A eficiência de Pareto, nesse contexto, refere-se à impossibilidade de melhorar o bem-estar de um indivíduo sem reduzir o bem-estar de outro.

Este teorema é notável porque demonstra que, sob certas condições, mercados descentralizados e competitivos conduzem automaticamente a resultados eficientes. Essa eficiência ocorre sem a necessidade de intervenção externa, desde que algumas condições sejam atendidas. Entre elas, destacam-se que os agentes se preocupam apenas com seu próprio consumo de bens, e não com o consumo de outros agentes. Caso contrário, surgiriam externalidades no consumo, que poderiam comprometer a eficiência do equilíbrio competitivo. Além disso, o equilíbrio só é garantido se os agentes se comportarem de maneira competitiva, ou seja, sem reconhecer ou explorar seu poder de mercado, algo que tende a ser viável apenas em mercados com muitos agentes, onde nenhum deles consegue individualmente influenciar os preços. O teorema pressupõe ainda que o equilíbrio competitivo exista, o que geralmente ocorre em mercados suficientemente grandes e diversificados.

Um exemplo que ilustra uma falha no Primeiro Teorema do Bem-Estar ocorre quando há externalidades no consumo. Imagine que o agente A se importe com o consumo de charutos pelo agente B. Nessa situação, a escolha de consumo de cada agente baseada apenas em preços de mercado pode levar a uma alocação ineficiente. Ainda que ambos maximizem suas utilidades individuais, é possível haver alternativas que melhorem a situação de ambos, como A pagar B para consumir menos charutos. Assim, a eficiência no sentido de Pareto pode não ser alcançada.

Outro ponto importante é que, para mercados muito pequenos (como no exemplo da caixa de Edgeworth com dois agentes), o comportamento competitivo também pode não se sustentar, pois cada agente tem poder de mercado suficiente para influenciar preços. Portanto, embora o Primeiro Teorema do Bem-Estar seja poderoso, ele depende de condições específicas para se aplicar.

O Segundo Teorema do Bem-Estar expande a análise, afirmando que qualquer alocação eficiente no sentido de Pareto pode ser alcançada como um equilíbrio competitivo, desde que as dotações iniciais sejam redistribuídas de forma adequada. Em outras palavras, questões de eficiência e de distribuição podem ser tratadas separadamente. Enquanto o Primeiro Teorema assegura que mercados competitivos são eficientes, o Segundo

Teorema mostra que esses mesmos mercados podem alcançar qualquer alocação eficiente desejada, bastando ajustar as dotações iniciais.

O resultado depende da convexidade das preferências e das tecnologias de produção. Se as preferências de todos os agentes forem convexas, é sempre possível encontrar preços que resultem em um equilíbrio competitivo correspondente a uma alocação eficiente no sentido de Pareto. A convexidade das preferências garante que as curvas de indiferença dos agentes não se cruzem mais de uma vez, permitindo que uma linha reta – representando os preços relativos – separe os conjuntos de cestas preferidas pelos agentes.

Além disso, o segundo Teorema também revela um ponto importante sobre o papel dos preços nos mercados. Os preços têm duas funções principais: a função alocativa, na qual refletem a escassez relativa dos bens, orientando os agentes a fazer escolhas que maximizem sua utilidade dentro das restrições orçamentárias; e a função distributiva, na qual determinam o poder de compra dos agentes, influenciando o acesso de cada um aos bens disponíveis.

A distinção entre esses dois papéis é fundamental. Para alcançar resultados eficientes, os preços devem refletir os custos marginais reais, permitindo que os agentes tomem decisões corretas em termos de consumo. Questões de distribuição, por outro lado, podem ser resolvidas por meio de redistribuições das dotações iniciais. Essas redistribuições podem ser feitas, por exemplo, através de transferências fixas de riqueza entre os agentes, sem interferir nos preços de mercado.

Na prática, o Segundo Teorema do Bem-Estar é útil para fundamentar políticas de redistribuição de renda. Ele sugere que, em vez de manipular preços (por exemplo, reduzindo preços para certos grupos), o governo deve atuar redistribuindo diretamente poder de compra. Manipulações de preços frequentemente introduzem ineficiências, enquanto transferências fixas permitem que os mercados continuem alocando recursos de forma eficiente.

Contudo, implementar o Segundo Teorema enfrenta desafios práticos, como medir com precisão as dotações iniciais e determinar métodos de redistribuição que não distorçam os incentivos dos agentes. Por exemplo, tributar diretamente a dotação de trabalho (quantidade de trabalho que o agente pode oferecer) seria ideal para evitar distorções, mas essa abordagem é complexa e politicamente controversa.

Os dois teoremas fundamentais do bem-estar destacam o papel dos mercados competitivos como mecanismos eficientes para alocação de recursos. O Primeiro Teorema assegura que mercados competitivos conduzem a uma eficiência no sentido de Pareto, enquanto o Segundo Teorema demonstra que é possível alcançar qualquer alocação eficiente por meio de ajustes nas dotações iniciais. Ambos os teoremas são essenciais para compre-

ender o funcionamento dos mercados e suas implicações para a formulação de políticas econômicas.

### 2.3 CARACTERÍSTICAS

Por meio dos modelos de equilíbrio geral, conseguimos observar várias características e como opera uma economia. Nicholson(2019, pag. 342) lista algumas importantes percepções que conseguimos através de um modelo de equilíbrio geral:

1. Nesses modelos, todos os preços são endógenos. Os elementos exógenos dos modelos de equilíbrio geral são preferências e tecnologias produtivas.
2. Qualquer modelo com um setor público está incompleto se ele não especificar como as receitas fiscais são utilizadas.
3. O “resultado final” em qualquer avaliação de política é a utilidade das famílias. As empresas e os governos são apenas intermediários para chegar a esta contabilidade final.
4. Todos os tributos distorcem as decisões econômicas ao longo de alguma dimensão. Os custos de bem-estar de tais distorções devem ser sempre ponderados em relação aos benefícios desses tributos (em termos de produção de bem público ou transferências que valorizam a equidade)."



### 3 O MODELO DE PURA TROCA VERSÃO GERAL E MÉTODOS DE SOLUÇÃO

A modelagem de equilíbrio em economia pode ser generalizada usando a notação vetorial, que permite maior flexibilidade ao lidar com modelos que envolvem múltiplos bens ou indivíduos. Um vetor é um arranjo ordenado de variáveis, onde cada variável pode assumir valores específicos. Nessa abordagem, costuma-se adotar a convenção de representar esses vetores como vetores coluna. Isso facilita a manipulação matemática e a representação de várias dimensões nos modelos econômicos, tornando-os mais robustos e adaptáveis a diferentes cenários.

Em um vetor de  $\mathbf{x}$ , sua representação se baseia em  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , sendo que cada  $x_i$  é uma variável que pode assumir qualquer valor. Relembrando as propriedades matemáticas vetoriais, é importante verificar se os vetores que serão utilizados têm o mesmo comprimento, para que faça sentido a equação vetorial.

Em um modelo de trocas, cada indivíduo ganha utilidade a partir do vetor de bens que ele consome  $u^i(\mathbf{x}^i)$ , em que  $i = 1, \dots, m$ . Os indivíduos têm a liberdade de trocar os recursos iniciais que possuem com outros ou de manter parte ou todos esses recursos para si mesmos. Durante essas trocas, assumimos que os indivíduos aceitam os preços como dados – ou seja, eles encontram um vetor de preços ( $\mathbf{p}$ ) que define o preço de mercado para cada um dos  $n$  bens. Cada indivíduo busca maximizar sua satisfação ou utilidade, mas está limitado por uma restrição orçamentária que exige que o valor total gasto no consumo seja igual ao valor total de seus recursos iniciais.

A partir do vetor de preços e das rendas de cada indivíduo, podemos obter o conjunto de funções de demandas individuais, sendo uma para cada bem. Essas funções de demanda são contínuas e são homogêneas de grau zero em todos os preços e rendas. Essas propriedades nos permite adotar um esquema de normalização conveniente para os preços, pois não altera os preços relativos, o que faz com que as quantidades de demanda fiquem inalteradas.

O equilíbrio nesse modelo de troca simples ocorre quando a quantidade total de cada bem demandado pelos indivíduos é igual à quantidade total disponível desse bem no mercado. A partir disso, podemos chegar ao equilíbrio Walrasiano, em que uma alocação de recursos e um vetor de preço associado ( $\mathbf{p}^*$ ) de modo que :

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \bar{\mathbf{x}}^i) = \sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{x}}^i \quad (3.1)$$

### 3.1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DO MODELO GENÉRICO

O modelo apresentado a seguir é um modelo de troca para onde 2 ou mais indivíduos dividem as dotações iniciais assegurando eficiência no sentido de Pareto, e um sistema de preços. Suponha que essa economia possua  $m$  bens e  $n$  agentes, com o indivíduo  $i$  tendo uma função utilidade  $u^i(\mathbf{x})$ , em que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ . Suponha também que  $e_j^i$  seja referente a dotação do indivíduo  $i$  referente ao bem  $j$ , e  $\mathbf{e}^i$  é o vetor de dotação do indivíduo  $i$ .

Assim, de maneira clássica podemos definir a demanda como o resultado de maximização de utilidade para um conjunto de preços dados  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^i(\mathbf{p}) &= \arg \max u^i(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. } \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{e}^i) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se o vetor de preços representado por  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ , a representação do excesso de demanda se dá pela seguinte fórmula:

$$E(\mathbf{p}) = \sum_i^n (\mathbf{d}^i(\mathbf{p}) - \mathbf{e}^i) \quad (3.3)$$

O equilíbrio se dá em qualquer ponto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$  em que o excesso de demanda  $E(\mathbf{p}) = 0$ . Como as funções de demanda são homogêneas de grau 0 no vetor de preços, basta encontrarmos uma solução no simplex  $S^{m-1} = \{\mathbf{p} \mid \sum_{j=1}^m p_j = 1\}$ .

Para comprovar a existência de um vetor de preços de equilíbrio, o procedimento é formular um mapa  $g(\mathbf{p})$  no simplex  $S^{m-1}$ , sendo que em cada ponto fixo de  $g(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{p}^*$ , nós teremos que  $E(\mathbf{p}) \geq 0$  o que define um equilíbrio Walrasiano, assim a função será:

$$g_j(\mathbf{p}) = \frac{p_j + \max(0, E_j(\mathbf{p}))}{1 + \sum_{j=1}^m \max(0, E_j(\mathbf{p}))} \quad (3.4)$$

### 3.2 ESTRATEGIA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

#### 3.2.1 INTERAÇÃO DE PONTO FIXO

O primeiro método é a interação de ponto fixo, que pode ser usada para calcular o preço de equilíbrio. Como visto na equação anterior, qualquer ponto no mapa  $g(\mathbf{p})$  pode



ser considerado um preço de equilíbrio, sendo assim, todos os equilíbrios são soluções para o ponto fixo  $\mathbf{p} = g(\mathbf{p})$ . Tendo isso em vista, pode-se executar a interação na qual  $\mathbf{p}_{k+1} = g(\mathbf{p}_k)$ .

Se lidarmos com uma expressão algébrica fechada para cada demanda dos indivíduos, será um caso fácil de lidar e evitaremos complicações computacionais. Porque  $g(\mathbf{p})$  tem posto no simplex unitário (como explicado anteriormente), não há como fazer com que a interação  $\mathbf{p}_k$  esteja fora da faixa de preços permitida, mas também não é garantida a convergência dos preços.

### 3.2.2 $E(\mathbf{p}) = 0$ COMO UM SISTEMA NÃO LINEAR

Sendo assim, consideremos  $E(\mathbf{p}) = 0$  como um sistema de equações não lineares para  $\mathbf{p}$ , sendo que para resolver analiticamente as demandas individuais, dá para calcular, por meio da função de excesso de demanda, a solução computacional para o sistema de equações não lineares. Porém, deve-se levar em conta a homogeneidade de grau zero referente ao excesso de demanda  $E(\mathbf{p})$ , se existe uma solução, existe um continuo de soluções. Para corrigir isso, pode-se adicionar uma equação que force com que os preços fiquem no simplex,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Segundo a lei de Walras, se  $p$  satisfaz  $E(\mathbf{p}) = 0$  para  $m - 1$  componentes do excesso de demanda, então o último componente de  $E(\mathbf{p})$  também é zero.

Assim o sistema de equações que deve ser resolvido será:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{p}) &= 0, \\ &\vdots \\ E_{m-1}(\mathbf{p}) &= 0, \\ \sum_i^m p_i &= 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Desta forma, pode-se usar o método de Newton ou o método de homotopia para se chegar ao equilíbrio, conforme [JUDD, 2023](#)

### 3.2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS HIERÁRQUICOS

Anteriormente, assumimos que  $E(\mathbf{p})$  pode ser expressada de forma fechada. Caso não haja expressões fechadas, a solução é optar por resolver o problema utilizando os métodos numéricos para as demandas individuais. Para isso, se produz uma estrutura hierárquica em cima do algoritmo resultante, com cada preço  $\mathbf{p}$  tendo uma solução ótima para cada agente analisado. Para exemplo, suponha que o método utilizado foi o de interação de ponto fixo para encontrar  $g(p)$ . Como mostrado, a cada interação de  $\mathbf{p}_k$ , precisa-se achar o ponto  $g(\mathbf{p}_k)$  no mapa e encontrar o vetor de excesso de demanda e, para isso, o

algoritmo irá buscar o ponto ótimo para cada indivíduo com preços  $\mathbf{p}$ , afim de resolver o problema de demanda, ou seja,  $E(\mathbf{p}) = 0$ , utilizando as soluções de otimização para calcular  $E(\mathbf{p})$  e o ponto no mapa  $g(\mathbf{p}_k)$ . Posteriormente, o algoritmo solucionador de equações não lineares definido irá chamar  $E(\mathbf{p})$ , que por sua vez como mostrado anteriormente, irá utilizar as soluções de otimização encontrados para cada indivíduo, está montada a estrutura hierárquica.

Entendida a hierarquia do algoritmo, chegamos a alguns problemas. A precisão da solução dos problemas de demanda individual influenciará diretamente na convergência de qualquer método para a solução da equação linear aplicada para encontrar o excesso de demanda  $E(\mathbf{p})$ . Além disso, a própria solução das demandas individuais será determinada por meio de um algoritmo de otimização escolhido. Para que tudo saia corretamente e os resultados sejam satisfatórios, é de suma importância que a convergência do algoritmo que soluciona as equações não lineares, juntamente com o solucionador de pontos ótimos (sendo este de maneira bem rígida, pois ela advém de uma representação analítica para encontrar a utilidade de  $x$ , ou seja,  $u(x)$ ), seja consistente, para não gerar erros muito grandes.

Fatalmente, a otimização do indivíduo terá um erro que irá além da precisão da máquina. Com isso, o excesso de demandada  $E(\mathbf{p})$  irá conter algum erro também, sendo que o critério de convergência para a equação não linear dependerá desso erro inicial. Portanto, o critério de convergência deverá ser mais flexível para o solucionador de equações não lineares e mais rígido para o algoritmo que irá encontrar a otimização dos indivíduos para calcular o excesso de demanda  $E(\mathbf{p})$ .

### 3.2.4 CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM E EQUILÍBRIO DE MERCADO

Para resolver um grande sistema não linear, pode-se usar uma abordagem alternativa afim de encontrar o equilíbrio e as demandas de cada indivíduo. Para isso, deve-se listar as equações, combinando as condições do problema de otimização com suas respectivas restrições orçamentárias e as condições para chegar ao equilíbrio. Tendo  $m$  bens e  $n$  indivíduos, isso resulta nas condições de primeira ordem para cada bem e cada indivíduo, assim temos:

$$u_j^i(\mathbf{x}^i) = p_j \lambda^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

Seguindo, a restrição orçamentária para cada indivíduo  $i$  será:

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}^i - \mathbf{e}^i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

A oferta é igual as condições de demanda para os bens até  $m - 1$ , sendo assim:

$$\sum_i^n (\mathbf{x}_j^i - \mathbf{e}_j^i) = 0, \quad j = 1, \dots, m - 1. \quad (3.8)$$

Por último a condição de preços que será:

$$\sum_j p_j = 1 \quad (3.9)$$

isto produz um sistema de equações não lineares com  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{x}_i$  e  $\lambda_i$ , com  $i = 1, \dots, n$  como incógnitas. Todas as equações listadas acima (3.6 até 3.9) podem ser resolvidas por métodos de equações não lineares, onde como resultado irá retornar os equilíbrios de  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{x}_i$  e  $\lambda$ .

A vantagem de utilizar esta abordagem é a fácil programação do código que irá retornar os resultados de equilíbrio em problemas fáceis. Porém, pode ser ineficiente por conta do número de incógnitas e equações.

### 3.2.5 O MÉTODO DE NEGISHI

Como vimos, o equilíbrio competitivo em um sistema Arrow-Debreu é Pareto eficiente. Isso quer dizer que para qualquer equilíbrio existe um conjunto de pesos de bem-estar social não negativos  $\lambda^i$ , com  $i = 1, \dots, n$ ; tal que a alocação de equilíbrio,  $\mathbf{x}_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , é a solução para o problema do bem estar social:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots} \sum_{i=1}^n \lambda^i u^i(\mathbf{x}^i) \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}^i - \mathbf{x}^i) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na abordagem de Negishi, para calcular o equilíbrio geral, procuramos os valores  $\lambda^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; de forma que a solução de (3.10) é uma alocação de equilíbrio. Sendo os preços proporcionais às utilidades marginais, a condição de equilíbrio é:

$$\sum_j u_j^i(\mathbf{x}^i)(x_j^i - e_j^i) = 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

Seguiremos os seguintes passos

1. Para qualquer vetor de pesos  $\lambda$ , calculamos a alocação  $\mathbf{X}(\lambda) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , o qual resolve o problema (3.10).
2. Depois, os preços de equilíbrio são calculados no simplex unitário, em consequência de  $\mathbf{X}(\lambda)$ . Os preços então serão definidos a partir de:

$$p_j = \frac{u_{x_j^1}^1(\mathbf{X}^1(\lambda))}{\sum_{l=1}^m u_{x_l^1}^1(\mathbf{X}^1(\lambda))} = \mathbf{P}_j(\lambda) \quad (3.12)$$

3. Verifica-se para cada indivíduo  $i$  se sua restrição orçamentária condiz com  $\mathbf{X}^i(\lambda)$  aos preços  $\mathbf{P}(\lambda)$ , calculando o excedente de riqueza

$$\mathbf{W}_i(\lambda) = \mathbf{P}(\lambda) \cdot (\mathbf{e}^i - \mathbf{X}^i(\lambda)) \quad (3.13)$$

4. Se  $\mathbf{W}_i(\lambda)$  não é negativo, o indivíduo  $i$  poderá pagar, dada sua restrição orçamentária,  $\mathbf{X}^i(\lambda)$  ao preço  $\mathbf{P}(\lambda)$ , com o valor de  $\mathbf{W}_i(\lambda)$  representando a riqueza restante do indivíduo. Caso  $\mathbf{W}_i(\lambda)$  seja igual a 0 para cada indivíduo  $i$ , chegaremos ao equilíbrio de preços de  $\mathbf{P}(\lambda)$  e a alocação final de equilíbrio  $\mathbf{X}(\lambda)$ .

A abordagem de Negishi, portanto, irá buscar resolver o sistema de equações não lineares:

$$\mathbf{W}_i(\lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

A partir daí, calcula-se  $\mathbf{P}(\lambda)$ , o vetor de preços de equilíbrio.

## 4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

### 4.1 O MÉTODO DE NEWTON

O método de Newton, também chamado de método de Newton-Raphson, é um método amplamente utilizado quando se trata de resoluções de equações não lineares. Este método é uma abordagem robusta o suficiente para lidar não apenas com uma equação não linear, mas também com sistemas inteiros dessas equações, que são comuns em diversas aplicações matemáticas e físicas. Comparado com outros métodos, ele costuma ser o mais rápido, frequentemente muito mais rápido mas, no entanto, o método não garante que uma solução existente será encontrada.

A ideia fundamental por trás dos métodos numéricos para equações não lineares é criar uma série de equações lineares. Isso é feito porque sabemos como resolver equações lineares, e a esperança é que as soluções dessas equações lineares nos conduzam a uma solução da equação não linear original.

Para exemplificar melhor, suponha que temos  $n$  equações não lineares, escritas na seguinte forma abstrata:

$$\begin{aligned} F_0(x_0, x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_1(x_0, x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_0, x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Podemos assim, introduzir uma notação vetorial para  $x$ :

$$\mathbf{F} = (F_0, \dots, F_n)$$

$$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$$

Assim, o sistema poderá ter  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ . Um bom exemplo é o utilizado em [LINGE; LANGTANGEN, 2016](#):

$$x^2 = y - x \cos(\pi x) \quad (4.2)$$

$$yx + e^{-y} = x^{-1} \quad (4.3)$$

Introduzindo  $x_0 = x$  e  $x_1 = y$ , temos:

$$F_0(x_0, x_1, \dots, x_n) = x^2 - y + x \cos(\pi x) = 0$$

$$F_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = yx + e^{-y} - x^{-1} = 0$$

Para uma equação não linear com uma única variável, o método de Newton aproxima a função não linear  $f$  por uma função linear e encontra a raiz dessa função linear. Em termos simples, você usa uma linha tangente para fazer uma aproximação iterativa da solução. Quando você tem um sistema de equações não lineares com  $n$  variáveis, o conceito é semelhante, mas em vez de uma linha tangente, você usa uma função linear que é uma aproximação da função vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , sendo esta função linear  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ , onde  $\mathbf{J}$  é uma matriz  $n \times n$ , e  $\mathbf{c}$  é um vetor de comprimento  $n$ .

Para aproximar a função  $\mathbf{F}$  por uma função linear, usamos a expansão em série de Taylor. Especificamente, usamos os primeiros dois termos da expansão. Se você conhece o valor de  $\mathbf{F}$  e suas derivadas parciais em um ponto  $x_i$ , pode-se aproximar  $\mathbf{F}$  em um ponto  $x_{i+1}$  usando a fórmula:

$$\mathbf{F}(x_{i+1}) \approx \mathbf{F}(x_i) + \nabla \mathbf{F}(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (4.4)$$

Sendo que  $\nabla \mathbf{F}$  representa uma matriz de derivadas parciais de  $\mathbf{F}$ , em que cada elemento da matriz é a derivada parcial de uma função com relação a uma variável. Sua composição se baseia em:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{x}_j}$$

Assim, a matriz  $\nabla \mathbf{F}$ , também conhecida como jacobiana e denotada por  $\mathbf{J}$ , aplicando ao exemplo fica:

$$\nabla \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_0} & \frac{\partial F_0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 + \cos(\pi x_0) - \pi x_0 \operatorname{sen}(\pi x_0) & -1 \\ x_1 + x_0^{-2} & -e^{-x_1} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

O método de Newton começa com uma aproximação inicial  $x_i$  para a raiz de um sistema de equações não lineares. A ideia é encontrar uma nova aproximação  $x_{i+1}$  que esteja mais próxima da raiz real. Para melhorar a aproximação, o método de Newton

lineariza o problema não linear, isso significa que a função não linear  $\mathbf{F}(x)$  é aproximada por uma função linear em torno do ponto  $x_i$ , utilizando a expansão da série de Taylor.

A aproximação linear do problema não linear  $\mathbf{F}(x_{i+1})$  leva ao sistema:

$$\mathbf{F}(x_i) + J(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0 \quad (4.6)$$

onde  $J(x_i)$  é a matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}$  no ponto  $x_i$ . A matriz Jacobiana contém todas as derivadas parciais das funções do sistema e é usada para criar uma aproximação linear da função  $\mathbf{F}(x_i)$ . Portanto, esse sistema nada mais é que :

$$J(x_i)\delta = -\mathbf{F}(x_i)$$

Do qual  $\delta$  é o vetor desconhecido que representa a diferença entre a nova aproximação  $x_{i+1}$  e a aproximação atual  $x_i$ . Assim,  $\delta = x_{i+1} - x_i$ .

Portanto, o método de Newton para sistemas de equações algébricas consiste em dois passos principais:

1. Resolver o sistema linear  $J(x_i)\delta = -\mathbf{F}(x_i)$  para encontrar  $\delta$ , por meio de resolver um sistema de equações lineares usando a matriz Jacobiana
2. Atualizar a aproximação  $x_i$  para a raiz, sabendo que  $x_{i+1} = x_i + \delta$

Resolver sistemas de equações lineares geralmente requer o uso de software apropriado. O método mais comum e robusto para resolver tais sistemas é por meio da eliminação de Gauss. No Python, o pacote `numpy` oferece o módulo `linalg`, que inclui funções para resolver sistemas lineares, como `numpy.linalg.solve(A, b)`, utilizando métodos baseados na eliminação de Gauss.

Quando lidamos com sistemas não lineares que surgem da discretização de equações diferenciais parciais, a matriz Jacobiana associada a esses sistemas frequentemente é esparsa. Isso significa que a maioria dos elementos da matriz é zero. Assim, é importante usar algoritmos especializados que podem tirar proveito dos muitos zeros na matriz. A eliminação de Gauss pode ser lenta para sistemas com matrizes esparsas. Nesse contexto, métodos iterativos são mais eficazes e rápidos.

Graficamente, em [LINGE; LANGTANGEN, 2016](#) (página 231) temos um bom exemplo para visualizarmos as tangentes e o comportamento do método:

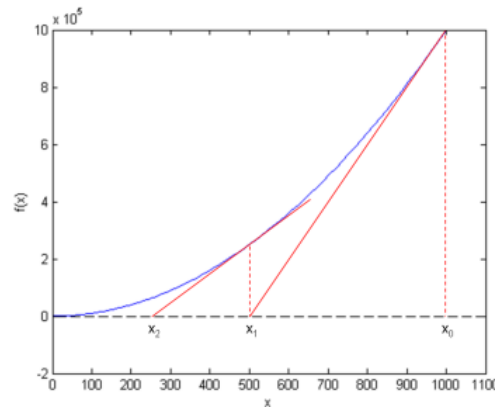


Figura 2 – Ilustração da ideia do método de Newton com  $f(x) = x^2 - 9 = 0$ , resolvendo repetidamente a interseção das linhas tangentes com o eixo  $x$

## 4.2 O MÉTODO DA INTERAÇÃO DE PONTO FIXO

Um ponto fixo de uma função é um valor especial  $p$  que, quando aplicado na função, retorna o próprio valor  $p$ . Formalmente, se temos uma função  $g$ , dizemos que  $p$  é um ponto fixo se:

$$g(p) = p$$

Essa propriedade implica que, ao calcularmos  $g(p)$ , obtemos exatamente  $p$ , sem qualquer alteração. Este método se mostra interessante pois muitas vezes problemas complexos podem ser reformulados em termos de encontrar pontos fixos. Os problemas de raiz e de ponto fixo são, em muitos casos, classes equivalentes. O problema de determinação de raiz consiste em encontrar um valor  $p$  tal que uma função  $f$  seja nula em  $p$ , isto é:

$$f(p) = 0.$$

Encontrar esse valor  $p$  é equivalente, em certas circunstâncias, a encontrar um ponto fixo de uma outra função  $g$  associada a  $f$ .

Dado o problema de raiz  $f(p) = 0$ , é possível definir uma função  $g(x)$  de tal forma que o ponto fixo de  $g$  coincida com a raiz de  $f$ . Duas maneiras comuns de definir  $g(x)$  são: 1.  $g(x) = x - f(x)$ , 2.  $g(x) = x + c \cdot f(x)$ , onde  $c$  é uma constante.

Com essas definições, temos que, se  $p$  é uma raiz de  $f$ , então  $f(p) = 0$  e, por consequência,  $g(p) = p$ , fazendo de  $p$  um ponto fixo de  $g$ . Reciprocamente, se sabemos que  $p$  é um ponto fixo de uma função  $g$ , podemos construir uma função  $f(x) = x - g(x)$  que terá uma raiz em  $p$  (pois  $f(p) = p - g(p) = 0$ ).

Essa equivalência é muito útil, pois problemas de ponto fixo frequentemente são mais fáceis de analisar e resolver. O método de ponto fixo é amplamente utilizado na resolução de problemas numéricos de raízes, pois, sob certas condições, a sequência de valores  $\{x_n\}$  gerada pela iteração  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge para o ponto fixo desejado. Como



dito por [BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2016](#), "os pontos fixos ocorrem em muitas áreas da matemática e são uma das principais ferramentas utilizadas pelos economistas para demonstrar resultados relativos ao equilíbrio".

Para aplicar o método de ponto fixo com segurança, é necessário que o ponto fixo de  $g$  exista e seja único no intervalo considerado. O teorema a seguir estabelece condições suficientes para a existência e a unicidade de um ponto fixo:

1. Se  $g$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e mapeia  $[a, b]$  em si mesmo (ou seja,  $g(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ ), então  $g$  possui pelo menos um ponto fixo em  $[a, b]$ .
2. Para garantir a unicidade, supõe-se adicionalmente que a função  $g$  seja diferenciável em  $(a, b)$  e que exista uma constante  $k < 1$  tal que  $|g'(x)| \leq k$  para todo  $x \in (a, b)$ . Essa condição garante que  $g$  é uma *construção contraente*, ou seja, ao aplicar  $g$  repetidamente, os valores de  $g(x)$  convergem para o ponto fixo  $p$ .

O teorema estabelece que, sob essas condições, existe exatamente um ponto fixo de  $g$  no intervalo  $[a, b]$ , e o método de ponto fixo, iniciado com qualquer valor  $x_0$  em  $[a, b]$ , convergirá para esse ponto fixo.

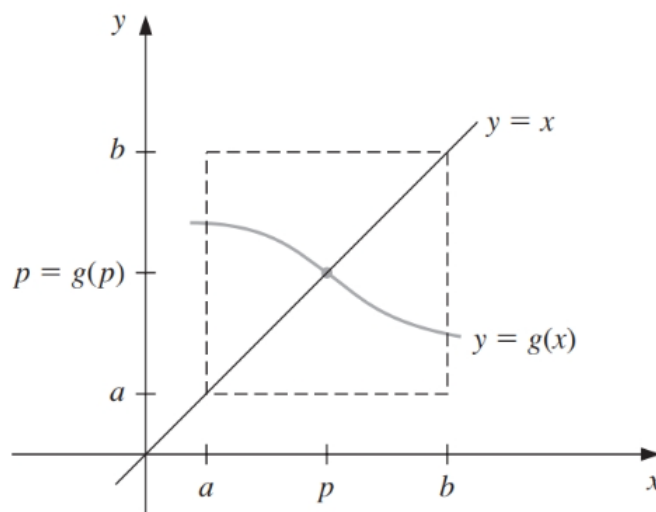


Figura 3 – Representação gráfica das condições de ponto fixo  
[BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2016](#)

Primeiramente, se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$ , então  $g$  possui um ponto fixo nas extremidades do intervalo  $[a, b]$ . Caso contrário, se  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ , a função auxiliar  $h(x) = g(x) - x$  é contínua em  $[a, b]$ , com  $h(a) > 0$  e  $h(b) < 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto  $p \in (a, b)$  onde  $h(p) = 0$ . Isso significa que  $g(p) = p$ , então  $p$  é um ponto fixo de  $g$ .

Suponha agora que a derivada  $|g'(x)| \leq k < 1$  em  $(a, b)$ . Se  $p$  e  $q$  fossem dois pontos fixos distintos, aplicando o Teorema do Valor Médio, existe um ponto  $j$  entre  $p$  e  $q$  tal que:

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\epsilon).$$

Isso implica que  $|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(j)||p - q| \leq k|p - q|$ , o que leva a uma contradição, pois  $k < 1$ . Portanto, a suposição de que  $p \neq q$  é falsa, mostrando que o ponto fixo em  $[a, b]$  é único.

Portanto, o método de ponto fixo é robusto em situações onde a função  $g$  satisfaz as condições do teorema, mas tem limitações. Em casos onde  $|g'(x)| \geq 1$  em alguma parte do intervalo, o método pode falhar em convergir, tornando necessário o ajuste da função  $g$  ou a adoção de outros métodos numéricos.

Para determinar uma solução para  $p = g(p)$ , dada uma aproximação inicial  $p_0$ , seguimos o seguinte algoritmo:

1. **Entrada:** Aproximação inicial  $p_0$ ; tolerância  $TOL$ ; número máximo de iterações  $N_0$ .
2. **Saída:** Solução aproximada  $p$  ou mensagem de erro.
3. Inicialize  $i = 1$ .
4. Enquanto  $i \leq N_0$ , faça:
  - a) Calcule  $p = g(p_0)$ .
  - b) Se  $|p - p_0| < TOL$ , então:
    - i. **Saída:**  $p$  (solução aproximada);
    - ii. Pare.
  - c) Caso contrário, incremente  $i = i + 1$  e atualize  $p_0 = p$ .
5. **Saída:** "O método falhou após  $N_0$  iterações sem sucesso."

## 5 APLICAÇÃO A UM MODELO PARTICULAR DE ESTUDO

### 5.1 UM MODELO DE PURAS TROCAS COM EQUILÍBRIOS

Consideraremos as seguintes especificações baseadas em [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#), nesta economia de troca pura existem 2 indivíduos Ivan (indivíduo 1) e John (indivíduo 2), e dois bens (rublos  $x$  e dólares  $y$ ). as especificações das preferências destes indivíduos estão dadas pelas suas funções de utilidade:

$$u^1(x^1, y^1) = x^1 + 100(1 - e^{-y^1/10}) \quad (5.1)$$

$$u^2(x^2, y^2) = y^2 + 110(1 - e^{-x^2/10}) \quad (5.2)$$

Ambas as utilidades são côncavas, além de cada bem ser tratado separadamente, com um de cada bem entrando de maneira linear em cada função, o que facilita a análise.

A dotação inicial de Ivan é 40 rublos ( $\bar{x}^1 = 40, \bar{y}^1 = 0$ ) e ele pretende trocar seu bem monetário por dólares. Por sua vez, John possui 50 dólares ( $\bar{x}^2 = 0, \bar{y}^2 = 50$ ) e pretende adquirir rublos.

Em muitos textos de economia, há a noção de que o equilíbrio competitivo (onde a oferta e a demanda se igualam) é único sob certas condições. Shapley destaca que, se um bem é tratado de maneira linear e separável em todas as funções de utilidade, e se há oferta suficiente desse bem, então o equilíbrio competitivo deve ser único. Para que essa unicidade ocorra, as preferências dos consumidores também precisam ser suaves e estritamente convexas.

O exemplo trazido pelo autor busca explicitar que a "utilidade transferível", que refere-se a ideia de que podemos mover utilidade entre os indivíduos sem perder eficiência; pequenas alterações podem levar a situações onde a unicidade do equilíbrio competitivo não se mantém. Para isso, mostrou utilizando uma caixa de Edgeworth que poderiam ter 3 equilíbrios competitivos considerando as utilidades mencionadas acima:

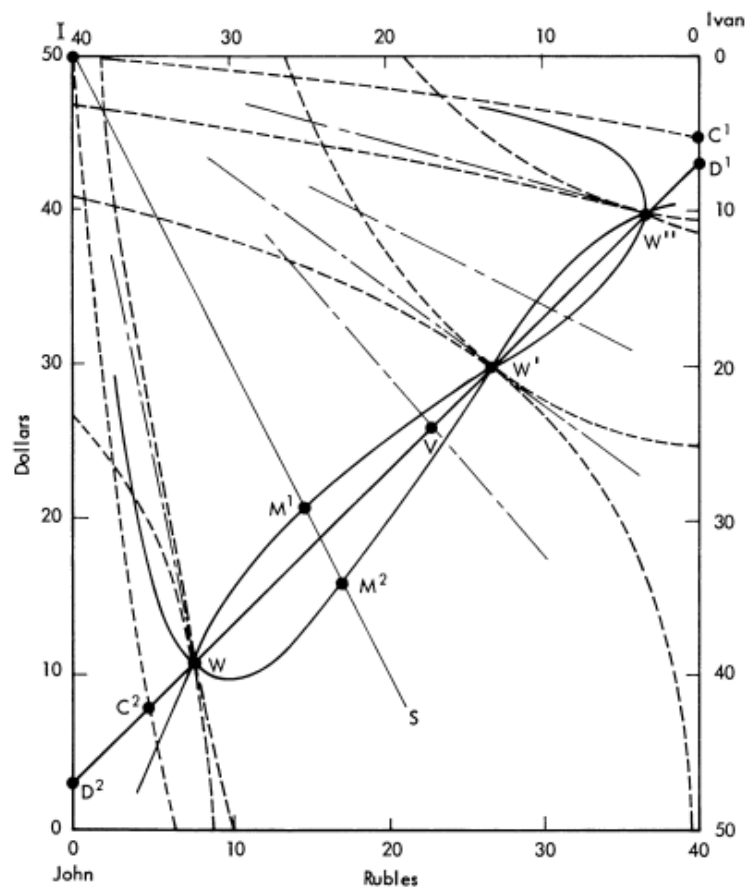


Figura 4 – Três equilíbrios competitivos  
 SHAPLEY; SHUBIK, 1977

As soluções de equilíbrio encontradas por SHAPLEY; SHUBIK, 1977 são os pontos  $W$ ,  $W'$  e  $W''$ . Referindo-se às alocações de John, as quantidades de equilíbrio foram:

1.  $W$ : 7,74 Rublos e 10,74 Dólares
2.  $W'$ : 26,83 Rublos e 29,82 Dólares
3.  $W''$ : 36,78 Rublos e 39,77 Dólares

O autor analisa a estabilidade dinâmica dos preços de equilíbrio associados a diferentes soluções em um mercado, representadas por  $W$ ,  $W'$  e  $W''$ . A ideia central é que, dependendo das condições iniciais e do comportamento das funções de excesso de demanda, certos pontos de equilíbrio podem ser estáveis ou instáveis.

Ele argumenta que a direção da tangência comum, representada pela linha tracejada, reflete como as preferências dos agentes no mercado se alinham com o ponto inicial  $I$ . Quando a tangência entre  $W$  e  $W'$  passa acima de  $I$ , sugere-se que qualquer ajuste nos preços tende a estabilizar o sistema, direcionando-o ao equilíbrio estável. Em contraste,

quando a tangência entre  $W'$  e  $W''$  passa abaixo de  $I$ , o equilíbrio associado a  $W'$  torna-se dinamicamente instável.

A instabilidade dinâmica em  $W'$  implica que, se o preço de um bem aumentar levemente, isso criará um excesso de demanda positivo para o mesmo bem. Esse excesso de demanda impulsionará um aumento adicional no preço, levando a um processo de retroalimentação que afasta o sistema desse ponto de equilíbrio. Por outro lado, os equilíbrios em  $W$  e  $W''$  são considerados dinamicamente estáveis, pois pequenas perturbações nos preços nesses pontos tendem a ser corrigidas, conduzindo o mercado de volta ao equilíbrio.

## 5.2 CALCULO DA DEMANDA, EXCESSO DE DEMANDA E OUTRAS FUNÇÕES IMPORTANTES

Primeiramente, calcularemos as funções de demanda, assim, precisamos maximizar as utilidades de cada indivíduo. Lembrando que a dotação inicial do indivíduo 1 é de 40 rublos ( $e^{11} = 40$ ) e 0 dólares ( $e^{12} = 0$ ), enquanto a dotação inicial do indivíduo 2 é de 0 rublos ( $e^{21} = 40$ ) e 50 dólares ( $e^{22} = 40$ ).

Para o indivíduo 1, teremos:

$$\begin{aligned} \max_{x^1, y^1} u^1(x^1, y^1) &= x^1 + 100(1 - e^{-y^1/10}) \\ \text{s.a } p_x x^1 + p_y y^1 &= 40p_x \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para resolvermos o problema de maximização, montaremos a equação Lagrangiana

$$\mathcal{L}^1 = x^1 + 100(1 - e^{-y^1/10}) - \lambda^1(p_x x^1 + p_y y^1 - 40p_x)$$

Aplicando as derivadas para encontramos as condições de primeira ordem, teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial x^1} = 1 - \lambda^1 p_x = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial y^1} = 10(e^{-y^1/10}) - \lambda^1 p_y = 0 \quad (5.5)$$

Substituindo 5.4 em 5.5, teremos:

$$10e^{-y^1/10} = \frac{p_y}{p_x}$$

Isolando  $y^1$ , teremos a função de demanda do indivíduo 1 para o bem  $y$ :

$$y^1 = -10 \ln\left(\frac{p_y}{10p_x}\right) \quad (5.6)$$

Substituindo a equação de  $y^1$  na restrição orçamentária do indivíduo 1,

$$p_x x^1 + p_y \left(-10 \ln\left(\frac{p_y}{10p_x}\right)\right) = 40p_x$$

Resolvendo para termos a função de demanda do indivíduo 1 para o bem  $x$ ,  $x^1$ :

$$x^1 = 40 + 10 \frac{p_y}{p_x} \ln\left(\frac{p_y}{10p_x}\right) \quad (5.7)$$

Portanto as funções de demanda do indivíduo 1 para os bens  $x$  e  $y$  são:

$$x^1(p_x, p_y) = 40 + 10 \frac{p_y}{p_x} \ln\left(\frac{p_y}{10p_x}\right) \quad (5.8)$$

$$y^1(p_x, p_y) = -10 \ln\left(\frac{p_y}{10p_x}\right) \quad (5.9)$$

Para o indivíduo 2 será:

$$\begin{aligned} \max_{x^2, y^2} u^2(x^2, y^2) &= y^2 + 110(1 - e^{-x^2/10}) \\ \text{s.a } p_x x^2 + p_y y^2 &= 50p_y \end{aligned} \quad (5.10)$$

o que produz o Lagrangiano :

$$\mathcal{L}^2 = y^2 + 110(1 - e^{-x^2/10}) - \lambda^2(p_x x^2 + p_y y^2 - 50p_y)$$

Aplicando as derivadas para encontramos as condições de primeira ordem, teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^2} = 110(-e^{-\frac{x^2}{10}})\left(-\frac{1}{10}\right) - \lambda^2 p_x = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial y^2} = 1 - \lambda^2 p_y = 0 \quad (5.12)$$

Para o indivíduo 2, o processo será o mesmo. Para iniciar, isolaremos  $\lambda^2$  na equação 5.12, assim teremos que:

$$\lambda^2 = \frac{1}{p_y} \quad (5.13)$$

Substituindo em 5.11, teremos:

$$11e^{\frac{-x^2}{10}} = \frac{p_x}{p_y}$$

Isolando  $x^2$ , teremos a função de demanda do indivíduo 2 para o bem  $x$ :

$$x^2 = -10 \ln\left(\frac{p_x}{11p_y}\right)$$

Substituindo a equação de  $x^2$  na restrição orçamentária do indivíduo 2, teremos a função de demanda do indivíduo 2 para o bem  $y$ :

$$p_x\left(-10 \ln\left(\frac{p_x}{11p_y}\right)\right) + p_y y^2 = 50p_y$$

Resolvendo para  $y^2$ :

$$y^2 = 50 + 10 \frac{p_x}{p_y} \ln\left(\frac{p_x}{11p_y}\right)$$

Portanto as funções de demanda do indivíduo 2 para os bens  $x$  e  $y$  são:

$$x^2(p_x, p_y) = -10 \ln\left(\frac{p_x}{11p_y}\right) \quad (5.14)$$

$$y^2(p_x, p_y) = 50 + 10 \frac{p_x}{p_y} \ln\left(\frac{p_x}{11p_y}\right) \quad (5.15)$$

Com as funções de demanda para cada bem definidas para cada um dos consumidores, conseguimos formular a função excesso de demanda. O excesso de demanda é definido como a diferença entre a quantidade demandada de um bem e a quantidade disponível desse bem. No caso de dois indivíduos, o excesso de demanda para cada bem será a soma das demandas individuais de ambos menos a quantidade disponível de cada bem. Em nosso caso de estudo, isto fica fácil de ser evidenciado, já que temos somente 2 consumidores e 2 bens.

Como foi apresentado no capítulo 2, a função excesso de demanda é representada pela equação 2.11. Agora que já temos os termos necessários, vamos defini-la para os bens  $x$  e  $y$ . O termo  $E(\mathbf{p})$  diz respeito ao excesso de demanda em função do preço, que equivale a um somatório, de acordo com  $n$  (número de bens) e  $i$  (número de consumidores), das demandas em função dos preços de cada consumidor ( $d^i(p)$ ) menos a quantidade total disponível do bem na economia ( $e^i$ ). Lembrando que o equilíbrio se dá em qualquer ponto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$  em que o excesso de demanda  $E(\mathbf{p}) = 0$

A quantidade de cada bem na economia se dá pela soma das dotações iniciais dos indivíduos 1 e 2 para cada um deles. O indivíduo 1 possui  $\bar{x}^1 = 40$  e  $\bar{y}^1 = 0$ , enquanto o indivíduo 2 possui  $\bar{x}^2 = 0$  e  $\bar{y}^2 = 50$ . Assim teremos:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{x}^1 + \bar{x}^2 \\ \bar{x} &= 40\end{aligned}\tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \bar{y}^1 + \bar{y}^2 \\ \bar{y} &= 50\end{aligned}\tag{5.17}$$

A quantidade total disponível do bem  $x$  ( $\bar{x}$ ) nesta economia é igual a 40 e a do bem  $y$  ( $\bar{y}$ ) é igual a 50.

As funções de demanda para o bem  $x$  dos consumidores 1 e 2 são, respectivamente, as equações 5.8 e 5.14 e . Substituindo-as na fórmula de excesso de demanda, teremos que:

$$E_x(\mathbf{p}) = \left(40 + 10 \frac{p_y}{p_x} \ln \left( \frac{p_y}{10p_x} \right) \right) + \left( -10 \ln \left( \frac{p_x}{11p_y} \right) \right) - 40\tag{5.18}$$

$$E_x(\mathbf{p}) = 10 \frac{p_y}{p_x} \ln \left( \frac{p_y}{10p_x} \right) - 10 \ln \left( \frac{p_x}{11p_y} \right)$$

Para o bem  $y$ , as funções de demanda dos consumidores 1 e 2 são, respectivamente, as equações e 5.15. Assim como feito para o bem  $x$ , substituiremos estas equações, além da quantidade total disponível do bem  $\bar{y}$ , na fórmula de excesso de demanda:

$$E_y(\mathbf{p}) = \left( -10 \ln \left( \frac{p_y}{10p_x} \right) \right) + \left( 50 + 10 \frac{p_x}{p_y} \ln \left( \frac{p_x}{11p_y} \right) \right) - 50\tag{5.19}$$

$$E_y(\mathbf{p}) = -10 \ln \left( \frac{p_y}{10p_x} \right) + 10 \frac{p_x}{p_y} \ln \left( \frac{p_x}{11p_y} \right)$$

### 5.3 IMPLEMENTAÇÃO E TESTE DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Utilizaremos o valioso exemplo desenvolvido por SHAPLEY; SHUBIK, 1977, para implementar e testar os métodos numéricos descritos no capítulo 3.

Com a nossa função de excesso de demanda pelo bem  $x$ , utilizaremos ela para calcular os preços de equilíbrio nas duas primeiras estratégias que serão apresentadas. Para visualizarmos melhor o que buscamos por meio delas, vejamos o gráfico a seguir:



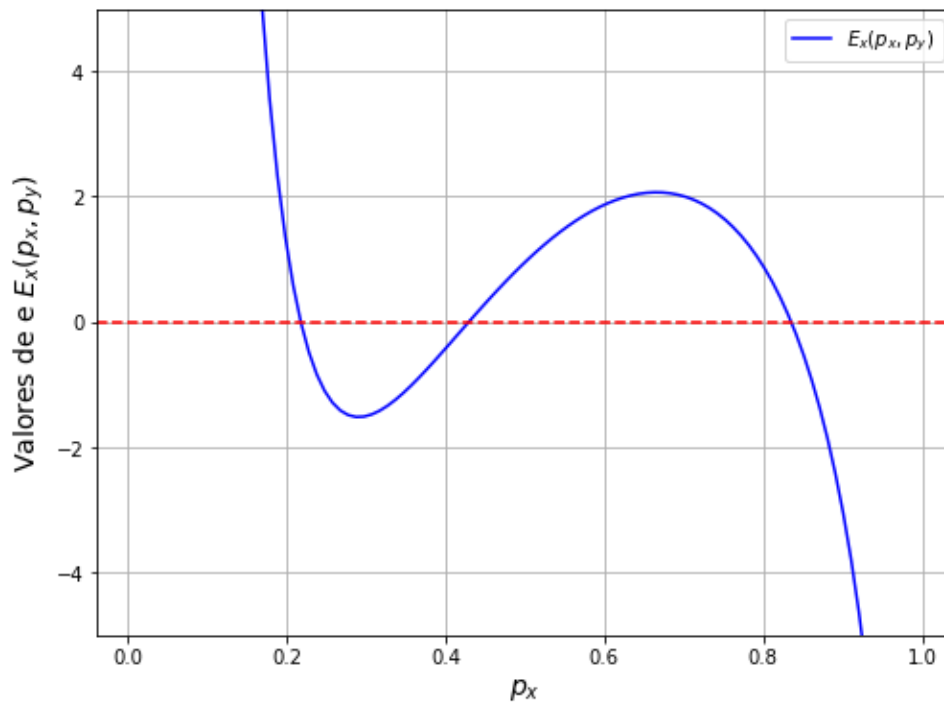


Figura 5 – Gráfico de  $E_x(\mathbf{p})$  para  $p_x$

Para construir este gráfico, criamos um vetor de preços para o bem  $x$  ( $p_x$ ) e para o bem  $y$  ( $p_y$ ), aliado a condição do simplex  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . A partir dos valores dessas duas variáveis, calculou-se o excesso de demanda para o bem  $x$  e traçou (por meio da linha contínua da cor azul) o caminho que  $E_x$  percorre. A linha tracejada em vermelho facilita a visualização de quando a linha de  $E_x$  chega ao valor igual a zero.

O excesso de demanda, em termos econômicos, é a diferença entre a quantidade demandada e a quantidade ofertada de um bem. Se o excesso de demanda é positivo (acima da linha vermelha tracejada), há mais demanda do que oferta, enquanto um valor negativo (abaixo da linha vermelha tracejada) indica que há mais oferta do que demanda. Quando o excesso de demanda é zero, o mercado está em equilíbrio, ou seja, a quantidade demandada iguala a quantidade ofertada.

Neste exemplo que estamos utilizando, a função de excesso de demanda tanto para o bem  $x$ , quanto para o bem  $y$  contém componentes logarítmicos que capturam a relação não linear entre os preços dos bens e o comportamento da demanda. A presença desses logaritmos indica que pequenas mudanças nos preços relativos podem causar variações significativas no excesso de demanda.

A função  $E_x(p_x, p_y)$  mostra uma oscilação à medida que  $p_x$  aumenta. Isso demonstra que a resposta da demanda ao preço do bem  $x$  não é constante e que o impacto de uma variação no preço depende de sua magnitude e da relação com o preço do bem  $y$ . A oscilação pode ser atribuída à estrutura logarítmica da função, que amplifica ou reduz a sensibilidade da demanda dependendo da relação  $\frac{p_x}{p_y}$ .

Em alguns pontos de  $p_x$ , a função assume valores positivos, indicando excesso de demanda, enquanto em outras faixas a função é negativa, representando excesso de oferta, como já falado anteriormente. A alternância entre esses estados reflete a sensibilidade da demanda às variações de preço e destaca a complexidade do ajuste do mercado. Essa estrutura sugere que, mesmo pequenas mudanças no preço do bem  $x$ , podem alterar significativamente a posição de mercado (excesso de demanda ou oferta) devido à forma como os dois consumidores do modelo reagem a diferentes combinações de preços.

Os pontos em que a curva cruza a linha horizontal  $E_x = 0$  são os pontos de equilíbrio de mercado. Nesses pontos, a quantidade demandada do bem  $x$  iguala a quantidade ofertada. No gráfico, podemos observar que há três pontos em que isso ocorre, o que representa que há mais de um ponto de equilíbrio possível.

A multiplicidade de equilíbrios sugere que o sistema é altamente sensível às condições de preço, o que pode indicar a presença de mais de um estado de equilíbrio estável no mercado, o que é comum em cenários onde bens substitutos ou complementares interagem de maneira significativa. A economia desses equilíbrios múltiplos pode estar relacionada à elasticidade-preço da demanda. Para diferentes intervalos de preços, a elasticidade da demanda pode mudar de tal forma que o mercado alterna entre equilíbrio de excesso de oferta e excesso de demanda.

A relação entre  $p_x$  e  $p_y$ , definida como  $p_x + p_y = 1$ , modela um cenário onde há uma dependência inversa entre os preços dos bens  $x$  e  $y$ . Isso pode representar uma substitutibilidade direta entre os dois bens, onde um aumento no preço de  $x$  reduz a demanda por  $x$  e, conseqüentemente, o preço de  $y$ , se eles forem bens substitutos imperfeitos. A oscilação da curva mostra como mudanças na razão entre  $p_x$  e  $p_y$  afetam o excesso de demanda de  $x$ , sugerindo uma forte interação entre os mercados de ambos os bens.

A estrutura logarítmica sugere que, conforme a razão entre os preços se aproxima de certos valores críticos, há grandes variações no comportamento da demanda. Esses pontos críticos podem estar relacionados a mudanças nas preferências dos consumidores, onde eles passam a preferir um bem em detrimento do outro à medida que a relação de preços se altera. Isso também pode indicar que o sistema é muito sensível a pequenas variações de preço, o que pode causar flutuações consideráveis no excesso de demanda.

Aplicaremos os métodos numéricos para encontrarmos os pontos de equilíbrio no modelo de equilíbrio geral, identificando os três possíveis pontos de equilíbrio para o sistema. Neste processo, começamos com um valor inicial de  $p_x$  e utilizamos incrementos regulares de 0,1, variando  $p_x$  de 0,1 até 0,9. Essa abordagem permite uma exploração sistemática do espaço de soluções, com o objetivo de identificar os valores de  $p_x$  que satisfazem as condições de equilíbrio. Esses métodos nos ajudam a localizar as condições sob as quais o mercado atinge equilíbrio, considerando as interações entre variáveis econômicas e adaptando o valor de  $p_x$  para garantir precisão na identificação dos pontos de

equilíbrio.

Como demonstrado nos gráficos anteriores, podemos identificar os três pontos de equilíbrio no ponto em que  $E_x = 0$ . As primeiras duas estratégias de solução procuram encontrar os pontos de equilíbrio por meio da equação de excesso de demanda do bem  $x$ . Espera-se que fornecendo o  $p_x$  inicial, o método numérico consiga convergir, em  $x$  números de interações, para o  $p_x$  de equilíbrio, onde  $E_x = 0$ . Para efeito comparativo, iremos demonstrar o número de interações em que cada método convergiu ao resultado para cada  $p_x$  informado.

Para todas as estratégias que serão utilizadas, será adotado um limite de tolerância de  $1 \times 10^{-6}$ . Além disso, para um controle maior, haverá um limite de interações para cada método, a fim de não ocasionar em loops infinitos. Estas aplicações nos permitirão verificar como cada uma das estratégias para solução de equilíbrio geral se comportam com a existência dos 3 pontos de equilíbrio, além do comportamento com relação as equações não tão triviais que serão fornecidas (como as logarítmicas).

### 5.3.1 ITERAÇÃO DE PONTO FIXO

A primeira estratégia de solução numérica a ser utilizada é por meio da interação de ponto fixo. Como visto, primeiramente deve-se definir o mapa  $g(p)$ , que será o seguinte:

$$g_x(p_x, p_y) = \frac{p_x + \max(0, E_x(p))}{1 + \max(0, E_x(p)) + \max(0, E_y(p))} \quad (5.20)$$

Neste caso, precisaremos fazer o mapa  $g(p)$  somente para o bem  $x$ . Lembrando que se um mercado estiver em equilíbrio,  $m - 1$  mercados também estarão em equilíbrio, podendo achar o  $p_y$  a partir do  $p_x$  encontrado. Assim sendo, o programa irá buscar o ponto fixo em  $g(p)$ .

Utilizaremos as funções de excesso de demanda para os bens  $x$  e  $y$  definidas anteriormente como mostrado na função  $g_x(p_x, p_y)$ . Este ajuste leva o preço ao ponto onde o excesso de demanda é minimizado, direcionando  $p_x$  ao equilíbrio.

O método de ponto fixo é uma técnica iterativa em que assumimos uma aproximação inicial para o preço  $p_x$  (digamos,  $p_0$ ). Em cada  $p_0$  informado, vamos utilizar a função  $g_x$ , de forma que a próxima iteração no algoritmo seja dada por:

$$p_{k+1} = g_x(p_k)$$

A cada iteração, calculamos  $p_{k+1}$  utilizando a função  $g_x$ , que por sua vez, utiliza os excessos de demanda dos bens  $x$  e  $y$ . Após esse cálculo, o algoritmo verifica a diferença

entre  $p_{k+1}$  e  $p_k$ . Se essa diferença for menor que a tolerância informada (o que indica que os valores estão suficientemente próximos), assume-se que o equilíbrio foi atingido. Se não for atingido, o algoritmo irá executar as próximas iterações e, se não atingirmos a tolerância dentro de um número máximo de iterações, o método é interrompido, não chegando a um ponto de equilíbrio.

Inicialmente, utilizaremos  $p_0 = 0,1$ . A tabela a seguir mostra o número de iterações feitas pelo algoritmo, bem como os valores de  $p_x$  e  $p_y$  alcançados em cada iteração feita.

Tabela 1 – Resultados da iteração do método de ponto fixo

Iteração	$p_x$	$p_y$
1	0.97598	0.02402
2	0.00165	0.99835
3	0.99996	0.00004
4	0.00000	1.00000
5	1.00000	0.00000
6	0.00000	1.00000
7	1.00000	0.00000
8	0.00000	1.00000
9	1.00000	0.00000
10	0.00000	1.00000
11	nan	nan
⋮	⋮	⋮
100	nan	nan

Podemos observar, por meio da tabela, que não houve convergência ao equilíbrio. Nas primeiras iterações, há grandes variações entre os valores de  $p_x$  e  $p_y$ . Por exemplo, na segunda iteração,  $p_x$  cai para aproximadamente 0,00165 enquanto  $p_y$  sobe para 0,99835, ocorrendo o contrário na terceira iteração, indicando uma grande instabilidade no processo de convergência.

A partir da quarta iteração, os valores de  $p_x$  e  $p_y$  alternam repetidamente entre 1 e 0, sugerindo que o método está preso em um ciclo e não consegue convergir para um ponto de equilíbrio estável. A partir da décima primeira iteração, os valores de  $p_x$  e  $p_y$  se tornam nan (Not a Number). Isso indica que o método falhou devido a uma operação inválida, possivelmente causada pelo comportamento oscilatório que resultou em divisões por zero ou logaritmos de valores negativos/inválidos na função.

Todos os testes obtiveram praticamente o mesmo comportamento. Utilizamos  $p_0 = 0,2; 0,3; \dots; 0,9$  e nenhum convergiu a um ponto de equilíbrio após 100 iterações feitas, sendo que os resultados e o comportamento do programa foram muito parecidos ao teste anterior com  $p_0 = 0,1$ . A tabela a seguir demonstra as saídas do algoritmo para cada  $p_0$ .

Tabela 2 – Resultados da iteração do método de ponto fixo para  $p_0 = 0,2; \dots; 0,9$ .

$p_0$	Iterações	$p_x$	$p_y$
0,2	100	nan	nan
0,3	100	nan	nan
0,4	100	nan	nan
0,5	100	nan	nan
0,6	100	nan	nan
0,7	100	nan	nan
0,8	100	nan	nan
0,9	100	nan	nan

Esse comportamento sugere que o método de ponto fixo, com a função  $g(p)$  e as condições especificadas, não é adequado para encontrar um ponto de equilíbrio estável para esses preços. Em particular, o método pode estar violando os critérios necessários para convergência, tendo em vista as grandes oscilações, se mostrando não eficaz para o nosso caso de estudo, com 3 pontos de equilíbrio e funções logarítmicas.

### 5.3.2 $E(\mathbf{p}) = 0$ COMO UM SISTEMA NÃO LINEAR

Para resolver o problema de encontrar os equilíbrios de mercado considerando o excesso de demanda  $E(\mathbf{p}) = 0$  como um sistema de equações não lineares, começamos por definir o sistema que queremos resolver. A função  $E(\mathbf{p})$  representa o vetor de excesso de demanda para cada bem em um mercado com  $m$  bens, onde cada componente  $E_i(\mathbf{p})$  corresponde ao excesso de demanda do bem  $i$ , dado o vetor de preços  $\mathbf{p}$ .

Segundo a Lei de Walras, se o vetor de preços  $\mathbf{p}$  satisfaz  $E(\mathbf{p}) = 0$  para  $m - 1$  componentes do excesso de demanda, então o último componente de  $E(\mathbf{p})$  será automaticamente zero. Isso nos permite reduzir o sistema para  $m - 1$  equações de excesso de demanda. Em nosso caso particular de estudo, temos somente dois bens e, conseqüentemente, dois mercados. Sendo assim, se encontrarmos os preços de equilíbrio para o bem  $x$ , o mercado de  $y$  também estará em equilíbrio, sendo seus preços de equilíbrio definidos de acordo com a condição de que  $p_x + p_y = 1$ .

Relembrando, nossa função excesso de demanda para o bem  $x$  já está definida:

$$E_x(\mathbf{p}) = 10 \frac{p_y}{p_x} \ln \left( \frac{p_y}{10p_x} \right) - 10 \ln \left( \frac{p_x}{11p_y} \right)$$

Para resolver esse sistema, aplicaremos o método de Newton, um método iterativo apropriado para sistemas de equações não lineares. O método de Newton exige que tenhamos uma aproximação inicial para os preços, e para o caso específico que estamos estudando, vamos variar essa aproximação inicial ao definir  $p_x$  variando de 0,1 em 0,1 até 0,9, onde  $p_x$  representa o preço inicial de um dos bens. Dessa forma, teremos uma

série de pontos de partida distintos para verificar a convergência e, assim, explorar a possibilidade de múltiplos equilíbrios.

Essa abordagem é útil para determinar se o sistema apresenta até três equilíbrios distintos, como esperado no caso em análise. Cada valor inicial de  $p_x$  fornecerá uma trajetória de iteração que pode convergir para um equilíbrio particular, possibilitando verificar a existência de múltiplos equilíbrios no sistema. O sistema de equilíbrio é encontrado ao satisfazer a condição  $E(\mathbf{p}) = 0$ , que indica que a quantidade demandada iguala a quantidade ofertada para cada bem.

Porem para utilizar o metodo de newton precisamos da primeira derivada escrevendo  $E_x(p_x)$  pois  $p_x + p_y = 1$ , temos que

$$E_x = 10r \ln(1/10r) - 10 \ln(r/11) = -10r \ln(10) - 10r \ln(r) - 10 \ln(r) + 10 \ln(11)$$

onde  $r = \frac{p_x}{p_y}$

assim calculamos

$$\frac{dE_x}{dp_x} = (-10 \ln 10 - 10 \ln r - 10 - 10/r) \frac{dr}{dp_x}$$

e como

$$\frac{dr}{dp_x} = \frac{1}{(1 - p_x)^2}$$

Assim temos a derivada, e a usamos no método de newton, com um limite de 1000 iterações.

O primeiro teste é feito com  $p_x$  inicial igual a 0.1. A tabela a seguir demonstra os resultados obtidos a partir da aplicação do método de Newton simples, já que há somente uma função de interesse, no caso, a de excesso de demanda especificada acima. As colunas de resultados representam o número de iterações realizadas pelo algoritmo até chegar ao equilíbrio, os valores de  $p_x$  e  $p_y$  ao longo da iteração, bem como a quantidade demandada do bem  $x$  pelo indivíduo 2 (Demanda  $x_2$ ), além da quantidade demandada pelo bem  $y$ , pelo mesmo indivíduo (Demanda  $y_2$ ), como demonstrado nos resultados encontrados por [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#) para fins de comparação.

Tabela 3 – Resultados das Iterações para  $p_x$  inicial = 0,1

Iteração	$p_x$	$p_y$	Demanda $x_2$	Demanda $y_2$
0	0.100000	0.900000	45.951199	44.894311
1	0.392317	0.607683	28.354783	31.694297
2	0.387855	0.612145	28.542325	31.915580
3	0.382802	0.617198	28.755686	32.165012
4	0.377069	0.622931	28.999009	32.446454
5	0.370558	0.629442	29.277179	32.764250
6	0.363155	0.636845	29.595917	33.123198
7	0.354735	0.645265	29.961846	33.528437
8	0.345168	0.654832	30.382435	33.985150
9	0.334328	0.665672	30.865688	34.497960
10	0.322122	0.677878	31.419308	35.069784
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
33	0.217555	0.782445	36.778679	39.773875

Neste primeiro teste, podemos observar que houve convergência ao equilíbrio. Após 33 iterações, o algoritmo chegou ao ponto em que  $p_x = 0,217555$  e  $p_y = 0,782445$ , o mesmo encontrado por Shapley em seu trabalho. As quantidades demandadas do indivíduo 2 foram de aproximadamente  $x = 36,78$  e  $y = 39,77$ , os mesmos números encontrados por SHAPLEY; SHUBIK, 1977 no primeiro ponto de equilíbrio.

Tabela 4 – Resultados do método Newton para diferentes valores iniciais de  $p_x$ .

$p_x$ Inicial	Iterações	Resultado Encontrado
0.100000	33	0.217555
0.200000	15	0.217555
0.300000	21	0.217555
0.400000	34	0.217555
0.500000	921	0.835324
0.600000	906	0.835324
0.700000	888	0.835324
0.800000	833	0.835324
0.900000	926	0.835324

Os resultados apresentados na Tabela 4 mostram o desempenho do método de Newton para encontrar a solução do nosso modelo, utilizando diferentes valores iniciais de  $p_x$  (preço inicial de um bem). A análise revela algumas características do método de Newton, particularmente sua sensibilidade aos valores iniciais e a convergência para diferentes soluções.

Inicialmente, observa-se que, para valores iniciais de  $p_x$  entre 0,1 e 0,4, o método converge para o mesmo resultado  $p_x = 0,217555$  com um número moderado de iterações

(variando entre 15 e 34). Isso sugere que a região próxima a esses valores iniciais está associada a um ponto de equilíbrio estável, no qual o método rapidamente encontra a solução devido à proximidade do valor inicial ao ponto de equilíbrio. Como podemos observar, quando  $p_x$  iniciou-se com o valor de 0,2 (o valor mais próximo ao ponto de equilíbrio), em 15 iterações convergiu a ele.

No entanto, para valores iniciais mais altos ( $p_x$  de 0,5 a 0,9), o método de Newton converge para um segundo ponto de equilíbrio  $p_x = 0,835324$ . Nesse caso, o número de iterações necessário para a convergência é significativamente maior, variando de 833 a 926 iterações.

Outro aspecto interessante é que os dois pontos de equilíbrio encontrados ( $p_x = 0.217555$  e  $p_x = 0.835324$ ) indicam a existência de múltiplos equilíbrios no sistema. Essa multiplicidade reflete os resultados encontrados por SHAPLEY; SHUBIK, 1977, mostrando que a estratégia conseguiu identificar mais de um ponto. O número elevado de iterações necessário para  $p_x > 0.5$  pode ser interpretado como uma indicação de que a solução encontrada está em uma região menos estável.

O gráfico a seguir ilustra os resultados encontrados a partir de cada  $p_x$  inicial. Os resultados se encontram no eixo vertical, enquanto os valores de  $p_x$  que iniciaram o teste, se encontram no eixo horizontal.

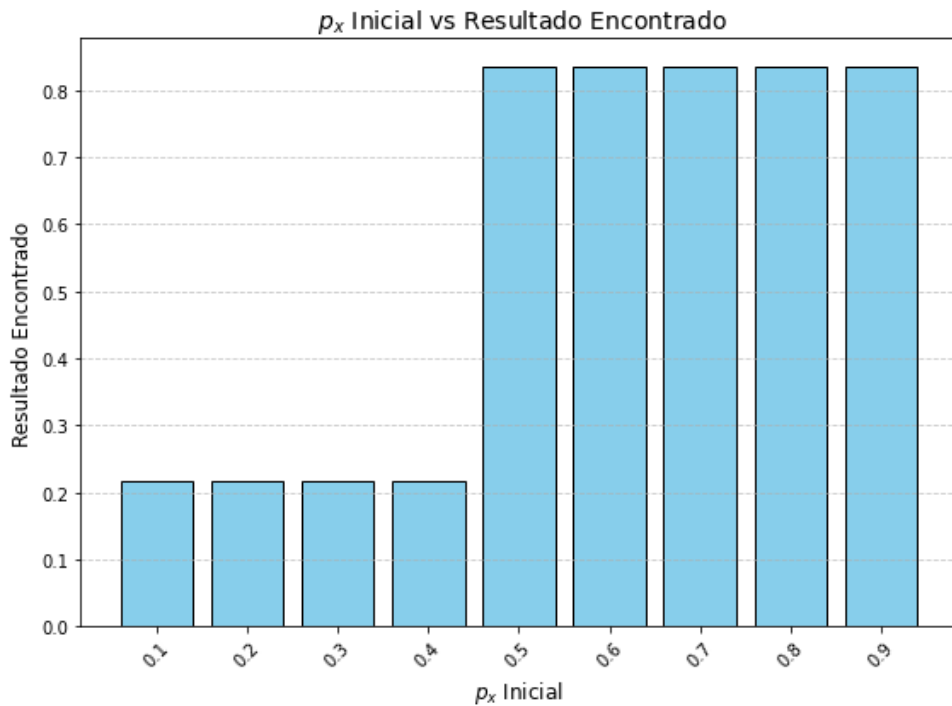


Figura 6 – Resultados de  $E_x$  para cada  $p_x$  inicial

O gráfico apresenta a relação entre o valor inicial de  $p_x$  e o resultado final encontrado pelo método de Newton aplicado à função de excesso de demanda  $E_x$ . No eixo



horizontal, estão os valores iniciais de  $p_x$ , variando de 0.1 a 0.9, enquanto o eixo vertical exhibe os valores de  $p_x$  obtidos como resultado após a convergência do método.

A análise do gráfico revela a presença dos dois pontos distintos de equilíbrio no sistema. Para valores iniciais de  $p_x$  entre 0,1 e 0,4, o método converge para um mesmo equilíbrio, localizado em aproximadamente  $p_x \approx 0,217$ . Esse comportamento sugere que, nessa faixa de valores iniciais, o sistema é atraído por um ponto fixo mais próximo.

Por outro lado, para valores iniciais de  $p_x$  entre 0,5 e 0,9, o método de Newton converge para um segundo ponto de equilíbrio, situado em aproximadamente  $p_x \approx 0,835$ . Isso indica a existência do outro ponto fixo no sistema, ao qual os valores iniciais mais altos tendem a se aproximar. A divisão entre as regiões de convergência demonstra que o sistema possui múltiplos equilíbrios estáveis, com o valor inicial de  $p_x$  determinando para qual deles o método converge.

Adiante temos uma nova ilustração gráfica para análise dos resultados. Nela conseguimos comparar o número de iterações que ocorreram, dado cada  $p_x$  inicial, para a convergência.

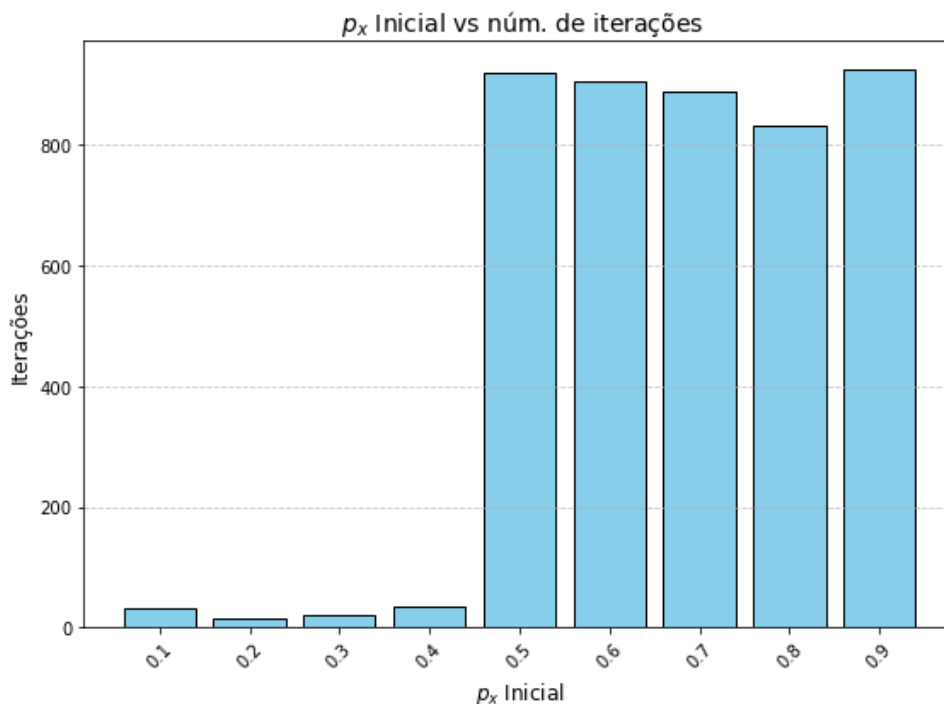


Figura 7 – Número de iterações para cada  $p_x$  inicial

Como demonstrado no gráfico acima, analisamos a relação entre o valor inicial de  $p_x$  e o número de iterações necessárias para que o método de Newton convergisse a uma solução para a função de excesso de demanda  $E_x$ . No gráfico, o eixo horizontal representa os valores iniciais de  $p_x$ , variando de 0.1 a 0.9, enquanto o eixo vertical indica o número de iterações necessárias para a convergência.

Os resultados evidenciam que, para valores iniciais de  $p_x$  entre 0.1 e 0.4, o número de iterações é moderado, variando entre 15 e 34. Isso sugere que, nessas regiões, a função  $E_x$  apresenta um comportamento mais linear ou estável, permitindo que o método de Newton encontre rapidamente uma solução. Esses valores iniciais convergem consistentemente para o mesmo ponto de equilíbrio, indicando a presença de uma solução bem definida nesta faixa.

Por outro lado, para valores iniciais de  $p_x$  superiores a 0.5, observa-se um aumento expressivo no número de iterações, atingindo valores próximos a 900. Esse comportamento pode ser atribuído à maior complexidade da função  $E_x$  nessas regiões, possivelmente devido a características como maior curvatura ou presença de pontos de inflexão. Além disso, esses valores iniciais estão associados a um segundo ponto de equilíbrio.

#### 5.4 CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Usando as condições das equações 3.6 a 3.9, construiremos um sistema de equações derivado das condições de primeira ordem assim, calculando as derivadas da equação 3.6 acima encontraremos 4 equações que representam a maximização dos indivíduos:

$$1 = \lambda^1 p_x \quad (5.21)$$

$$10e^{-\frac{y^1}{10}} = \lambda^1 p_y \quad (5.22)$$

$$11e^{-\frac{x^2}{10}} = \lambda^2 p_x \quad (5.23)$$

$$1 = \lambda^2 p_y \quad (5.24)$$

Além disso, temos que satisfazer a restrição orçamentária de cada consumidor. Ela diz que a alocação de bens  $(x^1, y^1)$  para este consumidor deve ser tal que o valor (preço vezes quantidade) das trocas que o agente realiza é igual ao valor da sua dotação inicial de bens, que é  $\bar{x}^1 = 40$  e  $\bar{y}^1 = 0$ , isto vem da equação 3.7.

$$\begin{aligned} (p_x, p_y) \cdot (x^1 - \bar{x}^1, y^1 - \bar{y}^1) &= 0 \\ (p_x, p_y) \cdot (x^1 - 40, y^1) &= 0 \\ p_x x^1 - 40p_x + p_y y^1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

De forma análoga, temos a restrição orçamentária para o agente 2:

$$\begin{aligned} (p_x, p_y) \cdot (x^2 - \bar{x}^2, y^2 - \bar{y}^2) &= 0 \\ (p_x, p_y) \cdot (x^2, y^2 - 50) &= 0 \\ p_x x^2 - 50p_y + p_y y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Aqui,  $\bar{x}^2 = 0$  e  $\bar{y}^2 = 50$  são as dotações iniciais do agente 2. Essas equações representam as trocas que os agentes podem realizar, onde o valor das trocas líquidas de cada agente, dado pelos preços de mercado  $p_x$  e  $p_y$ , deve ser igual à soma do valor das suas dotações iniciais.

A condição de equilíbrio de mercado para o bem  $x$  (em  $m - 1$  mercados pela lei de Walras). Ela indica que a quantidade total demandada pelos dois agentes ( $x^1 + x^2$ ) deve ser igual a quantidade total disponível no mercado, que representa as somas de  $\bar{x}^1 + \bar{x}^2$ , que em nosso caso de estudo, é igual a 40.

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 &= \bar{x}^1 + \bar{x}^2 \\ x^1 + x^2 - \bar{x}^1 - \bar{x}^2 &= 0 \\ x^1 + x^2 - 40 &= 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Para os preços, teremos a equação 3.9. Aqui, a soma dos preços é igual a 1. Isso é comum para simplificar a análise de preços relativos, onde o preço de um bem pode ser expresso em termos do outro.

$$p_x + p_y = 1 \tag{5.28}$$

As equações 5.21 a 5.28 obtidas das condições de primeira ordem definem um ponto de equilíbrio.

Definidas as equações, partiremos para a aplicação da estratégia. O nosso algoritmo implementará o método de Newton para resolver o sistema de equações não lineares descritos acima. Nesse modelo, são consideradas oito variáveis principais:  $p_x$  e  $p_y$ , que representam os preços dos bens  $x$  e  $y$ ;  $x_1$  e  $x_2$ , que representam as quantidades de  $x$  consumidas pelos dois indivíduos;  $y_1$  e  $y_2$ , que são as quantidades de  $y$  consumidas pelos mesmos indivíduos; e, finalmente,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições orçamentárias de cada indivíduo.

O sistema de equações é definido com base nas condições de equilíbrio de mercado, que garantem que a oferta seja igual à demanda para cada bem, nas restrições orçamentárias dos indivíduos e na normalização dos preços, assumindo que a soma de  $p_x$  e  $p_y$  deve ser igual a 1. A Jacobiana, que é a matriz de derivadas parciais das equações com relação às variáveis, é calculada para possibilitar a aplicação do método de Newton. Essa matriz é fundamental para determinar os incrementos iterativos que ajustam as variáveis em direção à solução.

A resolução do sistema ocorre iterativamente. Inicialmente, o vetor de variáveis é avaliado no sistema de equações. Em seguida, o método de Newton calcula um incre-

mento resolvendo o sistema linear

$$J \cdot \Delta \mathbf{vars} = -F,$$

onde  $J$  é a Jacobiana e  $F$  é o vetor de equações avaliadas no ponto atual. As variáveis são então atualizadas e o processo se repete até que o erro, medido pela norma de  $F$ , seja menor que um limite de tolerância ( $10^{-6}$ ) ou que o número máximo de iterações (1000) seja alcançado.

Aplicaremos o método com três diferentes condições iniciais para as variáveis, afim de conseguir chegar aos três pontos de equilíbrio encontrados no trabalho de [SHA-PLY; SHUBIK, 1977](#). Para cada teste, o número de iterações necessárias para alcançar a convergência é registrado, assim como a solução final, que inclui os valores das variáveis de equilíbrio: preços, consumos e multiplicadores de Lagrange.

A tabela a seguir demonstra os valores informados como iniciais para cada variável para o primeiro teste.

Tabela 5 – Valor inicial teste 1

Variável	Valores
$p_x$	0.8
$p_y$	0.2
$x_1$	10
$x_2$	30
$y_1$	25
$y_2$	25
$\lambda_1$	1
$\lambda_2$	3

Os preços iniciais dos bens ( $p_x$  e  $p_y$ ) foram definidos como 0.8 e 0.2, respectivamente. As quantidades iniciais de consumo para os indivíduos ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ) foram ajustadas em 10, 30, 25, e 25, enquanto os multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ) foram configurados como 1 e 3.

A seguir temos a tabela de resultados. Ela apresenta as soluções encontradas pelo método de Newton, que convergiu após 6 iterações. Os preços de equilíbrio ajustados são  $p_x \approx 0.429237$  e  $p_y \approx 0.570763$ , confirmando que a soma dos preços totaliza 1, em conformidade com a restrição de normalização. As quantidades de consumo ajustadas indicam que o indivíduo 1 consome aproximadamente  $x_1 \approx 13.171409$  e  $y_1 \approx 20.176213$ , enquanto o indivíduo 2 consome  $x_2 \approx 26.828591$  e  $y_2 \approx 29.823787$ . Os multiplicadores de Lagrange resultantes,  $\lambda_1 \approx 2.329714$  e  $\lambda_2 \approx 1.752041$ .

Esses resultados demonstram a convergência do método de Newton para o equilíbrio do sistema, a partir das condições iniciais definidas. A precisão obtida em 6 iterações também sugere que o método foi eficiente para esse conjunto específico de valores iniciais.

Tabela 6 – Resultados do Teste 1

Variável	Resultado
Iterações	6
$p_x$	0.429237
$p_y$	0.570763
$x_1$	13.171409
$x_2$	26.828591
$y_1$	20.176213
$y_2$	29.823787
$\lambda_1$	2.329714
$\lambda_2$	1.752041

Da mesma forma, partiremos para o segundo teste em busca de outro ponto de equilíbrio. A tabela 5.7 demonstra os valores iniciais utilizados para a aplicação da estratégia.

Tabela 7 – Valor inicial teste 2

Variável	Valores
$p_x$	0.8
$p_y$	0.2
$x_1$	30
$x_2$	10
$y_1$	10
$y_2$	40
$\lambda_1$	-1
$\lambda_2$	-4

Para os preços iniciais,  $p_x$  e  $p_y$ , foram atribuídos os valores 0.8 e 0.2, respectivamente. As quantidades de bens consumidas inicialmente pelos indivíduos foram configuradas de forma assimétrica:  $x_1 = 30$  e  $x_2 = 10$ , enquanto  $y_1 = 10$  e  $y_2 = 40$ . Já os multiplicadores de Lagrange ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) receberam valores negativos,  $-1$  e  $-4$ .

Tabela 8 – Resultados do Teste 2

Variável	Resultado
Iterações	7
$p_x$	0.835324
$p_y$	0.164676
$x_1$	32.259422
$x_2$	7.740578
$y_1$	39.264226
$y_2$	10.735774
$\lambda_1$	1.197141
$\lambda_2$	6.072519

Nesta tabela 5.8, são apresentados os valores finais encontrados após a execução do método de Newton, que convergiu em 7 iterações. Os preços ajustados do equilíbrio são  $p_x \approx 0.835324$  e  $p_y \approx 0.164676$ , também encontrado no trabalho de SHAPLEY; SHUBIK, 1977. As quantidades de consumo ajustadas indicam que o indivíduo 1 consome  $x_1 \approx 32.259422$  e  $y_1 \approx 39.264226$ , enquanto o indivíduo 2 consome  $x_2 \approx 7.740578$  e  $y_2 \approx 10.735774$ . Os multiplicadores de Lagrange no equilíbrio,  $\lambda_1 \approx 1.197141$  e  $\lambda_2 \approx 6.072519$ , agora apresentam valores positivos.

Os resultados evidenciam que, mesmo partindo de condições iniciais desbalanceadas e com variáveis fora do intervalo esperado, o método de Newton conseguiu encontrar uma solução estável para chegar ao segundo ponto de equilíbrio.

Por último temos o terceiro teste. A seguir temos os valores utilizados para iniciar o algoritmo.

Tabela 9 – Valor inicial teste 3

Variável	Valores
$p_x$	0.9
$p_y$	0.1
$x_1$	20
$x_2$	20
$y_1$	25
$y_2$	25
$\lambda_1$	-1
$\lambda_2$	-2

Na tabela 5.9, observa-se que os preços iniciais atribuídos aos bens foram  $p_x = 0.9$  e  $p_y = 0.1$ . As quantidades iniciais consumidas pelos indivíduos foram configuradas de forma igualitária, com  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 20$ ,  $y_1 = 25$  e  $y_2 = 25$ . Contudo, os multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , foram inicializados com valores negativos,  $-1$  e  $-2$ , respectivamente.

Tabela 10 – Resultados do Teste 3

Variável	Resultado
Iterações	46
$p_x$	0.217555
$p_y$	0.782445
$x_1$	3.221313
$x_2$	36.778687
$y_1$	10.226112
$y_2$	39.773888
$\lambda_1$	4.596546
$\lambda_2$	1.278044

A tabela 5.10 apresenta os valores encontrados após a execução do método, que convergiu em 46 iterações. Este número elevado de iterações indica que a configuração inicial estava relativamente mais distante do equilíbrio, exigindo mais passos para alcançar a solução. Os preços ajustados no equilíbrio são  $p_x \approx 0.217555$  e  $p_y \approx 0.782445$ , também encontrado por [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#). As quantidades ajustadas revelam que o indivíduo 1 consome  $x_1 \approx 3.221313$  e  $y_1 \approx 10.226112$ , enquanto o indivíduo 2 consome  $x_2 \approx 36.778687$  e  $y_2 \approx 39.773888$ .

Por fim, os multiplicadores de Lagrange ajustados no equilíbrio são  $\lambda_1 \approx 4.596546$  e  $\lambda_2 \approx 1.278044$ . O resultado final demonstra que, apesar da complexidade e da distância inicial do equilíbrio, o método de Newton conseguiu alcançar uma solução estável.

É importante destacar que foram realizados outros testes além destes. Alguns não conseguiram retornar resultados, e outros convergiram para o mesmo ponto de equilíbrio. Para não ficar muito extenso, não apresentamos todos, focando nos testes em que resultaram em pontos de equilíbrio, além de valores diferentes para tais pontos.

Outro ponto a se destacar é que estes valores são fornecidos a partir de chutes para todas as variáveis. Para convergir a um ponto de equilíbrio específico, os chutes iniciais têm de ser bom para **todas** as variáveis. Em alguns casos, mesmo variando somente o valor de  $p_x$  (consequentemente  $p_y$ ) e mantendo as outras variáveis constantes, o resultado encontrado era o mesmo.





## 6 CONCLUSÕES

O presente trabalho procurou utilizar estratégias de soluções para problemas de equilíbrio geral e compará-las. Todas essas estratégias se encontram no livro de [JUDD, 2023](#) e utilizam métodos numéricos para chegarem aos resultados de equilíbrio. Aplicamos essas estratégias utilizando o problema mostrado por [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#), onde ele encontrou 3 soluções de equilíbrio a partir das utilidades fornecidas para 2 indivíduos em um mercado de somente 2 bens. Um modelo simples, mas que conta com funções utilidades um pouco mais complexas. A partir disso, verificamos como cada método se comportou com tais condições e iremos comparar seus resultados.

A primeira estratégia a ser utilizada foi a do método do ponto fixo. Um dos pontos positivos dela foi a fácil programação, já que se trata de um método relativamente simples de se implementar. Foram executados os testes utilizando o algoritmo, mas em cada uma dessas tentativas, os valores de  $p_x$  e  $p_y$  resultaram em `nan` (Not a Number) após 100 iterações, o que indica que o método falhou em convergir para um ponto de equilíbrio estável.

Esses resultados sugerem que, independentemente do ponto de partida  $p_0$ , o método de ponto fixo com a função  $g(p)$  não é adequado para encontrar um equilíbrio neste contexto. A presença de `nan` sugere que a função iterativa  $g(p)$  gera operações inválidas durante o processo, possivelmente devido a instabilidades como divisões por zero ou logaritmos de valores não definidos (valores negativos ou zero), especialmente à medida que as iterações avançam.

Como dito por [JUDD, 2023](#), não há garantia que essa estratégia chegue a convergência, e conseqüentemente ao equilíbrio. Em nosso caso específico de estudo, o método se mostrou ineficaz e de mal funcionamento, não conseguindo chegar a nenhum dos pontos de equilíbrio e não ocorrendo de maneira correta, como demonstrado.

A estratégia de  $E(\mathbf{p}) = 0$  como um sistema não linear se comportou bem. A aplicação do método de Newton para encontrar o ponto de equilíbrio entre as demandas de bens  $x$  e  $y$  mostrou-se eficaz e de fácil programação, embora com algumas limitações. Como observado, o método depende fortemente da escolha do valor inicial de  $p_x$ .

Para valores iniciais de  $p_x$  entre 0.1 e 0.4, o método converge para o equilíbrio em  $p_x \approx 0.217555$  com um número moderado de iterações, variando de 15 a 34. Já para

valores iniciais superiores a 0.5, o método converge para o equilíbrio em  $p_x \approx 0.835324$ , mas com um número significativamente maior de iterações, chegando a até 926. Esse comportamento reflete a presença de duas bacias de atração associadas aos equilíbrios e a complexidade da função de excesso de demanda.

Em nosso caso de estudo específico, esta estratégia não conseguiu obter todos os pontos de equilíbrio. Como foi informado durante o trabalho, havia 3 pontos de equilíbrio a serem encontrados. Os resultados indicaram que o método conseguiu identificar dois pontos de equilíbrio distintos:  $p_x \approx 0.217555$  e  $p_x \approx 0.835324$ . A convergência para cada ponto depende da região em que o valor inicial de  $p_x$  se encontra. O outro ponto, como informado por [SHAPLEY; SHUBIK, 1977](#) em seu trabalho, é considerado dinamicamente instável. Assim, em alguns casos, não é possível chegar a ele dependendo da estratégia utilizada.

Por último e não menos importante, utilizamos a estratégia das condições de primeira ordem. O método de Newton se mostrou uma ferramenta poderosa para a solução do sistema de equações não lineares que representam o equilíbrio geral do modelo econômico em análise. Sua eficiência é evidente nos casos testados, uma vez que ele conseguiu convergir para soluções de equilíbrio em três cenários distintos, mesmo quando as condições iniciais variavam amplamente.

Apesar disso, o método de Newton é sensível às condições iniciais escolhidas para as variáveis. Como observado, diferentes valores iniciais podem levar a pontos de equilíbrio distintos ou, em alguns casos, à não convergência. Isso indica que o método exige boas aproximações iniciais para aumentar a probabilidade de sucesso.

Nos testes realizados, o método demonstrou eficiência ao alcançar a convergência em um número relativamente baixo de iterações quando as condições iniciais estavam razoavelmente próximas do ponto de equilíbrio. Por exemplo, no primeiro teste, o método convergiu em apenas seis iterações, enquanto no terceiro teste, com condições iniciais mais distantes, o número de iterações subiu para 46.

O método também foi capaz de resolver um sistema com múltiplas variáveis e restrições, mostrando sua robustez. Além disso, a precisão dos resultados obtidos demonstra que a aplicação da Jacobiana e das condições de equilíbrio foi feita de maneira eficaz.

Apesar de sua eficácia, o método apresenta limitações práticas. Em particular, a necessidade de uma boa aproximação inicial para todas as variáveis pode ser um desafio em aplicações mais gerais, onde tais aproximações não são conhecidas. Além disso, houve casos em que o método não conseguiu retornar resultados, destacando sua dependência de uma configuração inicial adequada.

Uma característica interessante é a capacidade do método de identificar múltiplos pontos de equilíbrio, dependendo das condições iniciais. Nos testes realizados, ele conse-

---

guiu captar os 3 pontos de equilíbrio existente em nosso modelo, com um número baixo de iterações.

Portanto, as três estratégias analisadas — o método do ponto fixo, a abordagem de resolução de um sistema não linear  $E(\mathbf{p}) = 0$ , e a aplicação das condições de primeira ordem — apresentam características distintas em termos de implementação, eficiência, robustez e limitações.

O método do ponto fixo, embora simples, mostrou-se inadequado para o problema em questão devido à sua incapacidade de lidar com instabilidades numéricas. A abordagem  $E(\mathbf{p}) = 0$  foi eficaz para identificar dois equilíbrios, mas sua dependência das condições iniciais limitou seu alcance. Por fim, a estratégia baseada nas condições de primeira ordem se destacou como a mais eficaz e robusta, sendo capaz de identificar todos os pontos de equilíbrio do modelo com um desempenho consistente em termos de número de iterações. Portanto, em problemas de equilíbrio geral mais complexos, esta última estratégia se apresenta como a escolha mais adequada, apesar de sua maior complexidade de implementação.

No capítulo 3, foram apresentadas as estratégias de soluções para problemas de equilíbrio geral. Além das três utilizadas em nosso trabalho, foram demonstradas outras estratégias que também são indicadas para casos de funções não lineares. Posteriormente, se mostra interessante aplicar estas estratégias para verificar como se comportam em casos específicos, como o utilizado neste trabalho.



## REFERÊNCIAS

SHAPLEY, L.; SHUBIK, M. An example of a trading economy with three competitive equilibria. **Journal of Political Economy**, **85**: 873-875., 1977.

NICHOLSON, W.; SNYDER, C. **Teoria microeconômica: Princípios básicos e aplicações**. [S.l.: s.n.], 2019.

JUDD, K. L. **Numerical methods in economics**. [S.l.]: MIT Press, 2023.

KEHOE, T. J. Computation and multiplicity of equilibria. **Handbook of mathematical economics**, Elsevier, v. 4, p. 2049–2144, 1991.

STARR, R. **General Equilibrium Theory: An Introduction**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica - Tradução da 10ª edição norte-americana**. [S.l.: s.n.], 2016.

LINGE, S.; LANGTANGEN, H. P. **Programming for Computations - Python**. [S.l.]: Springer Cham, 2016.



## CÓDIGO PYTHON

Abaixo está o código implementado para resolver o problema a

### A.1 CÓDIGO PARA A ITERAÇÃO DO PONTO FIXO

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Sat Sep  7 14:36:10 2024
4
5 @author: Paulo
6 """
7
8 " Iteração de ponto fixo"
9
10 import numpy as np
11 import pandas as pd
12
13 def E_x(p_x, p_y):
14     term1 = 10 * (p_y / p_x) * np.log(p_y / (10 * p_x))
15     term2 = -10 * np.log(p_x / (11 * p_y))
16     return term1 + term2
17
18 def E_y(p_x, p_y):
19     term1 = -10 * np.log(p_y / (10 * p_x))
20     term2 = 10 * (p_x / p_y) * np.log(p_x / (11 * p_y))
21     return term1 + term2
22
23 def g_x(p_x):
24     p_y = 1 - p_x
25     numerator = p_x + max(0, E_x(p_x, p_y))
26     denominator = 1 + max(0, E_x(p_x, p_y)) + max(0, E_y(p_x, p_y))
27     return numerator / denominator
28
29 def ponto_fixo_g(p0, TOL, N0):
```

```

30     i = 1
31     resultados = [] # Lista para armazenar os resultados de cada
32         itera o
33     while i <= N0:
34         p_next = g_x(p0) # Pr xima itera o usando g_x
35         p_y = 1 - p_next # Calcula p_y baseado em p_x + p_y = 1
36         resultados.append((i, p_next, p_y)) # Armazena o n mero da
37             itera o, p_x e p_y
38
39         if abs(p_next - p0) < TOL:
40             break
41
42         p0 = p_next # Atualiza p0 para a pr xima itera o
43         i += 1
44
45     return resultados
46
47 # Parmetros iniciais
48 p0 = 0.2 # Valor inicial de p_x
49 TOL = 1e-6 # Toler ncia para o erro
50 N0 = 100 # N mero m ximo de itera es
51
52 # Chamada ao m todo do ponto fixo
53 resultados = ponto_fixo_g(p0, TOL, N0)
54
55 # Cria o de um DataFrame para exibir a tabela de resultados
56 df_resultados = pd.DataFrame(resultados, columns=['Itera o', 'p_x',
57     , 'p_y'])
58
59 # Exibir a tabela
60 print(df_resultados.to_string(index=False))

```

## A.2 $E(p) = 0$ COMO UM SISTEMA NÃO-LINEAR

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Tue Sep 10 20:44:18 2024
4
5 @author: Paulo
6 """

```



```
7 import numpy as np
8 import pandas as pd
9
10 def naive_Newton(E_x, dfdx2, p_x, eps):
11     iteration_counter = 0
12     max_iterations = 1000
13     results = []
14
15     while True:
16         p_y = 1 - p_x
17         f_val = E_x(p_x, p_y)
18
19         # Calcula as demandas em cada itera o
20         x1_demand = demandax1(p_x, p_y)
21         x2_demand = demandax2(p_x, p_y)
22         y1_demand = demanday1(p_x, p_y)
23         y2_demand = demanday2(p_x, p_y)
24
25         # Armazena os resultados da itera o na lista
26         results.append([iteration_counter, p_x, p_y, x1_demand,
27                         x2_demand, y1_demand, y2_demand])
28
29         if abs(f_val) <= eps:
30             break
31
32         p_x = p_x - float(f_val) / dfdpx(p_x)
33         iteration_counter += 1
34         if iteration_counter > max_iterations:
35             print("O m todo n o convergiu.")
36             break
37
38         # Converte a lista de resultados em um DataFrame
39         df = pd.DataFrame(results, columns=['Itera o', 'p_x', 'p_y', '
40             Demanda x1', 'Demanda x2', 'Demanda y1', 'Demanda y2'])
41         return df
42
43 def E_x(p_x, p_y):
44     return demandax1(p_x, p_y) + demandax2(p_x, p_y) - 40
45
46 def dfdx(p_x, p_y):
47     term1_derivative = 10 * ((-p_y / p_x**2) * np.log(p_y / (10 * p_x
48         ))) + (p_y / p_x) * (-1 / p_y + 1 / p_x)
```

```
46     term2_derivative = -10 * (1 / p_x + 1 / p_y)
47     return term1_derivative + term2_derivative
48
49 def dfdp_x(p_x):
50     r = p_x / (1 - p_x)
51     termA = -10*np.log(10) - 10*np.log(r) -10 -10.0/r
52     return termA / (1-p_x)**2
53
54
55 def demand_x1(p_x, p_y):
56     return 40 + 10 * (p_y / p_x) * np.log(p_y / (10 * p_x))
57
58 def demand_x2(p_x, p_y):
59     return -10 * np.log(p_x / (11 * p_y))
60
61 def demand_y1(p_x, p_y):
62     return -10 * np.log(p_y / (10 * p_x))
63
64 def demand_y2(p_x, p_y):
65     return 50 + 10 * (p_x / p_y) * np.log(p_x / (11 * p_y))
66
67 # Inicializa valores
68 p_x = 0.4
69 eps = 0.000001
70
71 # Executa o m todo de Newton e gera a tabela de resultados
72 df_results = naive_Newton(E_x, dfdx, p_x, eps)
73 print(df_results[-1:])
74
75
76 p_x = 0.2
77 eps = 0.000001
78
79 # Executa o m todo de Newton e gera a tabela de resultados
80 df_results = naive_Newton(E_x, dfdx, p_x, eps)
81 print(df_results[-1:])
82
83 p_x = 0.9
84 eps = 0.000001
85
86 # Executa o m todo de Newton e gera a tabela de resultados
87 df_results = naive_Newton(E_x, dfdx, p_x, eps)
```

```
88 print(df_results[-1:])
```

### A.3 CÓDIGO PARA CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Sun Sep  8 09:15:03 2024
4
5 @author: Paulo
6 """
7 import numpy as np
8
9 # Definindo o sistema de equações F
10 def F(vars):
11     # variáveis
12     p_x, p_y, x1, x2, y1, y2, lambda1, lambda2 = vars
13
14     # Equações de equilíbrio
15     eq1 = 1 - lambda1 * p_x
16     eq2 = 10 * np.exp(-y1 / 10) - lambda1 * p_y
17     eq3 = 11 * np.exp(-x2 / 10) - lambda2 * p_x
18     eq4 = 1 - lambda2 * p_y
19     eq5 = p_x * x1 - 40 * p_x + p_y * y1
20     eq6 = p_x * x2 - 50 * p_y + p_y * y2
21     eq7 = x1 + x2 - 40
22     eq8 = p_x + p_y - 1
23
24     return np.array([eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8])
25
26 # Definindo a Jacobiana J
27 def J(vars):
28     p_x, p_y, x1, x2, y1, y2, lambda1, lambda2 = vars
29
30     # Matriz Jacobiana 8x8
31     J_matrix = np.zeros((8, 8))
32
33     # Derivadas parciais das equações
34     J_matrix[0, 0] = -lambda1 # Derivada eq1 em relação a p_x
35     J_matrix[0, 6] = -p_x     # Derivada eq1 em relação a lambda1
36
37     J_matrix[1, 1] = -lambda1 # Derivada eq2 em relação a p_y
```

```

38     J_matrix[1, 4] = -np.exp(-y1 / 10) # Derivada eq2 em rela o a
        y1
39     J_matrix[1, 6] = -p_y           # Derivada eq2 em rela o a lambda1
40
41     J_matrix[2, 0] = -lambda2 # Derivada eq3 em rela o a p_x
42     J_matrix[2, 3] = -1.1 * np.exp(-x2 / 10) # Derivada eq3 em
        rela o a x2
43     J_matrix[2, 7] = -p_x           # Derivada eq3 em rela o a lambda2
44
45     J_matrix[3, 1] = -lambda2 # Derivada eq4 em rela o a p_y
46     J_matrix[3, 7] = -p_y           # Derivada eq4 em rela o a lambda2
47
48     J_matrix[4, 0] = x1 - 40 # Derivada eq5 em rela o a p_x
49     J_matrix[4, 1] = y1         # Derivada eq5 em rela o a p_y
50     J_matrix[4, 2] = p_x         # Derivada eq5 em rela o a x1
51     J_matrix[4, 4] = p_y         # Derivada eq5 em rela o a y1
52
53     J_matrix[5, 0] = x2         # Derivada eq6 em rela o a p_x
54     J_matrix[5, 1] = y2 - 50 # Derivada eq6 em rela o a p_y
55     J_matrix[5, 3] = p_x         # Derivada eq6 em rela o a x2
56     J_matrix[5, 5] = p_y         # Derivada eq6 em rela o a y2
57
58     J_matrix[6, 2] = 1           # Derivada eq7 em rela o a x1
59     J_matrix[6, 3] = 1           # Derivada eq7 em rela o a x2
60
61     J_matrix[7, 0] = 1           # Derivada eq8 em rela o a p_x
62     J_matrix[7, 1] = 1           # Derivada eq8 em rela o a p_y
63
64     return J_matrix
65
66
67 # Fun o Newton j definida anteriormente
68 def Newton_system(F, J, x, eps):
69     F_value = F(x)
70     F_norm = np.linalg.norm(F_value, ord=2) # l2 norm of vector
71     iteration_counter = 0
72     while abs(F_norm) > eps and iteration_counter < 100:
73         delta = np.linalg.solve(J(x), -F_value)
74         x = x + delta
75         F_value = F(x)
76         F_norm = np.linalg.norm(F_value, ord=2)
77         iteration_counter += 1

```

```
78
79     # Here, either a solution is found, or too many iterations
80     if abs(F_norm) > eps:
81         iteration_counter = -1
82     return x, iteration_counter
83
84
85 #p_x, p_y, x1, x2, y1, y2, lambda1, lambda2
86 x0 = np.array([0.8, 0.2, 10, 30, 25, 25, 1, 3])
87
88 # Tolerancia
89 tol = 1e-6
90
91 # Aplicar o m todo de Newton ao sistema
92 x, n = Newton_system(F, J, x=x0, eps=tol)
93
94 # Imprimir os resultados
95 print(f"Iteracoes: {n}")
96 print(f"Solucao: {x}")
97
98
99 #p_x, p_y, x1, x2, y1, y2, lambda1, lambda2
100 x0 = np.array([0.8, 0.2, 30, 10, 10, 40, -1, -4])
101
102 # Tolerancia
103 tol = 1e-6
104
105 # Aplicar o m todo de Newton ao sistema
106 x, n = Newton_system(F, J, x=x0, eps=tol)
107
108 # Imprimir os resultados
109 print(f"Iteracoes: {n}")
110 print(f"Solucao: {x}")
111
112
113 ## 3
114 x0 = np.array([0.9, 0.1, 20, 20, 25, 25, -1, 2])
115
116 # Tolerancia
117 tol = 1e-6
118
119 # Aplicar o m todo de Newton ao sistema
```

```
120 x, n = Newton_system(F, J, x=x0, eps=tol)
121
122 # Imprimir os resultados
123 print(f"Iterações: {n}")
124 print(f"Solução: {x}")
```