



Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas  
CECAU - Colegiado do Curso de  
Engenharia de Controle e Automação



Alan José dos Santos

**PROJETO E SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE ANALÓGICOS  
UTILIZANDO AMPLIFICADORES OPERACIONAIS VIA MODELAGEM CAIXA-  
BRANCA**

Monografia de Graduação

Ouro Preto, 2024

Alan José dos Santos

**PROJETO E SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE ANALÓGICOS  
UTILIZANDO AMPLIFICADORES OPERACIONAIS VIA MODELAGEM CAIXA-  
BRANCA**

Trabalho apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Universidade Federal de Ouro Preto

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Barros Monteiro  
Co-orientador: Prof. Dr. Danny Augusto Vieira Tonidan

Ouro Preto, 2024



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CONTROLE E  
AUTOMACAO



**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Alan José dos Santos**

PROJETO E SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE ANALÓGICOS

UTILIZANDO AMPLIFICADORES OPERACIONAIS VIA MODELAGEM CAIXA-BRANCA

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação

Aprovado em 10 de dezembro de 2024.

Integrantes da banca:

[Doutor] - Paulo Marcos de Barros Monteiro - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Doutor] - Danny Augusto Vieira Tonidandel - Coorientador (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Doutora] - Adrielle de Carvalho Santana - (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Mestre] - Regiane de Souza e Silva Ramalho - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Danny Augusto Vieira Tonidandel, coorientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 18/12/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Danny Augusto Vieira Tonidandel, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 18/12/2024, às 09:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0826009** e o código CRC **26412E29**.

**Referência:** Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.015224/2024-99

SEI nº 0826009

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163  
Telefone: 3135591533 - [www.ufop.br](http://www.ufop.br)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Débora Cristina, e à minha irmã, Fabiane Cristina, as quais sempre foram e sempre vão ser meu alicerce para todas as escolhas e caminhos que tomo.

Agradeço à minha tia Mônica Efigênia e ao meu tio Herbert José, que sempre foram os meus tios que me acolheram em todos os momentos e se fizeram presentes em minha vida. Junto a eles as minhas primas Talita Modesto e Kareyn Francys.

Agradeço às minhas madrinhas, Angela Ribeiro e Rosana Morais, por todo o amor, carinho e apoio que me deram desde que eu nasci até hoje.

Agradeço à minha mãe core, Araceli de Oliveira, por todo apoio e por todas as orientações que me deu no decorrer desses anos.

Não posso deixar de agradecer as pessoas especiais da minha vida, fora minha família, que são, em especial: Jussara Wanusa, Stefany Coimbra, Carol Pacceli, Carol Marcussi, Carol Umbelino (são várias Caróis), Lucas Duarte, Júlia Maria, Waldeci Luciano (Lete), João Paulo, Deivson Pinheiro, Samantha Rubim, (Luís) Gustavo Miranda, Bianca Priscila e Luana Costa, por todos os momentos de alegria, diversão e pelo amor, fraternidade e suporte nesses anos.

Agradeço aos meus professores que vieram antes da universidade, que são grandes responsáveis por eu estar aqui hoje, em especial, Adair José e Rosa, da Escola Estadual Padre Afonso de Lemos, José Eduardo, Bráulio Guimarães, Rodrigo Toffolo e Ricardo Sérgio, do IFMG, e Rosemary Mendes, Luis Kalunguee, Robison Rodrigues e Patrícia Santos do Oratório Dom Bosco.

Agradeço aos professores da UFOP, em especial aos que demonstraram amor pelo ensino e abrilhantaram meu caminho no curso, que são: Adrea Gomes, Graziela Dutra, Bruna Postacchini, Zimar Rejane, Melissa Fabiola, Maria Eugenia, Paulo Monteiro, Adrielle Santana, Eduardo Luz, Maria Aparecida Pinto, Gustavo Peixoto, Jadson Castro, Danny Tonidandel, Regiane Ramalho, Felipe Comarela, Rita Pedrosa, Marina Machado, Raquel Castro, Isabela Morais e Irce Guimarães.

Agradeço à Sociedade Musical Senhor Bom Jesus de Matosinhos, Banda Euterpe Cachoeirense, Sociedade Musical Santa Cecília de Sabará, Escola de Música Padre Simões,

Coral Dom Oscar de Oliveira e Coral Cristo Rei por serem minhas escapatórias do cotidiano maciço da universidade, me trazendo aconchego, paz e fraternidade nos momentos difíceis, pesados e conturbados.

Os maiores cientistas também são artistas.

*Albert Einstein*

## RESUMO

A assimilação do conteúdo em disciplinas de Teoria de Controle pode ser difícil para muitos(as) estudantes. Este trabalho objetiva proporcionar um método para uma melhor assimilação dos conteúdos teóricos em controle contínuo de processos. Utilizar-se-á de eletrônica analógica e, mais especificamente, de amplificadores operacionais para simulação das funções de transferência do controlador e da planta. Como planta a ser controlada, considerar-se-á um Levitador Pneumático e será feita a modelagem desta planta em caixa-branca para, então, ser projetado um controlador via Método do Lugar Geométrico das Raízes. Para o projeto do controlador, são especificadas as necessidades do sistema quanto ao tempo de acomodação e sobressinal (*overshoot*), tendo, ao final, uma resposta satisfatória como resultado. Os parâmetros medidos com o sistema controlado em funcionamento foram próximos dos valores requeridos. Tendo os resultados satisfatórios, busca-se neste trabalho o adquirento do conhecimento acerca da matemática aplicada à engenharia de controle e da influência dos parâmetros dos controladores PID na resposta das plantas. Busca-se, também, que este trabalho possa vir a ajudar futuros discentes de Engenharia de Controle e Automação e Engenharia Elétrica a compreender melhor o conteúdo abordado nas disciplinas dessa área. Assim, espera-se que este trabalho contribua para a compreensão dos conteúdos venha a aflorar paixões no estudo acerca de controle de sistemas.

Palavras-chave: Controle Analógico. Automação. Amplificador Operacional. Teoria de Controle.

## ABSTRACT

The assimilation of the content in Control Theory courses can be difficult for many students. This work aims to provide a method for better assimilation of the theoretical content in continuous process control. Analog electronics and, more specifically, operational amplifiers will be used to simulate the transfer functions of the controller and the plant. A Pneumatic Levitator will be considered as the plant to be controlled, and this plant will be modeled in a white box, and then a controller will be designed using the Root Locus Method. For the controller design, the system needs are specified regarding settling time and overshoot, resulting in a satisfactory response. The parameters measured with the controlled system in operation were close to the required values. With satisfactory results, this work seeks to acquire knowledge about mathematics applied to control engineering and the influence of PID controller parameters on the response of plants. It is also hoped that this work may help future students of Control and Automation Engineering and Electrical Engineering to better understand the content covered in the disciplines of this area. Therefore, it is expected that this work will contribute to the understanding of the content and will awaken passions in the study of systems control.

Keywords: Analogical Control. Automation. Operational Amplifier. Control Theory.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Sistema de Controle em Malha Aberta .....	18
Figura 2 Sistema de Controle em Malha Fechada com Realimentação Negativa .....	18
Figura 3 Símbolo esquemático de um amplificador operacional .....	20
Figura 4 Amplificador Inversor .....	20
Figura 5 Amplificador não-inversor .....	21
Figura 6 Amplificador Somador .....	22
Figura 7 Amplificador Subtrator .....	23
Figura 8 Seguidor de Tensão .....	25
Figura 9 Amplificador Integrador .....	25
Figura 10 Amplificador Diferenciador .....	26
Figura 11 Controlador PID com Amplificadores Operacionais .....	28
Figura 12 Circuito RLC .....	29
Figura 13 Diagrama de Blocos para o Circuito RLC .....	30
Figura 14 Representação de um polo no domínio de Laplace .....	33
Figura 15 Relação do Coeficiente de Amortecimento com a Resposta de um Sistema de Segunda Ordem .....	35
Figura 16 Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle com Realimentação .....	37
Figura 17 Polos e Zeros do Sistema em Malha Aberta .....	39
Figura 18 Determinação dos Ângulos dos Zeros e Polos do Sistema .....	40
Figura 19 Gráfico do Lugar das Raízes do Sistema .....	41
Figura 20 Gráfico do Lugar das Raízes do Sistema com a Adição de um Polo .....	43
Figura 21 Estrutura de um Levitador Pneumático .....	45
Figura 22 Lugar das Raízes da Planta com o Controlador PD .....	51
Figura 23 Resposta a um degrau unitário dos sistemas com controlador (vermelho) e sem controlador (azul) .....	52

Figura 24 Resposta a um degrau unitário de dois ganhos que produzem o mesmo coeficiente de amortecimento .....	53
Figura 25 Amplificador Adicionador de Polo .....	54
Figura 26 Circuito Simulador do Sistema do Levitador Pneumático .....	56
Figura 27 Resposta da Planta em Malha Fechada sem o Controlador .....	56
Figura 28 Circuito do Controlador da Planta do Levitador Pneumático .....	57
Figura 29 Circuito em Malha Fechada do Sistema do Levitador Pneumático com Controlado .....	58
Figura 30 Sinal de Saída da Planta Controlada com o <i>overshoot</i> destacado .....	59
Figura 31 Sinal de Saída da Planta Controlada com o tempo de acomodação destacado .....	59

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Parâmetros do Levitador .....	48
--	----

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\zeta$  coeficiente de amortecimento

$\theta$  ângulo

$K_p$  ganho proporcional

$K_i$  ganho integral

$K_d$  ganho derivativo

$\omega_n$  frequência natural

$\omega_d$  frequência natural amortecida

$t_p$  instante de pico

$\tau$  constante de tempo

$\tau_r$  tempo de subida

$\tau_s$  tempo de acomodação

$M_p(\%)$  *overshoot*

$\forall$  para todo

$\in$  pertencente

$\mathbb{R}$  conjunto dos números reais

$\mathbb{Z}$  conjunto dos números inteiros

$\rho$  densidade

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	15
1.1 Objetivos .....	16
1.2 Justificativas e Relevância .....	16
2 REVISÃO DE LITERATURA .....	18
2.1 Sistemas de Controle .....	18
2.2 Amplificadores Operacionais .....	20
2.3 Controladores Proporcionais, Integrativos e Derivativos .....	27
2.4 Modelagem Matemática .....	28
2.5 Sistemas de Primeira Ordem .....	31
2.6 Sistemas de Segunda Ordem .....	33
2.7 Sistemas de Controle com Realimentação .....	36
2.8 Método do Lugar das Raízes .....	38
3 DESENVOLVIMENTO .....	45
3.1 Levitador Pneumático .....	45
3.2 Projeto do Controlador via Lugar Geométrico das Raízes .....	49
3.3 Projeto do Circuito com Amplificadores .....	53
4 RESULTADOS .....	59
5 CONCLUSÃO .....	61

## 1 INTRODUÇÃO

Dentre os tópicos abordados no curso de Engenharia de Controle e Automação, tem-se como primordial, para os egressos, um certo conhecimento na área de Controle de Sistemas. Para Dorf (2018), “um sistema de controle é uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistema que proporcionará uma resposta desejada ao sistema”. Com esta ideia, o engenheiro de controle pode construir, por exemplo, um sistema capaz de controlar a velocidade de veículos autônomos, a orientação de um foguete durante seu pouso, a temperatura de um processo produtivo etc., garantindo que o sistema físico responda da maneira desejada.

Para Ogata (2003), “é desejável que a maioria dos engenheiros e cientistas esteja familiarizada com a teoria e prática do controle automático”. Porém, pode-se haver certo descaso com as disciplinas de controle, por parte dos discentes, por ter uma ampla utilização de noções de Física, Cálculo e Equações Diferenciais Ordinárias. Por muitas das vezes, os alunos não entendem os conteúdos por defasagem no aprendizado de Física e Matemática, não se dando, então, esse descaso, por falta de admiração e, sim, por falta de compreensão. Vê-se, por esse motivo, a preferência dos discentes em projetar controladores por métodos de sintonia tabelados ou pelo que se chama de “tentativa e erro”, pois são os caminhos mais fáceis e práticos. Porém, a utilização destes métodos, ao invés de métodos matemáticos, nem sempre resultará na solução ótima para o problema.

Segundo Firmino e Siqueira (2017),

“(…) observa-se que as disciplinas do ciclo básico da área de matemática (...) não tem garantido o ‘conhecimento’ e a importância necessária por parte dos estudantes. Embora, de um modo geral, estes mesmos estudantes, tenham ou possam ter obtido, notas relativamente altas nas referidas disciplinas”

E segundo Tonidandel (2011), “os estudantes, ao iniciarem o curso, são, literalmente, sobrecarregados – e, geralmente, desmotivados – por uma quantidade imensa de (...) teorias essenciais para formação do engenheiro”.

Vista a desmotivação dos estudantes de Engenharia de Controle e Automação no aprofundamento em Controle de Sistemas, no âmbito matemático, julga-se necessário um trabalho que vise mitigar esse problema.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem, como objetivo, o estudo acerca de projetos de controladores P (proporcional), PI (proporcional e integrativo) e PID (proporcional, integrativo e derivativo), por meio de métodos matemáticos.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Tem-se, como objetivo do trabalho, em específico, o estudo acerca dos controladores em âmbito analógico e contínuo, utilizando-se de amplificadores operacionais para construção e simulação da planta e do controlador.

## 1.2 Justificativas e Relevância

A computação analógica e os dispositivos analógicos não superaram os computadores digitais e isso é demonstrado pela recente mudança de televisores e telefonia, por exemplo, do analógico ao digital. Porém, a tecnologia analógica mostra-se capaz de emergir novamente, trazendo soluções para diversos problemas do mundo digital, como segurança, inteligência e eficiência energética.

No lançamento de seu livro “O Verdadeiro Criador de Tudo”, o médico e neurocientista Miguel Nicolelis diz que “os sistemas digitais não vão superar o cérebro humano (...) os sistemas biológicos são analógicos e esses sistemas têm uma complexidade muito maior do que os sistemas digitais”. Segundo informações do Site Inovação Tecnológica (2019),

“(...) além de haver sinais de que a computação digital atingiu ou está muito próxima do seu potencial máximo, chips analógicos gastam 1000 vezes menos energia.”

Outro fato interessante, apontado pelo mesmo *site*, no artigo “Hardware protônico faz computação analógica e acelera IA”, diz que

“A computação analógica é mais rápida e mais energeticamente eficiente do que a computação digital por dois motivos principais: Os cálculos são feitos na memória, dispensando o trânsito de dados entre memória e processador; e os processadores analógicos realizam operações em paralelo - se o tamanho da matriz de componentes se expande, um processador analógico não precisa de mais tempo para concluir novas operações porque toda a computação ocorre simultaneamente.”

Retornando, por fim, ao assunto principal do trabalho, que é a utilização de amplificadores operacionais na implementação de sistemas de controle, pode-se dizer que os amplificadores não são os dispositivos utilizados nos sistemas desenvolvidos no avanço da computação analógica na atualidade. Nota-se, com pouca pesquisa, que estão sendo desenvolvidos outros tipos de dispositivos que funcionam de maneiras distintas e até mesmo com ausência de eletricidade. Porém, o presente trabalho está no âmbito de um pensamento analógico, que pode ser facilmente transposto a dispositivos analógicos mais modernos e eficientes que surgirem.

Pode-se pensar, pelo conteúdo exposto até aqui, que esta monografia apresenta algo novo. Porém, salienta-se que isto seria uma conclusão equivocada. Os sistemas de controle sempre foram demonstrados a partir de eletrônica analógica há bastante tempo.

### **1.3 Metodologia**

O estudo contemplará a área de controle contínuo e, para isso, utilizar-se-á de amplificadores operacionais para construir o controlador e simular o comportamento das plantas.

Como supracitado, será utilizado no trabalho, para implementação das plantas e dos controladores, os amplificadores operacionais. A escolha se dá pelo fato de que, utilizando-se deste dispositivo eletrônico, se construirá um controlador analógico e contínuo, diferentemente de um controlador digital e discreto, como seria o caso se utilizasse de um PLC ou um microcontrolador.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Sistemas de Controle

“Um sistema de controle consiste em componentes interconectados de modo a atingir um determinado propósito.” (DORF, 2018). Nise (2023), acrescenta que, curiosamente,

“Não somos os únicos criadores de sistemas controlados automaticamente; mas estes sistemas também existem na natureza. No interior de nossos corpos existem inúmeros sistemas de controle, como o pâncreas, que regula nosso nível de açúcar no sangue. Em situações de estresse agudo, nossa adrenalina aumenta junto com a frequência cardíaca, fazendo com que mais oxigênio seja levado às nossas células.”

Assim como o que se chama de Inteligência Artificial busca reproduzir a inteligência humana cognitiva em um processador de computador, sistemas de controle buscam reproduzir uma “inteligência biológica” que possuímos. Quiçá, também, tenta reproduzir nossa inteligência cognitiva, como se nosso cérebro fosse o controlador do sistema.

Dos tipos mais simples de sistemas de controle, pode-se citar os controles em malha aberta e em malha fechada, que têm as diagramações ilustradas nas Figuras 1 e 2:

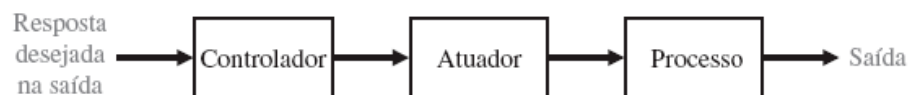


Figura 1 Sistema de Controle em Malha Aberta  
Fonte: (DORF, 2018)

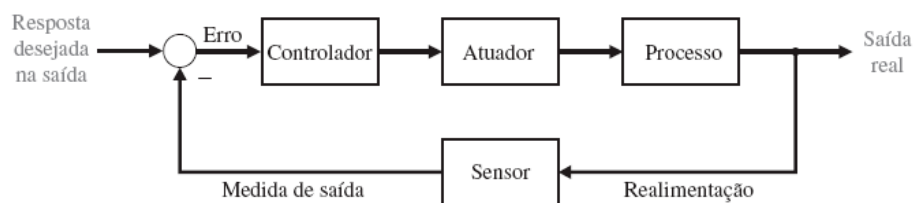


Figura 2 Sistema de Controle em Malha Fechada com Realimentação Negativa  
Fonte: (DORF, 2018)

Para todo sistema, seja em malha aberta ou fechada, tem-se um elemento denominado *atuador*. Este elemento faz com que seja possível mudar o valor da variável controlada direta

ou indiretamente. A resistência elétrica do chuveiro, por exemplo, é um atuador, pois ela dissipa calor, fazendo com que a temperatura da água varie.

No sistema em malha aberta não há um elemento sensor para que o sistema tenha noção se o objetivo foi atingido. Uma analogia feita pelo Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr. da UFRGS em Da Silva Jr. (2003) é a seguinte:

“Imagine um automóvel sem velocímetro. Deseja-se manter a velocidade constante em um determinado valor: 80 km/h por exemplo. O motorista estima então com qual pressão ele deverá pisar no acelerador e mantém o acelerador com esta pressão. Dependendo da experiência do motorista a velocidade final se manterá próxima de 80 km/h, mas somente com muita sorte ele conseguirá manter a velocidade em 80 km/h. Por outro lado, se ele precisar subir (descer) uma lomba, a velocidade irá diminuir (aumentar).”

Mesmo tal analogia pode ser falha em outros pontos de vista, pois pode-se dizer que, a depender do quanto este motorista tem de experiência, o recurso visual a partir de seus olhos e a forma que sente o vento entrar pela janela podem, de certa forma, servir como uma medição indireta da velocidade. Isso faria com que se pudesse caracterizar este sistema como um sistema de malha fechada.

Outro exemplo, dado por Nise (2023) diz que:

“A variável controlada (saída) de uma torradeira é a cor da torrada. O aparelho é projetado com a hipótese de que quanto maior o tempo de exposição da torrada ao calor, mais escura ela ficará. A torradeira não mede a cor da torrada; ela não efetua correções pelo fato de a torrada ser de pão de centeio, pão branco ou pão *sourdough*, nem efetua correções pelo fato de as torradas terem espessuras diferentes”

“A característica distintiva de um sistema em malha aberta é que ele não pode realizar compensações para quaisquer perturbações que sejam adicionadas ao sinal de acionamento do controlador” (NISE, 2023). Tais perturbações não são percebidas pelo fato de não haver um elemento sensor.

Já o sistema em malha fechada com realimentação negativa, possui um elemento sensor, que percebe perturbações na saída do sistema. Dado o valor requerido para saída, denominado *setpoint*, e o valor medido na saída, calcula-se o erro, dado pela diferença desses valores. Este erro é a variável que se quer anular, fazendo com que o valor de saída atinja o valor do *setpoint*. Um exemplo de sistema de controle em malha fechada simples é o controle de vazão em um duto: Dada a resposta de um manômetro, pode-se inferir a vazão do duto para, então, se calcular o erro em relação ao *setpoint* definido. A partir deste erro, o controlador envia um sinal para

uma válvula de controle, que atuará na vazão, aumentando ou diminuindo-a. Isso faz com que a vazão se aproxime do valor de *setpoint* definido para o processo.

Como observação, pode-se dizer que as perturbações medidas pelo sensor nem sempre são diretas, ou seja, pode-se medir outras variáveis para inferir a que desejamos. Para se determinar a temperatura de um gás dentro de um reservatório de volume constante, por exemplo, pode-se medir a pressão e calcular a temperatura a partir da Equação Geral dos Gases. Este processo é denominado como medição indireta.

## 2.2 Amplificadores Operacionais

Segundo Malvino e Bates (2016), “o amplificador operacional é um amplificador que realiza uma operação matemática”. Para Boylestad e Nashelsky (2013), “um amplificador operacional (...) é um amplificador diferencial de ganho muito alto com impedância de entrada muito alta e baixa impedância de saída”. Por muitas das vezes, aproxima-se um amplificador operacional real a um amplificador operacional ideal. Com isso, considera-se que o componente tem impedância de entrada infinita, impedância de saída nula e um ganho de tensão infinito. Na Figura 3 segue a representação de um amplificador operacional:

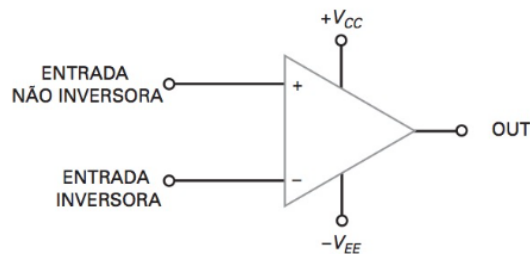


Figura 3 Símbolo esquemático de um amplificador operacional  
Fonte: (MALVINO e BATES, 2016)

### 2.2.1 Amplificador Inversor

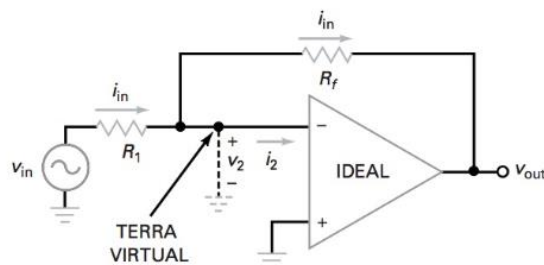


Figura 4 Amplificador Inversor  
Fonte: (MALVINO e BATES, 2016)

Neste circuito está demonstrado o Terra Virtual. Dado um amplificador ideal, em que a impedância de entrada é infinita, pode-se dizer que as correntes nas suas entradas são nulas. Como a tensão na entrada não-inversora é nula, por conseguinte, produzindo a mesma corrente, a tensão na entrada inversora ( $v_2$ ) também é nula.

Para se entender seu funcionamento tem-se que as correntes em  $R_f$  e  $R_1$  são dadas por:

$$I_{R_1} = \frac{V_{in}}{R_1}$$

$$I_{R_f} = -\frac{V_{out}}{R_f}$$

Como o potencial em  $v_2$  é nulo, temos que:

$$I_{R_1} - I_{R_f} = 0$$

$$\frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_{out}}{R_f} = 0$$

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_1} V_{in} \quad (2.1)$$

Assim, o sinal de saída desse amplificador é o sinal de entrada com um ganho dado por  $R_f/R_1$  e defasado de  $180^\circ$ .

### 2.2.2 Amplificador Não-Inversor

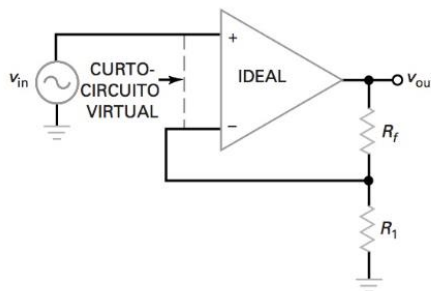


Figura 5 Amplificador não-inversor  
Fonte: (MALVINO e BATES, 2016)

Neste circuito está demonstrado o Curto-circuito Virtual. Dado um amplificador ideal, em que a impedância de entrada é infinita, pode-se dizer que as correntes nas duas entradas são

iguais e nulas. Pelo mesmo motivo do Terra Virtual, como as duas entradas produzem a mesma corrente, as duas entradas terão a mesma tensão. Neste caso, a tensão da entrada não-inversora ( $v_{in}$ ) será replicada na entrada inversora.

Para se entender seu funcionamento tem-se que as correntes em  $R_f$  e  $R_1$  são dadas por:

$$I_{R_f} = \frac{V_{out} - V_{in}}{R_f}$$

$$I_{R_1} = \frac{V_{in}}{R_1}$$

Como a corrente no nó é nula, tem-se que:

$$I_{R_f} - I_{R_1} = 0$$

$$\frac{V_{out} - V_{in}}{R_f} - \frac{V_{in}}{R_1} = 0$$

$$\frac{V_{out}}{R_f} = v_{in} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} \right)$$

$$V_{out} = v_{in} \left( 1 + \frac{R_f}{R_1} \right) \quad (2.2)$$

Assim, o sinal de saída desse amplificador é o sinal de entrada com um ganho dado por  $\left( 1 + \frac{R_f}{R_1} \right)$ .

### 2.2.3 Amplificador Somador

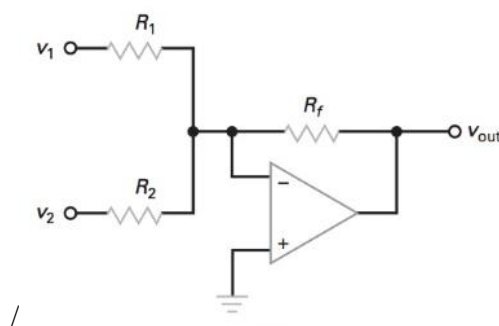


Figura 6 Amplificador Somador  
Fonte: (MALVINO e BATES, 2016)

A sua diferença para o Amplificador Inversor é que a corrente de entrada é composta por duas ou mais parcelas, sendo, no caso da Figura 6:

$$i_{in} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}$$

Sendo  $I_{R_1} - I_{R_f} = 0$ , temos que:

$$\frac{V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_{out}}{R_f} = 0$$

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_1}V_1 - \frac{R_f}{R_2}V_2$$

Logo, para um número indefinido de entradas, temos:

$$V_{out} = -\sum_{i=1}^n \frac{R_f}{R_i} V_i \quad (2.3)$$

Assim, o sinal de saída desse amplificador é a soma dos sinais de entrada com um ganho dado por  $R_f/R_i$  e defasado de  $180^\circ$ .

#### 2.2.4 Amplificador Subtrator

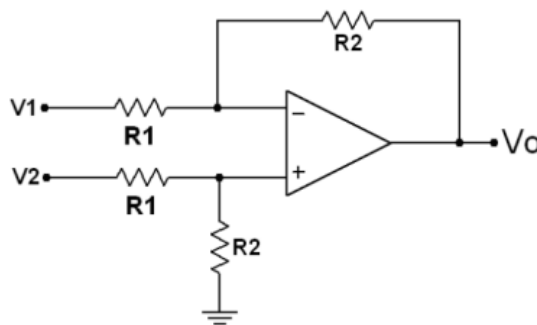


Figura 7 Amplificador Subtrator  
Fonte: (NEVES, 2014)

Neste circuito, tem-se que a tensão nos nós das entradas são iguais. Porém, não se sabe qual é este potencial e, então, se chamará de  $V_i$ . Tem-se as correntes dadas por:

$$I_{R_{1-}} = \frac{V_1 - V_i}{R_1}$$

$$I_{R_{2-}} = \frac{V_i - V_{out}}{R_2}$$

$$I_{R_{1+}} = \frac{V_2 - V_i}{R_1}$$

$$I_{R_{2+}} = \frac{V_i}{R_2}$$

Sabendo que  $I_{R_{1+}} - I_{R_{2+}} = 0$ , tem-se:

$$\frac{V_2 - V_i}{R_1} - \frac{V_i}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_i}{R_1} + \frac{V_i}{R_2} = \frac{V_2}{R_1}$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 * R_2} V_i = \frac{V_2}{R_1} \therefore V_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_2 \quad (2.4)$$

Sabendo que  $I_{R_{1-}} - I_{R_{2-}} = 0$ , tem-se:

$$\frac{V_1 - V_i}{R_1} - \frac{V_i - V_{out}}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_{out}}{R_2} - \frac{V_i}{R_1} - \frac{V_i}{R_2} = 0 \quad (2.5)$$

Substituindo a Equação 2.4 em 2.5:

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_{out}}{R_2} - \frac{V_2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} - \frac{V_2}{R_1 + R_2} = 0$$

$$\frac{V_{out}}{R_2} = \frac{V_2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} + \frac{V_2 R_1}{R_1(R_1 + R_2)} - \frac{V_1(R_1 + R_2)}{R_1(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{V_{out}}{R_2} = \frac{V_2(R_2 + R_1) - V_1(R_1 + R_2)}{R_1(R_1 + R_2)}$$

$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1} (V_2 - V_1) \quad (2.6)$$

Assim, o sinal de saída desse amplificador é a diferença dos sinais de entrada com um ganho dado por  $R_2/R_1$ .

### 2.2.5 Amplificador Seguidor de Tensão (*Buffer*)

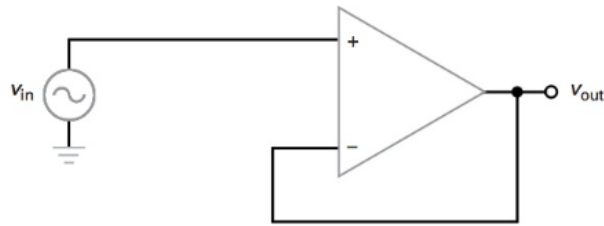


Figura 8 Seguidor de Tensão

Fonte: (MALVINO e BATES, 2016)

Este circuito replica a tensão de entrada na saída, apenas. O ganho desse circuito é unitário, sendo assim,  $v_{out} = v_{in}$ . Este circuito é bom para se fazer com que a carga acoplada à fonte veja uma fonte de impedância baixa, já que se considerou que a impedância de saída do amplificador é nula. Logo, ele anula o efeito da resistência da fonte (nota-se que se sabe que fontes reais têm uma resistência, fazendo com que o valor de tensão entregue não seja, exatamente, o nominal).

Outro caso para ser usado seria para replicar a tensão de um circuito em outro, porém, desacoplando os dois circuitos. Isso faz com que um circuito não interaja no outro. Um circuito gerador de sinais, por exemplo, pode ter a onda gerada modificada quando se acopla uma carga. Uma maneira de acoplar a carga, anulando esse efeito, seria colocando um seguidor de tensão entre os dois circuitos.

### 2.2.6 Amplificador Integrador

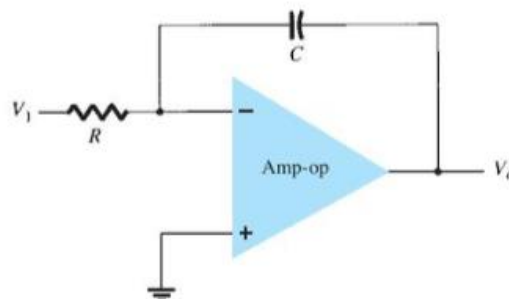


Figura 9 Amplificador Integrador

Fonte: (BOYLESTAD e NASHELSKY, 2013)



Tem-se as correntes dadas por:

$$I_R = \frac{v_i}{R}$$

$$I_C = -C \frac{dv_{out}}{dt}$$

Sabe-se que a corrente no nó é nula, logo:

$$I_R - I_C = 0$$

$$\frac{v_i}{R} + C \frac{dv_{out}}{dt} = 0$$

$$\frac{dv_{out}}{dt} = -\frac{v_i}{RC} \therefore v_{out} = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i dt \quad (2.7)$$

Assim, o sinal de saída desse amplificador é a integral sinal de entrada com um ganho dado por  $1/RC$  e defasado de  $180^\circ$ .

### 2.2.7 Amplificador Diferenciador

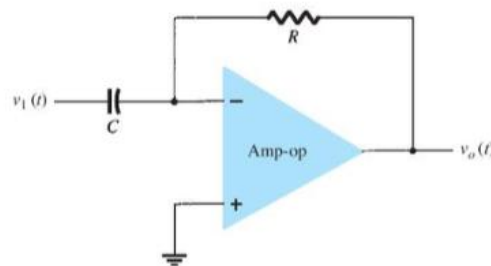


Figura 10 Amplificador Diferenciador  
Fonte: (BOYLESTAD e NASHELSKY, 2013)

Tem-se as correntes dadas por:

$$I_R = -\frac{v_{out}}{R}$$

$$I_C = C \frac{dv_1}{dt}$$

Sabe-se que a corrente no nó é nula, logo:

$$\begin{aligned}
 I_C - I_R &= 0 \\
 C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_{out}}{R} &= 0 \\
 v_{out} &= -RC \frac{dv_1}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, o sinal de saída desse amplificador é a derivada do sinal de entrada com um ganho dado por  $RC$  e defasado de  $180^\circ$ .

### 2.3 Controladores Proporcionais, Integrativos e Derivativos (PID)

Os controladores abordados neste trabalho podem desempenhar três ações de controle: uma ação proporcional ao erro; uma ação proporcional à integral do sinal de erro; uma ação proporcional à derivada do sinal de erro. Estas ações serão efetuadas a partir de um sinal de erro da variável controlada em relação ao *setpoint* definido para ela. O controlador PID, que efetua as três ações simultaneamente, é descrito pela seguinte equação:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \tag{2.9}$$

Sendo:

$u(t)$  → Sinal de saída do controlador, que gerará uma ação na planta;

$e(t)$  → Erro (entrada do controlador);

$T_i$  → Tempo de Integração;

$T_d$  → Tempo de Derivação.

A Figura 11 ilustra um exemplo de implementação de um controlador PID, utilizando-se de amplificadores operacionais, sendo, este tipo de implementação, o foco deste trabalho:

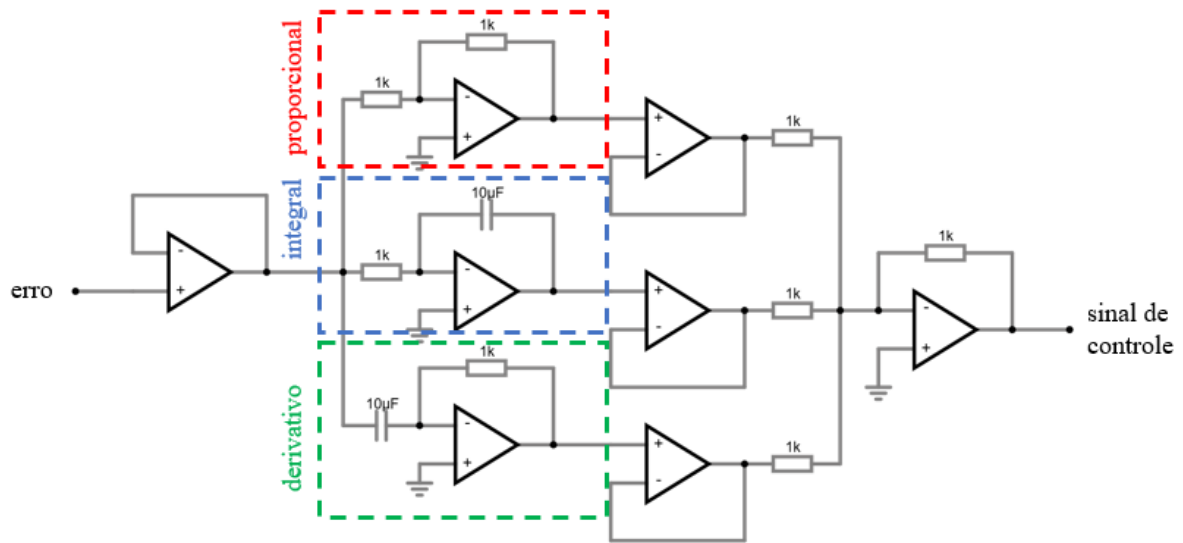


Figura 11 Controlador PID com Amplificadores Operacionais  
Fonte: Autor

A princípio, tem-se um *buffer* para replicação do sinal de erro para o controlador. Em seguida, este sinal é replicado para as parcelas do controlador, sendo elas, em ordem de cima para baixo, as parcelas proporcional, integral e derivativa. Após as ações calculadas, os sinais de cada ação do controlador são somados, gerando o sinal de saída do controlador PID.

Observa-se que, para o circuito da Figura 11, utilizando as equações dos amplificadores operacionais da seção 2.2, tem-se:

$$K_p = \frac{1k}{1k} = 1$$

$$\frac{K_p}{T_i} = \frac{1}{RC} \therefore T_i = K_p * RC = 1 * 1k * 10\mu = 0,001 \text{ s}$$

$$K_p T_d = RC \therefore T_d = \frac{RC}{K_p} = \frac{1k * 10\mu}{1} = 0,001 \text{ s}$$

## 2.4 Modelagem Matemática

Este trabalho tem, como objetivo, a modelagem caixa-branca dos sistemas a serem controlados. Esta abordagem visa descrever matematicamente o comportamento do sistema, para que, então, seja feito o projeto do controlador.

Como resultado da modelagem, gera-se a função de transferência do sistema, que é “(...) a relação entre a Transformada de Laplace da saída (função de resposta – *response function*) e a Transformada de Laplace da entrada (função de excitação – *driving function*), admitindo-se todas as condições iniciais nulas” (OGATA, 2003).

Para Dorf (2018),

“Como os sistemas em consideração são dinâmicos por natureza, suas equações descritivas são usualmente equações diferenciais. Além disso, se essas equações puderem ser linearizadas, então a Transformada de Laplace pode ser usada para simplificar o método de solução.”

Tem-se, por definição, que a Transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  contínua para todo  $t \geq 0$ , é dada por:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.10)$$

#### 2.4.1 Circuito RLC (Resistivo, Indutivo e Capacitivo)

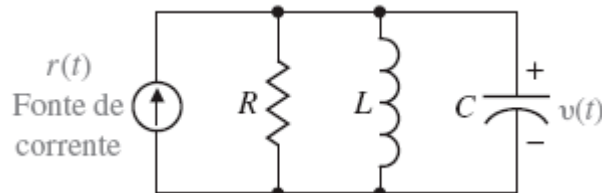


Figura 12 Circuito RLC  
Fonte: (DORF, 2018)

Para efeitos de exemplificação, segue a modelagem matemática de um Circuito RLC Paralelo.

A corrente entregue ao circuito pela fonte  $r(t)$  é dada pela soma das correntes em cada elemento do circuito, segundo a Lei de Kirchhoff:

$$r(t) = I_R + I_L + I_C$$

$$r(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt}$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtém-se:

$$R(s) = \frac{1}{R}V(s) + \frac{1}{L*s}V(s) + s * C * V(s)$$

$$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{L*s} + C*s}$$

Por fim, tem-se a Função de Transferência do sistema dada por:

$$\frac{V(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{L}} = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (2.11)$$

Os polinômios  $p(s)$  e  $q(s)$ , quando iguais a zero, identificam os zeros e polos do sistema, respectivamente. Os zeros são valores de  $s$  que fazem com que a função de transferência assuma valor nulo e os polos, valores de  $s$  que fazem com que a função de transferência seja infinita.

Este sistema pode ser representado em diagrama de blocos da seguinte forma:

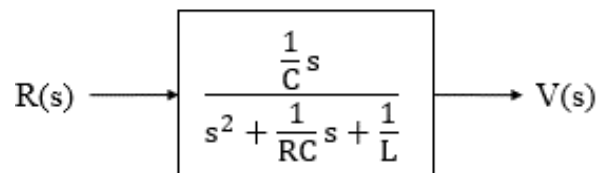


Figura 13 Diagrama de Blocos para o Circuito RLC  
Fonte: Autor

Para se obter o comportamento no domínio do tempo, basta aplicar a Transformada Inversa de Laplace à Função de Transferência. Utilizando uma Função de Transferência mais simples, como a do Circuito RC em série, tem-se:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{R}s}{s + \frac{1}{RC}}$$

Dado um sinal de entrada em forma de degrau unitário, tem-se:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{R}s}{s + \frac{1}{RC}} * \frac{1}{s}$$

Obs.:  $1/s$  é a Transformada de Laplace do degrau unitário aplicado na entrada  $v(t)$  e substituiu o termo  $V(s)$ .

Logo:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{R}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Sabendo que, para

$$f(t) = Ke^{-at}$$

sua Transformada de Laplace é:

$$F(s) = K \frac{1}{s + a},$$

conclui-se que:

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (2.12)$$

Sendo:

$$K \rightarrow \frac{1}{R};$$

$$a \rightarrow -\frac{1}{RC}.$$

## 2.5 Sistemas de Primeira Ordem

Um sistema é dito de primeira ordem quando pode ser descrito por uma equação diferencial de primeira ordem. Um sistema de primeira ordem sem zeros tem, de modo geral, a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2.13)$$

O sistema da Equação 2.13 contém um polo em  $p = -1/\tau$ , e tem como resposta a um degrau unitário no domínio do tempo:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A variável  $\tau$  é denominada constante de tempo e descreve o tempo em que o sistema atinge 63,2% de sua resposta em regime permanente. No caso acima, a resposta em regime permanente é dada por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \quad (2.14)$$

Passado o tempo  $\tau$ , o sistema atinge 63,2% deste valor, que é igual a 0,632.

Além disso, se tem outros dois quantitativos de tempo utilizados para descrever o sistema: tempo de subida e tempo de acomodação.

O tempo de subida é o tempo em que o sistema sai de 10% do valor em regime permanente até 90% deste mesmo valor e pode ser calculado da seguinte forma:

$$\tau_r \cong 2,2\tau \quad (2.15)$$

Já o tempo de acomodação é o tempo necessário para que o sistema atinja 98% do seu valor em regime permanente e pode ser calculado a partir da seguinte equação:

$$\tau_s \cong 4\tau \quad (2.16)$$

A resposta do sistema no domínio do tempo tem duas parcelas, sendo elas, a resposta natural e a forçada.

A resposta natural é a parcela que aparecerá mesmo sem perturbação na entrada do sistema – neste caso, a perturbação é o degrau unitário. A resposta natural do sistema acima é a função exponencial  $e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Polos reais no semiplano esquerdo (polos reais negativos), como o polo representado na Figura 14, gerarão na resposta no domínio do tempo uma função exponencial decrescente que tende a 0.

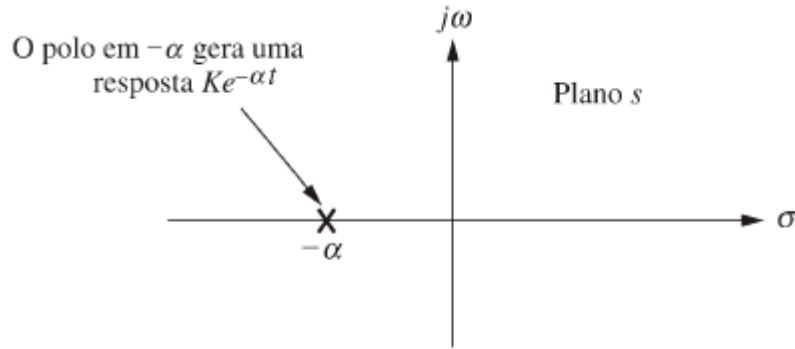


Figura 14 Representação de um polo no domínio de Laplace  
Fonte: (NISE, 2023)

Nota-se que quanto mais à esquerda do eixo estiver o polo, ou seja, quanto maior o valor de  $\alpha$  ( $-1/\tau$ ), mais rápida será a resposta do sistema. Com isso, seu tempo de acomodação será menor.

Já a resposta forçada, é a parcela da resposta no domínio do tempo que aparece devido à perturbação do sistema. Neste caso, o degrau unitário aplicado à entrada gerou uma parcela de degrau unitário forçado na saída. Com isso, tem-se a resposta completa no domínio do tempo dada por:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Resposta Forçada      Resposta Natural

## 2.6 Sistemas de Segunda Ordem

Um sistema é dito de segunda ordem quando pode ser descrito por uma equação diferencial de segunda ordem. Um sistema de segunda ordem sem zeros tem, de modo geral, a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Os polos do sistema são dados pelas raízes de  $U(s)$ , sendo eles:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



Para valores de  $\zeta$  menores que 1, tem-se polos conjugados complexos, dados por:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n + j\omega_d$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n - j\omega_d$$

A variável  $\zeta$  é denominada coeficiente de amortecimento. Para  $\zeta = 0$ , o sistema não sofre amortecimento em sua resposta, logo, o erro não será anulado. Este sistema, com coeficiente de amortecimento nulo, é denominado Sistema de Segunda Ordem Sem Amortecimento e tem como resposta a um degrau unitário, no domínio do tempo:

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t) \quad (2.17)$$

em que  $\omega_n$  é denominada frequência natural e é a frequência com que o sistema oscila sem amortecimento.

Para  $0 < \zeta < 1$ , o sistema será denominado Sistema de Segunda Ordem Subamortecido. Este sistema oscilará até certo ponto, onde seu erro será nulo. Este sistema tem, como resposta a um degrau unitário, no domínio do tempo:

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t) \right) \quad (2.18)$$

A frequência de oscilação desse sistema é  $\omega_d$ , variável denominada frequência natural amortecida. Como o próprio nome remete, esta é a frequência que um sistema oscilatório oscila quando tem amortecimento.

Para  $\zeta = 1$ , tem-se um Sistema Criticamente Amortecido. Este sistema tem a resposta mais rápida sem *overshoot* (ultrapassagem do valor de *setpoint*). Dado um degrau unitário como excitação, este sistema terá como resposta no domínio do tempo:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (2.19)$$

Para  $\zeta > 1$ , tem-se um Sistema Superamortecido. Este sistema não apresenta oscilação, assim como um Sistema Criticamente Amortecido, porém, tem uma resposta mais lenta que o anterior. Para um degrau unitário na entrada, o sistema responde no domínio do tempo:

$$y(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.20)$$

Graficamente, a Figura 15 ilustra a relação da resposta do sistema com a variação do coeficiente de amortecimento (para um degrau unitário na entrada):

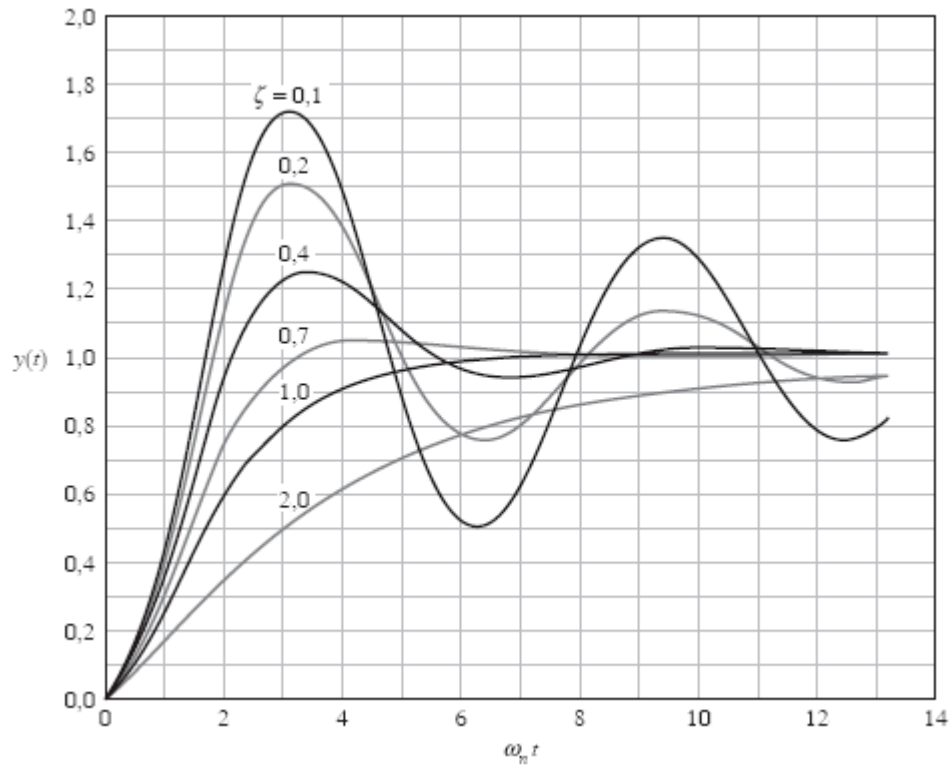


Figura 15 Relação do Coeficiente de Amortecimento com a Resposta de um Sistema de Segunda Ordem  
Fonte: (DORF, 2018)

Tem-se, para medir o desempenho de um sistema de segunda ordem, as seguintes métricas: tempo de atraso ( $t_d$ ), tempo de subida ( $t_r$ ), instante de pico ( $t_p$ ), máximo sobressinal ou *overshoot* ( $M_p$ ) e tempo de acomodação ( $t_s$ ).

O tempo de atraso é o tempo em que o sistema atinge metade de seu valor em regime permanente.

O tempo de subida é o intervalo de tempo em que o sistema passa de 0% a 100%, de 5% a 95% ou de 10% a 90% de seu valor em regime permanente. Para cada tipo de sistema de segunda ordem utiliza-se de um desses ranges. Para um sistema oscilante (subamortecido), o tempo de subida comumente utilizado é de 0% a 100%. Já, para um sistema sem oscilação (criticamente amortecido ou superamortecido), é comumente utilizado o range de 10% a 90%.

O instante de pico é o primeiro instante em que um Sistema Subamortecido atinge um sobressinal. Tem-se como instantes em que o sistema atinge máximos locais dados por:

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Para  $n = 1$ , se tem o instante do primeiro máximo local, sendo este o instante de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.21)$$

O máximo sobressinal (*overshoot*) é dado pelo valor máximo que o sistema atinge acima do *setpoint*. É o valor de saída no instante do pico e pode ser calculado a partir da equação:

$$M_p = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (2.22)$$

Porém, o *overshoot* pode ser dado em termos percentuais em relação ao regime permanente, sendo:

$$M_p(\%) = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Por fim, o tempo de acomodação é o instante em que, a partir dele, o valor de saída permanece menor que 2% ou 5% do valor em regime permanente. Mais frequentemente utilizado, considerando a saída menor que 2% do valor final, tem-se o tempo de acomodação dado por:

$$t_s \cong 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (2.23)$$

Para o caso de se considerar 5% do valor final, o tempo de acomodação passa a ser 3 vezes a constante de tempo do sistema ao invés de ser 4 vezes maior.

## 2.7 Sistemas de Controle com Realimentação

Em sistemas de controle automático, frequentemente utiliza-se de um elemento sensor para medição da variável controlada – seja essa uma medição direta ou indireta. Este sinal de sensoriamento é utilizado para calcular o erro em relação ao *setpoint* definido e este erro é utilizado como entrada do controlador. Com isso tem-se o seguinte diagrama de blocos do sistema:

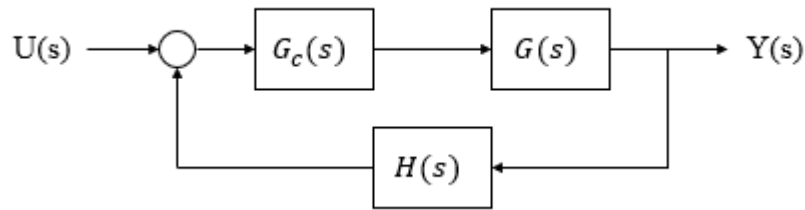


Figura 16 Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle com Realimentação  
Fonte: Autor

O sistema é denominado de sistema com realimentação porque a entrada é realimentada com o sinal de saída gerado pelo próprio sistema.

A diferença do *setpoint*,  $U(s)$ , com o sinal do sensor,  $H(s)$ , é aplicada na entrada do controlador  $G_c(s)$ . A ação gerada pelo controlador é aplicada na planta, gerando uma resposta,  $Y(s)$ , a qual retorna ao início do sistema para comparação com o *setpoint*. Matematicamente, o sistema comporta da seguinte maneira:

$$Y(s) = (U(s) - H(s)Y(s)) * G_c(s) * G(s)$$

O que gera a sua Função de Transferência, dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (2.23)$$

O sinal de erro do sistema, o qual deseja-se anular, é dado por:

$$\begin{aligned} E(s) &= U(s) - Y(s) \\ \frac{E(s)}{U(s)} &= 1 - \frac{Y(s)}{U(s)} \\ \frac{E(s)}{U(s)} &= 1 - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \\ \frac{E(s)}{U(s)} &= \frac{1 + G_c(s)G(s)H(s) - G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \\ \therefore E(s) &= \frac{1 + G_c(s)G(s)H(s) - G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} U(s) \end{aligned}$$

Considerando um sistema com realimentação negativa unitária, ou seja,  $H(s) = 1$ , temos:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)H(s)} U(s) \quad (2.24)$$

## 2.8 Método do Lugar das Raízes

De acordo com Dorf (2018):

“A estabilidade relativa e o desempenho transitório de um sistema de controle em malha fechada estão diretamente relacionados com a posição das raízes em malha fechada da equação característica no plano  $s$ . Frequentemente é necessário ajustar-se um ou mais parâmetros do sistema para se obter posições adequadas das raízes. Portanto, vale a pena determinar como as raízes da equação característica de um dado sistema percorrem o plano  $s$  conforme os parâmetros são variados, ou seja, é útil determinar o **lugar** das raízes no plano  $s$  à medida que um parâmetro é variado.”

Um dado sistema, em malha fechada, tem a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Sendo um sistema em malha aberta com a seguinte função de transferência:

$$Y(s) = K * U(s),$$

tem-se que, dada uma realimentação unitária,  $H(s) = 1$ :

$$G(s) = \frac{K * U(s)}{1 + K * U(s)}$$

Para se determinar os polos em malha fechada do sistema, utiliza-se da seguinte equação:

$$1 + K * U(s) = 0 \rightarrow K * U(s) = -1$$

Tal equação pode ser representada em forma polar, sendo:

$$K * U(s) = 1 \angle (2k + 1)180^\circ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Logo, um valor de  $s$  é um polo se e somente se

$$|K * U(s)| = 1 \quad (2.25)$$

$$\angle K * U(s) = (2k + 1)180^\circ \quad (2.26)$$

Dada a seguinte Função de Transferência em malha aberta:

$$K * U(s) = \frac{K(s + 3)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)} \quad (2.27)$$

Tem-se dois polos ( $p_1 = -1$  e  $p_2 = -2$ ) e dois zeros ( $z_1 = -3$  e  $z_2 = -4$ ) em malha aberta, representados da seguinte forma:

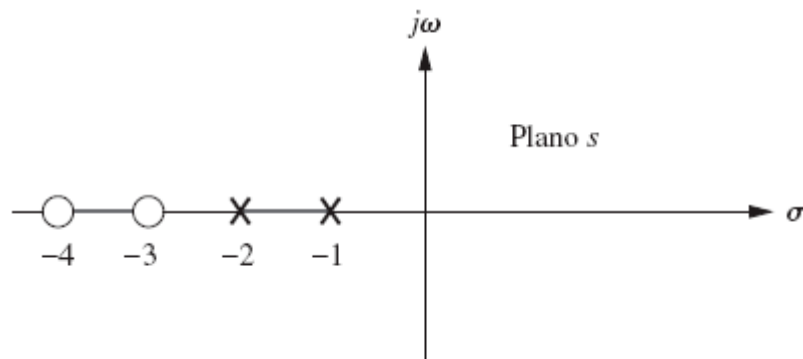


Figura 17 Polos e Zeros do Sistema em Malha Aberta  
Fonte: (NISE, 2023)

Considere o ponto  $s = -2 + 3j$ . Para que ele pertença ao lugar das raízes, os ângulos dos polos subtraídos dos ângulos dos zeros devem resultar em um múltiplo ímpar de  $180^\circ$  conforme a equação 2.26. Faz-se então o seguinte:

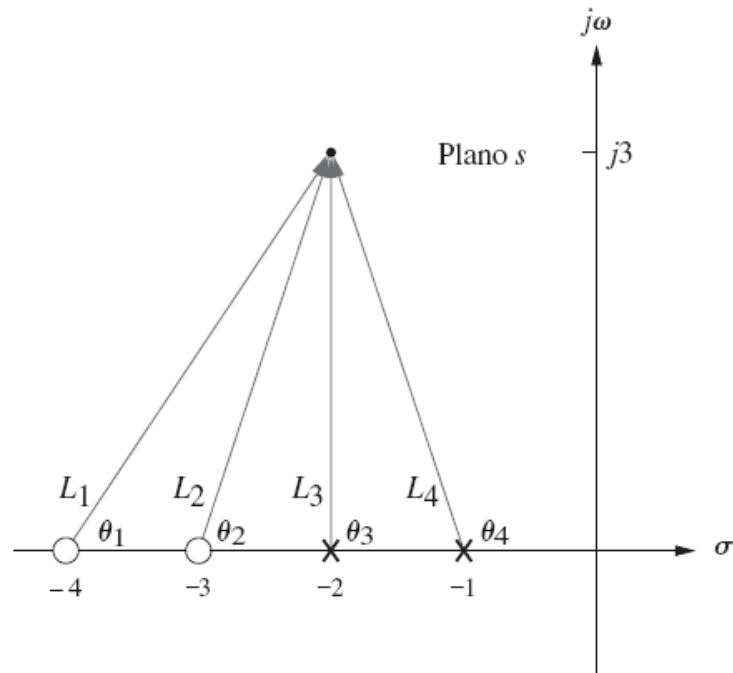


Figura 18 Determinação dos Ângulos dos Zeros e Polos do Sistema  
Fonte: (NISE, 2023)

A partir do gráfico, calcula-se os ângulos para se aplicar na equação 2.26:

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = 56.31^\circ + 71.57^\circ - 90^\circ - 108.43^\circ = -70.55^\circ$$

Como não resultou em um múltiplo ímpar de  $180^\circ$ , se diz que o ponto em questão ( $s = -2 + 3j$ ) não faz parte do lugar das raízes para quaisquer ganhos  $K$ .

Considerando agora o ponto  $s = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}j$ , que já se sabe que faz parte do lugar das raízes, pode-se calcular o ganho  $K$  referente a este polo em malha fechada seguindo a equação 2.25:

$$K = \frac{1}{|U(s)|} = \frac{\prod \text{distâncias até os polos}}{\prod \text{distâncias até os zeros}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} * 1.22}{2.12 * 1.22} = 0.33$$

Logo, para um ganho  $K = 0.33$ , há um polo em malha fechada em  $s = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}j$ .

O gráfico do lugar das raízes pode ser esboçado e nos mostra o caminho que os polos em malha fechada percorrem dada a variação do ganho  $K$  de zero a infinito. Porém, para este trabalho, atentar-se-á em traçar este gráfico utilizando o *software* Octave.

Segue, como exemplo, o gráfico do lugar das raízes da função de transferência (2.27):

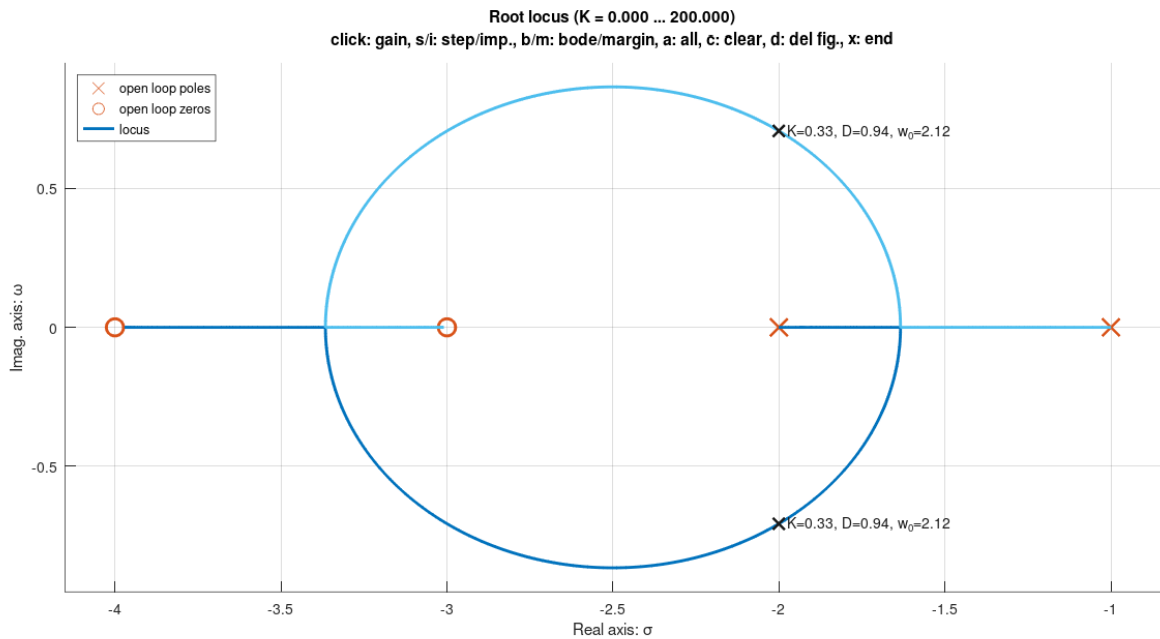


Figura 19 Gráfico do Lugar das Raízes do Sistema  
Fonte: Autor

No topo, mostra-se a variação do ganho que produz este gráfico, sendo que o ganho  $K$  varia de 0 a 200. Salienta-se mostrar a prova de que o polo que se identificou como pertencente ao lugar das raízes realmente pertence ao lugar das raízes, assim como seu conjugado complexo.

### 2.7.1 Projeto de Controladores PID via Lugar Geométrico das Raízes

Pode-se projetar Controladores PID utilizando o gráfico do lugar das raízes. O controlador segue a equação 2.9, que convertida ao Domínio de Laplace resulta:

$$U(s) = \frac{K_d E(s) * s^2 + K_p E(s) * s + K_i E(s)}{s} \quad (2.28)$$

O controlador que se vai projetar, tem a seguinte função de transferência:

$$U(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{s} = \frac{Ks^2 + K(z_1 + z_2)s + K * z_1 * z_2}{s} \quad (2.29)$$



Com isso, pode-se relacionar as equações 2.28 e 2.29, resultando:

$$\begin{aligned}K_d &= K \\K_p &= K(z_1 + z_2) \\K_i &= K * z_1 * z_2\end{aligned}$$

Para se determinar as posições dos zeros,  $z_1$  e  $z_2$ , e para se determinar o ganho  $K$ , precisa-se determinar as características desejadas pelo projetista para resposta transiente do sistema, sendo elas: *overshoot*, tempo de acomodação e erro em regime permanente por exemplo.

Com isso, utilizando de conhecimentos da secção 2.6, calcula-se as variáveis necessárias para definição dos polos conjugados complexos que se deseja que estejam no lugar das raízes do sistema, sendo eles:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

Para que estes polos pertençam ao lugar das raízes, se utiliza das equações 2.25 e 2.26 para se calcular os ângulos e as posições dos zeros do controlador. Ao final, tendo as posições dos zeros do controlador, pode-se calcular  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ .

Se viu, na secção anterior, que o polo  $p = -2 + 3j$  não pertence ao lugar das raízes da seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K(s + 3)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)}$$

Porém, deseja-se que esse polo faça parte do lugar das raízes para atender às características desejadas pelo projetista, para a resposta do sistema. Assim, adicionando um controlador ao sistema, pode-se fazer com que este polo pertença ao lugar das raízes. Para se conseguir isso, precisa-se adicionar um polo ao sistema:

$$G_C(s) = \frac{K}{s + p_1}$$

Tem-se, então, novamente, que a soma dos ângulos dos polos subtraída da soma dos ângulos dos zeros tem de ser igual a um múltiplo ímpar de  $180^\circ$ , logo:

$$-\theta_{p_1} + \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = -\theta_{p_1} + 56.31^\circ + 71.57^\circ - 90^\circ - 108.43^\circ = -\theta_{p_1} - 70.55^\circ$$

$$-\theta_{p_1} - 70.55 = -180 \therefore \theta_{p_1} = 109.45^\circ$$

Para que se tenha um polo com esse ângulo, precisa-se que ele esteja na seguinte posição:

$$p_1 = \frac{3}{\operatorname{tg}(180 - 109.45^\circ)} - 2 \cong -0.94$$

Com isso, a função de transferência resultante é dada por:

$$G(s) = \frac{K(s + 3)(s + 4)}{(s + 1)(s + 2)(s + 0.94)}$$

Tendo o seguinte gráfico de lugar das raízes:

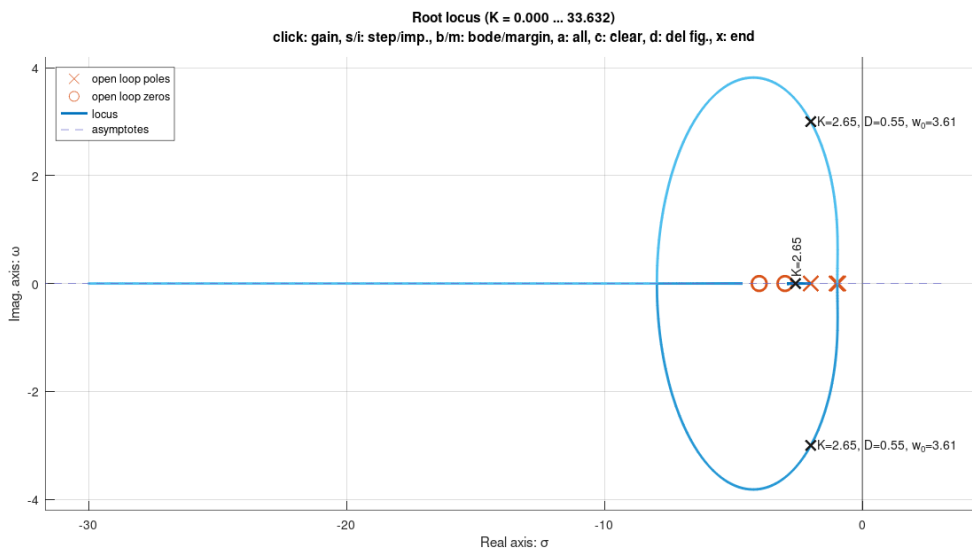


Figura 20 Gráfico do Lugar das Raízes do Sistema com a Adição de um Polo  
Fonte: Autor

Agora o gráfico passa pelo polo desejado, sendo este um polo em malha fechada do sistema dado um ganho  $K = 2.65$ .

Assim como se adiciona um polo ao sistema, pode-se adicionar quantos polos se desejam e pode-se adicionar zeros, também. A adição de zeros nos ajudará para o projeto do Controlador PID no capítulo de desenvolvimento.

### 3 DESENVOLVIMENTO

Nesta secção, se utilizará de toda a teoria revista na secção anterior em uma situação específica. Seguir-se-á passo a passo, iniciando com a modelagem matemática, identificação do sistema, chegando, enfim, ao projeto do controlador.

#### 3.1 Levitador Pneumático

Largamente utilizado para o ensino de controle e automação, tem-se o levitador pneumático. Esta planta consiste em uma pequena bola inserida dentro de um tubo vertical, onde, com o auxílio de um soprador (ventoinha/cooler), deseja-se manter a bola em uma certa altura. O sistema tem a seguinte estrutura:

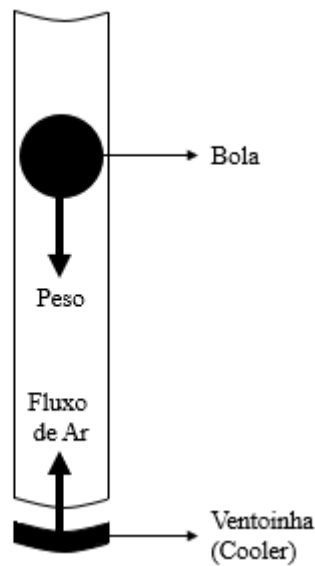


Figura 21 Estrutura de um Levitador Pneumático  
Fonte: Autor

O sistema possui uma variável de entrada – medição da altura da bola – e uma variável de saída – velocidade do soprador. Para descrever o sistema, aplica-se a Segunda Lei de Newton, como mostrado por Chaves (2018):

$$m\ddot{y} = \sum F = \frac{1}{2}C_d\rho A(v_a - \dot{y})^2 - mg \quad (3.1)$$

Sendo:

$m \rightarrow$  massa da bola

$g \rightarrow$  constante gravitacional

$C_d \rightarrow$  coeficiente de descarga

$\rho \rightarrow$  densidade do ar

$A \rightarrow$  área da bola exposta ao fluxo de ar

$v_a \rightarrow$  velocidade do ar

$y \rightarrow$  posição da bola

O coeficiente de descarga é relativo às velocidades da bola e do ar e depende, também, do Número de Reynolds. Porém, devido às baixas velocidades deste processo, considera-se  $C_d$  como constante. Com isso, tem-se o seguinte termo constante:

$$a = \frac{1}{2} C_d \rho A$$

Logo, tem-se:

$$\ddot{y} = \frac{\alpha}{m} (v_a - \dot{y})^2 - g \quad (3.2)$$

Quando o sistema estiver em equilíbrio, ou seja, com a velocidade da bola nula, se terá o que chamamos de velocidade de equilíbrio do soprador. Sendo assim, tem-se:

$$g = \frac{\alpha}{m} v_{eq}^2$$

Em que  $v_{eq}$  é a velocidade de equilíbrio. Com isso, pode-se reescrever a equação 3.2 da seguinte maneira:

$$\ddot{y} = g \left[ \left( \frac{v_a - \dot{y}}{v_{eq}} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.3)$$

Tal equação não é linear, porém pode-se linearizá-la a partir da sua Série de Taylor em torno de um ponto de operação, onde adota-se:

$$v_a - \dot{y} = v_{eq}$$

Resultando, assim, na seguinte equação para a aceleração da bola:

$$\ddot{y} = \frac{2g}{v_{eq}} (v_a - \dot{y} - v_{eq}) \quad (3.4)$$

No Domínio de Laplace, esta relação resulta na seguinte Função de Transferência:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{a}{s(s+a)} \quad (3.5)$$

Sendo:

$$a = \frac{2g}{v_{eq}}$$

Todavia, se aplicará uma tensão no soprador, sendo este o sinal de entrada. Com isso, é necessário ter a relação entre a velocidade do ar e a tensão aplicada, sendo esta:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{k_v}{\tau s + 1} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5), obtém-se a seguinte Função de Transferência para o sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a * k_v}{s(s+a)(\tau s + 1)} \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Levitador Pneumático Real de Exemplo

O trabalho de Jaimes (2015) identifica este sistema, adotando a seguinte relação para uma esfera:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{3 C_d \rho}{8 \rho_b R^2}$$

em que:

$\rho_b \rightarrow$  densidade da bola

$R \rightarrow$  raio da bola

Utiliza, também, dos seguintes parâmetros de seu sistema:

Tabela 1 – Parâmetros do Levitador

m [Kg]	R [m]	A [m <sup>2</sup> ]	$\rho_b \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	$\rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	C <sub>d</sub>
0.0279	0.07	0.01538	19.42	1.196	0.05

Fonte: (JAIMES, 2015)

Logo, substituindo tais parâmetros em (3.2), obtém-se:

$$\ddot{y} = \frac{3}{8} * \frac{0.05 * 1.196}{19.42 * 0.07} (v_a - \dot{y})^2 - 9.81$$

$$\ddot{y} \cong 0.01650(v_a - \dot{y})^2 - 9.81 \quad (3.8)$$

Com isso, pode-se encontrar a velocidade de equilíbrio, dada por:

$$v_{eq} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$$

$$v_{eq} = \sqrt{\frac{9.81}{0.01650}}$$

Calcula-se, então, o valor da constante **a**, que é dada por:

$$a = \frac{2g}{v_{eq}} = \frac{2 * 9.81}{\sqrt{\frac{9.81}{0.01650}}} \cong 0.80465$$

Com isso, tem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{0.80465}{s * (s + 0.80465)}$$

Tendo como base o *cooler* RM-BK-01-FB da marca Rise Mode, temos os seguintes parâmetros:

$$Q = 50 \text{ ft}^3/\text{min} = 0.02360 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V = 12 \text{ V}$$

Sabendo que a área do tubo, a partir da Tabela 1, tem-se:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.02360 \text{ m}^3/\text{s}}{0.01538 \text{ m}^2} = 1.53446 \text{ m/s}$$

Supondo que este *cooler* segue a função de transferência da equação 3.6, tem-se a seguinte resposta no domínio do tempo:

$$v(t) = k_v u \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Considerando os parâmetros do *cooler*, pode-se formular a seguinte propriedade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 12k_v \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 1.53446$$

$$12k_v = 1.53446 \therefore k_v = 7.82034 \frac{\text{m/s}}{V}$$

Considerando, também,  $\tau = 0.1 \text{ s}$ , ou seja, que quase instantaneamente o *cooler* atinge a velocidade terminal, tem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.80465 * 7.82034}{s * (s + 0.80465) * (0.1s + 1)} = \frac{6.29264}{0.1s^3 + 1.080465s^2 + 0.80465s}$$

Fazendo o termo do coeficiente dominante ser unitário, tem-se:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{62.9264}{s^3 + 10.80465s^2 + 8.0465s} \quad (3.9)$$

### 3.2 Projeto do Controlador via Lugar Geométrico das Raízes

Buscar-se-á, adicionando um controlador à planta, com os seguintes parâmetros para resposta do sistema:

$$M_p(\%) = 25\%$$

$$t_s = 2 \text{ s}$$

$$e(\infty) = 0$$



Primeiro determina-se os polos dominantes do sistema compensado:

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} = \sqrt{\frac{(\ln 0.25)^2}{\pi^2 + (\ln 0.25)^2}} \cong 0.4$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta * t_s} = \frac{4}{0.4 * 2} = 5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 5 \sqrt{1 - 0.4^2} = 4.58 \text{ rad/s}$$

$$\zeta \omega_n = 0.4 * 5 = 2 \text{ rad/s}$$

Logo, os polos dominantes são:

$$p_{1,2} = -2 \pm 4.58j$$

Com os polos dominantes, se projetará o controlador PD (Proporcional e Derivativo), que tem a seguinte função de transferência:

$$G_D(s) = K(s + z_1)$$

Para isso, se calculará os ângulos dos polos e zeros do sistema em malha aberta em relação ao polo dominante positivo:

Para o polo em  $s = 0$ , tem-se:

$$\theta_1 = 180 - \text{tg}^{-1}\left(\frac{4.58}{2}\right) \cong 113.59^\circ$$

Para o polo em  $s = -0.80465$ , tem-se:

$$\theta_2 = 180 - \text{tg}^{-1}\left(\frac{4.58}{2 - 0.80465}\right) \cong 104.63^\circ$$

Para o polo em  $s = -10$ , tem-se:

$$\theta_3 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{4.58}{10 - 2}\right) \cong 29.79^\circ$$

Com esses ângulos, se utilizará da seguinte propriedade para se encontrar o ângulo do zero do controlador:

$$\theta_{z_1} - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = -180^\circ$$

$$\theta_{z_1} = -180 + 113.59 + 104.63 + 29.79 = 68.01^\circ$$

Falta se encontrar a posição do zero, que será dada por:

$$z_1 = -\frac{4.58}{\operatorname{tg} 68.01^\circ} - 2 \cong -3.84951$$

Utilizando o *software* Octave para traçar o lugar das raízes do sistema com o controlador PD, encontra-se o seguinte ganho:

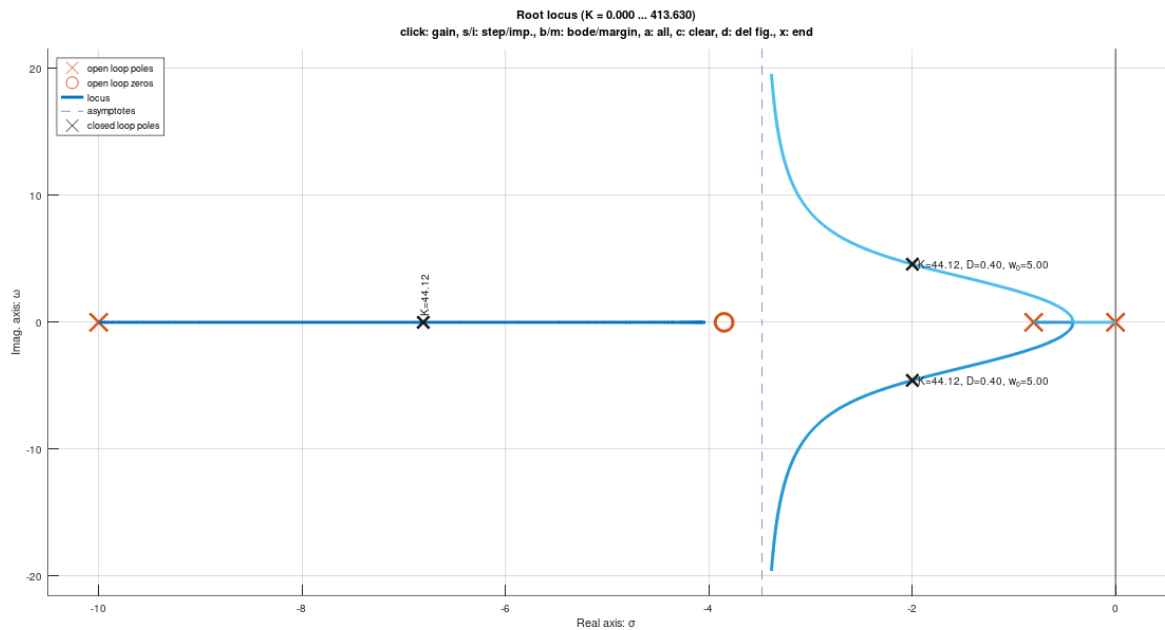


Figura 22 Lugar das Raízes da Planta com o Controlador PD

Fonte: Autor

Tem-se, então, como ganho da planta, o valor de 44.12. Porém a planta sem o controlador já tem ganho de 62.9264, logo o ganho  $K$  do controlador é dado por:

$$K = \frac{44.12}{62.9264} = 0.70113$$

Tendo, assim, a seguinte função de transferência para o sistema com o controlador:

$$G(s) = \frac{44.12 * (s + 3.84951)}{0.1s^3 + 1.080465s^2 + 0.80465s} \quad (3.10)$$

Tal sistema tem como resposta a um degrau unitário, comparado ao sistema sem controle:

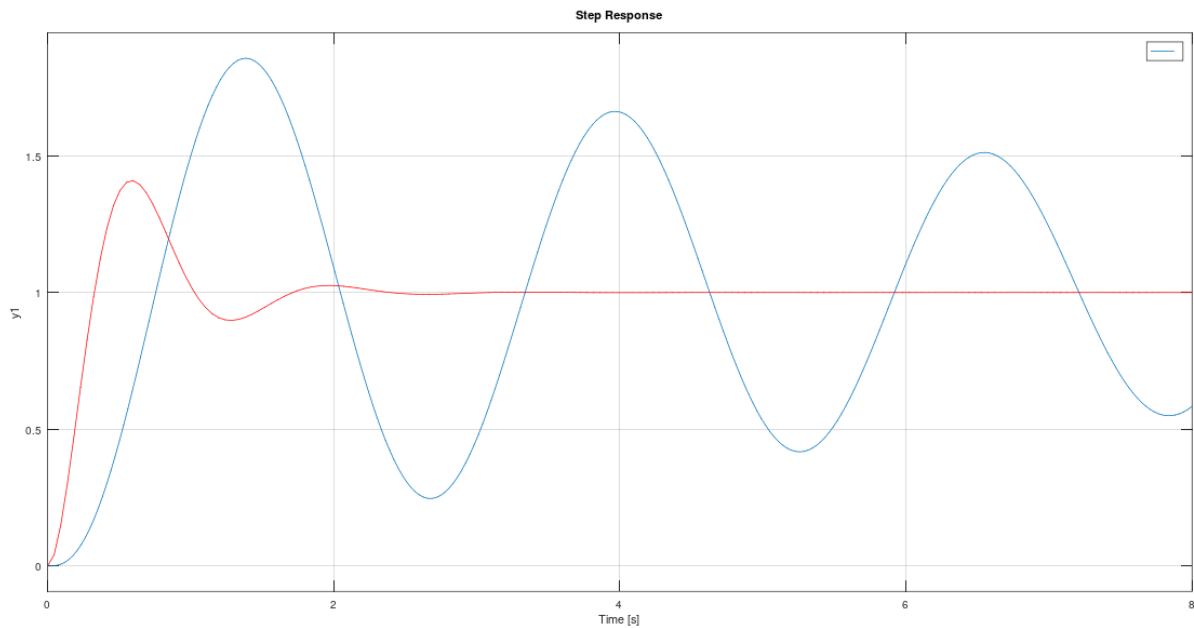


Figura 23 Resposta a um degrau unitário dos sistemas com controlador (vermelho) e sem controlador (azul)  
Fonte: Autor

Vê-se que houve uma satisfatória melhora quanto à resposta do sistema. O tempo de resposta diminuiu, porém o *overshoot* não se manteve no limite de 25% especificado para o projeto. No gráfico do lugar das raízes há outro par de polos, com uma distância considerada dos utilizados, com o mesmo coeficiente de amortecimento. Adotando o outro par de polos com  $\zeta = 0.4$ , tem-se que os polos serão:

$$p_{1,2} = -0.58 \pm 1.33j$$

Resultando na seguinte resposta ao degrau, para um ganho de 5.20:

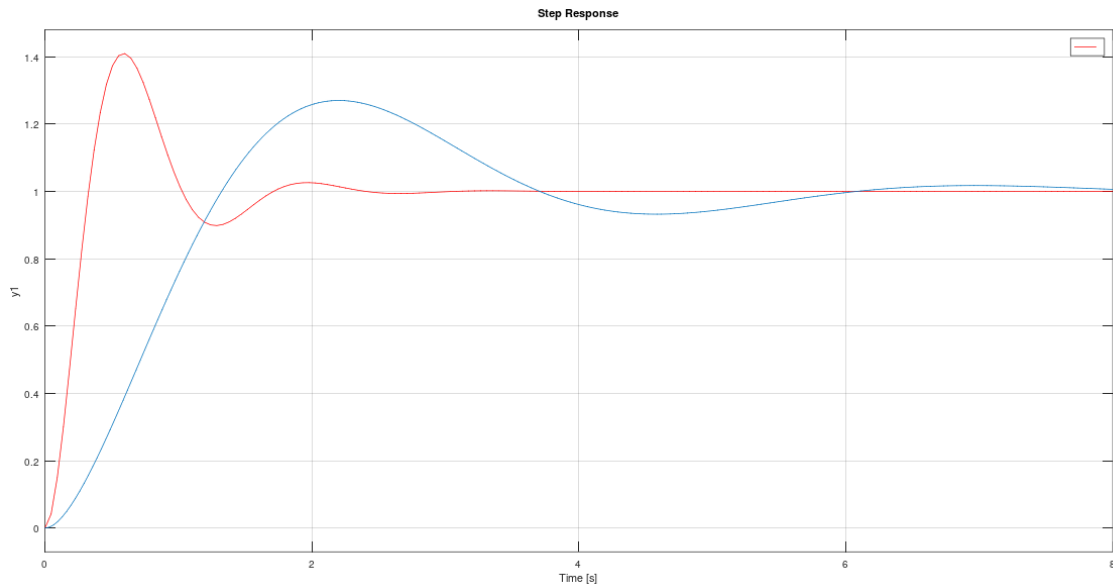


Figura 24 Resposta a um degrau unitário de dois ganhos que produzem o mesmo coeficiente de amortecimento  
Fonte: Autor

Novamente vê-se em vermelho a resposta do controlador de ganho 44.12. Nota-se que quando se utiliza o outro par de polos dominantes, o critério de *overshoot* é satisfeito, porém o tempo de acomodação já não é mais satisfatório. Se preferirá seguir com o primeiro controlador, escolhendo o melhor tempo de acomodação para o sistema.

A própria planta já tem o polo integrador (polo na origem), o qual anula o erro em regime permanente. Com isso, não é necessário um Controlador PID, sendo que o PD já satisfaz o propósito.

Com isso, ao final, ter-se-á os seguintes parâmetros:

$$K_D = K = 0.70113$$

$$K_P = K * z_1 = 0.70113 * 3.84951 \cong 2.70$$

### 3.3 Projeto do Circuito com Amplificadores

#### 3.3.1 Circuito da Planta

Será construído um circuito com amplificadores operacionais para simular a planta da equação 2.9. Utilizar-se-á da configuração da Figura 25, que é um integrador construído de forma a alocar um polo no sistema.

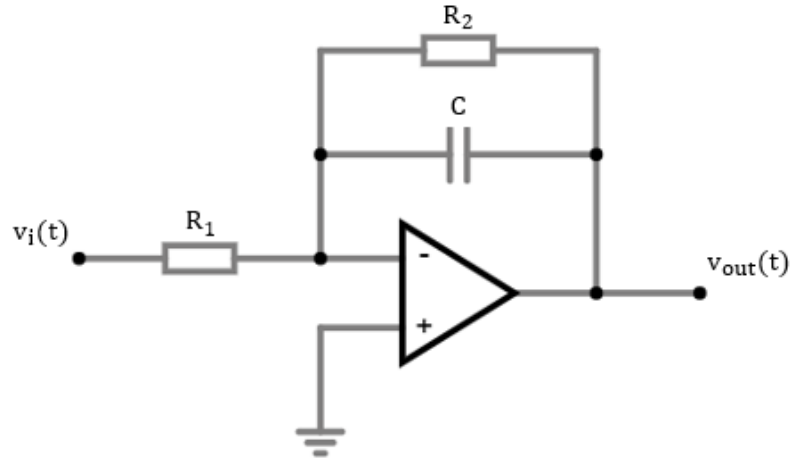


Figura 25 Amplificador Adicionador de Polo  
Fonte: Autor

Considere a configuração do amplificador operacional acima. Segue a sua modelagem:

$$I_{R_1} = \frac{v_i}{R_1}$$

$$I_C = -C \frac{dv_{out}}{dt}$$

$$I_{R_2} = -\frac{v_{out}}{R_2}$$

Dada que a corrente no nó é nula, tem-se:

$$I_{R_1} - I_{R_2} - I_C = 0$$

$$\frac{v_i}{R_1} + C \frac{dv_{out}}{dt} + \frac{v_{out}}{R_2} = 0$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$\frac{V_i(s)}{R_1} + s * C * V_{out}(s) + \frac{V_{out}(s)}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_i(s)} = -\frac{1/R_1}{sC + 1/R_2} = -\frac{1/R_1 C}{s + 1/R_2 C}$$

Observando a Função de Transferência deste circuito amplificador, tem-se que ele adiciona um polo em  $s = -1/R_2 C$  e aplica um ganho  $K = -1/R_1 C$ . Com base na relação entre os resistores e o capacitor, consegue-se simular a função de transferência do sistema, representada pela equação 3.9, que é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8.04650 * 7.82034}{s * (s + 0.80465) * (s + 10)}$$

Precisa-se de 3 amplificadores para cada polo, sendo estes os polos  $p_1 = -0.80465$ ,  $p_2 = -10$  e  $p_3 = 0$ . Este último é um polo integrador, com isso não se terá no circuito o resistor  $R_2$ , tendo então um circuito amplificador integrador, como da Figura 8.

Para o polo  $p_1$ , precisa-se da seguinte relação:

$$\frac{1}{R_2 C} = 0.80465$$

Escolhendo, arbitrariamente,  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ , tem-se  $C \cong 12.42 \text{ }\mu\text{F}$ . Escolhendo valores comerciais para os componentes, pode-se utilizar uma resistência de  $100 \text{ k}\Omega$  com uma capacitância de  $12 \text{ }\mu\text{F}$ . Com isso ter-se-á o polo alocado em:

$$-\frac{1}{100 \text{ k} * 12 \text{ }\mu} \cong -0.83333$$

Fazendo  $R_1 = R_2/10 = 10 \text{ k}\Omega$ , aplicar-se-á o ganho de  $-8.3333$ . Com isso já temos a primeira parcela do ganho do sistema.

Para o polo  $p_2$ , precisa-se da seguinte relação:

$$\frac{1}{R_2 C} = 10$$

Escolhendo, arbitrariamente,  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ , tem-se  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . Esses valores já são comerciais. Agora, para que se tenha um ganho unitário, precisa-se da seguinte relação:

$$\frac{1}{R_1 C} = \frac{1}{R_1 * 1 \text{ }\mu} = 1 \text{ M}\Omega$$

Por último, com relação ao polo  $p_3$ , se terá um polo na origem, devido a ausência do resistor  $R_2$ , e um ganho  $K = -1/RC$ . Com essa configuração, far-se-á a segunda parcela do ganho do sistema, logo, precisa-se da seguinte relação:

$$\frac{1}{RC} = 7.82034$$

Utilizando  $C = 1 \mu\text{F}$ , se terá  $R \cong 127.87 \text{ k}\Omega$ . O capacitor já está com um valor comercial. Já para a resistência, utilizar-se-á da associação em série de um resistor de  $120 \text{ k}\Omega$  e de um de  $7.5 \text{ k}\Omega$ .

Finalmente, o sistema pode ser representado pelo seguinte circuito elétrico:

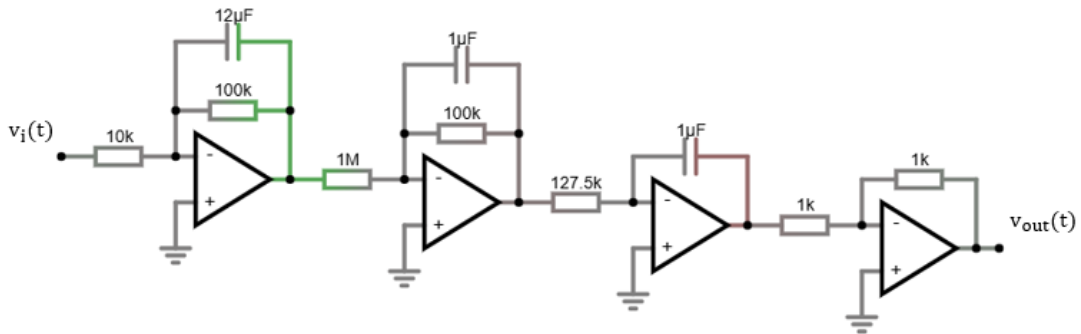


Figura 26 Circuito Simulador do Sistema do Levitador Pneumático  
Fonte: Autor

Ao final do circuito, mostrado na Figura 26, utilizou-se de um amplificador inversor, pois o sinal de entrada sofreu três inversões devido a adição dos três polos.

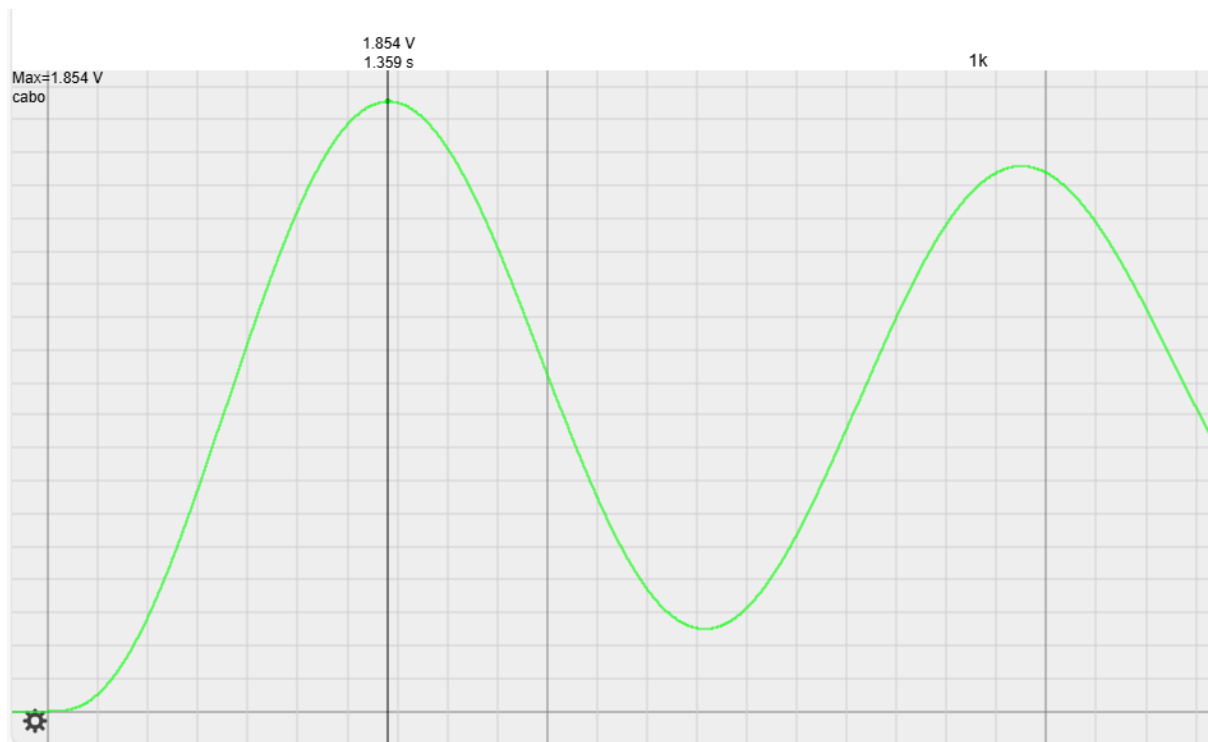


Figura 27 Resposta da Planta em Malha Fechada sem o Controlador  
Fonte: Autor

Na Figura 27 vê-se a resposta da planta sem controlador em malha fechada. Vê-se, assim como no sinal da Figura 23, um caráter oscilatório. A frequência de resposta é a frequência  $\omega_d$ ,

pois tem-se um Sistema Subamortecido, caracterizado assim a partir do gráfico da Figura 27, onde vê-se que a amplitude do sinal oscilatório diminui a cada período.

### 3.3.2 Circuito do Controlador

Com o sistema simulado, agora se projetará o circuito do controlador. Retomando o resultado da secção 3.2, tem-se os seguintes ganhos para o controlador:

$$K_D = 0.70113$$

$$K_P \cong 2.70$$

O ganho proporcional  $K_p$  é dado pela associação de dois resistores, dada a configuração da Figura 4. Logo, tem-se a seguinte relação:

$$K_p = \frac{R_f}{R_1} = 2.70$$

Tendo  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ , se tem  $R_f = 2.7 \text{ k}\Omega$ . As duas resistências já têm valores comerciais.

O ganho derivativo  $K_d$  é dado pela associação de um capacitor e um resistor, dada a configuração da Figura 10. Logo, se terá a seguinte relação:

$$K_d = RC = 0.70113$$

Escolhendo o capacitor  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ , se precisará de um resistor  $R \cong 7.01 \text{ k}\Omega$ . Comercialmente, escolhe-se o resistor de  $6.8 \text{ k}\Omega$ , resultado em um ganho  $K_d = 0.68$ .

Com esses valores, tem-se o seguinte circuito elétrico do nosso controlador:

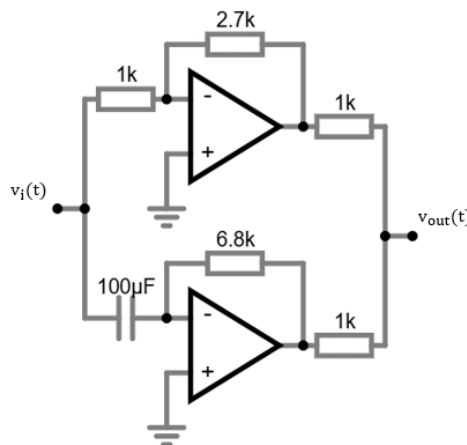


Figura 28 Circuito do Controlador da Planta do Levitador Pneumático  
Fonte: Autor



Para finalização do desenvolvimento do trabalho, fecha-se a malha do processo, assim como o esquema da Figura 2, resultando no seguinte circuito:

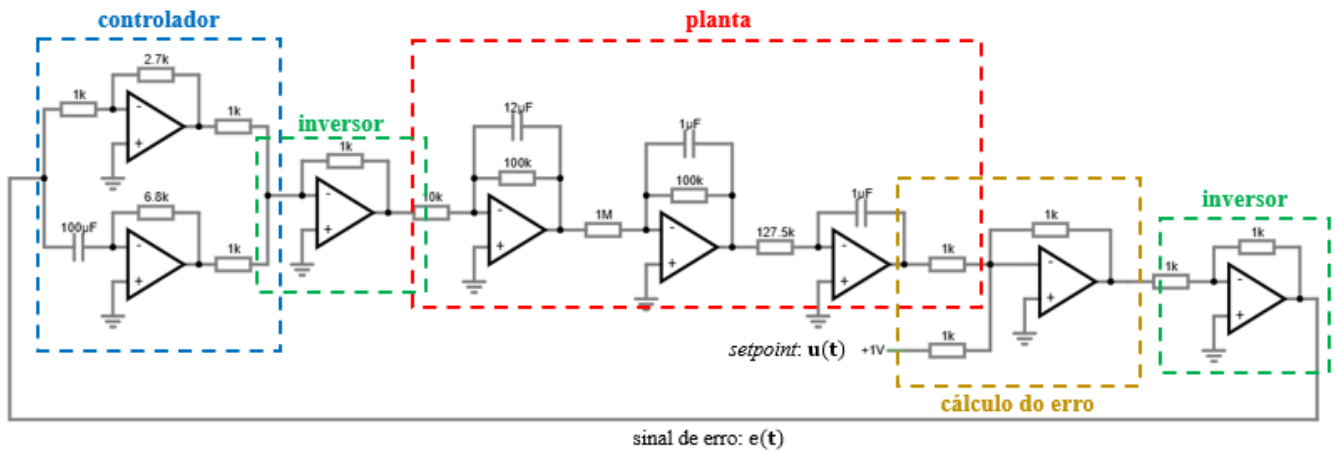


Figura 29 Circuito em Malha Fechada do Sistema do Levitador Pneumático com Controlador  
Fonte: Autor

Dada a Figura 29, tem-se: no princípio, vê-se o controlador da Figura 28. O sinal de controle é gerado invertido, logo ele é tido como entrada de um amplificador inversor de ganho unitário para, assim, ser replicado como entrada da planta.

Logo após, vê-se a soma do sinal da planta invertido com a entrada – no caso da figura a entrada é um degrau unitário. Em suma, fez-se uma subtração do sinal de entrada com o sinal da planta, gerando o sinal de erro. O erro é, também, gerado invertido. Logo, ao final do circuito, vê-se um amplificador inversor de ganho unitário, o qual corrige o sinal de erro para que, então, este sinal seja replicado no controlador, fechando a malha.

## 4 RESULTADOS

O circuito da Figura 29, o qual implementa o sistema controlado, teve a seguinte resposta como sinal de saída da planta para uma entrada em degrau:

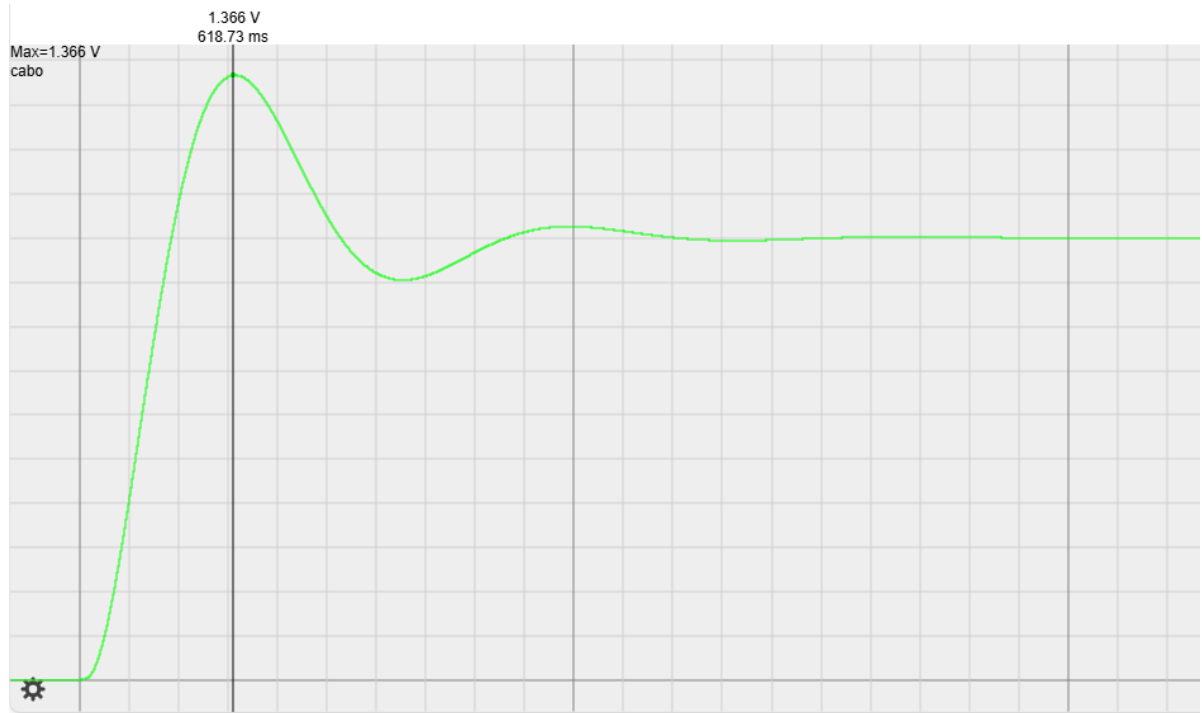


Figura 30 Sinal de Saída da Planta Controlada com o *overshoot* destacado  
Fonte: Autor

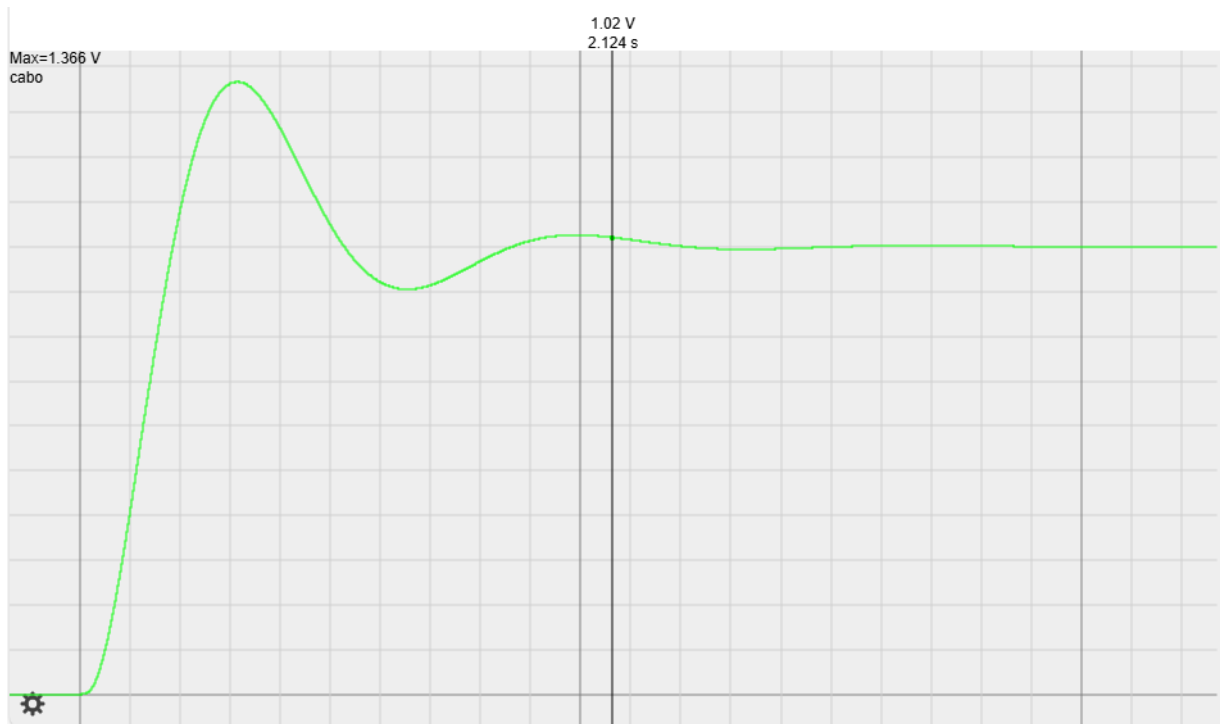


Figura 31 Sinal de Saída da Planta Controlada com o tempo de acomodação destacado  
Fonte: Autor

Na simulação do sistema controlado, demonstrado no gráfico da Figura 30, teve-se um *overshoot* de  $M_p(\%) = 36.6\%$ , um instante de pico  $t_p \cong 0.6$  s e um tempo de acomodação  $t_s = 2.129$  s. Os critérios do projeto foram, praticamente, satisfeitos e o erro em regime permanente foi atingido. Esses resultados, comparados com os sinais teóricos das Figuras 23 e 24, não foram divergentes.

Para adquirir uma melhora nos parâmetros especificados no projeto (*overshoot* e tempo de acomodação) pode-se considerar um ajuste fino, onde produz-se pequenos desvios nos parâmetros do controlador avaliando-se os efeitos destes desvios. Caso produza uma piora, o que pode ocorrer, desconsidera-se os desvios. Caso produza uma melhora, atinge-se o objetivo do ajuste fino. Porém, vê-se, a partir da Figura 23, que o *overshoot* e o tempo de acomodação interferem entre si, sendo que a melhora de um gera a piora do outro. Logo, no ajuste fino, não se encontrará um ponto perfeito de operação, sendo necessária a avaliação desses parâmetros pelo projetista e, também, a definição de qual ponto de operação ele deseja que o processo opere.

## 5 CONCLUSÃO

O objetivo do trabalho foi a discussão acerca de controladores PID implementados com amplificadores operacionais e o projeto e simulação do controle de uma planta, também implementada com amplificadores. Utilizou-se de um levitador pneumático como planta a ser controlada. A planta foi modelada matematicamente e foi projetado um controlador PD via Método do Lugar Geométrico das Raízes. Não foi projetada a parcela integrativa do controlador, pois foi visto que a planta, em sua função de transferência, já possuía um polo integrador (polo na origem do Plano de Laplace), mostrando que conhecer a função de transferência da planta é vantajoso.

O objetivo foi atingido, pois conseguiu-se projetar um controlador que atendesse as especificações do projeto. Também, pelo motivo de que tanto o levitador pneumático, quanto o controlador, foram simulados com amplificadores operacionais, tornando o controle contínuo e analógico. Salienta-se que o sistema apresentou, ao final, um tempo de resposta e um sobressinal que satisfizeram as especificações do projeto do controlador.

Considerou-se satisfatórios os resultados obtidos, tendo uma percepção de que o projeto pode não dar uma resposta totalmente condizente com o requerido, o que se observa em relação ao *overshoot* e ao tempo de acomodação. Essas duas características interferem entre si, sendo que o melhoramento de uma causa a piora da outra, necessitando, então, de um ajuste fino manual quando implementado o controlador.

O método de projeto via gráfico de lugar das raízes é uma ótima solução matemática para sistemas de ordem superior a 2 (podendo ser usado nos sistemas de ordem menor), sendo de fácil implementação com resultados bons e coerentes.

Como trabalhos futuros sugere-se: a implementação em *hardware* de controladores analógicos contínuos para plantas simuladas e/ou reais; estudo sobre dispositivos analógicos modernos que podem ser utilizados para controle de sistemas dinâmicos; estudo didático-pedagógico do ensino de teoria de controle nas universidades visando o maior interesse dos alunos.

## REFERÊNCIAS

- Nise, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2023.
- Dorf, Richard C.; Bishop, Robert H. **Sistemas de Controle Modernos**. 13.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2023.
- Ogata, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 5.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- Neves, Breno Henrique Medeiros. **Implementação de Controladores P, PI e PID por meio de Amplificadores Operacionais**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica (Controle e Automação) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.
- Tonidandel, Danny Augusto Vieira. **Entre o Real e o Complexo: Uma Visão Unificada do Conceito de Transformada**. 2011. Dissertação de Mestrado (Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.
- Firmino, G. L.; Siqueira, A. M. O. **A Matemática no Ensino da Engenharia**. The Journal of Engineering and Exact Sciences. n. 3, p. 331-345, 2017.
- Jaimes, L. E. G.; Arroyave-Giraldo, M. **Modelación, Simulación y Control de un Levitador Neumático**. Revista Politécnica. n. 20, p. 59-66, 2015.
- Da Silva Jr., João Manoel Gomes; Banzanella, Alexandre Sanfelice. **Ajuste de Controladores PID**. 2003. Disponível em <<https://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/>>. Acesso em: 10 set. 2024.
- Site Inovação Tecnológica. **Solucionador matemático impulsiona computadores analógicos**. 2019. Disponível em: <[www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=solucionador-matematico-impulsiona-computadores-analogicos](http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=solucionador-matematico-impulsiona-computadores-analogicos)>. Acesso em: 10 set. 2024.