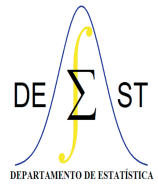




UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM ESTATÍSTICA



O Método Numérico na Inferência do Modelo Geral de Degradação: Aplicação a Dados de Laser

Caio Freitas Malaquias

Ouro Preto-MG
Outubro de 2024

Caio Freitas Malaquias

O Método Numérico na Inferência do Modelo Geral de Degradação: Aplicação a Dados de Laser

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Estatística.

Orientador(a)

Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – UFOP
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA – DEEST

Ouro Preto-MG

Outubro de 2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

M237o Malaquias, Caio Freitas.
O método numérico na inferência do modelo geral de degradação
[manuscrito]: aplicação a dados de laser. / Caio Freitas Malaquias. - 2024.
44 f.: il.: , gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Estatística .

1. Estatística. 2. Inferência estatística. 3. Confiabilidade. 4. Lasers. I.
Oliveira, Rivert Paulo Braga. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III.
Título.

CDU 519.23

Bibliotecário(a) Responsável: Soraya Fernanda Ferreira e Souza - SIAPE: 1.763.787



FOLHA DE APROVAÇÃO

Caio Freitas Malaquias

O Método Numérico na Inferência do Modelo Geral de Degradação: Aplicação a Dados de Laser

Monografia apresentada ao Curso de Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística

Aprovada em 10 de outubro de 2024

Membros da banca

Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dra. Carolina Silva Pena (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Eduardo Bearzoti (Universidade Federal de Ouro Preto)

Professor Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 10/10/2024



Documento assinado eletronicamente por **Rivert Paulo Braga Oliveira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/10/2024, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carolina Silva Pena, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/10/2024, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Bearzoti, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/10/2024, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0793696** e o código CRC **831CC20B**.

Dedico este trabalho aos meus pais, Wadson e Adriana e à minha esposa, Renata.

Graças a eles eu caminhei até o fim deste curso.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo sustento durante essa trajetória.

À minha esposa Renata que me acompanha desde o ensino médio.

Agradeço aos meus pais, Wadson e Adriana e aos meus sogros, Guilhermina e Natánias, pelo apoio.

Agradeço, também, aos professores do departamento de Estatística da UFMG e da UFOP, em especial meu orientador Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira, que não mediu esforços para que este trabalho fosse concluído.

"A matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o universo."

Galileu Galilei

O Método Numérico na Inferência do Modelo Geral de Degradação: Aplicação a Dados de Laser

Autor: Caio Freitas Malaquias

Orientador(a): Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira

RESUMO

Neste estudo, utilizou-se uma base de dados de degradação de emissores de laser para explorar o Modelo Geral de Degradação e estimação das quantidades de interesse através do Método Numérico. Detalhou-se os procedimentos da simulação de Monte Carlo, usado para obter estimativas pontuais e construir intervalos de confiança para as estatísticas de interesse. A metodologia foi aplicada aos dados de laser e as estimativas resultantes apresentadas e comparadas com os resultados do Método Aproximado obtidos por Pessoa (2024). Os achados ensejaram estudos futuros sobre vício e variabilidade das estimativas obtidas via Método Numérico.

Palavras-chave: Modelo Geral de Degradação, Método Numérico, Emissores de Laser, Confiabilidade.

The Numerical Method in Inference of the General Degradation Path Model: Application to Laser Data

Author: Caio Freitas Malaquias

Advisor: Prof. Dr. Rivert Paulo Braga Oliveira

ABSTRACT

In this study, a laser emitter degradation dataset was used to explore the General Degradation Path Model and estimate quantities of interest through the Numerical Method. The procedures of the Monte Carlo simulation, employed to obtain point estimates and construct confidence intervals for the statistics of interest, were detailed. The methodology was applied to the laser data, and the resulting estimates were presented and compared with the results from the Approximate Method obtained by Pessoa (2024). The findings prompted future studies on bias and variability of the estimates obtained via the Numerical Method.

Keywords: General Degradation Path Model, Numerical Method, Laser Emitters, Reliability.

Lista de figuras

1	Perfis de Degradação das Unidades Emissoras de Laser	p. 26
2	Confiabilidade $R(T)$: Kaplan-Meier versus Modelos Paramétricos (ajustes Weibull e Lognormal. Fonte: Pessoa (2024)) e versus Método Numérico. O melhor ajuste é aquele em que a maioria dos pontos se sobrepõe à reta $x = y$	p. 29

Lista de tabelas

1	Degradação das unidades emissoras de laser. Fonte: retirado de Pessoa (2024)	p. 17
2	Estatísticas de Interesse - Método Numérico e Método Aproximado (ajustes Weibull e Lognormal. Fonte: Pessoa (2024))	p. 28

Lista de abreviaturas e siglas

UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto

DEEST – Departamento de Estatística

MGD – Modelo Geral de Degradação

iid – independente e identicamente distribuído

N – distribuição Normal

fdp – função densidade de probabilidade

fda – função distribuição acumulada

MTTF – tempo médio até a falha

IC – Intervalo de Confiança

Lista de símbolos

Y_{ij} (variável aleatória da degradação da i -ésima unidade sob teste, no j -ésimo tempo de medição, com $i = 1, 2, \dots, n$ unidades sob teste, $j = 1, 2, \dots, m_i$ tempos de medição da i -ésima unidade)

t_{ij} (j -ésimo tempo de medição do i -ésimo item sob teste)

n (número de itens sob teste)

m_i (número de medições do i -ésimo item sob teste)

β_i (vetor de parâmetros da equação $f_d(t_{ij}, \beta_i)$)

$f_d(t_{ij}, \beta_i)$ (forma funcional determinística que modela os perfis de degradação de cada unidade amostral i)

ε_{ij} (erro do Modelo Geral de Degradação, da i -ésima unidade sob teste, no j -ésimo tempo)

σ_ε^2 (variância dos erros ε_{ij})

T (variável aleatória do tempo até a falha)

f (função densidade de probabilidade - fdp)

F (função distribuição acumulada)

β (matriz de parâmetros da equação $f_d(t, \beta)$)

$f_d(t, \beta)$ (equação determinística que modela conjuntamente os n perfis de degradação)

θ (vetor de parâmetros de uma distribuição de probabilidade genérica. Neste texto pode se referir tanto a β , quanto β_i , ou quanto a T . O contexto deixará claro.)

D_f (limiar de degradação definidor de falha)

R (função de confiabilidade)

μ_β (vetor médias dos efeitos aleatórios do MGD com estimação via Método Numérico)

Σ_β (matriz de variância e covariância dos efeitos aleatórios do MGD com estimação via Método Numérico)

α_i (vetor de efeitos fixos do MGD com estimação via Método Numérico)

I_E (estatísticas de interesse sobre $F(T)$)

A_E . (item amostral Monte Carlo das estatísticas de interesse sobre $F(T)$)

q (tamanho da amostra Monte Carlo para as estatísticas de interesse)

$(1 - \alpha)\%$ (nível de confiança)

Sumário

1	Introdução	p. 16
1.1	Contextualização dos Dados	p. 16
1.2	Organização do Trabalho	p. 18
2	Objetivos	p. 19
3	Metodologia	p. 20
3.1	Modelo Geral de Degradação	p. 20
3.2	Método Numérico	p. 22
3.3	Monte Carlo para a construção de intervalos de confiança	p. 23
	Passos para a Aplicação do Método de Monte Carlo: aplicação ao método numérico	p. 23
4	Resultados e Discussão	p. 25
4.1	Aplicação do Método Numérico aos Dados de Laser	p. 25
4.2	Estatísticas de Interesse: Estimativas Pontuais e Intervalares	p. 27
	Análise dos resultados	p. 28
5	Conclusão	p. 31
	Referências	p. 33
	Anexo A – Rotinas do R	p. 34

1 Introdução

A confiabilidade de máquinas e equipamentos é uma preocupação central para as empresas. Contudo, determinar quando as máquinas irão falhar pode ser um desafio, especialmente porque os modelos tradicionais de confiabilidade, baseados na suposição de normalidade dos estimadores de máxima verossimilhança, dependem da ocorrência de falhas que podem demorar para acontecer. Para contornar essa limitação, os modelos gerais de degradação se mostram essenciais, pois permitem a obtenção de estimativas sobre a distribuição dos tempos de falha através do monitoramento da degradação dos equipamentos ao longo do tempo, inclusive utilizando técnicas de testes acelerados como descrito por Nelson (2004).

Um trabalho pioneiro na área de dados de degradação é o livro Meeker e Escobar (1998), que reúne uma variedade de modelos de degradação, incluindo os métodos numérico e aproximado. Esse livro também apresenta um estudo de caso envolvendo dados de degradação de laser, que são reanalisados neste texto utilizando o método numérico.

A Seção 1.1 descreve o contexto em que serão aplicados os modelos de degradação.

1.1 Contextualização dos Dados

Os dados apresentados na Tabela 1 são extraídos de um exemplo do livro de Meeker e Escobar (1998)¹. Correspondem à degradação de quinze ($n = 15$) emissores de laser, com medições realizadas ao longo de um período total de $t_f = 4000$ horas, que representa o tempo final do experimento. As medições foram realizadas a cada 250 horas para cada unidade emissora de laser, registrando-se o percentual de aumento, de potência, na corrente de operação em relação à corrente nominal, que é aquela medida no início do teste. Para garantir a continuidade da emissão de luz com a mesma potência, é necessário ajustar a corrente de operação, pois a potência dos lasers decai com o tempo se a corrente

¹Neste texto acrescentaram-se aos dados a degradação zero para o tempo zero, em cada uma das unidades emissoras de laser.

permanecer constante. A degradação y é quantificada como o aumento percentual na corrente de operação. Um aumento superior ao limiar de falha $D_f = 10\%$ neste percentual indica que o laser "falhou".

Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste	Unidade	Tempo	Desgaste
1	0	0.00	4	0	0.00	7	0	0.00	10	0	0.00	13	0	0.00
1	250	0.47	4	250	0.36	7	250	0.36	10	250	0.41	13	250	0.30
1	500	0.93	4	500	0.62	7	500	0.92	10	500	1.49	13	500	0.74
1	750	2.11	4	750	1.36	7	750	1.21	10	750	2.38	13	750	1.52
1	1000	2.72	4	1000	1.95	7	1000	1.46	10	1000	3.00	13	1000	1.85
1	1250	3.51	4	1250	2.30	7	1250	1.93	10	1250	3.84	13	1250	2.39
1	1500	4.34	4	1500	2.95	7	1500	2.39	10	1500	4.50	13	1500	2.95
1	1750	4.91	4	1750	3.39	7	1750	2.68	10	1750	5.25	13	1750	3.51
1	2000	5.48	4	2000	3.79	7	2000	2.94	10	2000	6.26	13	2000	3.92
1	2250	5.99	4	2250	4.11	7	2250	3.42	10	2250	7.05	13	2250	5.03
1	2500	6.72	4	2500	4.50	7	2500	4.09	10	2500	7.80	13	2500	5.47
1	2750	7.13	4	2750	4.72	7	2750	4.58	10	2750	8.32	13	2750	5.84
1	3000	8.00	4	3000	4.98	7	3000	4.84	10	3000	8.93	13	3000	6.50
1	3250	8.92	4	3250	5.28	7	3250	5.11	10	3250	9.55	13	3250	6.94
1	3500	9.49	4	3500	5.61	7	3500	5.57	10	3500	10.45	13	3500	7.39
1	3750	9.87	4	3750	5.95	7	3750	6.11	10	3750	11.28	13	3750	7.85
1	4000	10.94	4	4000	6.14	7	4000	7.17	10	4000	12.21	13	4000	8.09
2	0	0.00	5	0	0.00	8	0	0.00	11	0	0.00	14	0	0.00
2	250	0.71	5	250	0.27	8	250	0.46	11	250	0.44	14	250	0.44
2	500	1.22	5	500	0.61	8	500	1.07	11	500	1.00	14	500	0.70
2	750	1.90	5	750	1.11	8	750	1.42	11	750	1.57	14	750	1.05
2	1000	2.30	5	1000	1.77	8	1000	1.77	11	1000	1.96	14	1000	1.35
2	1250	2.87	5	1250	2.06	8	1250	2.11	11	1250	2.51	14	1250	1.80
2	1500	3.75	5	1500	2.58	8	1500	2.40	11	1500	2.84	14	1500	2.55
2	1750	4.42	5	1750	2.99	8	1750	2.78	11	1750	3.47	14	1750	2.83
2	2000	4.99	5	2000	3.38	8	2000	3.02	11	2000	4.01	14	2000	3.39
2	2250	5.51	5	2250	4.05	8	2250	3.29	11	2250	4.51	14	2250	3.72
2	2500	6.07	5	2500	4.63	8	2500	3.75	11	2500	4.80	14	2500	4.09
2	2750	6.64	5	2750	5.24	8	2750	4.16	11	2750	5.20	14	2750	4.83
2	3000	7.16	5	3000	5.62	8	3000	4.76	11	3000	5.66	14	3000	5.41
2	3250	7.78	5	3250	6.04	8	3250	5.16	11	3250	6.20	14	3250	5.76
2	3500	8.42	5	3500	6.32	8	3500	5.46	11	3500	6.54	14	3500	6.14
2	3750	8.91	5	3750	7.10	8	3750	5.81	11	3750	6.96	14	3750	6.51
2	4000	9.28	5	4000	7.59	8	4000	6.24	11	4000	7.42	14	4000	6.88
3	0	0.00	6	0	0.00	9	0	0.00	12	0	0.00	15	0	0.00
3	250	0.71	6	250	0.36	9	250	0.51	12	250	0.39	15	250	0.51
3	500	1.17	6	500	1.39	9	500	0.93	12	500	0.80	15	500	0.83
3	750	1.73	6	750	1.95	9	750	1.57	12	750	1.35	15	750	1.29
3	1000	1.99	6	1000	2.86	9	1000	1.96	12	1000	1.74	15	1000	1.52
3	1250	2.53	6	1250	3.46	9	1250	2.59	12	1250	2.98	15	1250	1.91
3	1500	2.97	6	1500	3.81	9	1500	3.29	12	1500	3.59	15	1500	2.27
3	1750	3.30	6	1750	4.53	9	1750	3.61	12	1750	4.03	15	1750	2.78
3	2000	3.94	6	2000	5.35	9	2000	4.11	12	2000	4.44	15	2000	3.42
3	2250	4.16	6	2250	5.92	9	2250	4.60	12	2250	4.79	15	2250	3.78
3	2500	4.45	6	2500	6.71	9	2500	4.91	12	2500	5.22	15	2500	4.11
3	2750	4.89	6	2750	7.70	9	2750	5.34	12	2750	5.48	15	2750	4.38
3	3000	5.27	6	3000	8.61	9	3000	5.84	12	3000	4.96	15	3000	4.63
3	3250	5.69	6	3250	9.15	9	3250	6.40	12	3250	6.23	15	3250	5.38
3	3500	6.02	6	3500	9.95	9	3500	6.84	12	3500	6.99	15	3500	5.84
3	3750	6.45	6	3750	10.49	9	3750	7.20	12	3750	7.37	15	3750	6.16
3	4000	6.88	6	4000	11.01	9	4000	7.88	12	4000	7.88	15	4000	6.62

Tabela 1: Degradação das unidades emissoras de laser. Fonte: retirado de Pessoa (2024)

1.2 Organização do Trabalho

Esta monografia está organizada da seguinte maneira. Na Seção 2, é definido o objetivo central do estudo, estabelecendo o escopo e as metas a serem alcançadas. A Seção 3 descreve a metodologia adotada, de modo que a Seção 3.1 aborda o referencial teórico do Modelo Geral de Degradação, a Seção 3.2 trata da inferência através do Método Numérico, e a Seção 3.3 do Método Monte Carlo para obtenção de estimativas pontuais e intervalares no contexto do Método Numérico. Na Seção 4, são conduzidas as análises dos dados de degradação dos emissores de laser, conforme apresentados na Seção 3, juntamente com uma discussão detalhada dos resultados obtidos. As considerações finais e as conclusões do estudo são apresentadas na Seção 5.

2 Objetivos

O propósito central deste estudo é introduzir os modelos gerais de degradação, juntamente com métodos de estimação dos parâmetros. Em seguida, o método numérico é empregado em dados de laser para proporcionar uma compreensão do mesmo em um cenário prático.

3 Metodologia

Apresentam-se nesta seção o Modelo Geral de Degradação e o Método Numérico para estimação dos parâmetros. Ao final, fornece-se o Método Monte Carlo para obtenção de estimativas pontuais e construção de intervalos de confiança das estatísticas de interesse.

3.1 Modelo Geral de Degradação

O Modelo Geral de Degradação (MGD) é utilizado para modelar a deterioração gradual de um sistema ou componente ao longo do tempo. Em vez de se concentrar apenas no tempo até a falha, o MGD foca no monitoramento de uma medida de degradação associada à falha, e pode ser usado para estimar a distribuição do tempo até a falha.

A equação do Modelo Geral Degradação é dada pela equação (3.1):

$$Y_{ij} = f_d(t_{ij}, \boldsymbol{\beta}_i) + \varepsilon_{ij}, \quad (3.1)$$

em que Y_{ij} é variável aleatória da degradação da i -ésima unidade sob teste, no j -ésimo tempo de medição, com $i = 1, 2, \dots, n$ unidades sob teste, $j = 1, 2, \dots, m_i$ tempos de medição da i -ésima unidade; t_{ij} é o j -ésimo tempo de medição do i -ésimo item sob teste, $\boldsymbol{\beta}_i$ é um vetor de parâmetros da equação $f_d(t_{ij}, \boldsymbol{\beta}_i)$ que modela os perfis de degradação de cada unidade i ; e ε_{ij} é o erro do Modelo Geral de Degradação que é independente e identicamente distribuído (iid), com distribuição normal $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

$f_d(t_{ij}, \boldsymbol{\beta}_i)$ é uma equação que descreve de forma determinística a evolução da degradação, em que uma parcela k dos efeitos do vetor $\boldsymbol{\beta}_i$ pode variar entre unidades (efeitos aleatórios e erros ε_{ij}) e outra parcela pode ser constante (efeitos fixos).

A distribuição do tempo de falha T para o modelo (3.1), é fornecida pela equação (3.2):

$$\begin{aligned}
F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) &= P(T \leq t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) \\
&= P[f_d(t;\boldsymbol{\beta}) \geq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}],
\end{aligned} \tag{3.2}$$

para medidas de degradação não decrescentes com o tempo. Em que F é a função distribuição acumulada (fda) dos tempos de falha, $\boldsymbol{\beta}$ é a matriz de parâmetros da equação $f_d(t;\boldsymbol{\beta})$ que modela conjuntamente os n perfis de degradação, e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros da distribuição dos efeitos $\boldsymbol{\beta}$.

A equação (3.2) é interpretada como a fração de falhas no tempo t , isto é, a proporção de perfis de degradação que ultrapassa o limiar crítico D_f , o qual é pré-definido por questões físicas associadas à falha, até o tempo t .

Outra função importante para o contexto de Modelos de Degradação é a Função de Confiabilidade R , que é a probabilidade de um item superar o limiar de degradação D_f num determinado tempo t . A Função de Confiabilidade $R_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta})$ é dada pela equação (3.3):

$$R_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) = 1 - F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}). \tag{3.3}$$

Para medidas de degradação não decrescentes com o tempo a fração de falhas é dada pela equação (3.4):

$$\begin{aligned}
F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) &= P(T \leq t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}) \\
&= P[f_d(t;\boldsymbol{\beta}) \leq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

A equação assumida para $f_d(t;\boldsymbol{\beta})$ não precisa ser não decrescente para se obter $P[f_d(t;\boldsymbol{\beta}) \geq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}]$, nem $f_d(t;\boldsymbol{\beta})$ precisa ser não crescente para se obter $P[f_d(t;\boldsymbol{\beta}) \leq D_f|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}]$.

Uma vez estimado o vetor de efeitos fixos $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$ que indexa a distribuição do vetor de parâmetros da distribuição $\boldsymbol{\beta}$, pode-se realizar a estimação dos quantis da distribuição do tempo de falha T .

Para equações $f_d(t;\boldsymbol{\beta})$ simples, a distribuição $F_{T|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\theta})$ pode ser obtida de forma

analiticamente fechada. Se a equação de $f_d(t_{ij}; \boldsymbol{\beta}_i)$ é polinomial, e a dimensão do vetor $\boldsymbol{\beta}_i$ é maior que 1, a obtenção em forma analítica de $F_{T|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}}(t|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$ torna-se complicada e a avaliação é feita numericamente (foco principal deste texto).

3.2 Método Numérico

Para casos nos quais o modelo de degradação incorpora mais de um efeito aleatório, a obtenção de uma expressão fechada para $F(t)$ por meio do método analítico deixa de ser uma tarefa simples. Dada essa complexidade, o método numérico emerge como uma opção.

Através da função de verossimilhança é possível estimar os parâmetros do modelo. Para as medidas de degradação $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)$, com $\mathbf{Y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{im})$ e $Y_{ij} \stackrel{ind}{\sim} N(f_d(t_{ij}, \boldsymbol{\beta}_i), \varepsilon_{ij})$, a função de verossimilhança é expressa como na equação (3.5):

$$f_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2) = \prod_{i=1}^n \int_{\boldsymbol{\beta}_i} \left\{ \left[\prod_{j=1}^{m_i} N(f_{di}(t_{ij}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_i); \sigma_\varepsilon^2) \right] f_{\boldsymbol{\beta}_i|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\beta}_i|\boldsymbol{\theta}) \right\} d\boldsymbol{\beta}_i. \quad (3.5)$$

É possível assumir que $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{ik}) \sim \text{Normal Multivariada}_k(\boldsymbol{\mu}_\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_\boldsymbol{\beta})$, em que $\boldsymbol{\mu}_\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de médias e $\boldsymbol{\Sigma}_\boldsymbol{\beta}$ é a matriz de variância e covariância. O vetor $\boldsymbol{\alpha}$ corresponde aos efeitos fixos do modelo.

Para estimação dos parâmetros pode-se recorrer às funções “lme()”(Modelo Linear de Efeitos Mistos) e “nlme()”(Modelo Não-Linear de Efeitos Mistos) (PINHEIRO; BATES, 2023, 2000), disponíveis no software R (R Core Team, 2023).

Para obtenção de $F(t)$ e outras quantidades de interesse, pode-se utilizar a simulação de Monte Carlo, que demanda uma carga computacional menor. Essa abordagem proporciona uma alternativa eficiente, especialmente diante da complexidade do modelo de degradação com múltiplos efeitos aleatórios.

Para facilitar o entendimento, já fornecendo o modelo que será adotado nesse texto, assumo que na equação (3.1) do MGD a função determinística seja dada pela equação (3.6):

$$f_d(t_{ij}, \boldsymbol{\beta}_i) = \beta_i t, \quad (3.6)$$

ou seja, o modelo adotado tem intercepto $\boldsymbol{\alpha}_i = \alpha_i = 0$ para todos os perfis de degradação e pode ser escrito como na equação (3.7):

$$Y_{ij} = \beta_i t + \varepsilon_{ij}, \quad (3.7)$$

Então assume-se que $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i1}) = \beta_i \sim N(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$, em que μ_β é média dos β_i 's e Σ_β é a variância.

3.3 Monte Carlo para a construção de intervalos de confiança

O Método de Monte Carlo é uma técnica de simulação estocástica utilizada para estimar a distribuição de variáveis de interesse em sistemas complexos, especialmente quando a solução analítica exata é difícil ou impossível de se obter. No contexto do Modelo Geral de Degradação (MGD), o Método de Monte Carlo pode ser usado para realizar estimativas pontuais e construir intervalos de confiança para parâmetros estimados, estimar a distribuição dos tempos de falha, a função de confiabilidade, percentis de qualquer ordem, valor esperado, e outras quantidades de interesse, além de avaliar a incerteza associada. Para maiores esclarecimentos sobre essas estatísticas de interesse no contexto de confiabilidade de sistemas reparáveis veja Freitas e Colosimo (1997), Lawless (2003), Colosimo e Giolo (2021). Os passos do método apresentado a seguir foram adaptados de Meeker e Escobar (1998, pág. 330).

Passos para a Aplicação do Método de Monte Carlo: aplicação ao método numérico

Especificação do Modelo: primeiramente, é necessário definir o modelo de degradação com parâmetros que descrevem o comportamento da degradação ao longo do tempo.

Como exemplo e a título de sintetizar o texto, suponha que o modelo adotado seja aquele da equação (3.7).

Geração de Amostras Aleatórias: para simular possíveis cenários de degradação, amostras aleatórias são geradas para os parâmetros do modelo. Essas amostras podem ser obtidas a partir de distribuições de probabilidade previamente ajustadas aos dados reais.

De posse do modelo apresentado na equação (3.7) basta que se gere uma amostra de tamanho “ s ” a partir das estimativas dos parâmetros do ajuste da distribuição $N(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$ do método numérico da Seção 3.2, para que se obtenha uma amostra $\beta_s = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ de efeitos aleatórios simulados.

Obtenção de tempos de falha simulados: dada a amostra gerada, da equação determinística de degradação (3.6), e do limiar de falha D_f , obtém-se os tempos de falha simulados. Por exemplo, para o exemplo do passo anterior obtém-se um vetor simulado de tempos de falha T_s conforme a equação (3.8):

$$T_s = \frac{D_f}{\beta_s}. \quad (3.8)$$

Cálculo de Estatísticas de Interesse: as estatísticas de interesse I_E , como a função de confiabilidade, variância e percentis do tempo de falha, entre outros, podem então ser calculadas com base na amostra de tempos de falha simulados no passo anterior.

Amostra Monte Carlo das Estatísticas de Interesse: repita os passos anteriores até que se obtenha A_{E1}, \dots, A_{Eq} , q amostras de tamanho “ s ” de interesse do passo anterior.

Estimativas pontuais e Intervalos de Confiança: o estimador pontual para a estatística de interesse I_E pode ser obtido como na equação (3.9):

$$\hat{I}_E = \sum_{l=1}^q \frac{A_{El}}{q}. \quad (3.9)$$

Um intervalo de confiança de $(1 - \alpha)\%$ para estatística de interesse I_E pode ser obtido a partir dos percentis empíricos $(\alpha/2)\%$ e $(1 - \alpha/2)\%$ amostra A_{E1}, \dots, A_{Eq} .

4 Resultados e Discussão

Nesta Seção é realizada a implementação dos métodos apresentados na Seção 3 aos dados de degradação de de emissores de laser fornecidos na Seção 1.1.

A Figura 1 apresenta os perfis da degradação para todas as unidades emissoras de laser que constam da base de dados da Tabela 1. As medidas de degradação correspondem aos pontos e as cores são referentes a diferentes itens amostrais. O limiar de degradação $D_f = 10\%$ é representado pela linha tracejada vermelha, e o tempo final de estudo $t_f = 4000hs$ pela linha tracejada em cinza.

É notório que os perfis de degradação são linearmente crescentes com o tempo, o que justifica a adoção de uma função determinística do tipo linear como o da equação (3.6), e do modelo de degradação na equação (3.7). A primeira falha ocorre entre 3250 e 3500 horas, conforme observado dentre os 3 perfis que cruzam o limiar de degradação $D_f = 10\%$.

4.1 Aplicação do Método Numérico aos Dados de Laser

Conforme citado anteriormente, adota-se a função determinística do tipo linear como o da equação (3.6) (a lembrar, $f_d(t_{ij}, \beta_i) = \beta_i t$), e do modelo de degradação na equação (3.7) (a lembrar, $Y_{ij} = \beta_i t + \varepsilon_{ij}$), para descrição dos perfis de degradação na Figura 1. Assume-se $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Uma vez que se tratam de 15 unidades emissoras de laser, então $i = 1, 2, \dots, n = 15$; os tempos de medição em cada unidade são 17, portanto $j = 1, 2, \dots, m_i = 17$. O parâmetro β_i de cada unidade corresponde à respectiva taxa/velocidade de degradação. O termo t_{ij} diz respeito ao j-ésimo tempo de medição do i-ésimo item sob teste.

O modelo assumido para os perfis de degradação possui intercepto nulo, e adotou-se a medida $y_{i1} = 0$, para todas as unidades emissoras de laser.

A fim de se proceder com a inferência conjunta das $n = 15$ retas de regressão, con-

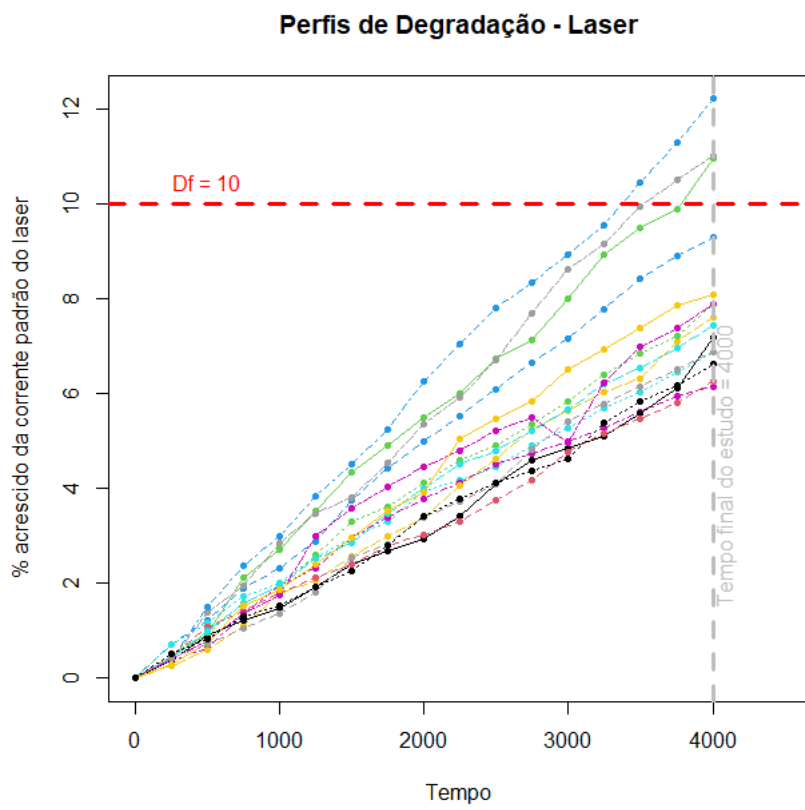


Figura 1: Perfis de Degradação das Unidades Emissoras de Laser

deserado o modelo de efeitos aleatórios do Método Numérico apresentado na Seção 3.2, e dada a função de verossimilhança na equação (3.5), utilizou-se a função “lme()” do pacote “nlme” (PINHEIRO; BATES, 2023) do software R (R Core Team, 2023). Demais análises descritivas, gráficos e rotinas de programação foram desenvolvidas neste mesmo software e são apresentadas no Anexo A.

4.2 Estatísticas de Interesse: Estimativas Pontuais e Intervalares

Os resultados apresentados na Tabela 2 correspondem às estimativas das estatísticas de interesse obtidas através do Método Numérico. Também são apresentadas as contrapartidas via Método Aproximado, com ajuste pelas distribuições Lognormal e Weibull, extraídas de Pessoa (2024). Para o Método Numérico as estatísticas de interesse são obtidas empiricamente a partir do vetor \mathbf{T}_s e conforme os passos do método Monte Carlo na Seção 3.3 (veja a função “ICNUM” no Anexo A para detalhes). No caso do Método Aproximado recomenda-se a leitura do respectivo texto supracitado. As estatísticas de interesse são, a confiabilidade no tempo $4500hs$, o tempo médio até a falha (MTTF), o percentil 1% P1, percentil 5% P5, percentil 10% P10, percentil 50% P50 e percentil 80% P80, suas estimativas pontuais, seguidas do Intervalo de Confiança (IC) e amplitude do mesmo.

Na Figura 2 é possível comparar a qualidade de ajuste dos diferentes métodos: os resultados para o trabalho de Pessoa (2024) e através do Método Numérico adotado neste texto. É possível perceber que o Método Numérico apresenta ajuste satisfatório para os dados de laser, embora aqueles do Método Aproximado apresentem melhor qualidade de ajuste.

Apesar do Método Numérico apresentar resultados similares aos do Método Aproximado (em se tratando dos ajustes Weibull e Lognormal), existe uma possibilidade de que as estimativas advindas do Método Numérico sejam provenientes de má especificação da distribuição dos efeitos aleatórios β . Um texto que detalha os efeitos dessa má especificação é o trabalho de Toledo (2007). Ao leitor mais interessado, existem soluções que permitem assumir efeitos aleatórios não normais, como aquelas em Almeida (2011), para citar uma possibilidade em termos de inferência clássica.

Tabela 2: Estatísticas de Interesse - Método Numérico e Método Aproximado (ajustes Weibull e Lognormal. Fonte: Pessoa (2024))

Medida	Estimativa	IC (95%)	Amplitude
R4500 - Numérico	0,6498464	(0,6404 ; 0,6591)	0,0187
MTTF - Numérico	5201,599	(5160,180 ; 5232,658)	72,478
P1 - Numérico	3207,3870	(3172,83 ; 3241,57)	68,74
P5 - Numérico	3566,6060	(3542,80 ; 3590,86)	48,06
P10 - Numérico	3793,3850	(3771,16 ; 3816,26)	45,10
P50 - Numérico	4891,5950	(4864,74 ; 4918,84)	54,10
P80 - Numérico	6039,0480	(5991,99 ; 6086,98)	94,99
R4500 - Aproximado Weibull	0,7550	(0,6167 ; 0,8460)	0,2293
MTTF - Aproximado Weibull	5095,815	(4670,87 ; 5507,07)	836,20
P1 - Aproximado Weibull	2736,44	(2506,34 ; 2950,29)	443,95
P5 - Aproximado Weibull	3495,55	(3197,71 ; 3766,48)	568,77
P10 - Aproximado Weibull	3902,66	(3577,74 ; 4200,25)	622,52
P50 - Aproximado Weibull	5173,09	(4747,44 ; 5594,86)	847,41
P80 - Aproximado Weibull	5875,31	(5381,60 ; 6346,22)	964,62
R4500 - Aproximado Lognormal	0,6968	(0,5058 ; 0,8910)	0,3852
MTTF - Aproximado Lognormal	5104,2110	(4603,12 ; 5657,00)	1053,88
P1 - Aproximado Lognormal	3109,59	(2604,20 ; 3852,90)	1248,70
P5 - Aproximado Lognormal	3573,56	(3090,59 ; 4255,89)	1165,30
P10 - Aproximado Lognormal	3848,58	(3382,95 ; 4480,99)	1098,04
P50 - Aproximado Lognormal	4999,02	(4503,00 ; 5537,02)	1034,02
P80 - Aproximado Lognormal	5935,78	(5232,16 ; 6632,16)	1400,01

Análise dos resultados

Na Tabela 2 observa-se que o tempo médio até a falha (MTTF) estimado pelo Método Numérico foi de 5201,599 horas, com um IC de 95% entre 5160,180 e 5232,658, e uma amplitude de 72,478. Em contrapartida, o MTTF estimado pelo método Aproximado (modelo Weibull) foi de 5095,815 horas, com um IC de 95% mais amplo, variando de 4670,87 a 5507,07, e amplitude de 836,20.

Isso sugere que o Método Numérico oferece uma estimativa mais precisa, visto que a amplitude do IC é consideravelmente menor em comparação à estimativa do Método Aproximado com ajuste Weibull¹.

Outras medidas importantes são os percentis, como o percentil 1% P1, percentil 5% P5, percentil 10% P10, percentil 50% P50 e percentil 80% P80. Para o Método Numérico, o

¹O trabalho de Pessoa (2024) demonstrou que a amplitude das estimativas obtidas pelo Método Aproximado com ajuste Weibull é majoritariamente menor que aquelas com o ajuste Lognormal. Por esse motivo, para evitar repetição de comentários, os resultados do Método Aproximado com ajuste Lognormal são apresentados, contudo não são comentados.

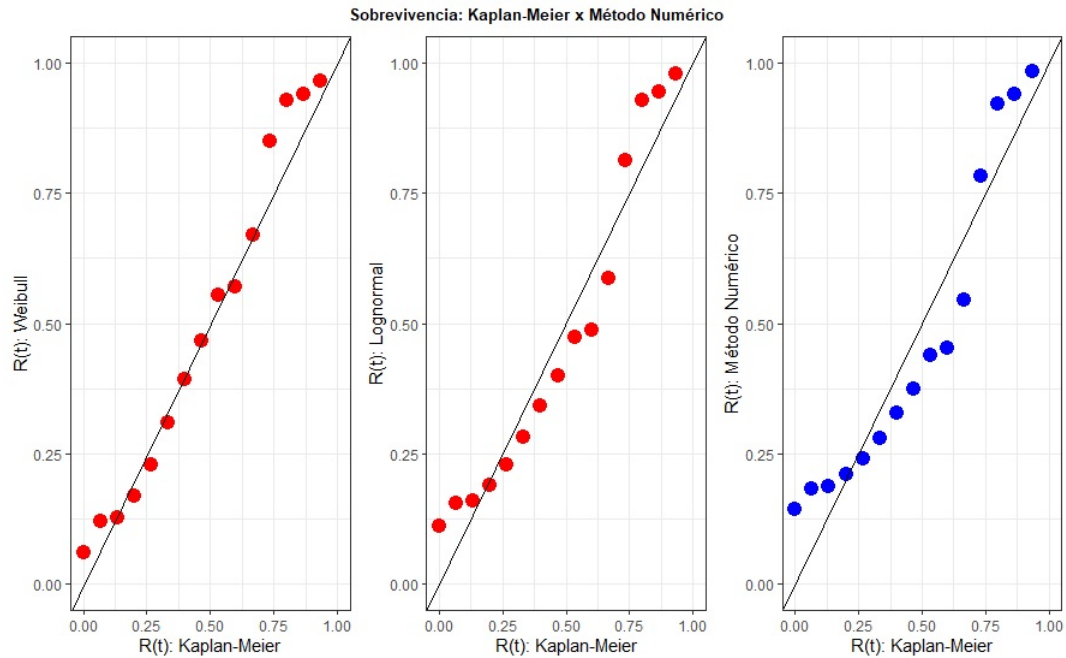


Figura 2: Confiabilidade $R(T)$: Kaplan-Meier versus Modelos Paramétricos (ajustes Weibull e Lognormal. Fonte: Pessoa (2024)) e versus Método Numérico. O melhor ajuste é aquele em que a maioria dos pontos se sobrepõe à reta $x = y$

percentil 1% foi estimado em 3207,3870, enquanto o Weibull apontou 2736,44, este último com maior amplitude do IC . Da mesma forma, os percentis de 5%, 10%, 50% e 80% apresentaram menor variabilidade no Método Numérico do que na estimativa baseada em Weibull.

Ainda, a estimativa para a confiabilidade em 4500 horas (R_{4500}) no Método Numérico a estimativa é de 0,6498, enquanto o Método Aproximado com ajuste Weibull apresenta uma confiabilidade mais alta, de 0,7550. Isso significa que, de acordo com o Método Aproximado, a confiabilidade do sistema em 4500 horas seria maior do que a estimada pelo Método Numérico.

Contudo, o IC para o Método Numérico (0,6404 ; 0,6591) é muito mais estreito em comparação ao IC para o Aproximado (0,6167 ; 0,8460). Isso indica que o Método Numérico oferece uma estimativa de confiabilidade mais precisa, com menor variabilidade.

Embora o Método Aproximado estime uma maior confiabilidade para 4500 horas, a grande amplitude do intervalo de confiança sugere uma maior incerteza nessa estimativa. O Método Numérico, embora apresente uma confiabilidade ligeiramente menor, oferece uma estimativa mais precisa e com menor variação, o que pode ser considerado uma vantagem em termos de robustez da estimativa.

Apesar dos resultados apresentados pelo método numérico indicarem menor variabilidade para as estimativas obtidas, e fornecerem estimativas pontuais próximas àquelas do Método Aproximado (ajustes Weibull e Lognormal), é preciso cautela. O trabalho de Toledo (2007) aponta que o menor percentual de perfis que ultrapassa o limiar de falha até o fim do estudo pode acarretar vícios das estimativas do método numérico, principalmente em casos de má especificação dos efeitos aleatórios. No que diz respeito à menor variabilidade, naquele texto foi observado exatamente o contrário para os dados que foram simulados, contudo o número de perfis estudado era de 50, e não 15, como no caso dos dados de emissores laser.

5 Conclusão

Este trabalho aplicou o Método Numérico de inferência em Modelos de Degradação aos dados de emissores de laser de Meeker e Escobar (1998).

Com base nos resultados apresentados na Tabela 2, é possível realizar algumas considerações importantes sobre o desempenho dos Métodos Numérico e Aproximado na estimação de confiabilidade e percentis de falha.

A estimativa da confiabilidade em 4500 horas pelo método numérico é de 0,6498, com um intervalo de confiança estreito (0,6404 a 0,6591), o que sugere maior precisão e consistência dos resultados. A amplitude de apenas 0,0187 reforça essa precisão.

Os percentis P1, P5, P10, P50 e P80, estimados pelo método numérico, apresentam intervalos de confiança mais estreitos e amplitudes menores, indicando maior precisão nas estimativas. Por exemplo, o percentil P1 tem uma amplitude de apenas 68,74 horas, enquanto o percentil P80 tem uma amplitude de 94,99 horas. Em contraste, os percentis estimados pelo método Aproximado apresentam amplitudes maiores.

O Método Numérico apresentou menor variabilidade para a estimativa das estatísticas de interesse, especialmente em relação ao MTTF, devido à menor amplitude dos intervalos de confiança e à consistência dos percentis. Por outro lado, o Método Aproximado (com distribuição Weibull) apresentou uma maior dispersão, o que pode indicar menor precisão nas previsões de falha.

Apesar dos resultados aparentemente melhores, é preciso cautela. O trabalho de Toledo (2007) acusa vícios das estimativas do método numérico em casos de má especificação dos efeitos aleatórios e quando poucos perfis de degradação ultrapassam o limiar de degradação. Ademais, naquele texto foi observado maior variabilidade para as estimativas do Método Numérico para os dados que foram simulados, contudo o número de perfis estudado era de 50, e não 15, como no caso dos dados de emissores laser. Sugere-se a repetição dos estudos de Toledo (2007) para distintos números de perfis de degradação, uma vez que os resultados das análises de dados de laser parecem contradizer as simulações

daquele texto.

Referências

- ALMEIDA, C. P. de. *Métodos numéricos de estimação para modelos de degradação como efeitos aleatórios não normais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Julho 2011.
- COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. *Análise de sobrevivência aplicada*. [S.l.]: Editora Blucher, 2021.
- FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A. *Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados*. [S.l.]: Escola de Engenharia da UFMG/Fundacao Christiano Ottoni, 1997.
- LAWLESS, J. F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. 2nd. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003.
- MEEKER, W.; ESCOBAR, L. A. *Statistical Methods for Reliability Data*. 1. ed. [S.l.]: Wiley Series in Probability and Statistics: New York, 1998.
- NELSON, W. *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- PESSOA, P. H. R. *Modelo Geral de Degradação: Aplicação do Método Aproximado a Dados de Laser*. Monografia — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2024.
- PINHEIRO, J.; BATES, D. *nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models*. [S.l.], 2023. R package version 3.1-162. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=nlme>>.
- PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. New York: Springer, 2000.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2023. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- TOLEDO, M. L. G. *Ensaio de Degradação: estudo comparativo de métodos de análise de dados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Agosto 2007.

ANEXO A – Rotinas do R

```
1 > library('pacman')
2 Warning message:
3 package 'pacman' was built under R version 4.3.3
4 > pacman::p_load(survival,ggplot2,esquisse,bootstrap,
5 +               nortest,flexsurv,gridExtra,lme4,nlme,
6 +               extraDistr,grid,dhglm,car)
7 > dadosLaser<-read.table('DesgLaser.txt',head=T)
8 > df<-10
9 > # Plotando o perfil da medida de degradação
10 > windows()
11 > plot(dadosLaser$Tempo, dadosLaser$Desgaste,
12 + type = "n", xlim = c(0, 4500),
13 +     ylim = c(0, 12.2),
14 +     xlab = "Tempo",
15 +     ylab = "% acrescido da corrente padrão do laser")
16 > for (i in 1:15) {
17 +   a <- i * 17 - 16
18 +   b <- i * 17
19 +   # Desenhar a linha
20 +   lines(dadosLaser$Tempo[1:17],
21 + dadosLaser$Desgaste[a:b], type = "l", lty = i,
22 +       col = i + 10)
23 +
24 +   # Adicionar os pontos com pch = 20
25 +   points(dadosLaser$Tempo[1:17], dadosLaser$Desgaste[a:b],
26 +         pch = 20, col = i + 10)
27 + }
```

```

28 > abline(h = df, lty = "dashed", col = "red", lwd = 3)
29 > text(x = 500, y = 10, paste("Df =", df), col = "red", pos = 3)
30 > abline(v = 4000, lty = "dashed", col = "grey", lwd = 3)
31 > text(x = 4000, y = 1.5, paste("Tempo final do estudo =", 4000),
32 + col = "grey",
33 +       srt = 90, pos = 4)
34 > title("Perfis de Degradação - Laser")
35 > # vetor de coeficientes
36 > coeficientes_Lognormal = vector("numeric", 15)
37 > # Para estimar os pseudos tempos de falha,
38 #colocamos os coeficientes da
39 > #regressao no vetor definido anteriormente
40 > for (i in 1:15)
41 +   coeficientes_Lognormal [i] =
42 +   lm(dadosLaser$Desgaste ~ dadosLaser$Tempo - 1,
43 + subset = dadosLaser$Unidade==i)$coef
44 > #Vetores e matrizes que serao utilizados para
45 #guardar os pseudos tempos de falha.
46 > pseudos.tf_L = df/coeficientes_Lognormal
47 > pseudos.tf_Ld = matrix(pseudos.tf_L, ncol = 1)
48 > pseudos.tf_Ld
49           [,1]
50 [1,] 3707.412
51 [2,] 4173.362
52 [3,] 5621.186
53 [4,] 5983.330
54 [5,] 5432.730
55 [6,] 3612.619
56 [7,] 6142.627
57 [8,] 6414.984
58 [9,] 5066.927
59 [10,] 3307.686
60 [11,] 5268.051
61 [12,] 5028.504
62 [13,] 4780.164

```

```
63 [14,] 5819.925
64 [15,] 6121.213
65 > # Vetor com a codificacao de censura
66 #e falha (nesta base todos sao falhas)
67 > b = 1
68 > status = rep(b,15)
69 > # Teste de vida para Lognormal
70 > mfit_L = survreg(Surv(pseudos.tf_L, status) ~ 1, dist = "lognormal")
71 > summary(mfit_L)
72
73 Call:
74 survreg(formula = Surv(pseudos.tf_L, status) ~ 1, dist = "lognormal")
75
76           Value Std. Error      z      p
77 (Intercept)  8.5170      0.0527 161.6 <2e-16
78 Log(scale)   -1.5892      0.1826  -8.7 <2e-16
79
80 Scale= 0.204
81
82 Log Normal distribution
83 Loglik(model)= -125.2  Loglik(intercept only)= -125.2
84 Number of Newton-Raphson Iterations: 5
85 n= 15
86
87 > #Definindo variaveis para sigma e mu estimados da Lognormal,
88 > #obtidos anteriormente.
89 > sigma_L = mfit_L$scale
90 > mu_L = mfit_L$coefficients[1]
91 > # Armazenando os percentis
92 > Z1 = qnorm(0.01)
93 > Z5 = qnorm(0.05)
94 > Z10 = qnorm(0.1)
95 > Z50 = qnorm(0.5)
96 > Z80 = qnorm(0.8)
97 > # vetor de coeficientes.
98 > coeficientes_Weibull = vector("numeric", 15)
```

```

98 > # Para estimar os pseudos tempos de falha,
99 > #colocamos os coeficientes da regressao
100 #no vetor definido anteriormente
101 > for (i in 1:15){
102 +   coeficientes_Weibull[i] =
103 +   lm(dadosLaser$Desgaste ~ dadosLaser$Tempo - 1,
104 +     subset = dadosLaser$Unidade==i)$coef
105 + }
106 > #Vetores e matrizes que serao utilizados
107 #para guardar os pseudos tempos de falha.
108 > pseudos.tf_W = df/coeficientes_Weibull
109 > pseudos.tf_Wd = matrix(pseudos.tf_W, ncol = 1)
110 > pseudos.tf_Wd
111           [,1]
112 [1,] 3707.412
113 [2,] 4173.362
114 [3,] 5621.186
115 [4,] 5983.330
116 [5,] 5432.730
117 [6,] 3612.619
118 [7,] 6142.627
119 [8,] 6414.984
120 [9,] 5066.927
121 [10,] 3307.686
122 [11,] 5268.051
123 [12,] 5028.504
124 [13,] 4780.164
125 [14,] 5819.925
126 [15,] 6121.213
127 > # Teste de vida para Weibull
128 > mfit_W = survreg(Surv(pseudos.tf_W, status) ~ 1, dist = "weibull")
129 > summary(mfit_W)
130
131 Call:
132 survreg(formula = Surv(pseudos.tf_W, status) ~ 1, dist = "weibull")

```

```

133           Value Std. Error      z      p
134 (Intercept)  8.6102      0.0409 210.77 <2e-16
135 Log(scale)  -1.8919      0.2152  -8.79 <2e-16
136
137 Scale= 0.151
138
139 Weibull distribution
140 Loglik(model)= -123.7  Loglik(intercept only)= -123.7
141 Number of Newton-Raphson Iterations: 7
142 n= 15
143
144 > #Definindo variaveis para sigma
145 #e mu estimados da Weibull, obtidos anteriormente.
146 > sigma_W = mfit_W$scale
147 > mu_W = mfit_W$coefficients[1]
148 > # Parametros
149 > shape_W = 1/sigma_W
150 > scale_W = exp(mu_W)
151 > ###Kaplan-Meier####
152 > #Teste de aderencia p/ Weibull e lognormal -
153 #Plot de residuos aderencia
154 > #Ajuste via Kaplan-Meyer
155 > ajustkm=survfit(Surv(pseudos.tf_L, status)~1)
156 > ajustkm
157 Call: survfit(formula = Surv(pseudos.tf_L, status) ~ 1)
158
159           n events median 0.95LCL 0.95UCL
160 [1,] 15      15  5268  4780  6121
161 > #Ajuste exponencial
162 > ajust_exp=survreg(Surv(pseudos.tf_L, status)~1,dist="exponential")
163 > summary(ajust_exp)
164
165 Call:
166 survreg(formula = Surv(pseudos.tf_L, status) ~ 1, dist = "exponential")
167           Value Std. Error      z      p

```

```

168 (Intercept) 8.537      0.258 33.1 <2e-16
169
170 Scale fixed at 1
171
172 Exponential distribution
173 Loglik(model)= -143.1  Loglik(intercept only)= -143.1
174 Number of Newton-Raphson Iterations: 3
175 n= 15
176
177 > alpha_exp=exp(ajust_exp$coefficients[1])
178 > #Organizando as estimativas de cada ajuste numa tabela
179 > time = ajustkm$time
180 > stkm<-ajustkm$surv
181 > ste<-exp(-time/alpha_exp)
182 > stw<-exp(-(time/exp(mu_W))^(1/sigma_W))
183 > stln<-pnorm((-log(time)+mu_L)/sigma_L)
184 > stall = as.data.frame(cbind(time,ste, stkm, stw, stln))
185 > stall
186      time      ste      stkm      stw      stln
187 1  3307.686 0.5227096 0.93333333 0.96577797 0.9784992
188 2  3612.619 0.4923649 0.86666667 0.93941768 0.9442611
189 3  3707.412 0.4832956 0.80000000 0.92847874 0.9284944
190 4  4173.362 0.4410873 0.73333333 0.84982723 0.8118031
191 5  4780.164 0.3915965 0.66666667 0.67007239 0.5868159
192 6  5028.504 0.3729803 0.60000000 0.57109447 0.4885059
193 7  5066.927 0.3701801 0.53333333 0.55476643 0.4736433
194 8  5268.051 0.3558623 0.46666667 0.46637685 0.3986455
195 9  5432.730 0.3445522 0.40000000 0.39238493 0.3417524
196 10 5621.186 0.3320495 0.33333333 0.30945934 0.2827193
197 11 5819.925 0.3193558 0.26666667 0.22834699 0.2281258
198 12 5983.330 0.3092833 0.20000000 0.16954867 0.1892359
199 13 6121.213 0.3010315 0.13333333 0.12693466 0.1605124
200 14 6142.627 0.2997698 0.06666667 0.12094159 0.1563755
201 15 6414.984 0.2841772 0.00000000 0.05980064 0.1108442
202 > #Graficos para o ajuste

```

```

203 > dqqe<-ggplot(stall) +
204 +   geom_point(aes(x=stkm, y=ste),col="red",size=4) +
205 +   geom_abline(slope=1, intercept=0) +
206 +   xlim(c(0, 1)) +
207 +   ylim(c(0, 1)) +
208 +   labs(y="R(t): Exponencial",
209 +         x="R(t): Kaplan-Meier",
210 +         title = "")+
211 +   theme_bw()
212 > dqqw<-ggplot(stall) +
213 +   geom_point(aes(x=stkm, y=stw),col="red",size=4) +
214 +   geom_abline(slope=1, intercept=0) +
215 +   xlim(c(0, 1)) +
216 +   ylim(c(0, 1)) +
217 +   labs(y="R(t): Weibull",
218 +         x="R(t): Kaplan-Meier",title = "")+
219 +   theme_bw()
220 > dqqln<-ggplot(stall) +
221 +   geom_point(aes(x=stkm, y=stln),col="red",size=4) +
222 +   geom_abline(slope=1, intercept=0) +
223 +   xlim(c(0, 1)) +
224 +   ylim(c(0, 1)) +
225 +   labs(y="R(t): Lognormal",
226 +         x="R(t): Kaplan-Meier",
227 +         title = "")+
228 +   theme_bw()
229 > grid.arrange(dqqe, dqqw, dqqln, ncol=3)
230 > grid.text("Sobrevivencia: Kaplan-Meier x Modelos Parametricos",
231 +          x = unit(0.5, "npc"), y = unit(0.98, "npc"),
232 +          gp = gpar(fontsize = 10, fontface = "bold",
233 +          col = "black"))
234 > #####metodo numerico#####
235 > #ajuste do modelo y_ij=beta_i*t_ij+erro_ij,
236 > #com beta=(beta_1,...,beta_k)~N_k(\mu_beta,\Sigma_beta)
237 > m.num = lme(Desgaste ~ Tempo-1, data = dadosLaser,

```



```

238 +random=~Tempo-1|Unidade)
239 > sigmaE = m.num$sigma #desvio padrão (dp) do erro_ij
240 > mu2 = fixed.effects(m.num) #média dos betas
241 > random = random.effects(m.num)
242 #erro padrão dos efeitos aleatórios (dp_beta)
243 > sigmaB = sd(random$Tempo)
244 > nsim_MC = 10000 #número de simulações de beta_i's
245 #número de simulações para obtenção dos intervalos de confiança
246 > nsim_IC =10000
247 > #Intervalo de Confiança Monte carlo
248 #para as quantidades de interesse
249 > ICNUM=function(nsim_IC,nsim_MC,mu2,sigmaB,CONF,df){
250 + #Função que cria Intervalo de Confiança Monte carlo para as
251 + #quantidades de interesse. Argumentos:
252 + #nsim_IC - escalar indicando o número de simulações
253 #para obter o IC Monte Carlo
254 + #nsim_MC - escalar indicando o tamanho da amostra Monte Carlo
255 + #para os efeitos aleatórios
256 + #mu2 - escalar indicando a média dos efeitos aleatórios
257 + #sigmaB - escalar indicando o desvio padrão dos
258 #efeitos aleatórios
259 + #CONF - nível de confiança (0<CONF<1)
260 + #df - escalar indicando o limiar de degradação do modelo
261 + set.seed(230) #semente para gerar sementes das simulações
262 + semente = rdunif(n=nsim_IC, min=1, max=nsim_IC)
263 #sementes geradas para formar as
264 + #amostras dos efeitos aleatórios
265 +
266 + #vetor para armazenar a confiabilidade no tempo 4500
267 + R4500 = vector()
268 + #vetor para armazenar o tempo médio de vida
269 + MTF_Numerico = vector()
270 + P1_Numerico = vector() #vetor para armazenar o percentil 1%
271 + P5_Numerico = vector() #vetor para armazenar o percentil 5%
272 + P10_Numerico = vector() #vetor para armazenar o percentil 10%

```

```

273 +   P50_Numerico = vector() #vetor para armazenar o percentil 50%
274 +   P80_Numerico = vector() #vetor para armazenar o percentil 80%
275 +
276 +   for(i in 1:nsim_IC){
277 +     set.seed(semente[i])
278 +     #gera uma amostra dos efeitos normais
279 +     beta2_mc = rnorm(nsim_MC,mu2,sigmaB)
280 + #encontra os tempos de falha com base no preditor que
281 +     #modela a degradação
282 +     Tfalha = df/beta2_mc
283 +
284 +     R4500[i] = mean(Tfalha>=4500) #estimativa empírica de R4500
285 +     MTTF_Numerico[i] = mean(Tfalha) #estimativa empírica de MTTF
286 + #estimativa empírica ddo percentil 1%
287 +     P1_Numerico[i] = quantile(Tfalha,0.01)
288 + #estimativa empírica ddo percentil 5%
289 +     P5_Numerico[i] = quantile(Tfalha,0.05)
290 #estimativa empírica ddo percentil 10%
291 +     P10_Numerico[i] = quantile(Tfalha,0.1)
292 + #estimativa empírica ddo percentil 50%
293 +     P50_Numerico[i] = quantile(Tfalha,0.5)
294 + #estimativa empírica ddo percentil 80%
295 +     P80_Numerico[i] = quantile(Tfalha,0.8)
296 +   }
297 + #esse loop permite obter uma amostra Monte Carlo das
298 + #quantidades de interesse (tamanho nsim_IC)
299 +
300 +   return(list(
301 +     R4500=mean(R4500),
302 +     R4500_IC=quantile(R4500,c((1-CONF)/2,1-(1-CONF)/2)),
303 +     MTTF_Numerico = mean(MTTF_Numerico),
304 +     MTTF_Numerico_IC = quantile(MTTF_Numerico,
305 +     c((1-CONF)/2,1-(1-CONF)/2)),
306 +     P1_Numerico=mean(P1_Numerico),
307 +     P1_Numerico_IC=quantile(P1_Numerico,

```

```

308 + c((1-CONF)/2,1-(1-CONF)/2)),
309 +   P5_Numerico=mean(P5_Numerico),
310 +   P5_Numerico_IC=quantile(P5_Numerico,
311 + c((1-CONF)/2,1-(1-CONF)/2)),
312 +   P10_Numerico=mean(P10_Numerico),
313 +   P10_Numerico_IC=quantile(P10_Numerico,
314 + c((1-CONF)/2,1-(1-CONF)/2)),
315 +   P50_Numerico=mean(P50_Numerico),
316 +   P50_Numerico_IC=quantile(P50_Numerico,
317 +c((1-CONF)/2,1-(1-CONF)/2)),
318 +   P80_Numerico=mean(P80_Numerico),
319 +   P80_Numerico_IC=quantile(P80_Numerico,
320 + c((1-CONF)/2,1-(1-CONF)/2))))
321 + #retorna uma lista com os IC's quantílicos,
322 + #com base na amostra Monte Carlo,
323 + #para as quantidades
324 + #de interesse.
325 + }
326 > resultado=ICNUM(nsim_IC=nsim_IC,nsim_MC=nsim_MC,
327 + mu2=mu2,sigmaB=sigmaB,CONF=0.95,
328 +                 df=10)
329 > resultado
330 $R4500
331 [1] 0.6498464
332
333 $R4500_IC
334   2.5%  97.5%
335 0.6404 0.6591
336
337 $MTTF_Numerico
338 [1] 5201.599
339
340 $MTTF_Numerico_IC
341   2.5%   97.5%
342 5160.180 5232.658

```

343

344 \$P1_Numerico

345 [1] 3207.387

346

347 \$P1_Numerico_IC

348 2.5% 97.5%

349 3172.826 3241.568

350

351 \$P5_Numerico

352 [1] 3566.606

353

354 \$P5_Numerico_IC

355 2.5% 97.5%

356 3542.800 3590.863

357

358 \$P10_Numerico

359 [1] 3793.385

360

361 \$P10_Numerico_IC

362 2.5% 97.5%

363 3771.16 3816.26

364

365 \$P50_Numerico

366 [1] 4891.595

367

368 \$P50_Numerico_IC

369 2.5% 97.5%

370 4864.737 4918.841

371

372 \$P80_Numerico

373 [1] 6039.048

374

375 \$P80_Numerico_IC

376 2.5% 97.5%

377 5991.990 6086.976

```
378
379 > #Gerando o plot numérico
380 > library(nlme) #
381 > library(ggplot2)
382 > library(gridExtra)
383 > # Parâmetros conhecidos do modelo ajustado
384 > sigmaE = m.num$sigma # desvio padrão (dp) do erro_ij
385 > mu2 = fixed.effects(m.num) # média dos betas
386 > random = random.effects(m.num)
387 > # erro padrão dos efeitos aleatórios (dp_beta)
388 > sigmaB = sd(random$Tempo)
389 > nsim_MC = 10000 # número de simulações de beta_i's
390 > df = 10 # Limite de degradação
391 > # 1. Simulação Monte Carlo dos betas
392 > set.seed(230)
393 > # Amostras dos betas
394 > beta2_mc = rnorm(nsim_MC, mean = mu2, sd = sigmaB)
395 > #2.Amostra de tempos de falha com base nos efeitos aleatórios
396 + # do método numérico
397 > Tfalha = df / beta2_mc # Tempos de falha
398 > #3.Estimando a função de sobrevivência
399 + para os pseudotempos de falha
400 > # no método numerico
401 > #pseudo tempos de falha para o método aproximado
402 > pseudos.tf <- pseudos.tf_Ld
403 > pseudos.tf <- sort(pseudos.tf)
404 > stnum<-vector()
405 > for(i in 1:15){
406 + stnum[i]<-mean(Tfalha>=pseudos.tf[i])}
407 > stall$stnum <- stnum
408 > # Gráfico para o ajuste via método numérico
409 > dqnum <- ggplot(stall) +
410 + geom_point(aes(x = stkm, y = stnum), col = "blue", size = 4) +
411 + geom_abline(slope = 1, intercept = 0) +
412 + xlim(c(0, 1)) +
```

```
413 + ylim(c(0, 1)) +
414 + labs(y = "R(t): Método Numérico",
415 +       x = "S(t): Kaplan-Meier",
416 +       title = "") +
417 + theme_bw()
418 > #combinando todos os gráficos
419 > grid.arrange(dqqw, dqqln, dqnum, ncol = 3)
420 > grid.text("Sobrevivencia: Kaplan-Meier x Método Numérico",
421 +          x = unit(0.5, "npc"), y = unit(0.98, "npc"),
422 +          gp = gpar(fontsize = 10, fontface = "bold",
423 +          col = "black"))
424 >
425
```