



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

**Ferramentas para controle de sistemas
multivariáveis: uma revisão para aplicação em
conversores conectados à rede elétrica**

Thales Santos Carvalho

João Monlevade, MG
2024

Thales Santos Carvalho

**Ferramentas para controle de sistemas
multivariáveis: uma revisão para aplicação em
conversores conectados à rede elétrica**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.
Orientador: Prof. Dr. Igor Dias Neto de Souza

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C331f Carvalho, Thales Santos.
Ferramentas para controle de sistemas multivariáveis [manuscrito]:
uma revisão para aplicação em conversores conectados à rede elétrica. /
Thales Santos Carvalho. - 2024.
61 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Igor Dias Neto de Souza Souza.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia
Elétrica .

1. Controladores elétricos. 2. Conversores de corrente elétrica. 3.
Redes elétricas. 4. Sistemas de energia elétrica - Controle. 5. Sistemas de
energia elétrica - Estabilidade. I. Souza, Igor Dias Neto de Souza. II.
Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 621.31

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6-2431



FOLHA DE APROVAÇÃO

Thales Santos Carvalho

Ferramentas para controle de sistemas multivariáveis: uma revisão para aplicação em conversores conectados à rede elétrica

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Elétrica

Aprovada em 29 de fevereiro de 2024

Membros da banca

Dr. Igor Dias Neto de Souza - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Marcio Feliciano Braga - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Thainan Santos Theodoro - Universidade Federal de Ouro Preto

Igor Dias Neto de Souza, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 28/03/2024



Documento assinado eletronicamente por **Igor Dias Neto de Souza, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 28/03/2024, às 15:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0693025** e o código CRC **94EBD32F**.

Agradecimentos

Este trabalho carrega consigo alguns anos de dedicação, persistência e superação. Um ciclo se encerra abrindo um horizonte de novas possibilidades. Dedico este estudo a “Honorata Alves de Carvalho” (*in memoriam*) que não pode estar presente neste momento de vitória. Agradeço profundamente seu empenho e alegria ao me apoiar e incentivar a concluir este curso. Agradeço a cada um que esteve ao meu lado nos últimos anos, especialmente a minha companheira Jéssica Mára, aos meus pais Carlos e Zelia e ao meu orientador Prof. Dr. Igor Dias, que foram fundamentais nesta conquista. Aos amigos próximos agradeço pelos momentos de companheirismo e descontração durante nossa caminhada.

"Be the change you want to see in the world"
– Mahatma Gandhi

Resumo

Os conversores de energia elétrica são essenciais em muitos sistemas elétricos modernos, como em dispositivos de eletrônica de potência, sistemas de geração de energia solar e eólica, além de inversores e formadores de rede. Conhecer o comportamento das variáveis associadas a esses sistemas é de suma importância para o projeto de controladores mais eficientes. O projeto de controladores para sistemas multivariáveis é desafiador devido à presença de acoplamentos cruzados e interações entre as variáveis, bem como à falta de estudos matemáticos sobre esses sistemas. Portanto, ferramentas exclusivas para sistemas múltiplas entradas e múltiplas saídas (do inglês, *Multiple-Inputs Multiple-Outputs*) (MIMO) são necessárias para determinar a direção de controle, as variáveis que devem ser controladas. Este trabalho pretende apresentar e discutir ferramentas de controle multivariável, aplicando-as a conversores da eletrônica de potência, em especial, os conversores fonte de tensão de característica linear e não linear. Além disso, são abordadas metodologias como decomposição de valor singular, número de condicionamento, controlabilidade funcional, matriz de ganhos relativos, desacoplamento e controle descentralizado, seleção de pares de entrada e saída. Espera-se que este estudo contribua para a difusão do controle multivariável em sistemas de eletrônica de potência e para a compreensão de suas ferramentas e aplicações. As análises das plantas, a partir das ferramentas, se mostrou satisfatória, indicando as principais diferenças entre os dois sistemas analisados, quadrado e não quadrado. As análises mostraram que existe maior facilidade de se projetar controladores para o estudo de caso 1, de característica quadrada, e que, para sistemas não quadrados, deve-se atentar-se ao comportamento do sistema para determinadas regiões de frequência. Portanto, tais observações evidenciaram a importância de avaliar plantas multivariáveis com ferramentas apropriadas, garantindo uma análise que leva em consideração todas as variáveis envolvidas e proporcionando, assim, maior conhecimento do sistema na totalidade. Espera-se que esse trabalho contribua significativamente para a compreensão e aplicação eficaz das ferramentas do controle multivariável, facilitando o desenvolvimento de controladores mais eficientes e robustos para sistemas de energia elétrica modernos.

Palavras-chave: RGA, SVD, Controlabilidade Funcional, Número de Condicionamento, Desacoplamento, Estabilidade e Desempenho.

Abstract

Electrical energy converters are essential in many modern electrical systems, such as power electronics devices, solar and wind energy generation systems, as well as inverters and grid formers. Knowing the behavior of the variables associated with these systems is extremely important for designing more efficient controllers. The design of controllers for multivariable systems is challenging due to the presence of cross couplings and interactions between variables, as well as the lack of mathematical studies on these systems. Therefore, tools unique to MIMO systems are needed to determine the control direction, the variables that must be controlled. This work aims to present and discuss multivariable control tools, applying them to power electronics converters, in particular, voltage source converters with linear and non-linear characteristics. Furthermore, methodologies such as singular value decomposition, conditioning number, functional controllability, relative gains matrix, decoupling and decentralized control, selection of input and output pairs are covered. It is expected that this study will contribute to the dissemination of multivariable control in power electronics systems and to the understanding of its tools and applications. The analysis of the plans, based on the tools, proved to be satisfactory, indicating the main differences between the two systems analyzed, square and non-square. The analyzes showed that it is easier to design controllers for case study 1, with a square characteristic, and that for non-square systems, attention must be paid to the system behavior for certain frequency regions. Therefore, such observations highlighted the importance of evaluating multivariable plants with appropriate tools, ensuring an analysis that takes into account all the variables involved and thus providing greater knowledge of the system as a whole.

Keywords: Multivariable Systems, RGA, SVD, Functional Controllability, Conditioning Number, Decoupling, Stability and Performance..

Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxograma de estudo multivariável.	16
Figura 2 – Sistema de dois blocos ligado em série.	19
Figura 3 – Sistema com dois blocos ligados em paralelo.	19
Figura 4 – Sistema com duas variáveis de entrada e duas de saída, sendo $u_2 = cte$	23
Figura 5 – Sistema com duas variáveis de entrada e duas de saída, sendo $y_2 = cte$	23
Figura 6 – Diagrama de blocos da malha de controle do sistema $G(s)$	26
Figura 7 – Representação em blocos do sistema G com distúrbios e ruídos	29
Figura 8 – Sistema VSC trifásico com filtro de primeira ordem.	33
Figura 9 – Análise da resposta em frequência para os valores singulares do sistema	36
Figura 10 – Análise dos vetores de \mathbf{G}_1 para frequência angular ω nula.	37
Figura 11 – Análise do posto do sistema em diferentes frequências.	38
Figura 12 – Análise do número de condicionamento em diferentes frequências para um sistema quadrado 2×2	39
Figura 13 – Soma dos elementos das linhas da RGA.	40
Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema modificado.	41
Figura 15 – Diagrama de blocos simplificado do controle de corrente de eixo direto.	42
Figura 16 – Resposta em frequência considerando número RGA de $\mathbf{G}_1(s)$	44
Figura 17 – Respostas em frequência do sistema de malha fechada.	45
Figura 18 – Resposta em frequência do sistema de malha aberta.	46
Figura 19 – Sistema VSC trifásico com filtro de primeira ordem	47
Figura 20 – Análise da resposta em frequência para os valores singulares de $\mathbf{G}_2(s)$	50
Figura 21 – Resposta em frequência do número de condicionamento.	52
Figura 22 – RGA Sistema VSC trifásico com filtro de primeira ordem	53
Figura 23 – Resposta em frequência do número da RGA de $\mathbf{G}_2(s)$ para os pares \tilde{i}_d/\tilde{m}_d e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q , \tilde{i}_d/\tilde{m}_q e \tilde{i}_q/\tilde{m}_d	54
Figura 24 – Resposta em frequência do número da RGA de $\mathbf{G}_2(s)$ para os pares $\tilde{v}_{cc}/\tilde{m}_d$ e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q , $\tilde{v}_{cc}/\tilde{m}_q$ e \tilde{i}_q/\tilde{m}_d	54
Figura 25 – Resposta em frequência do número da RGA de $\mathbf{G}_2(s)$ para os pares \tilde{i}_d/\tilde{m}_d e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q , \tilde{i}_d/\tilde{m}_q e \tilde{i}_q/\tilde{m}_d	55
Figura 26 – Respostas em frequência do sistema de malha fechada.	56
Figura 27 – Resposta em frequência do sistema de malha aberta.	57

Lista de Siglas

B2B	Back-to-back
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
ESG	(Ambiental, Social e Governança Corporativa) (do inglês, <i>Environmental, Social and Corporate Governance</i>)
GD	geração distribuída
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
MIMO	múltiplas entradas e múltiplas saídas (do inglês, <i>Multiple-Inputs Multiple-Outputs</i>)
PI	<i>proporcional-integral</i>
PVS	Fotovoltaica do (<i>inglês, Photovoltaic Systems</i>)
RGA	Matriz de Ganhos Relativos do (<i>inglês, Relative Gain Array</i>)
SISO	entrada única e saída única (do inglês, <i>Single-Input Single-Output</i>)
SVD	Decomposição em Valores Singulares (do inglês, <i>Singular Value Decomposition</i>)
VSC	conversores fonte de tensão (do inglês, <i>Voltage Sourced Converter</i>)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Contextualização	13
1.2	Estado da Arte	14
1.3	Problema de Pesquisa	15
1.4	Objetivos	16
1.5	Justificativa	17
1.6	Organização do Trabalho	17
2	CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS	18
2.1	Funções de transferência para sistemas multivariáveis	18
2.2	Direções em sistemas MIMO	19
2.3	Decomposição em Valores Singulares (SVD)	20
2.4	Controlabilidade Funcional	21
2.5	Número de Condicionamento	22
2.6	Matriz de Ganhos Relativos	22
2.6.1	Definição matemática para RGA quadrada	24
2.6.2	Definição matemática para RGA não quadrada	25
2.7	Desacoplamento e o controle descentralizado	25
2.7.1	Seleção de pares de entrada e saída	27
2.8	Valores singulares e a realimentação em sistemas MIMO	28
2.9	Valores singulares na análise de estabilidade e desempenho	30
2.10	Pico máximo de sensibilidade	31
2.11	Conclusões parciais	32
3	ESTUDO DE CASO PARA UM SISTEMA MIMO QUADRADO	33
3.1	Análise das Direções	35
3.2	Análise da controlabilidade funcional	37
3.3	Análise do número de condicionamento	38
3.4	Análise da matriz de ganhos relativos	39
3.5	Desacoplamento e controle descentralizado	40
3.5.1	Seleção de pares	43
3.6	Realimentação e análise de estabilidade e desempenho	43
3.6.1	Análise dos valores singulares na realimentação	44
3.7	Conclusões parciais	46
4	ESTUDO DE CASO PARA UM SISTEMA MIMO NÃO-QUADRADO	47

4.1	Análise das direções	49
4.2	Análise da controlabilidade funcional	51
4.3	Análise do Número de Condicionamento	51
4.4	Análise da matriz de ganhos relativos	52
4.5	Seleção de pares de variáveis em um sistema não quadrado	53
4.6	Realimentação e análise de estabilidade e desempenho	55
4.7	Conclusões parciais	57
5	CONCLUSÕES	59
5.1	Trabalhos futuros	60
	REFERÊNCIAS	62

1 Introdução

1.1 Contextualização

Nos últimos anos, os sistemas de distribuição de energia elétrica sofreram mudanças significativas com a penetração dos sistemas de geração distribuída (GD). Nesses novos ambientes, as fontes de energia de pequena e média capacidade vêm recebendo cada vez mais atenção devido à diversidade de tecnologias utilizadas na produção de energia elétrica.

Tanto sistemas de geração Fotovoltaica do (*inglês, Photovoltaic Systems*) (PVS) quanto eólicos tem sido amplamente difundidos devido a atual busca global por sustentabilidade, que vem sendo relacionada ao termo (Ambiental, Social e Governança Corporativa) (do inglês, *Environmental, Social and Corporate Governance*) (ESG) (COSTA; FERREZIN, 2021). A utilização da energia limpa está associada a preocupação em reduzir impactos ambientais causados pela produção energética atual. Com a ampliação dos sistemas de energia renovável, faz-se necessário conhecê-los, estudando os componentes e circuitos a eles associados.

Os conversores estão diretamente ligados a esses sistemas e são de grande importância para seu funcionamento. Spier (2017) aborda em seu trabalho o emprego de um conversor Corrente Contínua (CC) para CC Boost-Buck com intuito de melhorar a conexão de um sistema PVS a rede elétrica.

Sistemas de geração PVS podem ser interligados às cargas de Corrente Alternada (CA) ou até à rede elétrica por meio de conversores fonte de tensão (do inglês, *Voltage Sourced Converter*) (VSC) que realizam a conversão CC/CA por meio do controle apropriado de suas chaves semicondutoras. Além disso, eles podem sintetizar a tensão na rede de distribuição de energia, condição fundamental na formação de microredes CA (COTA, 2020).

Outro exemplo de conversor é o do tipo Back-to-back (B2B), que pode ser associados a sistemas de geração eólica. Esse tipo de geração necessita de regulação de níveis de tensão e frequência para se conectar à rede elétrica de distribuição (SOARES et al., 2012).

As fontes alternativas de energia apresentados até o momento possuem a característica de múltiplas entradas e múltiplas saídas (do inglês, *Multiple-Inputs Multiple-Outputs*) (MIMO). No entanto, nelas, é recorrente o uso de arranjos de sistemas de entrada única e saída única (do inglês, *Single-Input Single-Output* (SISO) para realizar o controle de seus conversores sem levar em consideração as características multivariáveis. Uma das estruturas mais conhecidas consiste em uma técnica de malha dupla. A malha interna,

mais rápida, regula a corrente injetada na rede de distribuição pelo conversor, enquanto a malha externa, mais lenta, controla a tensão no barramento CC e, conseqüentemente, o fluxo de potência ativa injetada no sistema elétrico (ALCALÁ et al., 2011; TANG et al., 2015). Essa estratégia de controle tornou-se popular por duas razões principais: (i) a corrente de saída pode ser facilmente limitada; (ii) dois controladores podem ser projetados separadamente se suas respectivas constantes de tempo forem projetadas de modo que o controlador de corrente interno seja muito mais rápido que o controlador externo (YAZDANI; IRAVANI, 2010).

Contudo, a metodologia de projeto de controladores mencionada acima não é fácil de ser desenvolvida, principalmente quando há acoplamentos cruzados ou interações entre suas variáveis. Além disso, não há estudo matemático do comportamento multivariável dessas plantas. Alguns fenômenos ocorrem exclusivamente em sistemas multivariáveis, como o efeito de acoplamento entre as variáveis, sem correspondência em sistemas SISO.

Ferramentas exclusivas para sistemas MIMO são importantes para determinar em qual orientação e/ou direção um sistema não pode ser controlado, para definir quais variáveis devem ser controladas, para auxiliar no projeto de filtros passivos para o sistema e para auxiliar no projeto de largura de banda dos controladores.

1.2 Estado da Arte

O estudo de ferramentas multivariáveis aplicadas aos conversores da eletrônica de potência ainda é pouco difundido no ambiente acadêmico. No entanto, alguns autores as utilizam no desenvolvimento de seus trabalhos.

Pinto et al. (2011) apresenta o controle robusto multivariável aplicado às turbinas eólicas. Através da função complementar é realizada a análise da sensibilidade do sistema, considerando os parâmetros fornecidos pela Decomposição em Valores Singulares (do inglês, *Singular Value Decomposition*) (SVD). Outro ponto importante a se destacar é a manipulação dos ganhos máximos e mínimos da matriz a fim de otimizar o controle.

Deldar, Izadian e Anwar (2020) apresentam o projeto para um controlador multivariável descentralizado para transmissão de turbina eólica. Em seu trabalho, utiliza-se da matriz Matriz de Ganhos Relativos do (inglês, *Relative Gain Array*) (RGA) para escolher as variáveis de controle. Na ocasião, optou-se por utilizar ferramentas de controle SISO. Entretanto, devido às características MIMO do sistema, o trabalho não utiliza ferramentas adequadas para caracterizar melhor o sistema.

As ferramentas utilizadas em controle multivariável tem utilidade não somente para a aplicação em conversores mas também em outras áreas do conhecimento. (OLIVEIRA, 2017) em seu trabalho, usufruiu dos recursos aqui abordados, tais como, SVD e RGA, aplicando-os ao campo da química, onde seu uso também é comum. No caso, o autor emprega tais ferramentas, a fim de selecionar pares de variáveis em um processo de

destilação. Com isso foi possível identificar a melhor variável de controle e também saber sobre a sensibilidade às variações de pressão e temperatura.

1.3 Problema de Pesquisa

Os conversores de energia elétrica de múltiplas variáveis presentes em sistemas, como [PVS](#), [GD](#), entre outros, são comumente rearranjados em subsistemas de única variável para realização do seu controle. Quando se trata de técnicas de controle para sistemas [SISO](#), geralmente, se recorre ao que é conhecido como controle clássico. Este método se baseia na manipulação de funções de transferência, bem como no uso de técnicas como o Lugar Geométrico das Raízes ([LGR](#)) e a análise da resposta em frequência. No entanto, as técnicas abordadas neste contexto não são aplicáveis aos sistemas de característica [MIMO](#), modelados por meio de representações em espaço de estados, que aborda, além de variáveis de entrada e saída, as variáveis físicas internas a ele.

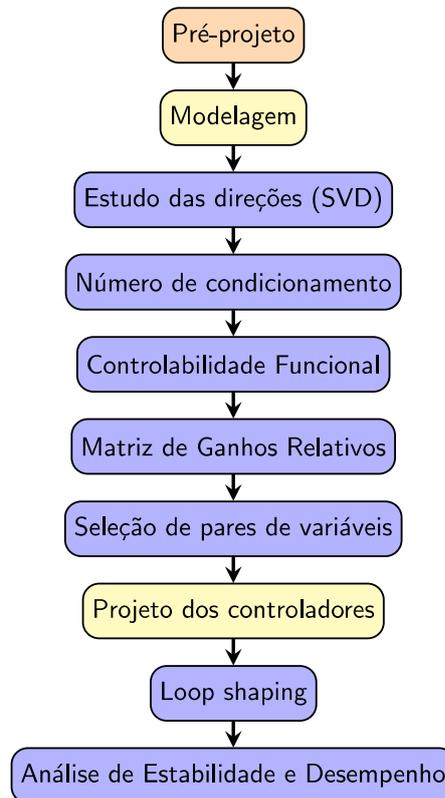
A análise sob a perspectiva multivariável apresenta ferramentas que vão além do estudo de sistemas lineares, tratando também casos não lineares e variantes no tempo. Sob a ótica computacional, a abordagem em multivariável se destaca em relação às técnicas clássicas, que trabalham com manipulações polinomiais no domínio da frequência ([FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013](#)). Logo torna-se interessante trabalhar esses conversores levando em consideração a suas características multivariáveis, visto que os tratar como arranjos [SISO](#) pode tornar a análise menos aprofundada.

No contexto industrial, há uma série de processos multivariáveis tratados como um arranjo de sistemas de entradas únicas, pela dificuldade da manipulação matemática incorporada às técnicas de controle [MIMO](#). Entretanto, a baixa adesão a esse tipo de controle tem como consequência a não utilização dos benefícios a elas associadas. A importância de caracterizar as ferramentas de controle multivariável tem como finalidade facilitar o controle dos processos, discutir soluções alternativas e modernas em relação ao que, hoje, é mais difundido no meio acadêmico e industrial.

1.4 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é concentrar-se nas ferramentas de controle multivariável destacadas em roxo no fluxograma

Figura 1 – Fluxograma de estudo multivariável.



Fonte: Do autor.

O foco está na compreensão e aplicação das ferramentas em sistemas de característica multivariável da eletrônica de potência. Não se trata especificamente do projeto de controladores, mas sim da análise e compreensão das etapas cruciais necessárias para compreender e analisar sistemas de características multivariáveis.

Para alcançar esse objetivo, serão utilizadas plantas **MIMO** mais simples, como **VSC** conectado à rede elétrica. O intuito é apresentar de maneira didática as ferramentas relacionadas aos sistemas **MIMO** e despertar o interesse por esse tipo de abordagem metodológica. O trabalho busca contribuir para o avanço do conhecimento nessa área, visando uma compreensão mais aprofundada e uma aplicação mais eficaz das técnicas de controle multivariável na eletrônica de potência.

Para isso, tem-se como objetivos específicos:

- Estudo das direções por meio dos conceitos: **SVD**; número de condicionamento; controlabilidade funcional; Matriz de ganhos relativos; desacoplamento e controle descentralizado; Realimentação e análise de estabilidade e desempenho.

- Estudo de caso por meio de um modelo simplificado utilizando um conversor [VSC](#) para um sistema MIMO quadrado
- Estudo de caso mediante modelo simplificado, utilizando um conversor com característica não quadrado.

1.5 Justificativa

Aplicando as ferramentas específicas, é possível obter vantagens no controle de sistemas [MIMO](#). Organizar e disponibilizar essas informações de forma clara é de interesse tanto da comunidade acadêmica quanto da indústria, vista a vasta aplicabilidade e relevância desses dispositivos no mercado.

Tratar plantas multivariáveis como arranjos de sistemas [SISO](#) pode se tornar custoso por ter elevado número de variáveis envolvidas. Conhecer e manipular ferramentas matemáticas de controle [MIMO](#) é de grande importância, visto que tais ferramentas são pouco difundidas, por serem consideradas de alta complexidade. Analisar plantas [MIMO](#) com métodos apropriados garante um melhor conhecimento delas, facilitando o controle ao possibilitar uma atuação unificada no sistema. Além disso, permite compreender especificamente quais variáveis do sistema podem ser controladas e em qual faixa de frequência o controle é mais eficaz.

1.6 Organização do Trabalho

O primeiro capítulo trata da introdução, que contextualiza o tema "Caracterização de sistemas multivariáveis com enfoque em conversores conectados à rede elétrica", apresentando informações que contextualizam e justificam o problema de pesquisa.

No segundo capítulo, são apresentadas as ferramentas apropriadas para a análise dos sistemas multivariáveis, com referências bibliográficas de autores do assunto e conceitos envolvidos. Esse capítulo precede o terceiro capítulo, que descreve um estudo de caso sobre um sistema multivariável de característica linear, no qual são aplicadas as ferramentas estudadas no capítulo anterior e apresentados alguns resultados preliminares.

O quarto capítulo, aborda um segundo estudo de caso analisando um sistema multivariável não linear. Por fim, o quinto capítulo apresenta a conclusão do trabalho, com uma breve reflexão sobre os resultados alcançados e sugestões para trabalhos futuros.

2 Caracterização de Sistemas Multivariáveis

Sistemas multivariáveis são tipificados quando existe mais de uma variável de entrada e saída. Esses sistemas estão presentes em diversas aplicações do dia a dia, sendo encontrados em instrumentos de aferimento de pressão, velocidade, posição, nível, vazão entre outros.

Como mencionado no Capítulo 1, é de grande proveito ter conhecimento sobre ferramentas que tratam tais sistemas da forma como eles são. Ao decorrer do atual capítulo serão caracterizadas as mais relevantes ferramentas na análise dos sistemas [MIMO](#).

2.1 Funções de transferência para sistemas multivariáveis

Considere o sistema dinâmico genérico representado pelas seguintes equações de espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{d}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.1)$$

Em que \mathbf{x} é o vetor de estados, \mathbf{u} , o vetor de entrada, e \mathbf{d} o vetor de distúrbios. As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , e \mathbf{F} definem a dinâmica do sistema, enquanto \mathbf{C} representa a matriz de saída.

Essa representação em espaço de estados captura a evolução temporal dos estados \mathbf{x} em resposta às entradas \mathbf{u} e distúrbios \mathbf{d} , com a saída \mathbf{y} sendo uma combinação linear dos estados.

Para obter a função de transferência (FT) do sistema em espaço de estados, pode-se utilizar a transformada de Laplace. A função de transferência $\mathbf{G}(s)$ relaciona a transformada de Laplace da saída $\mathbf{U}(s)$ com a transformada de Laplace da entrada $\mathbf{Y}(s)$ quando os distúrbios $\mathbf{D}(s)$ são nulos.

Calcula-se a FT considerando inicialmente $\mathbf{D}(s) = 0$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (2.2)$$

Aqui, \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão apropriada. A função de transferência $\mathbf{G}(s)$ é dada por

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (2.3)$$

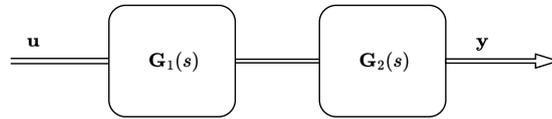
Para trabalhar com sistemas multivariáveis, deve-se atentar-se às diferenças existentes entre eles e os sistemas [SISO](#). As funções de transferência em sistemas [MIMO](#) são de característica matricial, logo a sua multiplicação não é comutativa. Assim são tratadas a partir de duas regras básicas.

Para dois sistemas genéricos ligados em cascata, a relação matemática associada encontra-se em [\(2.4\)](#).

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_2(s)\mathbf{G}_1(s). \quad (2.4)$$

Nota-se que a ordem das matrizes é disposta inversamente em relação ao que é exibido no diagrama de blocos da Figura 2 onde u é a entrada e y a saída. Para sistemas MIMO realimentados negativamente, conforme destacado na Figura 3, utiliza-se

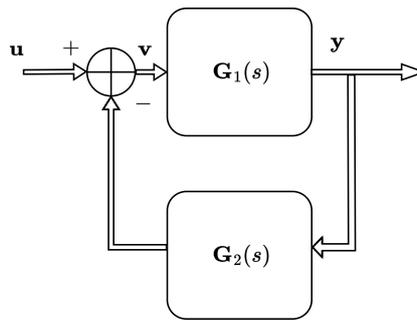
Figura 2 – Sistema de dois blocos ligado em série.



Fonte: Do autor.

$$\mathbf{V}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{L}(s))^{-1}\mathbf{U}(s) \tag{2.5}$$

Figura 3 – Sistema com dois blocos ligados em paralelo.



Fonte: Do autor.

em que \mathbf{I} é matriz identidade com a mesma dimensão da matriz $\mathbf{L}(s) = \mathbf{G}_2(s)\mathbf{G}_1(s)$ é a função de transferência em malha aberta.

2.2 Direções em sistemas MIMO

Uma das principais características dos sistemas multivariáveis é a presença de direções. Essa particularidade está relacionada ao fato dele não ser um sistema escalar, como no SISO. As direções estão associadas aos vetores dos sistemas presentes no processo.

Nos sistemas SISO, o ganho

$$\frac{|y(\omega)|}{|u(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)u(\omega)|}{|u(\omega)|} \tag{2.6}$$

de um sistema com entrada u e saída y , em (2.6), dependente apenas de uma determinada frequência ω .

Para o caso de sistemas MIMO o tratamento é feito de forma diferente do apresentado em (2.6) pois as entradas e saídas são vetores. Neste caso a forma apropriada de lidar com os ganhos é,

$$\mathbf{G}(j\omega) = \frac{\|\mathbf{y}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{u}(\omega)\|_2} = \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}(\omega)\|}{\|\mathbf{u}(\omega)\|}. \quad (2.7)$$

Assim, o resultado apresentado em (2.7) é composto pela razão das magnitudes do vetor de entrada

$$\|\mathbf{u}(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |u(\omega)|^2} = \sqrt{u_1(\omega)^2 + u_2(\omega)^2 + \dots u_n(\omega)^2}. \quad (2.8)$$

e do vetor de saída

$$\|\mathbf{y}(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |y(\omega)|^2} = \sqrt{y_1(\omega)^2 + y_2(\omega)^2 + \dots y_m(\omega)^2}. \quad (2.9)$$

Logo, o conceito de norma é utilizado para uma frequência específica ω .

Nos sistemas **MIMO**, os ganhos independem da magnitude do vetor de entrada $\|\mathbf{d}(\omega)\|_2$, contudo há uma dependência em relação às direções desse vetor. Com isso, para uma frequência específica ω ocorre uma variação nos ganhos da função, $\mathbf{G}(j\omega)$, levando a surgir um ganho máximo e mínimo, em que

$$\max_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} = \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$$

é o valor singular máximo ou maior valor singular e

$$\min_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} = \underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)),$$

é o valor singular mínimo ou menor valor singular.

2.3 Decomposição em Valores Singulares (SVD)

Uma das principais diferenças dos modelos **SISO** e **MIMO** é o tratamento vetorial. Isto requer cuidados no que diz respeito às direções das entradas. O estudo das direções está associado à Decomposição em Valores Singulares (do inglês, *Singular Value Decomposition*) (**SVD**), que fornece uma maneira útil para tratar da direcionalidade em sistemas **MIMO** (**SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005**).

Com a **SVD** é possível analisar de forma física, o comportamento de um sistema em uma determinada frequência ω . Dentre as utilidades da **SVD**, pode-se mencionar:

- (i) Proporciona informações sobre todos os ganhos da planta;
- (ii) As direções da planta são ortogonais;
- (iii) É aplicável a plantas de característica não quadrada.

Considerando uma frequência específica ω para uma matriz, $\mathbf{G}(j\omega)$ tem-se que a sua decomposição em valores singulares é dada por

$$\mathbf{G}(j\omega) = \mathbf{W}(j\omega)\mathbf{\Sigma}(j\omega)\mathbf{V}(j\omega)^H, \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{W}(j\omega)$ é o vetor de entradas e $\mathbf{V}(j\omega)$ o de saídas. O sobrescrito (H) representa o operador hermitiano, ou seja, a transposta conjugada da matriz. A matriz $\mathbf{\Sigma}(j\omega)$ contém os valores singulares do sistema, isto é

$$\mathbf{\Sigma}(j\omega) = \begin{bmatrix} \sigma_1(j\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2(j\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k(j\omega) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$\sigma_1(j\omega) \geq \sigma_2(j\omega) \geq \cdots \sigma_k(j\omega) \geq 0$. Além disso, tem-se que $\sigma_1(j\omega) = \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$ representa o maior valor singular e $\sigma_k(j\omega) = \underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$ o menor valor singular, sendo e $k = \min\{m, n\}$ o último valor singular da matriz de dimensões $m \times n$.

Portanto, pode ser afirmado que para qualquer vetor de entrada, $\mathbf{u}(\omega)$, o ganho do sistema estará sempre entre os valores singular máximo e mínimo, ou seja,

$$\underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)) \leq \frac{\|\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{u}(\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)). \quad (2.12)$$

A **SVD** associa as direções de cada entrada do vetor $\mathbf{W}(j\omega)$ com sua respectiva saída presente no vetor $\mathbf{V}(j\omega)$ considerando um ganho σ para cada uma delas

$$G_k(j\omega)W_k(j\omega) = \sigma_k(j\omega)V_k(j\omega) \quad (2.13)$$

Este resultado é importante, por auxiliar no entendimento da planta trabalhada.

2.4 Controlabilidade Funcional

A controlabilidade funcional é formalmente definida por (**SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005**) para sistemas **MIMO** $m \times n$.

Definição 1 - Controlabilidade Funcional - Um sistema $\mathbf{G}(s)$ com n entradas e m saídas é **controlável** se o posto normal p_η de $\mathbf{G}(s)$ for igual ao número de saídas m , ou seja $m = p_\eta$. Caso $p_\eta < m$, o sistema é não funcionalmente controlável.

Definição 2 Se uma planta **MIMO** possui a controlabilidade funcional disse-se que ela é **funcionalmente controlável**. Caso contrário, a planta será **funcionalmente não controlável**:

- O posto normal p_η de $\mathbf{G}(s)$ é válido para quase todos os valores de s , tendo exceção os valores nos zeros e nas descontinuidades dos polos de $\mathbf{G}(s)$;

- A planta é **funcionalmente não controlável** se e somente se o último valor singular $\sigma_m(\mathbf{G}(j\omega)) = 0, \forall \omega$.
- Para plantas **funcionalmente não controláveis existem** $m - p_\eta$ direções de saída que não podem ser afetadas pela entrada.
- A partir da matriz **SVD** de $\mathbf{G}(j\omega)$, têm-se que as direções de saída não controláveis, do ponto de vista funcional, são as últimas colunas de $\mathbf{W}(j\omega)$. Ressalta-se que as direções dependem da frequência ω .

Por fim, destaca-se que a controlabilidade funcional está associada às características intrínsecas do sistema, independentemente de valores de parâmetros específicos.

2.5 Número de Condicionamento

Através do número de condicionamento é possível obter informações relevantes sobre o sistema. Tal ferramenta indica o grau de dificuldade de controlar o sistema. Além disso, com o número de condicionamento, é possível obter explicações sobre a propagação de erros dos sinais de entrada para os dados de saída.

Matematicamente, o número de condicionamento é definido como

$$\gamma(\mathbf{G}(j\omega)) = \frac{\bar{\sigma}\mathbf{G}(j\omega)}{\underline{\sigma}\mathbf{G}(j\omega)}. \quad (2.14)$$

Os resultados obtidos de (2.14) indicam uma medida sobre a controlabilidade entre a entrada e a saída do sistema. Sendo que um baixo número de condicionamento representa que todas as direções de entrada do sistema respondem de forma parecida, e comumente sinaliza que o sistema irá se comportar bem em relação às interações entre malhas.

Por outro lado, quando a razão entre os ganhos máximos e mínimos resulta em um valor elevado, a análise pode indicar que o sistema é mal condicionado. Pode indicar um mau condicionamento devido a possível existência de valores singulares muito baixos. Entretanto, a análise pode indicar que uma das direções tem o máximo valor singular muito alto, podendo não ser encarado como problema, a depender da situação ([SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005](#)).

Vale ressaltar que plantas mal condicionadas são difíceis de serem controladas. [Lau, Alvarez e Jensen \(1985\)](#) declara que plantas bem condicionadas apresentam número de condicionamento até 10. Porém processos com mau condicionamento estão na faixa de 100.

2.6 Matriz de Ganhos Relativos

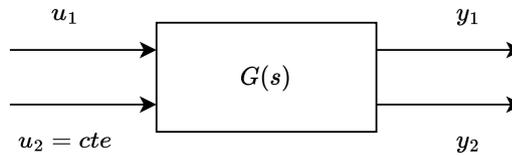
A Matriz de Ganhos Relativos do (inglês, *Relative Gain Array*) (**RG**A) foi proposta pela primeira vez em ([BRISTOL, 1966](#)). Em seu trabalho, o autor a tratou, inicialmente,

como uma medida de interação para controle multivariável. Sendo que a ferramenta em questão foi desenvolvida para solucionar problemas existentes na prática e também na representação matricial. Desde a primeira menção à **RGA**, vários outros pesquisadores vêm se dedicando ao tema.

É possível obter a **RGA** de um sistema a partir da matriz que rege o seu comportamento dinâmico. A título de exemplo, pode-se fazer a verificação a partir de um experimento em que se considera um sistema com duas entradas e duas saídas.

A princípio considera-se a entrada u_2 da Figura 4 como constante, e varia-se a entrada u_1 por Δu_1 . Conseqüentemente, essa variação resultará em um Δy_1 na saída.

Figura 4 – Sistema com duas variáveis de entrada e duas de saída, sendo $u_2 = cte$.



Fonte: Do autor.

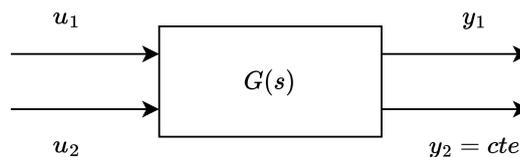
Com isso pode-se afirmar que o ganho entre u_1 e y_1 pode ser descrito pela relação

$$\left[\frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} \right]_{u_2} \quad (2.15)$$

Dando seqüência na verificação da **RGA** para um sistema de duas variáveis, considera-se agora que a variável u_2 é escolhida, e a saída y_2 é constante, conforme representado na Figura 22. Assim, com a variação da entrada u_1 por Δu_1 , a saída y_1 sofrerá uma variação de Δy_1 . Logo, tem-se como resultado um novo ganho entre u_1 e y_1 , dado por

$$\left[\frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} \right]_{y_2} \quad (2.16)$$

Figura 5 – Sistema com duas variáveis de entrada e duas de saída, sendo $y_2 = cte$.



Fonte: Do autor.

A razão entre os ganhos obtidos em (2.15) e (2.16) são chamados de ganhos relativos à y_1 e u_1 e é dada por λ_{11} em

$$\lambda_{11} = \frac{\left[\frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} \right]_{u_2}}{\left[\frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} \right]_{y_2}}. \quad (2.17)$$

A matriz de ganhos relativos é obtida aplicando um procedimento similar para as variáveis não consideradas na demonstração, que para o caso em questão é dada por λ_{11} e λ_{12}

Estudar conceitos relacionados a **RGA** é de interesse quando se diz respeito a controle de sistemas multivariáveis, pois a ela está atrelada a capacidade de identificar quais pares de variáveis de entrada e saída terão menor grau de interação entre malhas ([DELDAR; IZADIAN; ANWAR, 2020](#)).

Ao identificar pares de variáveis com menor interação, é possível projetar o controle do sistema de forma mais eficiente. Por exemplo, pode-se escolher um controlador que se concentre principalmente na variação da variável com menor interação, resultando em um sistema mais estável e de melhor desempenho. Além disso, ao se concentrar na variável com menor interação, pode-se minimizar o efeito dos distúrbios externos no sistema.

Ainda considerando os resultados do experimento abordado, algumas análises sobre o grau de interação das malhas podem ser observados em três diferentes resultados:

- (i) Se $\lambda_{11} = 0$, tem-se que os ganhos u_1 e u_2 também são zero. Essa informação pode ser interpretada como uma impossibilidade de utilizar a entrada u_1 para controlar a saída y_1 .
- (ii) Se $0 < \lambda_{11} < 1$, existirá interação entre as malhas. Quanto mais próximo de zero, maior será a interação dos parâmetros escolhidos. Porém quanto mais próximo de 1, menor será a interação.
- (iii) Se $\lambda_{11} = 1$, indica que há uma forte interação entre u_1 e y_1 . De modo que o efeito de u_1 em y_2 é desprezível, isto é, não há interação entre as malhas.

Além disso, por meio da **RGA**, é possível identificar a partir da soma dos elementos de suas linhas se a variável de saída poderá ou não ser controlada e por meio da soma dos elementos de suas colunas se a entrada tem efeito ou não sobre o sistema ([SOUZA et al., 2022](#)).

2.6.1 Definição matemática para RGA quadrada

Outra forma de obter a **RGA** para uma frequência ω de uma **G(S)** quadrada $m = n$ pode ser obtida por

$$\Lambda(\mathbf{G}(j\omega)) = (\mathbf{G}(j\omega)) \odot (\mathbf{G}^{-1}(j\omega)^T) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1n} & \dots & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ela consiste na multiplicação da matriz $(\mathbf{G}(j\omega))$ com sua inversa transposta $(\mathbf{G}^{-1}(j\omega)^T)$ que ocorre de elemento por elemento através do operador \odot que representa a multiplicação de Handamard, que realiza a multiplicação termo a termo. O cálculo resulta na matriz de ganhos relativos λ_{nn} .

A matriz de ganhos relativos possui duas propriedades importantes:

- A **RGA** é normalizada, logo a soma de todas as linhas ou colunas da matriz sempre será igual a 1.
- Os ganhos relativos são adimensionais.

2.6.2 Definição matemática para RGA não quadrada

As matrizes de característica não quadrada $\mathbf{G}_{m \times n}$ utilizam a pseudoinversa para o cálculo da **RGA**, isto é

$$\Lambda(\mathbf{G}(j\omega)) = (\mathbf{G}(j\omega)) \odot (\mathbf{G}^\dagger(j\omega))^T. \quad (2.19)$$

([GOLAN, 1995](#)) apresenta matriz pseudo inversa pode ser obtida através da **SVD** da $\mathbf{G}(j\omega)$. A forma de representá-la é através do símbolo "†". A pseudo inversa é uma generalização da inversa de matriz para casos em que a matriz não é quadrada ou não é invertível. Ela fornece uma solução aproximada para sistemas lineares sobredeterminados ou subdeterminados.

([CAO, 1995](#)) traz em seu trabalho um importante resultado relacionado à **RGA**. Quando se trata de sistemas com mais entradas do que saídas, pode-se considerar não utilizar entradas que correspondem às colunas cuja soma dos elementos é muito menor do que 1, dessa forma, a entrada não influenciará a variável e a saída não poderá ser controlada.

De maneira análoga, o resultado é valido para sistemas que possuem mais saídas do que entradas. Assim, caso a soma dos elementos da linha da **RGA** for muito menor do que um, essa saída não poderá ser controlada.

2.7 Desacoplamento e o controle descentralizado

O controle descentralizado, também conhecido como controle diagonal ou diagonal em bloco, é um procedimento que envolve o projeto de um controlador que atua de forma independente em diferentes subsistemas de uma planta. Essa abordagem é eficaz quando a planta é diagonal ou está próxima da diagonal, permitindo que cada elemento do controlador seja projetado separadamente para cada subsistema.

No entanto, é importante ressaltar que o desempenho do controle descentralizado pode ser comprometido quando os elementos fora da diagonal principal da planta apresentam valores significativos. Isso ocorre porque o controle diagonal descentralizado não

faz tentativas para neutralizar as interações entre os subsistemas. Dessa forma, é necessário considerar cuidadosamente as interações entre os diferentes elementos da planta ao aplicar o controle descentralizado para garantir um desempenho adequado do sistema na totalidade.

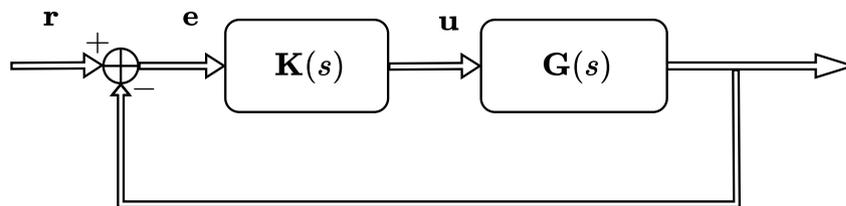
O desacoplamento é uma técnica utilizada em sistemas de controle para separar ou reduzir a interação entre as diferentes variáveis controladas. Essa interação pode prejudicar o desempenho do sistema, dificultando controlar cada variável de forma independente. No desacoplamento, é escolhido um pré-compensador chamado $\mathbf{K}_D(s)$ de tal maneira que sua multiplicação por $\mathbf{G}(s)$ resulte em um sistema diagonal, isto é,

$$\mathbf{G}_s(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}_D(s). \quad (2.20)$$

Essa configuração simplificada torna, na maioria das vezes, o sistema mais fácil de ser controlado em comparação com o sistema original. Após a aplicação do pré-compensador, é aplicado de fato o controlador, representado por $\mathbf{K}_S(s)$, que será responsável por garantir dentre outras características o rastreamento assintótico da referência. O controlador completo desse sistema genérico mostrado na Figura 6, pode ser representado como

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{K}_D(s)\mathbf{K}_S(s). \quad (2.21)$$

Figura 6 – Diagrama de blocos da malha de controle do sistema $\mathbf{G}(s)$.



Fonte: Do autor.

O pré-compensador faz com que as interações fora da diagonal principal sejam minimizadas em uma frequência específica escolhida. Em outras palavras, o desacoplamento permite controlar cada variável de estado de maneira independente, melhorando o comportamento do sistema. A escolha adequada do compensador $\mathbf{K}_D(s)$ é essencial para alcançar o desacoplamento desejado e pode ser feita com base nas características do sistema e nas necessidades de controle específicas.

Por outro lado, vale destacar que essa técnica pode apresentar dificuldades na sua aplicação, tais como: o desacoplamento pode ser muito sensível a erros e incertezas de modelagem; se a planta possuir zeros no semiplano direito, o desacoplamento geralmente introduzirá zeros extras no sistema de malha fechada, etc. (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

2.7.1 Seleção de pares de entrada e saída

A metodologia de matriz de ganho relativo é uma ferramenta amplamente utilizada para determinar se um determinado par de entrada/saída (representado por y_1 e u_1) é uma escolha adequada para a implementação de um sistema de controle em malha fechada. Essa escolha é importante para garantir que o acoplamento e as interações entre as variáveis de controle sejam mínimos, resultando em um desempenho otimizado do sistema. A matriz de ganho relativo permite uma avaliação precisa das influências mútuas entre as variáveis, ajudando a selecionar os pares mais adequados para o projeto do controlador.

Observando (2.17) pode-se concluir que, no controle descentralizado, é mais apropriado selecionar o par formado por u_j e y_i quando o valor de λ_{ij} está próximo de 1 em todas as frequências. Dessa forma, o ganho de $u_j - y_i$ não será afetado pelas malhas fechadas dos outros controles.

(ALBERTOS; ANTONIO, 2014) anuncia algumas regras práticas para a análise e seleção de pares de entrada e saída

- a) $\lambda_{ij} \approx 1$: o pareamento $y_j - u_i$ é uma boa opção para um laço SISO independente.
- b) $\lambda_{ij} < 0$: a função de transferência aparente possui um sinal diferente da função de transferência em malha aberta, o que pode levar a um erro no cálculo do sinal de realimentação, resultando em instabilidade. Pode ser demonstrado que, com controladores de ação integral, usar um pareamento RGA negativo levará a pelo menos uma das seguintes situações:
 - a) malha fechada instável em todos os laços;
 - b) laço autônomo instável (referente ao que possui RGA negativo);
 - c) laço $m - 1$ instável (quando o laço com ganho relativo negativo é aberto devido a falhas ou saturação).

Essas regras fornecem orientações para a seleção de pares de entrada e saída, considerando a magnitude e o sinal do número RGA(λ_{ij}).

Além de observar a magnitude de λ_{ij} , é importante considerar a fase dos elementos da matriz RGA. A magnitude sozinha pode ser enganosa, pois um valor igual a 1 pode corresponder a uma interação negativa. Portanto, é essencial considerar tanto a magnitude quanto a fase dos elementos do RGA ao selecionar os pares de entrada e saída.

Outra alternativa é calcular o número da RGA (ALBERTOS; ANTONIO, 2014) (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Uma medida simples para selecionar pares é preferir os com um número da RGA pequeno. Para o pareamento na diagonal principal tem-se

$$\text{número da RGA} = \|\Lambda(G(j\omega)) - \mathbf{I}\|_1. \quad (2.22)$$

Para pares fora da diagonal de uma planta 2×2 , o número da **RGA** é obtido subtraindo 1 para os pares selecionados, por exemplo,

$$\text{número da RGA} = \left\| \Lambda(G(j\omega)) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\|_1. \quad (2.23)$$

Similarmente, em plantas não quadradas o número da **RGA** é obtido subtraindo 1 para pares selecionados em blocos; por exemplo, para um sistema 2×2

$$\text{número da RGA} = \left\| \Lambda(G(j\omega)) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_1. \quad (2.24)$$

para o pareamento diagonal em bloco de uma planta $\mathbf{G}(j\omega)$ de dimensão 3×2 .

2.8 Valores singulares e a realimentação em sistemas MIMO

Em 1981, a revista *IEEE Transactions on Automatic Control* publicou uma Edição Especial focada em Sistemas de Controle Linear Multivariável. Nessa edição, foram apresentados seis artigos que exploravam o uso dos valores singulares na análise e no projeto de sistemas de retroalimentação multivariáveis. Um desses artigos, escrito por (DOYLE; STEIN, 1981), teve um impacto significativo. Ele abordava a questão fundamental de como obter os benefícios da retroalimentação mesmo diante de incertezas não estruturadas. Através do uso dos valores singulares, o artigo mostrou como as ideias clássicas de modelagem de laço na concepção de retroalimentação podem ser aplicadas de forma generalizada para sistemas multivariáveis. Esse trabalho pioneiro abriu caminho para o desenvolvimento de técnicas mais avançadas de controle multivariável baseadas nos valores singulares.

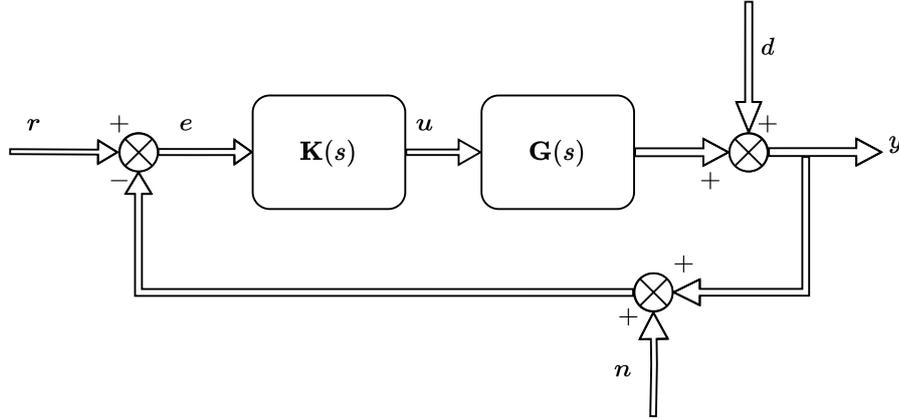
Para entender como isso foi feito, considere a configuração de um grau de liberdade mostrada na Figura 7. A planta \mathbf{G} e o controlador \mathbf{K} estão interconectados e são influenciados por comandos de referência \mathbf{r} , perturbações de saída \mathbf{d} e ruído de medição \mathbf{n} . As saídas a serem controladas são representadas por \mathbf{y} e os sinais de controle são representados por \mathbf{u} . A função de sensibilidade dessa realimentação é dada por: $\mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$ e a matriz de sensibilidade complementar é dada por: $\mathbf{T}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)(\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$ ou alternativamente por $\mathbf{T}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{S}(s))$ em que $\mathbf{S}(s)$ representa a matriz de sensibilidade e $\mathbf{T}(s)$ representa a matriz de sensibilidade complementar.

Diante das definições realizadas, é possível obter as seguintes relações

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{T}(s)\mathbf{r}(s) + \mathbf{S}(s)\mathbf{d}(s) - \mathbf{T}(s)\mathbf{n}(s), \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{S}(s)[\mathbf{r}(s) - \mathbf{n}(s) - \mathbf{d}(s)]. \quad (2.26)$$

Figura 7 – Representação em blocos do sistema G com distúrbios e ruídos



Fonte: Do autor.

Observe que através das relações de (2.25) e (2.26) é possível determinar vários objetivos do sistema multivariável em malha fechada, dos quais pode-se citar (SKOGES-TAD; POSTLETHWAITE, 2005), (DOYLE; STEIN, 1981)

1. Para rejeitar um distúrbio de frequência ω_d deve-se minimizar $\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_d))$;
2. Para atenuar ruídos de frequência ω_n deve-se minimizar $\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega_n))$;
3. Para o bom rastreamento de uma referência de frequência ω_r deve-se fazer com que $\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega_r)) \approx \underline{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega_r)) \approx 1$;
4. Para reduzir o esforço do controlador deve-se minimizar $\bar{\sigma}(\mathbf{K}(j\omega)\mathbf{S}(j\omega))$;

No entanto, existem certos requisitos que não podem ser satisfeitos ao mesmo tempo. Isso ocorre porque, na configuração de controle ilustrada na Figura 7, a igualdade $\mathbf{S}(j\omega) + \mathbf{T}(j\omega) = \mathbf{I}$ deve ser sempre cumprida. Isso significa que, se a magnitude dos valores singulares de $\mathbf{S}(j\omega)$ for grande em um determinado espectro de frequência, então a magnitude dos valores singulares de $\mathbf{T}(j\omega)$ será pequena nesse mesmo espectro de frequência. Essa é uma relação fundamental entre as funções de sensibilidade e de transferência em malha fechada (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

O projeto do controle realimentado é um compromisso entre objetivos conflitantes. As faixas de frequência em que esses objetivos são importantes podem ser distintas. Por exemplo, a rejeição de perturbações é tipicamente relevante em baixas frequências, enquanto a redução de ruído é mais importante em frequências mais altas.

Pode-se observar que o ganho singular máximo, $\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega))$, se aproxima de $\frac{1}{\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))}$ em frequências onde $\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$ é muito maior que 1. Similarmente, para o sistema em malha fechada, onde $\mathbf{T}(s) = \mathbf{L}(s)(\mathbf{I} + \mathbf{L}(s))^{-1}$, o ganho singular máximo, $\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega))$, se aproxima de $\bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$ em frequências onde $\bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$ é muito menor que 1.

Portanto, em faixas de frequência específicas, é possível aproximar os requisitos de malha fechada pelos seguintes objetivos de malha aberta (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

1. Para rejeitar distúrbios de frequência ω_d , deve-se maximizar $\underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega_d)\mathbf{K}(j\omega_d))$; válido somente para o espectro de frequência no qual $(\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{K}(j\omega)) \gg 1$.
2. Para atenuar ruídos de medição de frequência ω_n , deve-se minimizar $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega_n))\mathbf{K}(j\omega_n)$; válido somente para o espectro de frequência no qual $(\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{K}(j\omega)) \ll 1$.
3. Para um bom rastreamento de uma referência de frequência ω_r , deve-se maximizar $(\underline{\sigma}\mathbf{G}(j\omega_r)\mathbf{K}(j\omega_r))$; válido somente para o espectro de frequência no qual $\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{K}(j\omega) \gg 1$.

Note que os requisitos de malha aberta 1 e 3 são válidos e importantes em baixas frequências, enquanto 2 e 4 são condições válidas e importantes em altas frequências.

2.9 Valores singulares na análise de estabilidade e desempenho

A Decomposição em Valores Singulares (do inglês, *Singular Value Decomposition*) (SVD) é uma técnica amplamente utilizada na análise de sistemas lineares. Através da SVD, a matriz de transferência do sistema pode ser decomposta em componentes diagonais chamados de valores singulares, que fornecem informações valiosas sobre a sensibilidade do sistema a perturbações e a capacidade de rastreamento de referência.

A função de sensibilidade \mathbf{S} é particularmente importante na análise de estabilidade e desempenho dos sistemas de controle MIMO e também nos sistemas SISO. Ela representa a relação entre as perturbações de entrada e a saída do sistema, e fornece uma medida quantitativa da capacidade de rejeitar perturbações indesejadas e acompanhar referências de forma precisa. Neste contexto, um sistema ideal apresenta uma sensibilidade nula. Ao analisar a função de sensibilidade, é possível identificar as frequências críticas onde a estabilidade e o desempenho do sistema são mais sensíveis. Nos sistemas SISO o ganho da sensibilidade em uma determinada frequência ω é dada por

$$|S(j\omega)| = \frac{|e(\omega)|}{|r(\omega)|} \quad (2.27)$$

em que e e r são o erro e a referência, respectivamente.

Para os sistemas MIMO a sensibilidade é representada na forma matricial, onde e e r são vetores do erro e da frequência, respectivamente.

O ganho de

$$\frac{\|\mathbf{e}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{r}(\omega)\|_2} = \frac{\|\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{r}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{r}(\omega)\|_2} \quad (2.28)$$

depende da direção do vetor $\mathbf{r}(\omega)$ e é limitado pelo valor singular mínimo de $\mathbf{S}(j\omega)$.

$$\underline{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \leq \frac{\|\mathbf{e}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{r}(\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \quad (2.29)$$

Em um sistema **SISO**, a largura de banda é definida como a frequência na qual a saída é atenuada em 3 dB em relação à entrada de referência (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013). Em sistemas **MIMO**, a largura de banda varia conforme as diferentes direções do sistema, abrangendo a faixa de frequência entre a menor frequência no qual o maior valor singular é reduzido em 3 dB e a maior frequência em que o menor valor singular é reduzido em 3 dB. Portanto, para determinar uma largura de banda única em sistemas multivariáveis, é interessante considerar a direção que apresenta o pior caso em termos de largura de banda (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

A fim de garantir um bom desempenho desse sistema multivariável, é desejável que o ganho da função de sensibilidade seja baixo na direção do vetor de referência, para o pior caso, $\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega))$. Essa análise permite identificar as frequências críticas em que o sistema é mais sensível a perturbações.

Em sistemas de realimentação negativa, tem-se que $\mathbf{S}(j\omega) = (\mathbf{I} + \mathbf{L}(j\omega))^{-1}$, onde $\mathbf{L}(j\omega)$ é a matriz das funções de transferência de malha aberta. Logo, conforme algumas propriedades sobre desigualdade de valores singulares apresentado em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), (2.29) pode ser reescrita como:

$$\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega)) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega))} \leq \underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega)) + 1 \quad (2.30)$$

Na frequência da faixa de passagem, onde $1/\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_{bw})) = \sqrt{2}$, há a seguinte relação:

$$0,41 \leq \underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega_{bw})) \leq 2,41 \quad (2.31)$$

2.10 Pico máximo de sensibilidade

A sensibilidade é uma medida importante na análise de sistemas MIMO, que avalia como pequenas perturbações nas entradas ou parâmetros do sistema afetam sua resposta. O pico máximo de sensibilidade, representado como

$$M_s = \max_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) \quad (2.32)$$

é definido como o valor máximo do valor singular máximo da função de sensibilidade para toda a faixa de frequências.

A fim de garantir um bom desempenho é desejável que M_s seja menor que 2 ou 6 dB. Sistemas MIMO com pico máximo de sensibilidade maiores que 4 são considerados não robustos, indicando uma maior suscetibilidade a perturbações e incertezas (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

2.11 Conclusões parciais

As ferramentas apresentadas são de suma importância no que se refere a análise de sistemas MIMO. A partir da SVD pode-se observar sua utilidade no que diz respeito às direções do sistema analisado. Por meio da controlabilidade funcional, é possível identificar se o sistema $m \times n$ é funcionalmente controlável ou não, e com isso saber se existirá ou não alguma direção de saída na qual o sistema não poderá ser controlado. O conceito do número de condicionamento aborda sobre a propagação de erros das entradas para as saídas, indicando se as entradas têm forte efeito sobre as variáveis de saída ou não. A análise é feita a partir da razão entre os ganhos máximos e mínimos presentes na SVD. Por fim, tratou-se das características da RGA uma das mais importantes ferramentas para o controle MIMO, com ela é possível escolher as variáveis de controle a partir da análise dos ganhos relativos encontrados, além disso, obter informações sobre a interação entre essas variáveis.

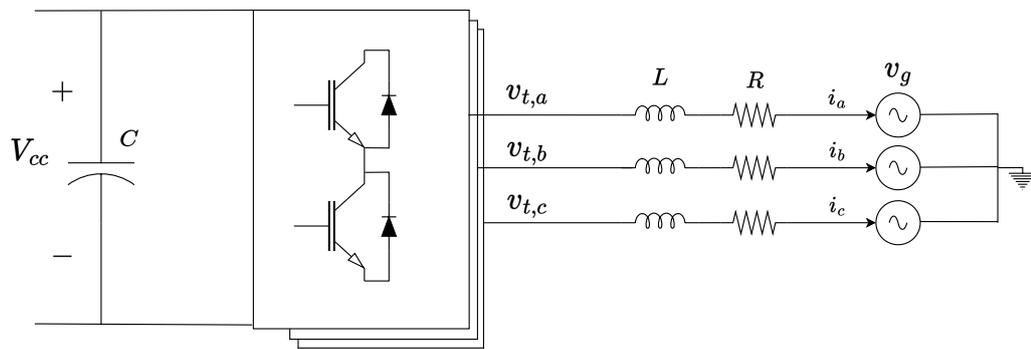
Essas ferramentas compõem um conjunto valioso para a análise e projeto de sistemas MIMO, proporcionando uma compreensão aprofundada das relações entre entradas e saídas. Os valores singulares, juntamente com a função de sensibilidade, desempenham um papel fundamental na identificação das frequências críticas em que o sistema é mais sensível a perturbações e variações nos parâmetros. Além disso, o pico máximo de sensibilidade (MS) emerge como um indicador significativo de robustez, com MS acima de 4 indicando sistemas menos robustos. Essas descobertas são essenciais para a concepção de sistemas de controle MIMO que atendam aos requisitos de estabilidade e desempenho estabelecidos.

3 Estudo de caso para um sistema MIMO quadrado

A partir das ferramentas úteis ao controle multivariável é possível obter informações preciosas sobre alguns tipos de sistemas, como os de conversão de energia. A fim de esclarecer o uso dos mecanismos pontuados no capítulo 2, este capítulo fará o estudo de caso de um sistema VSC multivariável linear quadrado.

A Figura 8 ilustra o sistema VSC conectado à rede elétrica por meio de um indutor L com uma resistência R . O sistema é composto por um circuito trifásico cujas grandezas estão relacionadas por fase.

Figura 8 – Sistema VSC trifásico com filtro de primeira ordem.



Fonte: Do autor.

Antes de iniciar as análises MIMO, o sistema será trabalhado matematicamente a fim de adequar suas informações à forma matricial. Com isso será possível realizar o estudo apropriadamente.

Inicialmente, a transformada de Park permite converter um sistema trifásico, que compõem o diagrama, indo do referencial inicial a, b, c estacionário para o referencial dq , síncrono. Essa ferramenta, quando aplicada à corrente ou tensão, permite reduzir o sistema de três para dois circuitos.

Por seguinte, pode-se desenvolver as equações diferenciais no sistema de coordenadas síncrono dq para as correntes de saída do VSC, como

$$\begin{cases} L \frac{di_d}{dt} = -Ri_d + \omega_1 Li_q + \frac{V_{cc}}{2} m_d - v_{g,d}, \\ L \frac{di_q}{dt} = -Ri_q - \omega_1 Li_d + \frac{V_{cc}}{2} m_q - v_{g,q} \end{cases} \quad (3.1)$$

em que v_{gd} e v_{gq} são as tensões instantâneas no ponto de acoplamento comum em dq , i_d e i_q são as correntes instantâneas de saída do inversor em dq , m_d e m_q são os índices

de modulação, V_{cc} é a tensão medida no barramento CC do inversor e $\omega_1 = 2\pi f_1$ é a frequência angular fundamental do sistema elétrico.

A técnica de modulação por largura de pulso senoidal foi utilizada para acionar as chaves semicondutoras deste sistema, com isso as tensões nos terminais CA, $v_{t,d}$ e $v_{t,q}$, do conversor podem ser descritas por

$$\begin{cases} v_{t,d} = \frac{V_{cc}}{2} m_d \\ v_{t,q} = \frac{V_{cc}}{2} m_q \end{cases}. \quad (3.2)$$

A fim de tornar a análise menos complexa, optou-se por considerar a tensão no lado CC constante, resultando em um sistema linear. Logo, sua representação em espaço de estados é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{F}_1 \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 \end{cases}. \quad (3.3)$$

em que,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \omega_1 \\ -\omega_1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_{cc}}{2L} & 0 \\ 0 & \frac{V_{cc}}{2L} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

são as matrizes de estado, entrada, distúrbio e saída, respectivamente; e

$$\mathbf{x}_1 = [i_d \quad i_q]^T, \mathbf{u}_1 = [m_d \quad m_q]^T, \mathbf{d}_1 = [v_{g,d} \quad v_{g,q}]^T, \mathbf{y}_1 = [i_d \quad i_q]^T, \quad (3.5)$$

são os vetores de estado, entrada, distúrbio e saída, respectivamente.

Para obter a matriz com as funções de transferência do sistema (3.3), considerando a entrada \mathbf{u}_1 , utilizou-se a transformada de Laplace,

$$\mathbf{G}_1(s) = \frac{\mathbf{y}_1(s)}{\mathbf{u}_1(s)} = \mathbf{C}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1, \quad (3.6)$$

em condições iniciais nulas. O que resulta em

$$\mathbf{G}_1(s) = \frac{V_{cc}}{2L^2} \frac{1}{(s + \frac{R}{L})^2 + \omega_1^2} \begin{bmatrix} Ls + R & \omega_1 L \\ -\omega_1 L & Ls + R \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

A fim de dar sequência ao estudo de caso, optou-se por parametrizar o sistema em questão, tornando a caracterização das ferramentas mais didática.

A Tabela 1 indica os parâmetros adotados para o estudo, onde o sistema em questão é de característica linear e quadrado.

Tabela 1 – Parâmetros adotados para o estudo de caso 1.

Descrição dos parâmetros	Valor
Tensão no barramento CC (Vcc)	400 V
Capacitância no barramento CC (C)	6mF
Indutância do filtro de saída (L)	1mH
Resistência equivalente de saída (R)	0,3 Ω
Frequência fundamental (f_1)	60Hz

3.1 Análise das Direções

A SVD é uma ferramenta de análise de dados que permite decompor uma matriz em três matrizes unitárias \mathbf{W} , $\mathbf{\Sigma}$ e \mathbf{V}^H de modo que deve ser possível analisar as direções de entrada e saída atrelada aos valores singulares. Como exemplo, é analisado a SVD da matriz complexa $\mathbf{G}_1(j\omega)$ para $\omega = 2\pi 50$ rad/s, portanto,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3,7 - j0,5 & 1,8 - j2,6 \\ -1,8 + j2,6 & 3,7 - j0,5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(j2\pi 50)} \underbrace{\begin{bmatrix} 652,5091 & 0 \\ 0 & 265,4452 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}(j2\pi 50)} \underbrace{\begin{bmatrix} -0,7 - j0,1 & 0,2 - j0,6 \\ 0,1 - j0,7 & -0,6 - j0,2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^H(j2\pi 50)}^H.$$

Quando se trata de um VSC, as matrizes geradas pela decomposição em valores singulares SVD podem ser usadas para analisar as características dinâmicas do sistema. Os valores singulares obtidos pela SVD representam o ganho dos efeitos das entradas e saídas do sistema. Eles são utilizados para medir a sensibilidade do sistema a diferentes frequências.

As matrizes geradas pela SVD podem ser analisadas separadamente conforme as particularidades de cada uma:

- A matriz $\mathbf{W}(j2\pi 50)$ (matriz de colunas ortogonais) contém os autovetores associados aos valores singulares não nulos. Esses autovetores representam as direções dos modos do sistema e podem ser usados para identificar quais saídas estão mais relacionadas a cada modo.
- A matriz $\mathbf{\Sigma}(j2\pi 50)$ contém os valores singulares ordenados em ordem decrescente. O valor singular máximo $\bar{\sigma}(j2\pi 50)$ é o maior ganho possível em 50 Hz. Enquanto o valor singular mínimo $\underline{\sigma}(j2\pi 50)$ indica o menor ganho possível em tal frequência.
- A matriz $\mathbf{V}(j2\pi 50)^H$ (matriz de linhas ortogonais) contém os autovetores associados aos valores singulares não nulos. Esses autovetores representam as direções dos estados de operação do sistema e podem ser usados para identificar quais entradas estão mais relacionadas a cada estado de operação.

Com auxílio de *softwares* matemáticos, a relação dos valores singulares com os elementos da planta pode ser obtida. Neste sentido, a formulação dos valores singulares

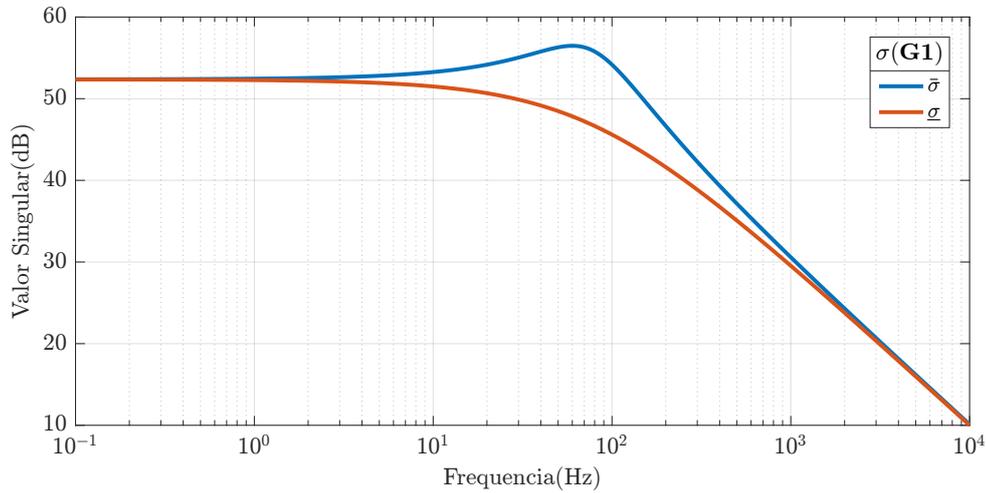
máximo e mínimo para o sistema estudado são:

$$\bar{\sigma}(G_1(j\omega)) = \frac{V_{cc}}{2\sqrt{R + L(\omega_1 - \omega)^2}} \quad (3.8)$$

$$\underline{\sigma}(G_1(j\omega)) = \frac{V_{cc}}{2\sqrt{R + L(\omega_1 + \omega)^2}} \quad (3.9)$$

De posse de (3.8) e (3.9) é possível representá-los graficamente com a variação da frequência. Neste sentido, as curvas da Figura 9 exibem os valores singulares máximo e mínimo para diversas frequências, indicando valores iguais para determinadas frequências mais baixas e diferentes em outras. Especificamente, observa-se maior distanciamento entre os valores na faixa que vai de 10 Hz à 300 Hz.

Figura 9 – Análise da resposta em frequência para os valores singulares do sistema



Fonte: Do autor.

O controle de corrente dq do sistema da Figura 8 é geralmente projetado em $\omega = 0$ rad/s a fim de controlar o fluxo das potências ativa e reativa médias. Para $\mathbf{G}_1(j\omega = 0)$ pode-se observar, na Figura 9, que os valores singulares máximos e mínimos são iguais, o que também pode ser visto em (3.10), quando se calcula a SVD em tal frequência.

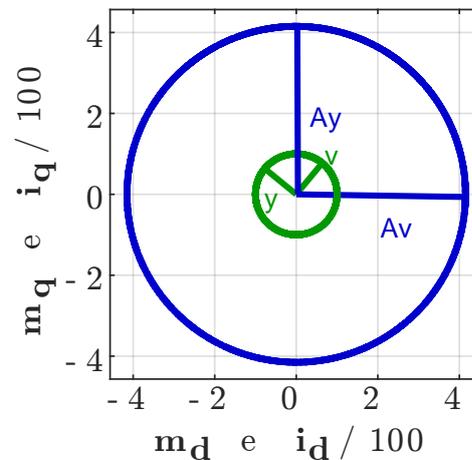
$$\mathbf{G}_1(j0) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,7 & -0,6 \\ 0,6 & 0,7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} 415,1 & 0 \\ 0 & 415,1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^H(0)} \quad (3.10)$$

Ainda para o resultado de (3.10) os elementos do primeiro vetor coluna de $\mathbf{W}(0)$ possuem sinais iguais, indicando que as correntes i_d e i_q seguem o mesmo sentido adotado na modelagem. Por outro lado, os elementos do segundo vetor coluna de \mathbf{W} se apresentam em sentidos contrários. Contudo, embora isso aconteça, existe um valor singular e uma

direção de entrada em $\mathbf{V}(0)$ para cada uma desta condição. Logo, independente do sentido das correntes, sempre haverá uma direção de entrada que levará a uma direção de saída correspondente. Ou seja, não há uma direção de saída na qual esse sistema não possa ser controlado.

Outra maneira de analisar a relação entre as entradas e saídas de um sistema é por meio da Figura 10. Nela, é possível observar que na frequência $\omega = 0$, o sistema tem comportamento de ganho constante. Isso significa que, independentemente da direção do sinal de entrada, a magnitude do vetor de saída terá o mesmo valor.

Figura 10 – Análise dos vetores de \mathbf{G}_1 para frequência angular ω nula.



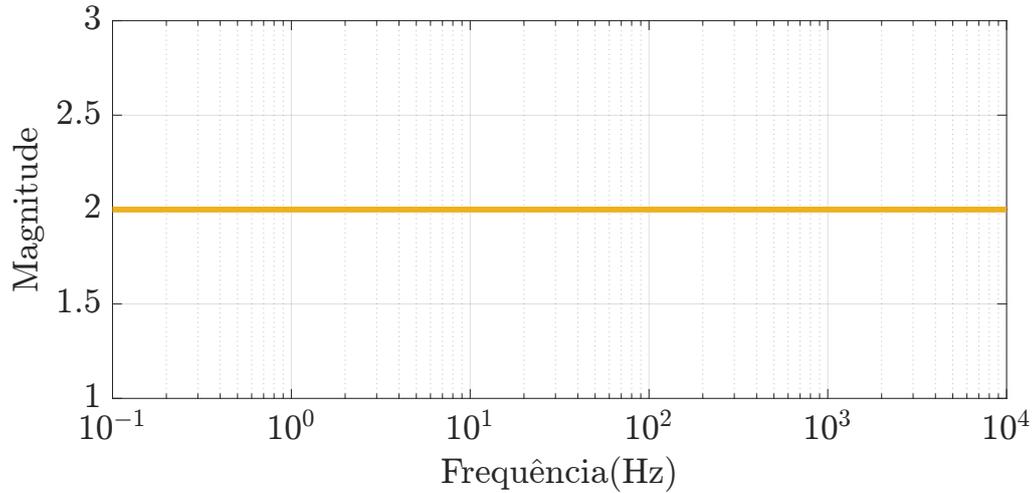
Fonte: Do autor.

3.2 Análise da controlabilidade funcional

A definição de controlabilidade funcional está atrelada ao número de saídas do sistema e ao seu posto normal. Caso o sistema apresente um número de saídas m igual ao posto normal (p_η), disse-se que o sistema é funcionalmente controlável naquela frequência. Uma das formas de dizer se o sistema é funcionalmente controlável é analisando os valores de ganhos relativos da SVD, caso o último valor singular $\underline{\sigma}$ for zero, o sistema é funcionalmente não controlável.

Para o estudo de caso em questão, tem-se um sistema 2×2 quadrado, em que o posto normal (p_η) é igual ao número de saídas m . Esse resultado indica que o sistema é controlável funcionalmente. Isso é verificado através do cálculo do posto da matriz de transferência (3.6) para vários valores de ω , conforme apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Análise do posto do sistema em diferentes frequências.



Fonte: Do autor.

3.3 Análise do número de condicionamento

Os resultados oriundos da **SVD** para a frequência $f = 50\text{Hz}$ apresentam os valores singulares máximo e mínimo, sendo utilizados para a obtenção do número de condicionamento. A partir de (3.11) é possível observá-lo, para o sistema em questão, analisá-lo conforme o resultado, conforme o seguinte

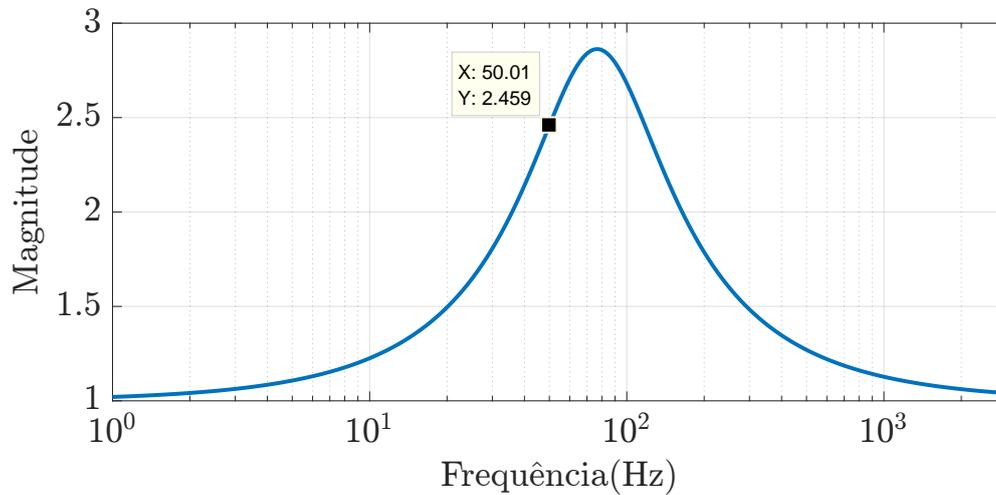
$$\gamma(\mathbf{G}(j2\pi 50)) = \frac{\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j2\pi 50))}{\underline{\sigma}(\mathbf{G}(j2\pi 50))} = 2,45 \quad (3.11)$$

Para a frequência $\omega = 0$ os valores singulares máximos e mínimos apresentam mesma magnitude (3.10), logo, nesse ponto o sistema apresenta-se no melhor caso, definindo-o como um sistema bem condicionado

Contudo, o resultado obtido para frequência analisada ($f = 50\text{ Hz}$) indica que o sistema pode sofrer variações a partir da direção de entrada. Entretanto, o valor baixo torna os efeitos das diferentes direções de entrada ínfimos sobre a saída, além de não ser suficiente para sugerir um sistema mal condicionado.

Para o caso de uma análise genérica, considerando um espectro de frequências da Figura 12, observa-se que ocorre um pico na frequência próxima a 80 Hz. Ainda assim, de acordo com (LAU; ALVAREZ; JENSEN, 1985), o valor é baixo, não caracterizando um sistema mal condicionado. Portanto, mesmo para um espectro extenso de frequência, o sistema quadrado se mostrou, a partir desta ferramenta, fácil de ser controlado.

Figura 12 – Análise do número de condicionamento em diferentes frequências para um sistema quadrado 2×2 .



Fonte: Do autor.

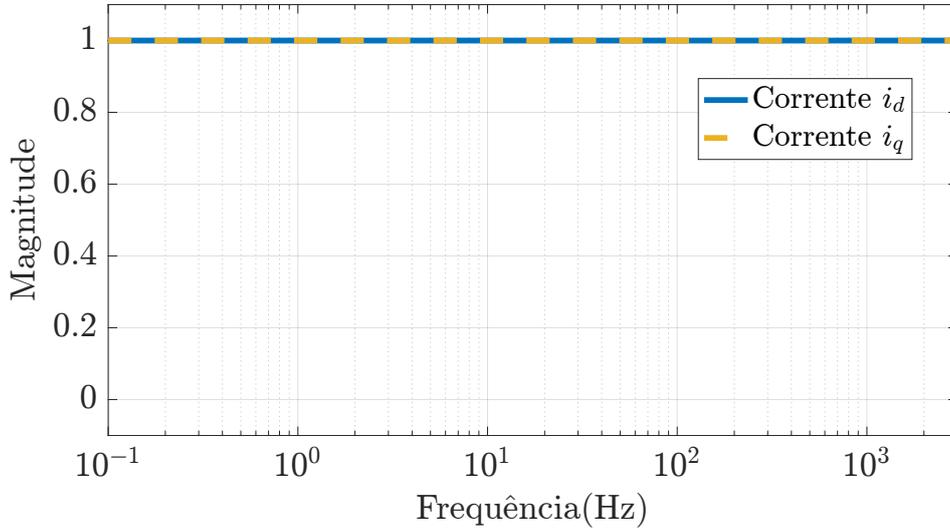
3.4 Análise da matriz de ganhos relativos

A matriz de ganhos relativos **RGA** permite estabelecer a relação entre as variáveis de entrada e saída de um sistema. Ao aplicá-la ao sistema em questão, é possível obter informações sobre a planta e projetar o seu controle segundo os resultados obtidos na matriz. Para aprofundar nestas características, utiliza-se (2.18) para realizar o cálculo, considerando os parâmetros do **VSC**.

Como dito no Capítulo 2, algumas informações relevantes podem ser obtidas a partir das somas dos elementos das linhas e/ou colunas **RGA**. O resultado para cada vetor linha está atrelado a uma saída da planta, assim como o resultado para cada vetor coluna relaciona-se com uma entrada da planta. Se a soma dos elementos de um vetor linha qualquer estiver distante do número 1, a saída correspondente é difícil de ser controlada. De maneira análoga, a entrada associada não terá efeito sobre o sistema, caso a soma dos elementos de um vetor coluna genérica estiver distante de 1.

A Figura 13 foi obtida através da soma das linhas da matriz **RGA** do sistema estudado. Logo, observe que tanto o resultado corresponde a i_d quanto a i_q estão aproximadamente em 1 para qualquer valor de frequência. Com isso, a análise indica que é possível controlar tais correntes independente da frequência de controle adotada. Além disso, vale destacar que, de certa forma, essa resposta está atrelada com a análise de controlabilidade funcional do sistema. Isto é, sendo o sistema funcionalmente controlável, todas as suas saídas poderão ser controladas e, conseqüentemente, as somas das linhas da RGA serão unitárias para qualquer ω .

Figura 13 – Soma dos elementos das linhas da RGA.



Fonte: Do autor.

3.5 Desacoplamento e controle descentralizado

No sistema de malha fechada, uma abordagem comum de controle multivariável envolve duas etapas como observado em (2.7). Na primeira etapa, um pré-compensador $\mathbf{K}_D(s)$ é projetado para neutralizar as interações na planta original $\mathbf{G}(s)$. Isso resulta em uma nova forma de planta $\mathbf{G}_S(s)$, sendo mais diagonal e mais fácil de controlar. Em seguida, na segunda etapa, um controlador diagonal $\mathbf{K}_S(s)$ é projetado para a forma da planta $\mathbf{G}_S(s)$. O controlador geral é obtido multiplicando o pré-compensador $\mathbf{K}_D(s)$ pelo controlador diagonal $\mathbf{K}_S(s)$. Essa abordagem simplifica o controle multivariável, permitindo o uso de métodos semelhantes aos sistemas de controle SISO. Além disso, os compensadores eficazes podem ser derivados com base em princípios físicos e podem incluir elementos não lineares, como proporções (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Em (3.1), indica haver acoplamentos entre as variáveis de corrente. Na primeira equação diferencial de (3.1), há o termo $\omega_1 L i_q$, que mostra a influência da corrente q na taxa de variação da corrente d . Da mesma forma, na segunda equação diferencial há um termo $\omega_1 L i_d$, indicando a influência da corrente d na taxa de variação da corrente q .

A partir desses termos de acoplamento, nota-se que as correntes dq se relacionam durante a dinâmica de funcionamento e, portanto, influenciam umas às outras.

A fim de eliminar o acoplamento mencionado propõem que o desacoplamento seja feito considerando

$$m_d = \frac{2}{V_{cc}}(u_d - \omega_1 L i_q + v_{g,d}), \quad (3.12)$$

e

$$m_q = \frac{2}{V_{cc}}(u_q + \omega_1 L i_d + v_{g,q}). \quad (3.13)$$

Ao substituir (3.12) e (3.13) em (3.1) tem-se que:

$$\begin{cases} L \frac{di_d}{dt} = -R_{i_d} + u_d \\ L \frac{di_q}{dt} = -R_{i_q} + u_q, \end{cases} \quad (3.14)$$

cuja representação em espaço de estados é:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_D \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_D \mathbf{u}_D, \quad (3.15)$$

em que,

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_D = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Este novo sistema é modificado de maneira que o vetor de entrada seja alterado de $\mathbf{u}_1 = [m_d \ m_q]^T$ para $\mathbf{u}_D = [u_d \ u_q]^T$.

Conforme a Figura 14, o vetor de saída \mathbf{u}_1 é resultado da operação do controlador $\mathbf{K}_{D,1}(s)$ sobre o vetor de entrada \mathbf{u}_D , cuja representação em espaço de estados, de acordo (3.12) e (3.13), é dada por:

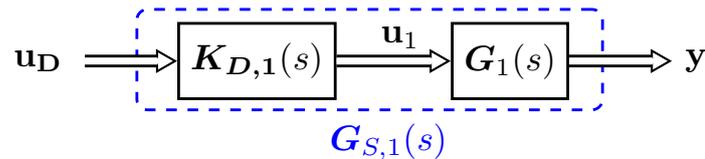
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}_D \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_D \mathbf{u}_D + \mathbf{F}_D \mathbf{d}_1 \quad (3.17)$$

em que,

$$\mathbf{C}_D = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\omega_1 L}{V_{cc}} \\ \frac{2\omega_1 L}{V_{cc}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_D = \begin{bmatrix} \frac{2}{V_{cc}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{V_{cc}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} \frac{2}{V_{cc}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{V_{cc}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

são as matrizes de saída, transmissão direta e *feed-forward*, respectivamente.

Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema modificado.



Fonte: Do autor.

A matriz de funções de transferência que rege o comportamento do sistema, considerando a entrada \mathbf{u}_D e saída, \mathbf{u}_1 é dada por:

$$\mathbf{K}_{D,1}(s) = \frac{\mathbf{u}_1(s)}{\mathbf{u}_D(s)} = \mathbf{C}_D(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_D)^{-1}\mathbf{B}_D. \quad (3.19)$$

resultando em,

$$\mathbf{K}_{D,1}(s) = \frac{2}{V_{cc}} \cdot \frac{1}{Ls + R} \begin{bmatrix} Ls + R & -L\omega_1 \\ L\omega_1 & Ls + R \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Com isso, consoante a Figura 14 é possível encontrar:

$$\mathbf{G}_{S,1}(s) = \mathbf{G}_1(s)\mathbf{K}_{D,1}(s) = \frac{1}{Ls + R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

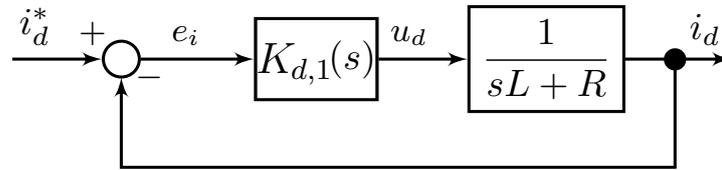
Nesta etapa, é possível aplicar um controlador descentralizado diagonal,

$$\mathbf{K}_{S,1}(s) = \begin{bmatrix} K_{d,1}(s) & 0 \\ 0 & K_{q,1}(s) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

o qual permite realizar o projeto de forma separada para cada um dos sistemas SISO independentes.

O sistema de equações expresso na equação (3.14) caracteriza um sistema dinâmico linear de primeira ordem, no qual as variáveis são completamente desacopladas. Sob este novo regime, as variáveis de estado i_d e i_q podem ser controladas de forma direta por u_d e u_q , respectivamente. Dessa forma, torna-se viável a concepção de dois controladores idênticos, tal como ilustrado no esquema delineado na Figura 15, para o gerenciamento das correntes em eixo direto e em quadratura.

Figura 15 – Diagrama de blocos simplificado do controle de corrente de eixo direto.



Fonte: Do autor.

O modelo utiliza um sistema de coordenadas síncrono, exigindo controladores capazes de seguir uma referência constante. Um controlador PI é empregado para garantir que a corrente sintetizada acompanhe o sinal de referência de forma estável. Isso é essencial para controlar as correntes i_d e i_q . Portanto, a função de transferência em malha aberta do controlador das correntes é dada por

$$H_{ol,i}(s) = \left(\frac{kp,i}{sL} \right) \frac{s + \frac{ki,i}{kp,i}}{s + \frac{R}{L}}, \quad (3.23)$$

onde kp, i e ki, i são os ganhos proporcional e integral, respectivamente.

Na equação (3.23), o polo $s = -R/L$ é neutralizado pelo zero $s = -\frac{ki, i}{kp, i}$ para evitar problemas com a dinâmica da corrente de saída do conversor. Isso modifica a função de transferência em malha aberta para

$$H_{ol, i}(s) = \frac{kp, i}{sL}. \quad (3.24)$$

Sendo a função de transferência de malha fechada dada por:

$$H_{cl, i}(s) = \frac{1}{1 + \tau_i s}, \quad (3.25)$$

onde $\tau_i = L/kp, i$ é a constante de tempo do sistema compensador.

3.5.1 Seleção de pares

Em alternativa ao método de desacoplamento, em sistemas nos quais as interações não foram completamente eliminadas, o número da matriz de ganho relativo RGA é uma medida útil para selecionar o par de entrada e saída mais adequado a ser controlado.

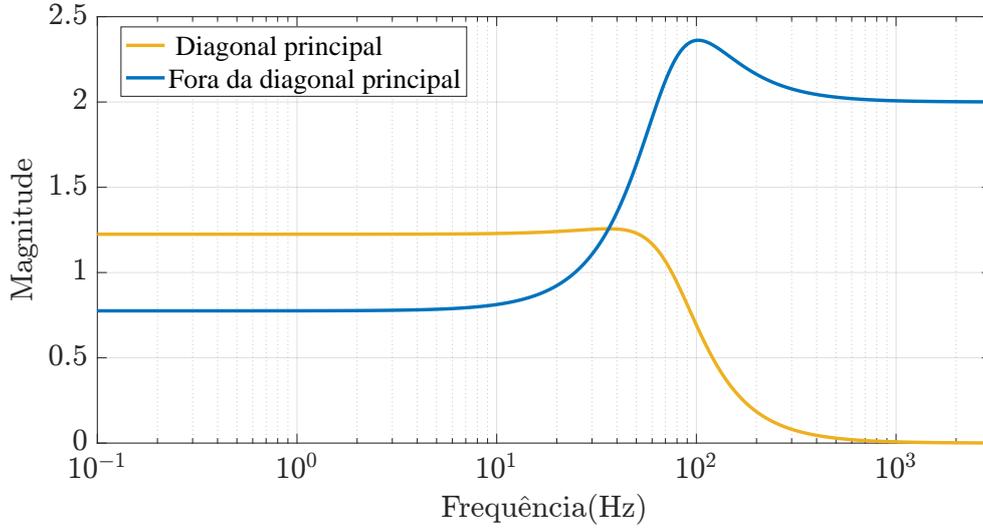
Ao analisar a Figura 23, é possível observar as curvas que representam o número da matriz de ganho relativo RGA para cada pareamento considerado. Em particular, destaca-se o pareamento fora da diagonal principal, representado pelas curvas de cor mais clara. Observa-se que esse pareamento apresenta valores menores do número da RGA até uma frequência de aproximadamente 37 Hz.

Essa observação sugere que, em frequências baixas, é mais recomendado controlar a corrente direta (i_d) utilizando m_q , enquanto a corrente em quadratura (i_q) deve ser controlada utilizando m_d .

3.6 Realimentação e análise de estabilidade e desempenho

A análise de sensibilidade exerce um papel fundamental no desenvolvimento de sistemas de controle, possibilitando a avaliação dos efeitos ocasionados por pequenas alterações nas entradas ou nos parâmetros do sistema na saída correspondente, como dito no capítulo 2. No âmbito do controle realimentado, essa análise proporciona uma compreensão valiosa da habilidade do sistema em suprimir perturbações indesejadas e em rastrear referências com precisão.

Dado que o enfoque central é a apresentação de ferramentas multivariáveis, a decisão foi tomar como base um projeto de controle previamente estabelecido na literatura. Neste sentido optou-se por utilizar o projeto proposto por (YAZDANI; IRAVANI, 2010), que faz uso do desacoplamento com o pré-compensador para posteriormente utilizar dois controladores *proporcional-integral* (PI) nos lugares de $K_{d,1}(s)$ e $K_{q,1}(s)$. Vale lembrar que o modelo foi descrito no sistema de coordenadas síncrono e, portanto, o controlador PI é

Figura 16 – Resposta em frequência considerando número RGA de $\mathbf{G}_1(s)$.

Fonte: Do autor.

suficiente para garantir que as correntes sintetizadas rastreie o sinal de referência a uma condição de erro nulo em estado permanente.

Ademais, neste novo sistema as variáveis de estado i_d e i_q podem ser controladas diretamente por u_d e u_q , respectivamente. Neste sentido, dois controladores idênticos podem ser projetados para controlar as correntes de eixo direto e em quadratura. Contudo, optou-se por usar constante de tempo diferentes, isto é, $\tau_{i,d} = 1\text{ms}$ e $\tau_{i,q} = 2\text{ms}$.

3.6.1 Análise dos valores singulares na realimentação

Após realizado o projeto dos controladores se faz necessário analisá-lo a fim de verificar se os requisitos de estabilidade e desempenho estão sendo atendidos. Neste sentido, num primeiro momento será observado se o projeto proposto obedece aos critérios estabelecidos na seção 2.8.

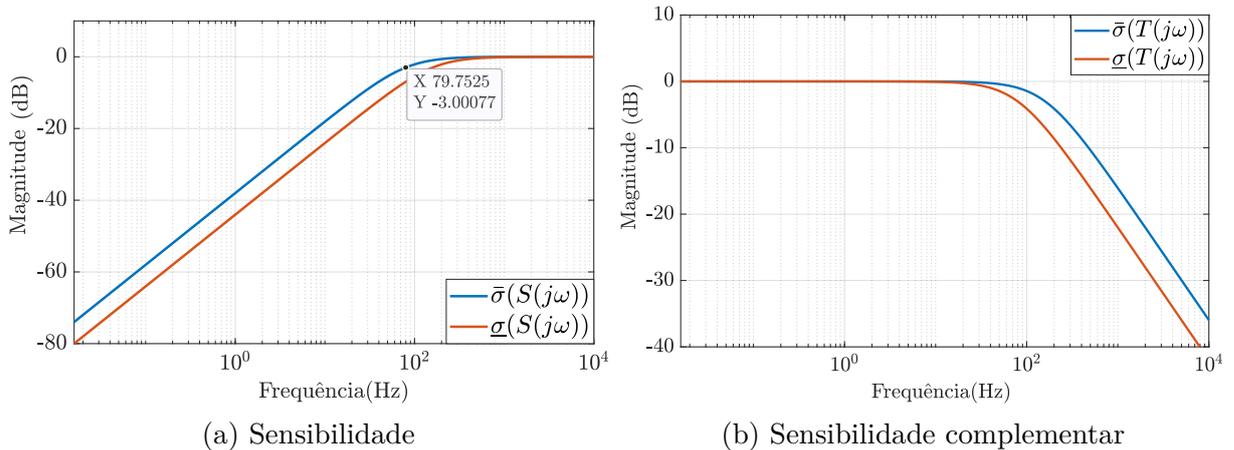
Uma das características que deva ser garantida é a minimização do maior valor singular da sensibilidade nas frequências dos distúrbios (ω_{d_1}). Sabendo que os distúrbios destes sistemas são as tensões trifásicas da rede elétrica, representadas por $v_{g,d}$ e $v_{g,q}$, pode-se afirmar que $\omega_{d_1} = 0$ rad/s. Portanto, é notório na Figura 17 (a) que esta característica foi atendida e, portanto, o projeto garante que interferências dessa natureza dificilmente impactem no funcionamento do sistema. Por fim, é importante salientar que o maior valor do $\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega))$ para todo espectro de frequência, ou seja, o pico máximo de sensibilidade $M_s = 1$, indicando que o projeto proposto é estável.

Já para a resposta da sensibilidade complementar, destacada na Figura 17 (b), duas condições tem que ser satisfeitas. A primeira é garantir a minimização do maior valor singular da sensibilidade complementar nas frequências dos ruídos de medição (ω_{n_1}).

Distúrbios desta natureza advém do sensoriamento dos sinais e geralmente ocorrem em frequências superiores a dezenas de *kilohertz*. Neste contexto, é relevante ressaltar que, ao analisar a resposta do $\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega))$, percebe-se que sinais com frequências superiores a 100 Hz serão atenuados, assegurando que perturbações desse tipo tenham pouca probabilidade de afetar o desempenho do sistema.

Outro destaque na Figura 17 (b) é sobre o $\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) \approx \underline{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) \approx 1$ ou 0 dB, em baixa frequência. Já que o modelo foi escrito utilizando um sistema de coordenadas síncrono e, portanto, o projeto deve seguir uma referência de valor constante, ou seja, com frequência zero. Quando é certificado que os valores singulares máximo e mínimo da sensibilidade complementar são unitários, é garantido que independente da direção do vetor de entrada, que no caso é o vetor de referência, o sistema vai atingir o estado permanente com erro nulo.

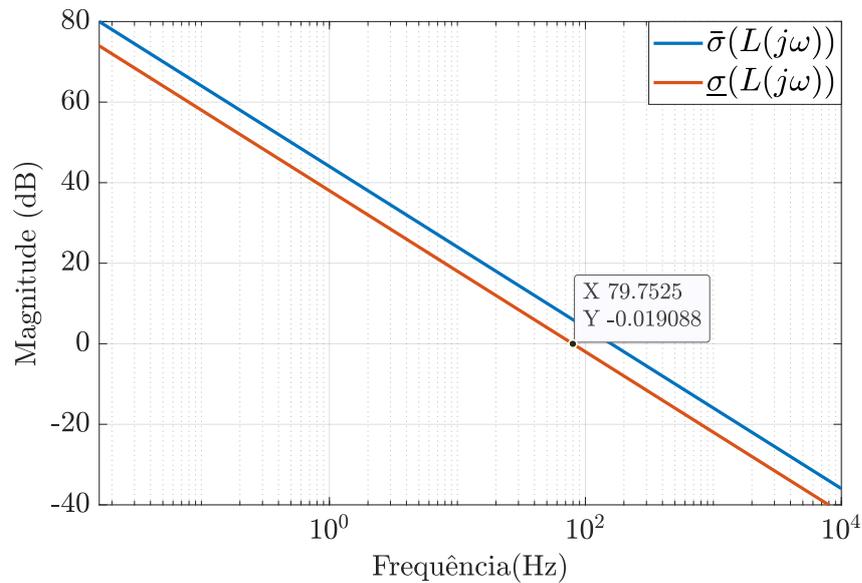
Figura 17 – Respostas em frequência do sistema de malha fechada.



Fonte: Do autor.

Todas as análises realizadas anteriormente, observando as respostas do sistema em malha fechada, também podem ser feitas observando somente a resposta em frequência de malha aberta, $\mathbf{L}(j\omega)$, ilustrada na Figura 27. Em resumo, para assegurar rastreamento dos sinais de referência com erro nulo e rejeição de distúrbios em baixa frequência basta maximizar o $\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$ e, para rejeitar ruídos de medição, o $\bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$ deve ser minimizado em altas frequências. Além disso, conforme (2.9) a região de largura de banda está sempre entre 0,41 e 2,41 ou -7,74 dB e 7,25 dB. Observe na Figura 17 (a) que em aproximadamente 79,75 Hz, o $\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) = -3$ dB. Nesta mesma frequência, o $\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega)) = -0,019$ dB ou aproximadamente 0,997.

Figura 18 – Resposta em frequência do sistema de malha aberta.



Fonte: Do autor.

3.7 Conclusões parciais

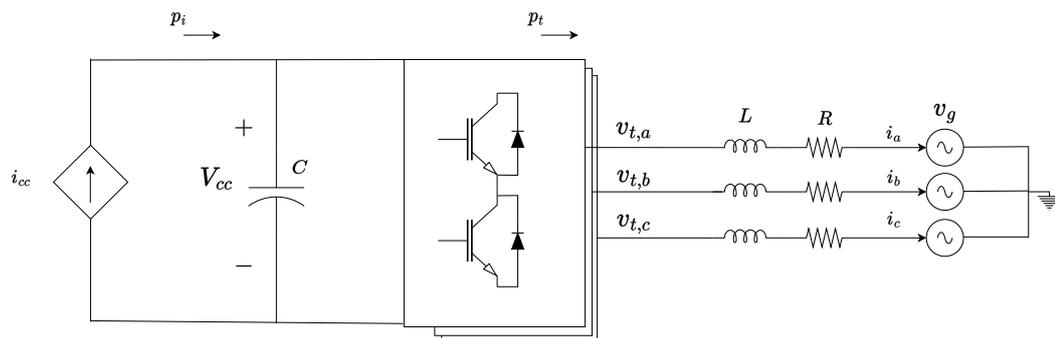
Nesse contexto, foi conduzida uma análise detalhada de um sistema de conversão de energia denominado **VSC**. O estudo começou com a descrição dos componentes elétricos do sistema e sua interconexão com a rede elétrica, modelado por equações diferenciais simplificadas mediante a aplicação da transformada de Park. A utilização de representação matricial e da **SVD** proporcionou compreensões sobre as interações entre as entradas e saídas do sistema. Análises de controlabilidade funcional e número de condicionamento foram empregadas para avaliar sua funcionalidade, estabilidade e robustez. Destaca-se a relevância das ferramentas de controle multivariável, como **RGA**, desacoplamento e análise de sensibilidade, para a análise e projeto eficiente de sistemas complexos de conversão de energia. O estudo também abordou estratégias de controle, incluindo o uso de pré-compensadores e controladores diagonais, enfatizando a importância de ajustes criteriosos de ganho para garantir a robustez e eficiência do sistema, desde a rejeição de distúrbios até o rastreamento preciso de frequência em malha fechada e aberta. Em síntese, o trabalho proporcionou uma visão abrangente, evidenciando a aplicação prática e o aprimoramento do desempenho desses sistemas complexos.

4 Estudo de caso para um sistema MIMO não-quadrado

Anteriormente, o VSC conectado à rede elétrica foi estudado considerando uma fonte de tensão constante no lado CC. Na abordagem atual a tensão no barramento CC será controlada. Sabendo que esse controle é realizado pelo próprio conversor, é importante incluir a dinâmica do capacitor no modelo do sistema. A inclusão da dinâmica do capacitor no modelo permite uma representação mais precisa do sistema e sua resposta aos sinais de entrada. Assim, a análise do sistema pode ser mais acurada e a eficiência do controle do conversor pode ser melhorada.

O novo sistema pode ser observado na Figura 19. Nele é possível observar o fluxo de potências. A partir do diagrama pode-se levantar as equações necessárias para analisar o sistema com as ferramentas multivariáveis apresentadas.

Figura 19 – Sistema VSC trifásico com filtro de primeira ordem



Fonte: Do autor.

Para isso algumas considerações devem ser feitas, tal como a não existência de perdas no sistema. Com isso o balanço de potências pode ser matematicamente descrito de forma simplificada como

$$p_i = p_c + p_t. \quad (4.1)$$

A potência de entrada, p_i , depende da corrente i_{cc} e da tensão do barramento CC, v_{cc} . A variável p_c em (4.1) descreve o potencial elétrico associado ao capacitor, e ele pode ser representado como

$$p_c = C \left(\frac{dv_{cc}}{dt} \right) v_{cc}, \quad (4.2)$$

em que C é a capacitância do capacitor e $\left(\frac{dv_{cc}}{dt} \right)$ representa a taxa de variação da tensão do capacitor em relação ao tempo.

Por outro lado, p_t representa a quantidade de energia transferida pelo conversor VSC através de seus terminais e é definida como

$$p_t = \frac{3}{2} (v_{t,d} i_d + v_{t,q} i_q). \quad (4.3)$$

Ela é composta pelas tensões e correntes nas coordenadas, dq isto é, $v_{t,d}$, $v_{t,q}$, i_d e i_q .

Utilizando a mesma técnica de modulação por largura de pulso senoidal do primeiro estudo de caso, $v_{t,d}$ e $v_{t,q}$ podem ser substituídos em (4.3) por (3.2).

Logo, (4.3) pode ser reescrita,

$$p_t = \frac{3v_{cc}}{4} (m_d i_d + m_q i_q). \quad (4.4)$$

Portanto, substituindo (4.2) e (4.4) em (4.1) tem-se,

$$C \frac{dv_{cc}}{dt} = i_{cc} - \frac{3m_d}{4} i_d - \frac{3m_q}{4} i_q \quad (4.5)$$

Sabendo que a modelagem da dinâmica das correntes é a mesma realizada no capítulo 3, pode-se obter o seguinte sistema

$$\begin{cases} L \frac{di_d}{dt} = -Ri_d + \omega_1 L i_q + \frac{m_d}{2} v_{cc} - v_{g,d} \\ L \frac{di_q}{dt} = -Ri_q - \omega_1 L i_d + \frac{m_q}{2} v_{cc} - v_{g,q} \\ C \frac{dv_{cc}}{dt} = i_{cc} + \frac{3m_d}{4} i_d - \frac{3m_q}{4} i_q \end{cases} \quad (4.6)$$

O sistema (4.6) descreve a dinâmica do conversor em coordenadas dq . Assim como foi feito no primeiro estudo. No entanto, para o caso atual há notórias diferenças, uma vez que existem multiplicações entre variáveis de entrada com variáveis de saída, tornando o sistema não linear.

Para linearizá-lo, é necessário aproximar as variáveis em torno de um ponto de operação desejado e desconsiderar as interações não lineares entre as variáveis. Logo,

$$\begin{cases} I_d = -\frac{V_{g,d}}{2R} + \frac{\sqrt{-36I_q^2 R^2 - 36I_q R V_{g,q} + 24I_{in} R V_{cc} + 9V_{g,d}^2}}{6R} \\ M_d = \frac{-2\sqrt{3}I_q L \omega_1 + \sqrt{3}V_{g,d} + \sqrt{-12I_q^2 R^2 - 12I_q R V_{g,q} + 8I_{in} R V_{cc} + 3V_{g,d}^2}}{2V_{cc}} \\ M_q = \frac{2\sqrt{3}I_q R^2 - \sqrt{3}L V_{g,d} \omega_1 + L \omega_1 \sqrt{-12I_q^2 R^2 - I_q R V_{g,q} + I_{in} R V_{cc} + 2V_{g,d}^2} + 2\sqrt{3}V_{g,q}}{2R V_{cc}} \end{cases} \quad (4.7)$$

Note que as letras maiúsculas são utilizadas para representar grandezas no ponto de operação. O sistema linearizado é dado por

$$\begin{cases} L \frac{d\tilde{i}_d}{dt} = -R\tilde{i}_d + \omega_1 L\tilde{i}_q + \frac{M_d}{2}\tilde{v}_{cc} - \tilde{v}_{g,d} \\ L \frac{d\tilde{i}_q}{dt} = -R\tilde{i}_q - \omega_1 L\tilde{i}_d + \frac{M_d}{2}\tilde{v}_{cc} - \tilde{v}_{g,q} \\ C \frac{d\tilde{v}_{cc}}{dt} = \tilde{i}_{cc} - \frac{3M_d}{4}\tilde{i}_d - \frac{3M_q}{4}\tilde{i}_q - \frac{3I_d}{4}\tilde{m}_d - \frac{3I_q}{2}\tilde{m}_d \end{cases} \quad (4.8)$$

em que o sobrescrito (\tilde{x}) representa pequenas perturbações em torno do ponto de operação, X . Desta forma, uma variável de estado é representada por $x = X + \tilde{x}$.

Representando (4.8) na forma de espaço de estados (3.3), encontram-se as seguintes matrizes

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \omega_1 & \frac{M_d}{2L} \\ -\omega_1 & -\frac{R}{L} & \frac{M_q}{2L} \\ -\frac{3M_d}{4C} & -\frac{3M_q}{4C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{V_{cc}}{2L} \\ -\frac{4I_d}{3C} & -\frac{4I_q}{3C} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Aplicando (4.9) em (3.6), encontra-se a matriz de funções de transferências que rege o comportamento dinâmico do sistema $\mathbf{G}_2(s)$

4.1 Análise das direções

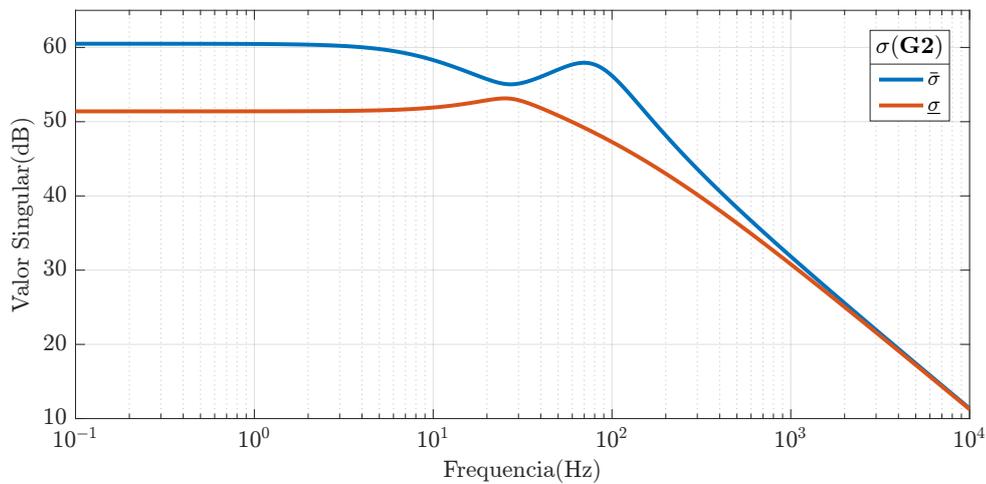
Através dos parâmetros do conversor VSC apresentados nas Tabelas 1 e 2 foi possível obter uma matriz de transferência que representa a dinâmica do sistema em torno do ponto de operação para $\omega = 0$. A partir da SVD desta matriz, é possível observar analisar as direções dos vetores de entradas e saídas.

$$\mathbf{G}_2(j0) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,0609 & 0,0558 & -0,9966 \\ -0,6753 & 0,7375 & 0 \\ 0,7350 & 0,6730 & 0,0826 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1059,5 & 0 & 0 \\ 0 & 371,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} -0,3539 & -0,9353 \\ -0,9353 & 0,3539 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^{\mathbf{H}}(0)} \quad (4.10)$$

Tabela 2 – Pontos de operação do VSC para o estudo de caso 2.

Descrição	Valor
Corrente de entrada (I_{cc})	25 A
Corrente de eixo d (I_d)	35 A
Corrente de eixo q (I_q)	0 A
Tensão no PAC no eixo d ($V_{g,d}$)	180 V
Tensão no Barramento CC (V_{cc})	400 V
Tensão no PAC no eixo q ($V_{g,q}$)	0 V
Índice Modulação de eixo d (M_d)	0,8248
Índice Modulação de eixo q (M_q)	0,0571

Ao contrário do primeiro estudo de caso, os valores singulares máximos e mínimos são diferentes para $\omega = 0$, o que significa que o ganho do sistema é dependente da direção do vetor de entrada. Isso indica que diferentes entradas podem ter diferentes efeitos nas saídas do sistema, dependendo da direção na qual elas são aplicadas. A resposta em frequência destacada na Figura 20 também apresenta tal característica.

Figura 20 – Análise da resposta em frequência para os valores singulares de $\mathbf{G}_2(s)$.

Fonte: Do autor.

A partir da matriz de decomposição SVD obtida (4.10), também é possível observar que dos três vetores de saída, apenas em $\mathbf{w}_3(j0)$, \tilde{v}_{cc} e \tilde{i}_d estão em sentidos opostos entre si. A partir de uma análise física, essa não controlabilidade funcional pode ser explicada da seguinte forma: para uma corrente de entrada \tilde{i}_{cc} constante, se a tensão no barramento \tilde{v}_{cc} é aumentada (sentido positivo), a potência de entrada aumenta proporcionalmente, o que obrigatoriamente deve resultar em um aumento em \tilde{i}_d (sentido positivo), para balancear as potências ativa do lado CC e CA e assim encontrar um novo ponto de operação estável. Para o caso em que a tensão é reduzida (sentido negativo), a potência de entrada diminui, o que obrigatoriamente deve resultar em uma diminuição em \tilde{i}_d (sentido negativo), para

encontrar um novo ponto de operação.

Conforme a análise anterior, a tensão \tilde{v}_{cc} e a corrente \tilde{i}_d devem sempre se mover no mesmo sentido para manter a estabilidade do sistema. Caso contrário, o sistema se torna instável. A matriz $\mathbf{G}_2(j0)$ apresenta um valor singular mínimo igual a zero, o que significa que há uma direção de entrada não controlável. Se houver uma perturbação nessa direção, o sistema não poderá ajustar a corrente \tilde{i}_d para manter a estabilidade, tornando-o potencialmente instável.

4.2 Análise da controlabilidade funcional

A partir do estudo anterior da **SVD** foi possível identificar que o sistema **VSC** em questão possui 3 saídas e 2 entradas (3×2) e seu posto normal é igual a 2, pois apenas duas linhas são linearmente independentes. Portanto, como visto nas definições da seção 2.4, $p_\eta(G_2) < m(G_2)$ indica que a planta em questão não é funcionalmente controlável.

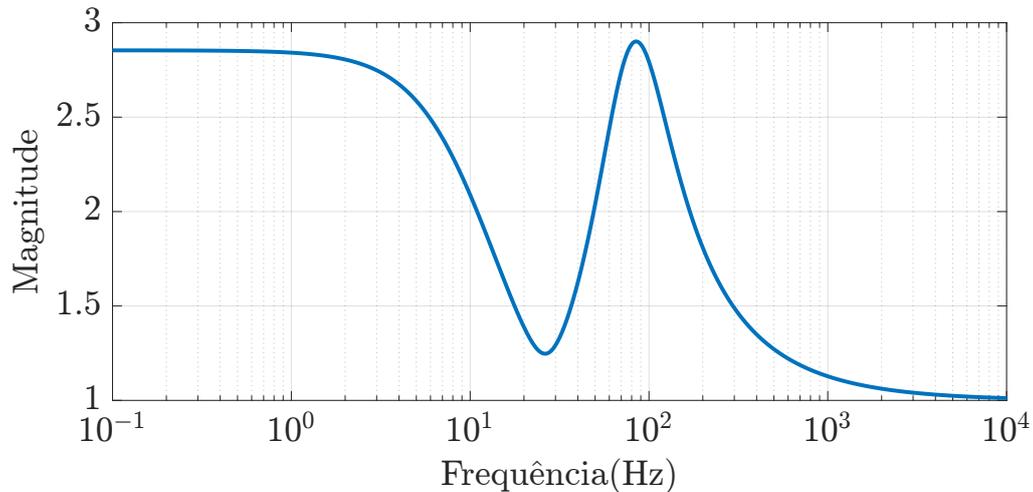
Além disso, o fato de o valor singular mínimo de $\mathbf{G}_2(j0)$ ser igual a zero indica que há uma direção de entrada que não pode ser controlada. Essas informações são importantes para o projeto de controladores, pois sistemas não funcionalmente controláveis podem exigir estratégias de controle mais elaboradas.

4.3 Análise do Número de Condicionamento

O primeiro estudo de caso, o sistema, quadrado, apresentava valores máximos e mínimos iguais para a frequência $\omega = 0$. Como definido no Capítulo 2, a razão entre os valores de σ máximo e mínimo iguais indica um sistema bem condicionado. Já o estudo atual, apresenta o valor singular mínimo $\underline{\sigma}$ igual a zero, apresentando linhas linearmente dependentes. No entanto, o valor singular zerado torna-se fictício e não é levado em consideração na análise, ou seja, a variável não pode ser controlada neste caso.

A Figura 21 exibe a variação da magnitude do número de condicionamento em função da frequência para o estudo de caso 2 em valores absolutos. Ao contrário da análise do primeiro caso, para frequências próximas a 0 Hz a curva apresenta magnitudes mais elevadas. Entretanto, em alguns pontos, como próximo a 30 Hz e acima de 10^4 Hz, o sistema mostra tendência à magnitude unitária. Portanto, a ferramenta indica que o sistema é melhor condicionado em algumas regiões específicas, contudo, de maneira geral os valores são baixos, menores que três, o que caracteriza um sistema bem condicionado.

Figura 21 – Resposta em frequência do número de condicionamento.



Fonte: Do autor.

4.4 Análise da matriz de ganhos relativos

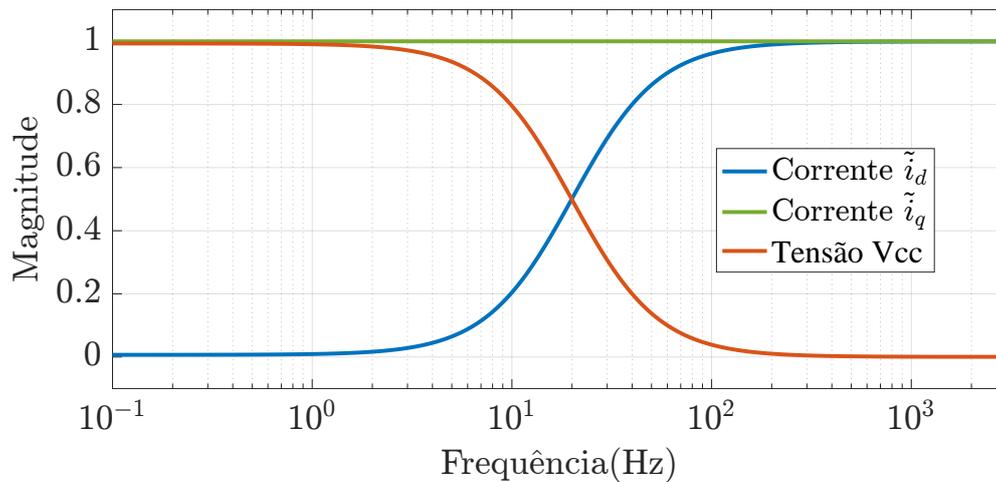
A aplicação da **RGA** no primeiro estudo de caso utilizou das considerações estudadas em 2.6.1, onde a matriz manipulada era de característica quadrada. Para o segundo estudo, tais definições não são aplicáveis, pois, como identificado, a planta apresenta 3 saídas e 2 entradas (3×2). Com isso, a análise parte das definições tratadas na seção 2.6.2 que considera matrizes não quadradas para a **RGA**.

A Figura 19 ilustra a **RGA** a partir da variação da frequência em relação à magnitude. Nota-se que as variáveis \tilde{i}_q , \tilde{i}_d e \tilde{v}_{cc} apresentam diferentes comportamentos a medida que a frequência aumenta. Na perspectiva do controle **MIMO**, a **RGA** pode fornecer informações valiosas sobre o comportamento da planta. Observa-se que em frequências mais baixas a corrente \tilde{i}_q e a tensão \tilde{v}_{cc} apontam mais facilidade de serem controladas, já que nessas frequências, a magnitude é aproximadamente 1. Entretanto, para altas frequências a resposta atrelada à tensão \tilde{v}_{cc} vai praticamente zero, tornando-se de difícil de ser controlada.

A variável de corrente \tilde{i}_d apresenta comportamento oposto, indicando dificuldade de ser controlada em regiões de menores frequências, com magnitude próxima a 0. Já em altas frequências, a variável \tilde{i}_d se torna mais fácil de controlar, apresentando magnitude 1.

Perceba que é possível controlar, por exemplo, a tensão CC para uma faixa de frequência específica. Essa banda, de certa forma, pode ser utilizada para definir a faixa de passagem máxima no projeto de seu controlador.

Figura 22 – RGA Sistema VSC trifásico com filtro de primeira ordem



Fonte: Do autor.

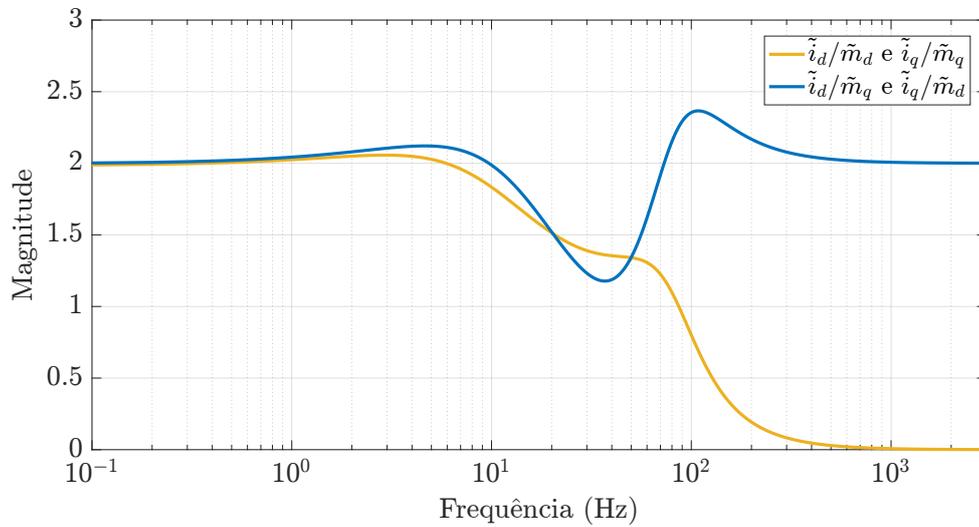
4.5 Seleção de pares de variáveis em um sistema não quadrado

Com base nas discussões anteriores, foi identificado que uma das variáveis do sistema $\mathbf{G}_2(s)$ não pode ser controlada devido ao seu aspecto não quadrado. Essa característica impõe um desafio adicional no controle efetivo do sistema. No entanto, é possível aplicar o número de RGA em matrizes não quadradas, como visto no capítulo 2, para obter pares de variáveis que possam ser controlados de forma eficiente.

O número de RGA fornece informações valiosas sobre as interações no sistema, permitindo a identificação dos pares de variáveis que apresentam uma relação mais adequada para fins de controle.

Segundo a Figura 23, é recomendado realizar o controle do par \tilde{i}_d/\tilde{m}_d e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q em altas frequências. Observando a curva, é possível notar que a partir de aproximadamente 80 Hz a magnitude dos pares é praticamente unitária, e mais próximo de zero para frequências ainda mais altas. Com isso entende-se que as variáveis analisadas ficam com acoplamento mais fraco a partir dessas frequências.

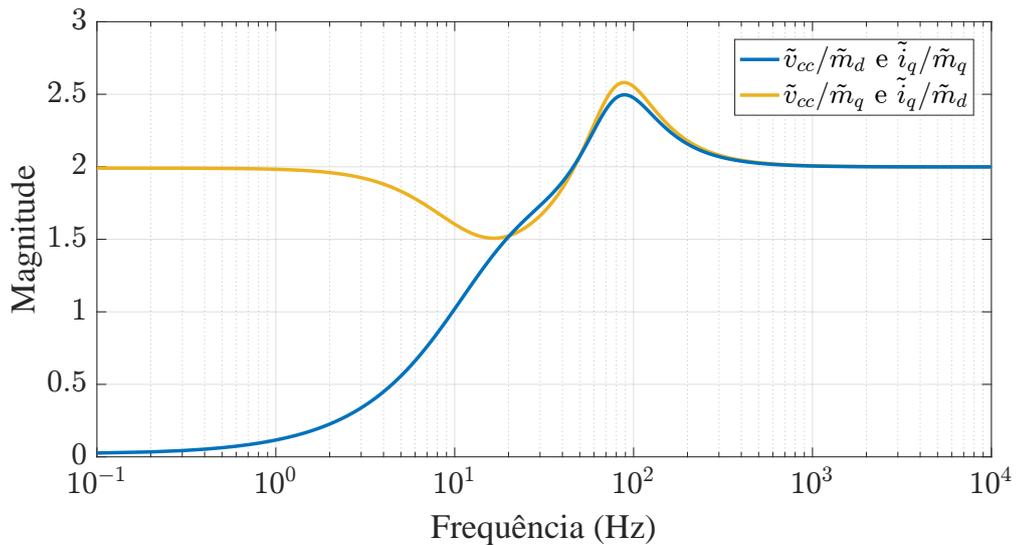
Figura 23 – Resposta em frequência do número da RGA de $\mathbf{G}_2(s)$ para os pares \tilde{i}_d/\tilde{m}_d e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q , \tilde{i}_d/\tilde{m}_q e \tilde{i}_q/\tilde{m}_d .



Fonte: Do autor.

No entanto, analisando a Figura 24, é possível constatar que em frequências mais baixas, a estratégia de controle mais adequada é utilizar o par de variáveis $\tilde{v}_{cc}/\tilde{m}_d$ e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q . A análise no caso atual indica que é mais interessante optar pelo controle de $\tilde{v}_{cc}/\tilde{m}_d$ em frequências baixas.

Figura 24 – Resposta em frequência do número da RGA de $\mathbf{G}_2(s)$ para os pares $\tilde{v}_{cc}/\tilde{m}_d$ e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q , $\tilde{v}_{cc}/\tilde{m}_q$ e \tilde{i}_q/\tilde{m}_d .

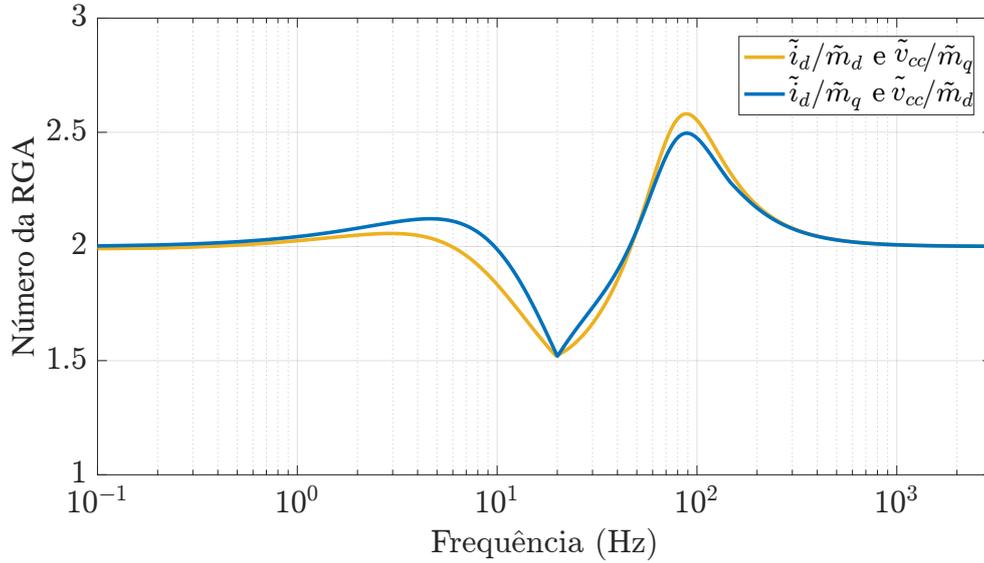


Fonte: Do autor.

Na Figura 25, é possível observar que devido às interações complexas entre a tensão do barramento CC e a corrente de eixo direto, bem como à magnitude acima de 1

do número RGA, torna-se difícil garantir um controle preciso e estável ao longo de todo o espectro de frequência

Figura 25 – Resposta em frequência do número da RGA de $\mathbf{G}_2(s)$ para os pares \tilde{i}_d/\tilde{m}_d e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q , \tilde{i}_d/\tilde{m}_q e \tilde{i}_q/\tilde{m}_d .



Fonte: Do autor.

4.6 Realimentação e análise de estabilidade e desempenho

Nesta seção, serão apresentadas as respostas em frequência do sistema de malha fechada e aberta a fim de analisar se o projeto de controle proposto obedece a requisitos destacados na seção 2.8. Uma vez que o foco principal é apresentar ferramentas multivariáveis, optou-se por utilizar o controle apresentado, previamente documentado em (de Souza et al., 2023).

A técnica de controle por realimentação de estados é conhecida por sua simplicidade e eficácia. Nesse método, todos os estados do sistema são medidos e multiplicados por ganhos apropriados, garantindo estabilidade, rastreamento de referência, rejeição de perturbações, robustez e uma resposta transitória satisfatória. Assim, para sistemas multivariáveis, esses ganhos são aplicados pela lei de controle

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}_a$$

onde a alocação dos polos na malha fechada é feita de forma arbitrária, independentemente das dimensões das matrizes de estados (\mathbf{A}) e de entrada (\mathbf{B}) (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2013). A matriz \mathbf{K} é denominada matriz de realimentação de estados, sendo uma matriz de dimensão $n \times \kappa$.

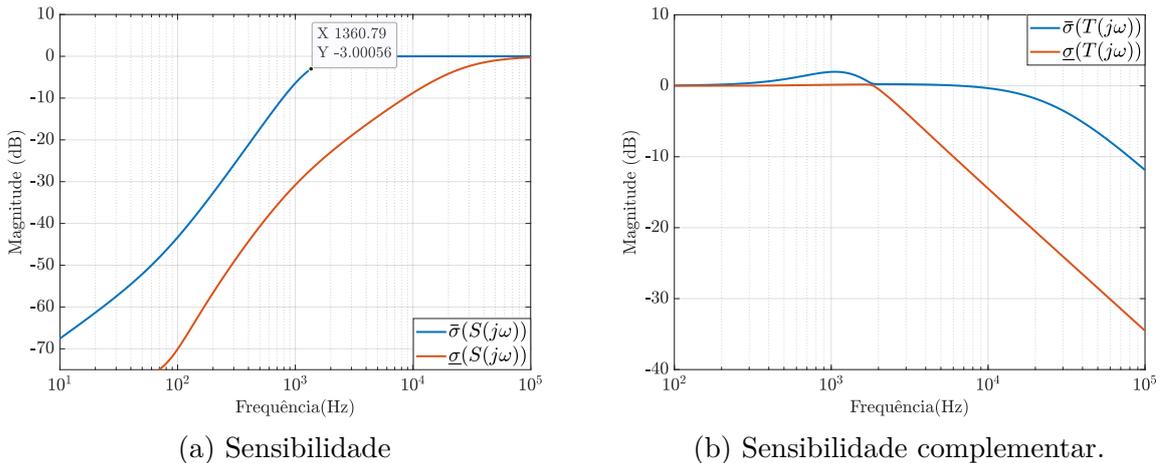
Entre os métodos para calcular os ganhos da matriz \mathbf{K} , a alocação de polos é a mais simples (LIU; YAO, 2016). Por outro lado, o LQR busca uma alocação ótima dos polos minimizando uma função de custo quadrático, dada por

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}_a^{\top}(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\top}(t)\rho\mathbf{u}(t))dt$$

A análise dos valores singulares apresentada no capítulo 3, para sistemas quadrados, pode ser feita também para os sistemas não quadrados. A análise da resposta da sensibilidade ($\mathbf{S}(j\omega)$), de um sistema de controle MIMO em função da frequência é uma ferramenta importante para avaliar a estabilidade e o desempenho do sistema em relação a distúrbios. No contexto específico de sistemas de controle de sistemas elétricos, a análise da Figura 26 (a) mostra que o maior valor singular da sensibilidade, $\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega))$, é menor que 1 em baixas frequências. Isso garante que o sistema não será amplificado por distúrbios ou ruído em baixas frequências, como flutuações na rede elétrica.

A análise da Figura 26 (b) revela que em baixas frequências, os valores $\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) \approx \underline{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega)) \approx 1$ ou 0 dB, garantindo que o sistema siga uma referência constante com erro nulo. A sensibilidade complementar é 1 em baixas frequências, indicando que a saída é insensível a distúrbios nessa faixa. Essa característica é crucial para sistemas de controle elétrico, onde distúrbios ocorrem frequentemente em baixas frequências. A análise da sensibilidade complementar em relação à frequência é uma ferramenta essencial no projeto de sistemas de controle elétrico, permitindo avaliar a capacidade do sistema em seguir uma referência constante com erro nulo.

Figura 26 – Respostas em frequência do sistema de malha fechada.

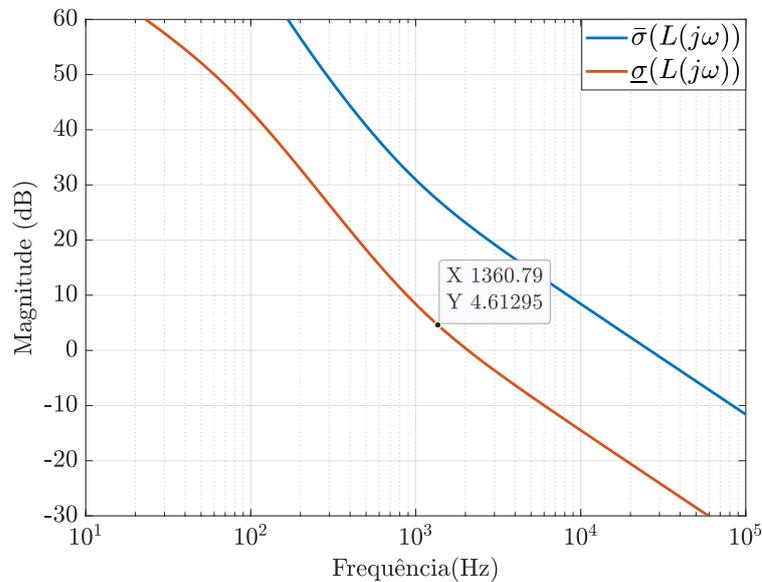


Fonte: Do autor.

As análises podem ser estendidas aos sistemas de malha aberta ao examinar a resposta em frequência desses sistemas, de maneira similar ao procedimento adotado para os sistemas em malha fechada. Ou seja, para garantir um acompanhamento preciso dos

sinais de referência sem erro, é importante maximizar $\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$. Por outro lado, para eliminar eficientemente os ruídos de medição em altas frequências, é essencial minimizar $\bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$. Conforme abordado em (2.9), a largura de banda abrange valores entre 0,41 e 2,41 ou entre $-7,74$ dB e $-7,25$ dB. Ao analisar a Figura 26 (a), verifica-se que, a uma frequência de 1360 Hz, o valor singular máximo ocorre em $\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega)) = 3$ dB. Simultaneamente, nessa mesma frequência, $\underline{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$ é igual a 4,61 dB, respeitando a faixa definida para a largura de banda.

Figura 27 – Resposta em frequência do sistema de malha aberta.



Fonte: Do autor.

4.7 Conclusões parciais

A análise da matriz de decomposição SVD destacou a importância de uma relação específica entre a tensão e a corrente no sistema para manter a estabilidade. Em situações específicas, constatou-se que a variação da tensão no barramento requer uma resposta proporcional na corrente, seja aumentando ou diminuindo. Essa relação é crucial para prevenir instabilidades no sistema elétrico. Além disso, foi identificada uma direção específica em que o sistema enfrenta desafios para controlar a corrente diante de perturbações, levando potencialmente a instabilidades. Isso ressalta a necessidade de identificar e controlar todas as direções de entrada do sistema para assegurar sua estabilidade e desempenho adequado.

No contexto do controle do sistema VSC não quadrado, a análise detalhada revelou as limitações decorrentes de sua natureza não quadrada, introduzindo desafios significativos no controle efetivo de uma das variáveis. No entanto, ao aplicar o número de RGA em matrizes não quadradas, conforme discutido no Capítulo 2, uma abordagem estratégica

foi identificada para eficientemente selecionar pares de variáveis controláveis. A análise da resposta em frequência dos pares \tilde{i}_d/\tilde{m}_d e \tilde{i}_q/\tilde{m}_q , em comparação com \tilde{i}_d/\tilde{m}_q e \tilde{i}_q/\tilde{m}_d , indicou que, em altas frequências, o controle do primeiro par é mais apropriado, enquanto em frequências mais baixas, o segundo par demonstra maior eficácia. Essas duas abordagens, embora distintas, contribuem para uma compreensão mais abrangente e integrada do controle eficiente do sistema **VSC** não quadrado.

5 Conclusões

Os conversores são componentes fundamentais em uma ampla variedade de aplicações, incluindo sistemas de geração de energia a partir de fontes renováveis, sistemas de armazenamento de energia, sistemas de distribuição de energia elétrica e muitos outros. Eles têm a responsabilidade de converter energia elétrica em diferentes formatos, tais como conversão de corrente contínua em corrente alternada, ou vice-versa, e a elevação ou redução da tensão para adequar a energia gerada ou armazenada às necessidades do sistema.

O estudo e aplicação de ferramentas matemáticas específicas para o controle de sistemas **MIMO** é de grande importância para a otimização e eficácia do controle de plantas multivariáveis, especialmente tratando-se de conversores. Além disso, disponibilizar essas informações de forma clara e acessível é essencial para a comunidade acadêmica e para a indústria, que poderão se beneficiar das vastas aplicações desses dispositivos no mercado. O estudo aborda uma lacuna importante no conhecimento e na aplicação de ferramentas de controle **MIMO**, fornecendo uma compreensão mais aprofundada desses sistemas e tornando mais prático e eficaz os projetos de controladores para esse tipo de sistema.

O objetivo geral deste trabalho foi discutir e apresentar ferramentas de controle multivariável para conversores em sistemas de eletrônica de potência. A aplicação da **SVD** foi fundamental para investigar a existência de direções de entrada que podem tornar o sistema incontrolável. No primeiro caso, não foram identificadas tais direções; no segundo, entretanto, a presença dessas direções foi confirmada. Essa abordagem ampla e detalhada utilizando a **SVD** contribuiu significativamente para a compreensão e controle efetivo dos sistemas em questão.

Outra análise realizada foi o estudo da controlabilidade funcional dos dois sistemas apresentados. A ferramenta serviu para indicar se seria, ou não, possível controlar diretamente todas as variáveis de estado do sistema. No primeiro caso estudado, pode-se concluir que o conversor se apresentou controlável, pois o posto normal p_η da matriz $\mathbf{G}(s)$ foi igual ao número de saídas m . Em resumo, o resultado apontou a possibilidade de se projetar um controlador para a planta. Já no capítulo 4 o resultado apontou um sistema funcionalmente não controlável, ou seja, é impossível controlar de maneira direta todas as variáveis de estado, entretanto tal resultado não indica que não é possível projetar um controlador para o sistema.

Além da **SVD** e da controlabilidade funcional também foi feita a análise do sistema quadrado e do sistema não quadrado utilizando a **RGA**. Através desta ferramenta é possível identificar qual variável é difícil de ser controlada. Já no primeiro estudo de caso pose-de verificar que as soma dos elementos das linhas da **RGA** referentes i_d e i_q estavam

próximas de 1 em todo espectro de frequência, o que indica que tais variáveis podem tranquilamente serem controladas independente da frequência. Já no Estudo de caso 2, onde o sistema analisado era não quadrado, os resultados não foram análogos. A curva obtida indicou que i_q pode ser controlado para qualquer valor de frequência, enquanto v_{cc} deve ser escolhido para baixas frequências e i_d para altas frequências. Nesta análise é importante destacar sua relação com a controlabilidade funcional.

Na conclusão, a análise detalhada do sistema, utilizando ferramentas como [SVD](#) e [RGA](#), e a discussão sobre a estratégia de desacoplamento foram cruciais para otimizar a eficiência e estabilidade em sistemas de energia elétrica. A aplicação do número da matriz de ganho relativo ([RGA](#)) revelou-se eficaz na seleção de variáveis, destacando um pareamento específico fora da diagonal principal até 37 Hz. Essas abordagens oferecem estratégias valiosas para aprimorar o controle e desempenho de sistemas multivariáveis e quadrados, contribuindo significativamente para a pesquisa em eletrônica de potência.

No contexto da rejeição de distúrbio no caso 1, a figura enfatizou a importância de manter o ganho do sistema $S(j\omega_d)$ em baixas frequências em níveis reduzidos. Essa estratégia busca mitigar a influência de distúrbios de baixa frequência, como evidenciado nos resultados apresentados. O ajuste apropriado do ganho em baixas frequências foi identificado como crucial para minimizar a interferência de distúrbios nessa faixa, garantindo a robustez do sistema em malha fechada. A visualização na figura [26a](#) ilustra claramente a relevância desse ajuste para assegurar o desempenho eficaz do sistema sob a influência de distúrbios de frequência mais baixa.

Portanto, o estudo de sistemas [MIMO](#) utilizando ferramentas como a [SVD](#) e a [RGA](#) proporciona uma análise detalhada do comportamento do sistema, melhorando sua compreensão. Comparado ao controle descentralizado ([SISO](#)), a abordagem de controle [MIMO](#) pode fornecer maior precisão e melhor desempenho para os projetos de controladores. Essas vantagens são importantes para sistemas de energia elétrica conectados à rede, onde a estabilidade e eficiência são cruciais. O uso de ferramentas de controlabilidade funcional e número de condicionamento também contribui para a análise de sistemas [MIMO](#). Ainda que as ferramentas apresentadas não sejam totalmente suficientes para definir um projeto de controle, elas se mostraram bastante funcionais para a análise dos sistemas.

5.1 Trabalhos futuros

Para dar continuidade aos estudos pretende-se aprofundar em conceitos estudados e implementações práticas, refinando o estudo dos sistemas [MIMO](#). Dentre as quais se destacam:

- Aprofundar nos estudos das ferramentas para análises multivariáveis, como [SVD](#) e [RGA](#);

- Desenvolver um controlador com abordagem centralizada a fim de otimizar o sistema estudado.
- Implementação prática de um sistema real a fim de validar as análises teóricas estudadas.
- Estudo dos conceitos de sistemas multivariáveis em sistemas com característica discreta.

Referências

- ALBERTOS, P.; ANTONIO, S. *Multivariable Control Systems: An Engineering Approach*. [S.l.]: Springer London, 2014. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9781447139836. 27
- ALCALÁ, J. et al. Study of the bidirectional power flow in back - to - back converters by using linear and nonlinear control strategies. In: *2011 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 806–813. ISSN 2329-3748. 14
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. Adaptive control. *Courier Corporation*, 2013. 55
- BRISTOL, E. On a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 11, n. 1, p. 133–134, 1966. 22
- CAO, Y. Control structure selection for chemical processes using input-output controllability analysis. 1995. 25
- COSTA, E.; FERREZIN, N. B. Esg (environmental, social and corporate governance) e a comunicação: o tripé da sustentabilidade aplicado às organizações globalizadas. *Revista Alterjor*, v. 24, n. 2, p. 79–95, ago. 2021. 13
- COTA, L. G. Métodos de controle aplicados a um conversor emulador de rede monofásica. 2020. 13
- de Souza, I. D. et al. Multivariable analysis and control of a vsc back-to-back converter interfacing two ac systems. *Electric Power Systems Research*, v. 218, p. 109251, 2023. ISSN 0378-7796. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779623001402>>. 55
- DELDAR, M.; IZADIAN, A.; ANWAR, S. A decentralized multivariable controller for hydrostatic wind turbine drivetrain. *Asian Journal of Control*, v. 22, n. 3, p. 1038–1051, 2020. ISSN 19346093. 14, 24
- DOYLE, J.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 4–16, 1981. 28, 29
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Sistemas De Controle Para Engenharia*. [S.l.: s.n.], 2013. 702 p. ISBN 978-8582600672. 15, 31
- GOLAN, J. S. The moore-penrose pseudoinverse. In: _____. *Foundations of Linear Algebra*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995. p. 198–203. ISBN 978-94-015-8502-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8502-6_16>. 25
- LAU, H.; ALVAREZ, J.; JENSEN, K. F. Synthesis of control structures by singular value analysis: Dynamic measures of sensitivity and interaction. *AIChE Journal*, v. 31, n. 3, p. 427–439, 1985. 22, 38
- LIU, Y.; YAO, Z. Practical controller design for industrial robots and machine tools: Applications to manufacturing processes. *Springer*, 2016. 56

OLIVEIRA, E. S. de. December 2017. [14](#)

PINTO, V. P. et al. Multivariable robust controller with integral action application in a wind power generation system. *Eletrônica de Potência*, v. 16, n. 2, p. 147–157, 2011. [14](#)

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: Analysis and Design*. Hoboken, US-NJ: John Wiley, 2005. [20](#), [21](#), [22](#), [26](#), [27](#), [29](#), [30](#), [31](#), [40](#)

SOARES, L. T. et al. Modelagem e controle de um conversor back-to-back para aplicação em geração de energia eólica. In: *IV Brazilian Symposium of Electronic Systems (SBSE)*. [S.l.: s.n.], 2012. [13](#)

SOUZA, I. D. N. et al. Multivariable optimal control applied to a back-to-back power converter. *IEEE transactions on industrial electronics (1982)*, IEEE, v. 69, n. 9, p. 9406–9418, 2022. ISSN 0278-0046. [24](#)

SPIER, D. W. *Modelagem e controle de um sistema fotovoltaico conectado à rede elétrica monofásica utilizando um conversor cc-cc elevador-baixador*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017. [13](#)

TANG, C. et al. Dc-link voltage control strategy for three-phase back-to-back active power conditioners. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 62, n. 10, p. 6306–6316, Oct 2015. ISSN 1557-9948. [14](#)

YAZDANI, A.; IRAVANI, R. *Voltage-Sourced Converters in Power Systems: Modeling, Control, and Applications*. [S.l.]: Wiley, 2010. (Wiley - IEEE). ISBN 9780470551561. [14](#), [43](#)