



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Modelagem e Análise de Estratégias de Controle Aplicadas a um Veículo Aéreo Não Tripulado – VANT

Denes Lucas Froes Pereira

João Monlevade, MG
2017

Denes Lucas Froes Pereira

**Modelagem e Análise de Estratégias de
Controle Aplicadas a um Veículo Aéreo Não
Tripulado – VANT**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2017**

P436m Pereira, Denes Lucas.
Modelagem e análise de estratégias de controle aplicadas a um veículo aéreo não tripulado-VANT [manuscrito] / Denes Lucas Pereira. - 2017.

70f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.
Coorientador: Prof. Dr. Vítor Costa da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia Elétrica. 2. Aerodinâmica . 3. Métodos de simulação. 4. Modelos matemáticos . I. Braga, Márcio Feliciano. II. Campos, Vítor Costa da Silva. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 519.8

Catálogo: ficha@sisbin.ufop.br



ATA DE DEFESA

Aos 16 dias do mês de agosto de 2017, às 10 horas, no bloco C deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pelo formando Denes Lucas Froes Pereira, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Márcio Feliciano Braga, Víctor Costa da Silva Campos, Anny Verly e Danny Augusto Vieira Tonidandel.

O candidato apresentou a monografia intitulada: Modelagem e Análise de Estratégias de Controle Aplicadas a um Veículo Aéreo Não Tripulado – VANT. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela aprovação do candidato, com a nota média 8,6, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo formando.

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

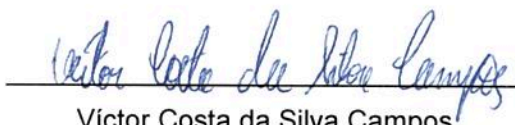
Banca Examinadora	Nota
Márcio Feliciano Braga	9,0
Víctor Costa da Silva Campos	9,0
Anny Verly	8,0
Danny Augusto Vieira Tonidandel	8,5
Média	8,6

João Monlevade, 16 de agosto de 2017.



Márcio Feliciano Braga

Professor Orientador



Víctor Costa da Silva Campos

Professor Coorientador



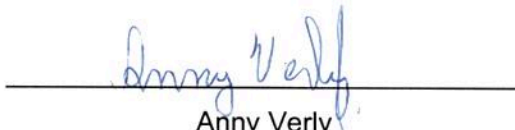
Denes Lucas Froes Pereira

Aluno



Danny Augusto Vieira Tonidandel

Professor Convidado



Anny Verly

Professora Convidada



TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “**Modelagem e Análise de Estratégias de Controle Aplicadas a um Veículo Aéreo Não Tripulado**” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem o devido referenciamento ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 4 de Setembro de 2017

Demetrius Lucas Frazz Pereira

Nome completo do aluno

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me iluminar em toda a minha trajetória. Ao Prof. Dr. Márcio e ao Prof. Dr. Víctor por todo apoio, dedicação e as brilhantes dicas que nortearam a realização deste trabalho. Ao meu pai e a minha mãe por toda educação dada. Ao meu irmão Thiago, por todo companheirismo. A minha namorada Thayza, pelo amor, carinho e incentivo. A república AbateD'Ouro por sempre estar presente. A todos os servidores e professores da UFOP. Obrigado a todos por me ajudarem na conclusão de mais uma etapa.

"Felicidade é a certeza de que a nossa vida não está se passando inutilmente."

– Érico Veríssimo

Resumo

Os Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) podem ser usados em muitas aplicações, como no mapeamento de regiões e na inspeção de linhas de transmissão. Dada a sua importância e aplicabilidade, este trabalho obtém o modelo matemático de um VANT e aplicações de simulações dos modelos não linear e linear, assim como a comparação entre esses. Para isso, utilizou-se o modelo de veículo do tipo quadrotor, que possui quatro hélices que geram as forças de sustentação do veículo. Além disso, apresentam-se as equações aerodinâmicas que modelam o sistema; o modelo de Newton-Euler; as aproximações feitas e as validações dos modelos, por meio de simulações. Também foram estudadas as características de controlabilidade e observabilidade do sistema. Por último, foram projetadas três técnicas de controle: alocação de polos, Regulador Linear Quadrático (LQR) e seguimento de referência. Finalmente, apresenta-se a comparação entre elas. Foi constatado através das simulações a eficiência da técnica por seguimento de referência.

Palavras-chave: VANT, quadrotor, modelo linear, modelo não linear, alocação de polos, LQR, seguimento de referência, controlabilidade, observabilidade.

Abstract

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) can be used in many applications, such as mapping regions and transmission lines inspection. Given its importance and its applicability, this work obtains the mathematical model of a UAV and the development of the linear and nonlinear models as well as the comparison between them. For this, the quadrotor vehicle model was used, which has four propellers that generate the vehicle's support force. In addition, aerodynamics equations that model the system are presented; the Newton-Euler model, the approximations made and the models validation by simulations. The system's controllability and observability characteristics were studied. Finally, three control techniques were designed: poles placement, linear quadratic regulator (LQR) and reference following and the comparison between them. Finally, it shows the comparison between them. It was verified through the simulations the technique by reference following efficiency.

Keywords: UAV, quadrotor, linear model, nonlinear model, poles placement, LQR, reference following, controllability, observability.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Vento atuando em uma asa. Fonte: Rodrigues (2013).	4
Figura 2 – Parâmetros e Forças resultantes em um perfil aerodinâmico. Fonte: Elaborado pelo autor.	5
Figura 3 – Ângulo de ataque. Fonte: Elaborado pelo autor.	6
Figura 4 – Ângulo de incidência. Fonte: Elaborado pelo autor.	6
Figura 5 – Coordenadas em relação a Terra. Fonte: Cook (2012).	7
Figura 6 – Sistemas de coordenadas em movimento no avião. Fonte: Cook (2012).	8
Figura 7 – Nomenclatura das variáveis de momento. Fonte: Cook (2012)	10
Figura 8 – Orientação do quadrotor. Fonte: Pfeifer (2013).	13
Figura 9 – Orientação das hélices do quadrotor. Fonte: Bresciani (2008).	14
Figura 10 – Movimentos do quadrotor. Fonte: Bresciani (2008).	14
Figura 11 – Simulação do modelo não linear para os diferentes casos de trimagem.	23
Figura 12 – Simulação do modelo não linear para os diferentes casos para entrada ao degrau.	23
Figura 13 – Comparação da resposta ao degrau dos modelos não linear e linear para o primeiro caso de trimagem.	24
Figura 14 – Comparação da resposta ao degrau dos modelos não linear e linear para o segundo caso de trimagem.	24
Figura 15 – Comparação da resposta ao degrau dos modelos não linear e linear para o terceiro caso de trimagem.	25
Figura 16 – Comparação da resposta ao degrau dos modelos não linear e linear para o quarto caso de trimagem.	25
Figura 17 – Diagrama de blocos da realimentação de estados. Fonte: Baptista (2015).	28
Figura 18 – Esforço de controle do grupo de polos 1.	32
Figura 19 – Esforço de controle do grupo de polos 2.	32
Figura 20 – Esforço de controle do grupo de polos 3.	33
Figura 21 – Esforço de controle do grupo de polos escolhidos.	33
Figura 22 – Controle do sistema linear para estados U, V, W.	34
Figura 23 – Controle do sistema linear para estados P, Q, R.	34
Figura 24 – Controle do sistema linear para estados X, Y, Z.	35
Figura 25 – Controle do sistema linear para estados ϕ, θ, ψ	35
Figura 26 – Controle do sistema não linear para os estados U, V, W.	36
Figura 27 – Controle do sistema não linear para os estados P, Q, R.	36
Figura 28 – Controle do sistema não linear para os estados X, Y, Z.	37
Figura 29 – Controle do sistema não linear para os estados ϕ, θ, ψ	37
Figura 30 – Controle do sistema não linear com todos os estados.	38

Figura 31 – Esforço de controle do controlador -LQR-.	40
Figura 32 – Controle do sistema linear para os estados U, V, W.	41
Figura 33 – Controle do sistema linear para os estados P, Q, R.	41
Figura 34 – Controle do sistema linear para os estados X, Y, Z.	42
Figura 35 – Controle do sistema linear para os estados ϕ, θ, ψ	42
Figura 36 – Controle do sistema não linear para os estados U, V, W.	43
Figura 37 – Controle do sistema não linear para os estados P, Q, R.	43
Figura 38 – Controle do sistema não linear para os estados X, Y, Z. Fonte: Elaborado pelo autor.	44
Figura 39 – Controle do sistema não linear para os estados ϕ, θ, ψ	44
Figura 40 – Controle do sistema não linear com todos os estados.	45
Figura 41 – Simulação de controle não efetivo -LQR-.	46
Figura 42 – Controle por regulação. Fonte: Elaborado pelo autor.	46
Figura 43 – Controle servo. Fonte: Elaborado pelo autor.	47
Figura 44 – Simulação de controle para os estados U, V e W.	48
Figura 45 – Simulação de controle para os estados P, Q e R.	49
Figura 46 – Simulação de controle para os estados X, Y e Z.	49
Figura 47 – Simulação de controle para os estados ϕ, θ e ψ	50
Figura 48 – Simulação com todos os estados. Fonte: Elaborado pelo autor.	51
Figura 49 – Simulação de controle não efetivo.	52
Figura 50 – Simulação de controle não efetivo.	52
Figura 51 – Simulação de controle não efetivo.	53
Figura 52 – Simulação de controle não efetivo.	53
Figura 53 – Simulação de controle não efetivo.	54

Lista de tabelas

Tabela 1 – Variáveis de movimento.	11
Tabela 2 – Variáveis de perturbação.	11
Tabela 3 – Valores dos parâmetros usados.	29
Tabela 4 – Valores dos polos calculados.	30
Tabela 5 – Análise do tempo de simulação do controlador -LQR-.	45
Tabela 6 – Referências dos estados controlados por seguimento de referência. . . .	48
Tabela 7 – Referências e tempo de acionamento dos estados controlados por seguimento de referência.	51
Tabela 8 – Comparação entre as técnicas de controle.	54

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivo Geral	2
1.1.1	Objetivos específicos	2
1.2	Justificativa	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Conceitos Básicos da Aerodinâmica	4
2.2	Teoria do Perfil Aerodinâmico	5
2.3	Sistemas de coordenadas	7
2.3.1	Eixos na Terra	7
2.3.2	Eixos relativos na atmosfera	7
2.3.3	Eixos no corpo do avião	8
2.3.4	Ângulos de Euler e matriz de rotações	8
2.4	Forças atuantes em uma aeronave	10
2.4.1	Escolha de eixos	11
2.4.2	Velocidades lineares e momentos do avião em relação ao sistema da Terra	12
2.5	Modelagem de um Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT) do tipo Quadrotor	12
2.5.1	Características de um quadrotor	12
2.5.2	Forças e momentos aerodinâmicos	14
2.5.3	Modelo de Newton-Euler	16
2.5.4	Obtenção do modelo linearizado	17
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO DA MODELAGEM	22
4	PROJETO DE CONTROLE	26
4.1	Controlabilidade	26
4.2	Observabilidade	27
4.3	Projeto do Controlador por Alocação de Polos	27
4.3.1	Simulações	31
4.4	Projeto do Regulador Linear Quadrático –LQR–	38
4.4.1	Simulações	39
4.5	Projeto de controle para seguimento de referência	46
4.5.1	Simulações	47
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	55

REFERÊNCIAS 57

1 INTRODUÇÃO

O estudo de veículos aéreos não tripulados –VANT– teve início no século XVIII, por meio da construção de um balão de ar quente. De acordo com Neto (2008), o primeiro voo desse balão foi realizado em 1709 na cidade de Lisboa, Portugal.

Durante a primeira guerra mundial, foram feitos muitos investimentos em *Unmanned Aerial Vehicles* – UAV –, como exemplo, tem-se o teste de um dos primeiros mísseis-guiados executado durante essa época (NETO, 2008). Em 1906, dois irmãos Louis e Jacques Breguet iniciaram estudos de projeto de helicópteros com uma configuração de quadrotor, em que cada rotor era constituído de 8 asas modeladas por panos, resultando em 32 hélices. Relatos de voo desse helicóptero dizem que ele atingia, no máximo, 1,5m de altura (PFEIFER, 2013).

Desde então os VANT são amplamente estudados e altos investimentos são feitos para melhorar essa tecnologia.

Os veículos aéreos não tripulados, também chamados de VANTs são aeronaves que executam trajetos de forma autônoma (THUMS, 2012). O modelo de VANT usado neste trabalho é do tipo quadrotor, o qual possui 4 hélices propulsoras. Este modelo faz parte do grupo de VANT do tipo decolagem e aterrissagem vertical *Vertical Takeoff and Landing* –VTOL– (PFEIFER, 2013).

Em geral, é necessário o conhecimento das características aerodinâmicas e das leis de Newton ou das equações de Euler-Lagrange para obter o modelo de aeronaves. Esta última abordagem pode ser encontrada na referência de Bouabdallah (2007). A partir disso, podem ser feitas considerações para simplificar o modelo de acordo com cada aplicação. Por exemplo, existem vários tipos de aeronaves, como aviões de transporte de grande porte, helicópteros, quadrotores e dirigíveis e para cada tipo existem considerações aerodinâmicas diferentes para encontrar o modelo matemático.

Neste trabalho, a modelagem é feita usando o método de Newton-Euler, o qual é o método mais usado na literatura, tais como nos trabalhos de Pfeifer (2013), Valavanis (2008), Bresciani (2008), Stevens, Lewis e Johnson (2015). O modelo leva em conta as características de propulsão das hélices, bem como das forças geradas por elas. As simulações foram feitas usando o programa Matlab-Simulink, em que foram gerados gráficos que representam os estados em função do tempo e, assim, possibilitam o estudo do comportamento do quadrotor.

Este trabalho é composto por cinco capítulos, incluindo esta Introdução, em que se apresentam os objetivos e a justificativa.

No capítulo 2, tem-se a revisão bibliográfica, na qual são explicadas as características das aeronaves, tais como toda a aerodinâmica presente, as forças atuantes e o modelo

matemático para os quadrotoros.

No capítulo 3, apresentam-se os resultados e as discussões da modelagem do quadrotor.

No capítulo 4, são projetados os controladores do sistema e apresentadas as simulações, bem como as comparações entre as técnicas de controle.

No capítulo 5, apresentam-se as considerações finais, as limitações da pesquisa e as sugestões para novos estudos.

1.1 Objetivo Geral

Obter o modelo matemático de um VANT do tipo quadrotor e analisar técnicas de controle.

1.1.1 Objetivos específicos

- Obter a equação matemática que modela o quadrotor;
- Realizar simulações usando os modelos não linear e linear;
- Comparar os dois modelos, não linear e linear, aplicando entradas do tipo degrau;
- Obter técnicas de controle, por meio da utilização do modelo linear e do modelo não linear;
- Comparar as técnicas de controle obtidas;
- Analisar os desempenhos de cada controlador, com base nas simulações para a aplicação em quadrotoros.

1.2 Justificativa

Os VANTs tem sido largamente utilizados em aplicações de mapeamento de ambientes perigosos, para o ser humano e nas indústrias em geral (BRESCIANI, 2008). Segundo Austin (2011 apud THUMS, 2012), as vantagens para o uso dos VANTs são o baixo custo de operação em comparação com os aviões tripulados e a aplicação em situações nas quais há risco para o ser humano, como, por exemplo, no combate a queimadas e na inspeção de linhas de transmissão.

Nos últimos anos, têm sido crescente o uso de VANTs em aplicações militares. Como exemplo, têm-se os Estados Unidos que aumentaram, desde o atentado terrorista de 2001, o orçamento para investimentos em VANTs em dez vezes, no período compreendido entre os anos de 2001 à 2010 (VALAVANIS, 2008 apud THUMS, 2012). Segundo Austin (2011 apud THUMS, 2012), outros motivos para o crescimento no investimento em VANTs

foi o aumento da capacidade dos microprocessadores, a miniaturização, o aumento da precisão dos sensores e as melhorias na comunicação por rádio.

A escolha do quadrotor para a realização deste trabalho justificou-se também pelas características apresentadas por este modelo, tais como decolagem vertical precisa e estacionária, boa flexibilidade de manobras, mecânica simples e baixas velocidades. Como o modelo opera em baixas velocidades, futuramente na modelagem, poderá ser desconsiderado o efeito de Coriolis. Assim como o efeito solo, que está mais presente na decolagem e aterrissagem, que também é desconsiderado (BRESCIANI, 2008). Além disso, este modelo possibilita o pouso em relevos montanhosos (PFEIFER, 2013).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Conceitos Básicos da Aerodinâmica

Segundo Rodrigues (2013), a aerodinâmica consiste no “estudo do movimento de fluidos gasosos, relativo às suas propriedades e características, e às forças que exercem em corpos sólidos neles imersos.”

O entendimento da aerodinâmica se faz fundamental para analisar e descrever os fenômenos aplicáveis ao projeto de aeronaves, como, por exemplo, força de arrasto, força de sustentação e características do escoamento aerodinâmico (RODRIGUES, 2013). Além disso, o aprendizado sobre alguns conceitos básicos da aerodinâmica é necessário também para a modelagem de um Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT) (CAMPOS, 2009).

Dentro deste contexto, os conceitos da aerodinâmica permitem explicar a ação da força de sustentação sobre uma aeronave. A ocorrência da força de sustentação em uma aeronave em movimento ocorre quando o ar se divide em duas partes, uma superior e outra inferior em relação a asa (RODRIGUES, 2013), como mostrado na Figura 1.

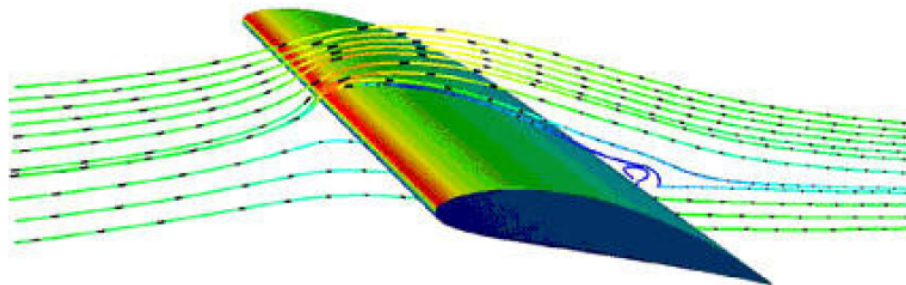


Figura 1 – Vento atuando em uma asa. Fonte: Rodrigues (2013).

Como o ar é forçado a se deslocar para baixo da asa surge então uma força de reação do ar para a asa. Tal força faz com que a asa fique em equilíbrio e está relacionada com a terceira lei de Newton, que define que toda força de ação corresponde a uma força de sentido contrário de mesma intensidade e direção (RODRIGUES, 2013).

Outra lei aplicada nos VANT é a do princípio de Bernoulli, que afirma que a pressão dinâmica em uma determinada massa é dada pela multiplicação entre a velocidade de escoamento e a densidade da massa de escoamento, dividido por dois (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). A pressão resultante em um aerofólio é dada então, pela soma das pressões estática e dinâmica, cujo resultado é uma constante (STEVENS; LEWIS;

JOHNSON, 2015), como mostrado na Equação (2.1).

$$P_e + \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot V^2 = cte \quad (2.1)$$

Fisicamente, (2.1) enuncia que com o aumento da velocidade (V) ocorre um aumento da pressão dinâmica do ar e uma redução da pressão estática (P_e). Na parte superior do aerofólio, a velocidade é maior e, conseqüentemente, a pressão estática é menor. Enquanto, na parte inferior existe uma velocidade menor e, pelo mesmo princípio, uma pressão estática maior. A pressão estática exercida da parte inferior para a superior do aerofólio gera a força de sustentação (RAYMER, 2006).

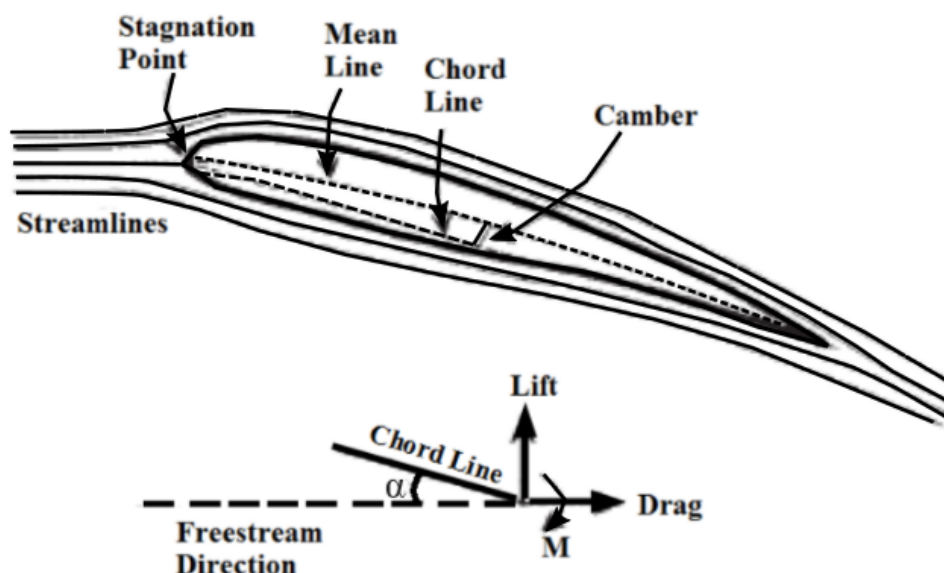


Figura 2 – Parâmetros e Forças resultantes em um perfil aerodinâmico. Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2 Teoria do Perfil Aerodinâmico

Um perfil aerodinâmico, também chamado de aerofólio, é uma superfície capaz de gerar reações aerodinâmicas (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015), como as descritas na seção 2.1. É por meio das reações aerodinâmicas que uma aeronave pode voar (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). Um aerofólio possui parâmetros geométricos que podem ser vistos na Figura 2.

O bordo de ataque é a superfície no qual o ar tem o primeiro contato com o aerofólio (Stagnation Point). O bordo de fuga é por onde o ar é escoado depois de passar no aerofólio.

A linha de arqueamento média (Mean Line) é a linha que possui os pontos médios de todos os pontos da superfície superior e inferior. A linha de corda (Chord Line) é a linha que une os pontos inicial e final da linha de arqueamento. O arqueamento (Camber) é a máxima distância entre a linha de arqueamento média e a linha de corda. Lift é a força de sustentação, drag a força de arrasto e M o momento angular. Além disso, as linhas ilustradas na Figura 2 representam as linhas de fluxo livre (Streamlines) (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

O aerofólio possui alguns ângulos importantes para a modelagem do avião. Esses ângulos são mostrados nas Figuras 3 e 4. Na Figura 3 é mostrado o ângulo de ataque que representa o ângulo entre a linha de corda e a direção do vento relativo. A Figura 4 mostra o ângulo de incidência que representa o ângulo entre a corda do perfil aerodinâmico e um eixo horizontal de referência (RODRIGUES, 2013).

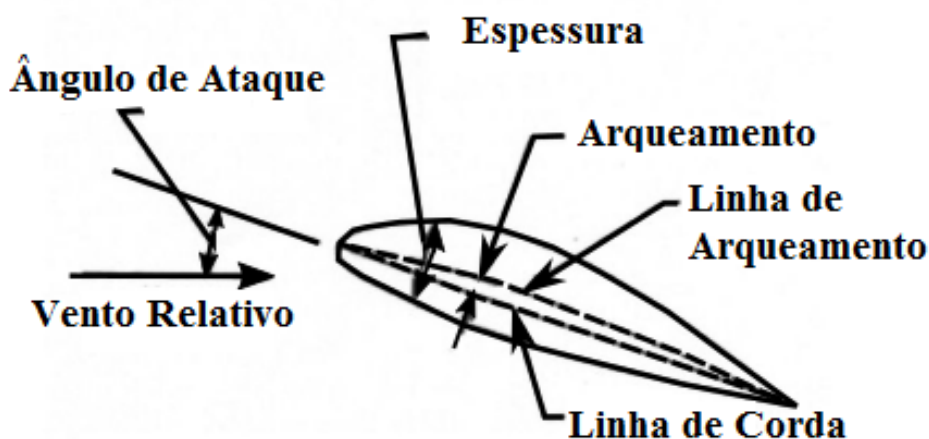


Figura 3 – Ângulo de ataque. Fonte: Elaborado pelo autor.

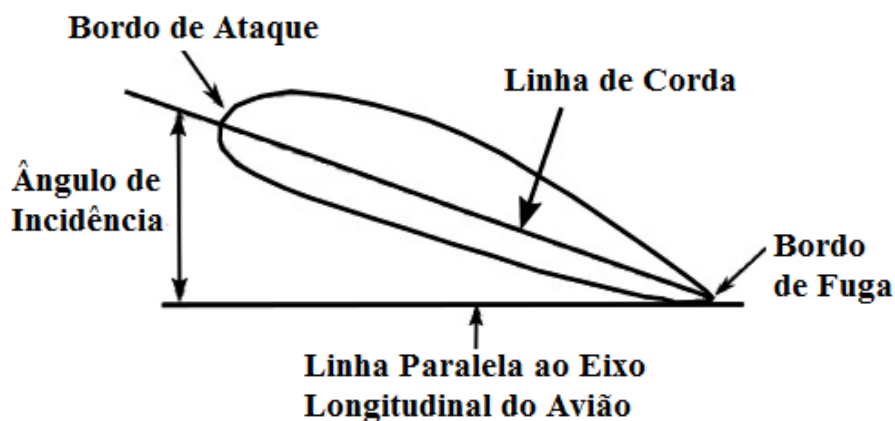


Figura 4 – Ângulo de incidência. Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 Sistemas de coordenadas

Antes de iniciar o modelo matemático é necessário conhecer os sistemas de coordenadas aplicados na modelagem. São usados sistemas de coordenadas referenciados em três posições distintas, sendo um eixo fixado na Terra e dois fixados no avião (COOK, 2012). É importante ressaltar que o sistema sobre a Terra deve estar alinhado com o sistema fixo no corpo do avião (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). Com essa consideração são usados eixos como mostrado na Figura 5, não havendo necessidade de usar o sistema de coordenadas no espaço, sendo esse mais utilizado para aplicações de aviões espaciais (COOK, 2012).

2.3.1 Eixos na Terra

Definidos como (O_o, X_o, Y_o, Z_o) , como mostrado na Figura 5, em que X_o aponta para o norte, Y_o para o leste e Z_o para baixo (COOK, 2012).

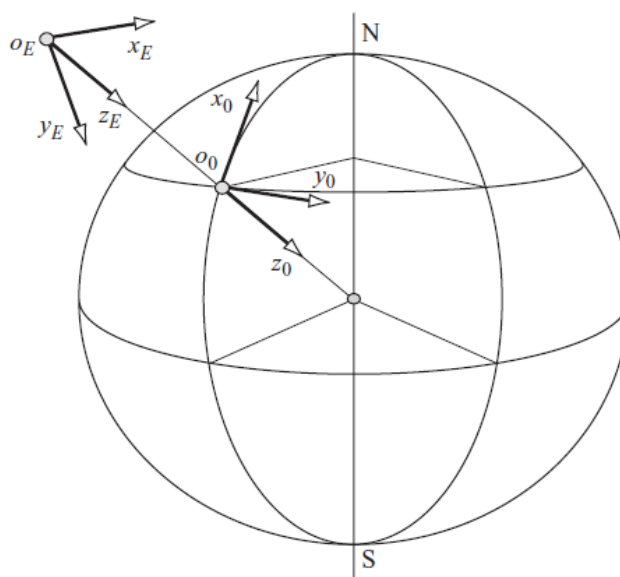


Figura 5 – Coordenadas em relação a Terra. Fonte: Cook (2012).

2.3.2 Eixos relativos na atmosfera

Definidos da mesma maneira que os eixos da Terra, no entanto os eixos na horizontal e na vertical variam de acordo com a direção da aeronave (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). Estes eixos são paralelos aos eixos na Terra e são definidos como (o_e, x_e, y_e, z_e) , conforme visto na Figura 5 (COOK, 2012).

2.3.3 Eixos no corpo do avião

Definidos como (o_b, x_b, y_b, z_b) podem ser fixados em qualquer ponto da aeronave, no entanto é mais conveniente fixá-los no centro de gravidade (CG) do avião (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). Os eixos (x_b, z_b) definem um plano de simetria da aeronave em relação a vertical. A Figura 6 mostra estes eixos coordenados (COOK, 2012).

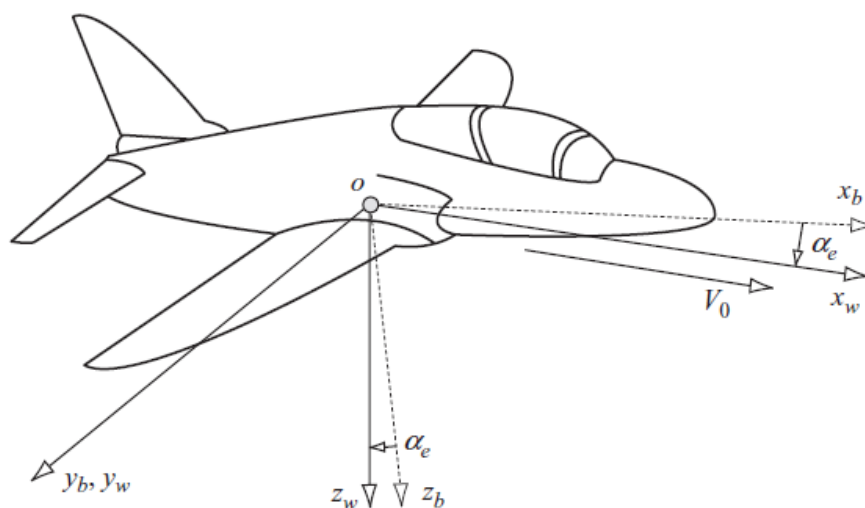


Figura 6 – Sistemas de coordenadas em movimento no avião. Fonte: Cook (2012).

Outros eixos coordenados usados são os eixos em relação ao vento que são descritos pelas coordenadas (x_w, y_w, z_w) , em que x_w é paralelo a velocidade do vento V_o e os outros dois eixos y_w e z_w coincidem com os eixos fixados no corpo, quando estes se encontram em uma posição fixa. Pela Figura 6 é visto o ângulo de ataque α_e , que descreve a posição angular da rotação dos eixos x_e e z_e em relação ao eixos y_b e y_w , na direção leste em que se coincidem. Em condições normais de voo α_e varia de $-10^\circ < \alpha_e < 20^\circ$ (COOK, 2012).

2.3.4 Ângulos de Euler e matriz de rotações

De acordo com Stevens, Lewis e Johnson (2015), os eixos de rotação no corpo do avião podem ser referenciados em relação ao eixo da Terra por meio de rotações sucessivas descritas abaixo:

- Rotação em torno do eixo Z_e gera o ângulo de guinada ψ .
- Rotação em torno do eixo Y_e gera o ângulo de arfagem θ .
- Rotação em torno do eixo X_e gera o ângulo de rolamento ϕ .

Matematicamente, para realizar tais rotações deve-se multiplicar os eixos coordenados, respectivamente, pelas matrizes ROT_ϕ , ROT_θ , ROT_ψ (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015), mostradas abaixo, em que c , s e t representam a função seno, cosseno e tangente:

$$\mathbf{ROT}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{ROT}_\theta = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{ROT}_\psi = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

De acordo com as sequências de rotação geradas pelos ângulos de Euler é possível construir uma matriz, cuja função é fazer transformações de um sistema de referência em outro (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). No caso do avião pode-se fazer transformações do sistema da Terra para o sistema do corpo a partir da matriz ROT (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). A matriz ROT é o resultado da multiplicação das matrizes $ROT_\phi ROT_\theta ROT_\psi$. A matriz ROT é usada para encontrar as velocidades lineares em relação ao corpo do avião (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

Segundo Spong (2006), existem outros dois métodos de rotação entre eixos. Esses métodos diferem entre si pois geram matrizes de rotações diferentes em que as sequências de rotações são diferentes, no entanto no presente trabalho é usada as referências de rotações descritas acima, cujo resultado é a matriz ROT , descrita por (2.5).

$$\mathbf{ROT} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Existe outra matriz relacionada com as velocidades angulares chamada de matriz T , responsável por mudar a referência das velocidades angulares (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). Matematicamente, a velocidade angular é a derivada do ângulo de rotação, assim, no caso do avião a velocidade angular é dada por

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ROT_\phi + ROT_\phi ROT_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + ROT_\phi ROT_\theta ROT_\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Portanto, o vetor de velocidades angulares é dado por

$$\omega = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Em (2.7) a matriz que multiplica a matriz de derivadas dos ângulos é chamada de matriz T.

2.4 Forças atuantes em uma aeronave

Continuando com o estudo das variáveis que serão usadas no modelo, quando o avião está em movimento retilíneo constante, não necessariamente na mesma altitude, aparecem as forças e momentos descritos na Figura 7 (COOK, 2012). As rotações em torno dos eixos geram os movimentos de rolamento, guinada e arfagem (na Figura 7, descritas em inglês por *Roll*, *Yaw* e *Pitch*, respectivamente). Além disso, neste estado surgem as velocidades descritas por U_e , V_e e W_e (COOK, 2012).

O sentido positivo das variáveis é definido por (COOK, 2012):

- rolamento positivo é quando o eixo y se move em direção ao eixo z ;
- arfagem positiva é quando o eixo z se move na direção do eixo x ;
- guinada positiva é quando o eixo x se move na direção do eixo y .

Na Tabela 1 estão descritas, de forma resumida, as forças, momentos e velocidades em regime de equilíbrio de trimagem e de perturbação (COOK, 2012). Na Tabela 2 é mostrado o significado de todas as variáveis de perturbação ilustradas na Figura 7.

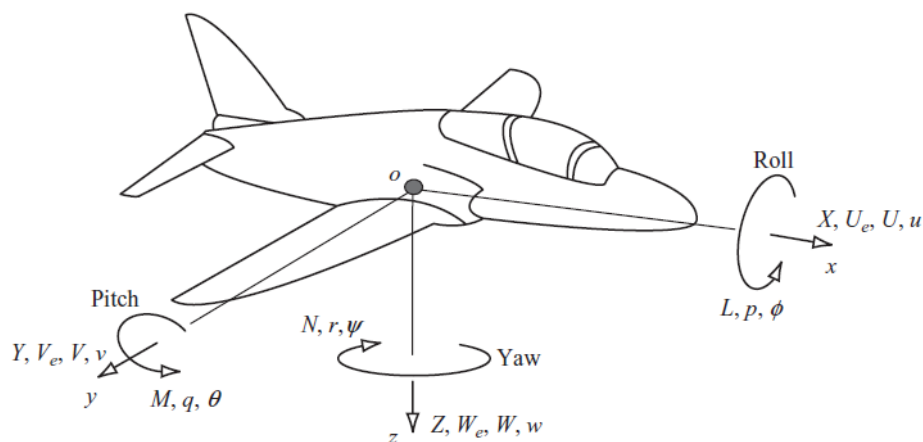


Figura 7 – Nomenclatura das variáveis de momento. Fonte: Cook (2012)

Tabela 1 – Variáveis de movimento.

Entrada 1	Equilíbrio de Trimagem	Perturbação
Eixo do avião	o_x, o_y, o_z	o_x, o_y, o_z
Força	0, 0, 0	X, Y, Z
Momento	0, 0, 0	L, M, N
Velocidade Linear	U_e, V_e, W_e	U, V, W
Velocidade Angular	0, 0, 0	P, Q, R
Atitude	0 θ_e 0	ϕ, θ, ψ

Fonte: (COOK, 2012)

Tabela 2 – Variáveis de perturbação.

Variáveis		Descrição
X	Força de Impulso	Soma das componentes aerodinâmicas, forças de impulso e peso
Y	Força lateral	
Z	Força de sustentação	
L	Momento de Rolamento	Soma das componentes aerodinâmicas, momentos de impulso e peso
M	Momento de Arfagem	
N	Momento de Guinada	
P	Taxa de rolamento	Componentes de velocidade angular
Q	Taxa de arfagem	
R	Taxa de guinada	
U	Velocidade de impulso	Velocidades lineares totais de componentes do centro de gravidade
V	Velocidade Lateral	
W	Velocidade Normal	

Fonte: (COOK, 2012)

A velocidade, quando ocorre perturbação, corresponde a soma da velocidade em equilíbrio e do parâmetro de perturbação, referidos em cada eixo, como mostrado nas equações (2.8), (2.9) e (2.10).

$$U = U_e + u \quad (2.8)$$

$$V = V_e + v \quad (2.9)$$

$$W = W_e + w \quad (2.10)$$

2.4.1 Escolha de eixos

Como visto anteriormente, têm-se eixos em relação ao vento e eixos em relação à fuselagem do avião. A escolha de qual referência usar é aquela que facilita os cálculos, e isto é conseguido por meio da análise dos ângulos feitos no subtópico anterior. É importante ressaltar que não existe uma referência melhor. Deve-se, portanto, analisar os dados disponíveis do avião e as condições aerodinâmicas. Em suma, são utilizados alguns dados

em relação ao corpo do avião e outros em relação ao vento. Assim, ferramentas matemáticas devem ser usadas para mudar os dados de uma referência para outra (COOK, 2012).

2.4.2 Velocidades lineares e momentos do avião em relação ao sistema da Terra

Com a matriz ROT pode-se fazer as transformações das velocidades lineares (U, V, W) para os eixos da Terra, por meio da multiplicação da matriz de transformação ROT pela matriz de derivadas da posição em relação à Terra. Conforme a equação (2.11).

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Isolando o vetor de derivadas da posição, (2.11) torna-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = ROT^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Analogamente, em relação às velocidades lineares, basta multiplicar a matriz T pela matriz das derivadas dos ângulos referidos em cada eixo, para obter a matriz de derivadas dos momentos, conforme a equação (2.7) (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). Isolando o vetor de derivadas dos ângulos em (2.7) tem-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t\theta s\phi & t\theta c\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

2.5 Modelagem de um Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT) do tipo Quadrotor

Esclarecidas as principais características relacionadas com a aerodinâmica de uma aeronave, pode-se iniciar a modelagem de um VANT do tipo quadrotor. As características citadas também são aplicadas a esses veículos.

2.5.1 Características de um quadrotor

Os veículos aéreos não tripulados do tipo quadrotor são um tipo de veículo da classe *Vertical Takeoff and Landing* (VTOL) ou Decolagem e Aterrissagem Vertical (BRESCIANI, 2008). Esse tipo de veículo, em comparação com os veículos multirotores, tem como

vantagens uma decolagem vertical a baixas velocidades com pouca trepidação no sentido horizontal (BRESCIANI, 2008). A desvantagem é o alto consumo de energia (BRESCIANI, 2008). Além disso, esses veículos são usados no mapeamento de terrenos com variações de altitude, nos quais não é possível um pouso suave na horizontal (PFEIFER, 2013).

Ainda segundo Pfeifer (2013), a estrutura do quadrotor é formada por 4 hélices montadas sobre 2 eixos em forma de cruz como mostrado na Figura 8. Cada hélice é responsável por gerar uma força de empuxo, que é usada para movimentar o VANT (PFEIFER, 2013). Na Figura 8 são vistas as atitudes do VANT que como foram descritas representam a orientação do quadrotor representadas por *Roll* (Rolamento), *Yaw* (Guinada) e *Pitch* (Arfagem).

Conforme visto na Figura 9, as hélices 1 e 2 giram no sentido anti-horário, enquanto que as hélices 3 e 4 giram no sentido horário. No estado estacionário, ou seja, quando todas as hélices estão girando com a mesma velocidade, pode-se afirmar que o VANT está em um voo estacionário no qual todas as forças e torques estão em equilíbrio, isto é, o veículo encontra-se parado no ar (BRESCIANI, 2008).

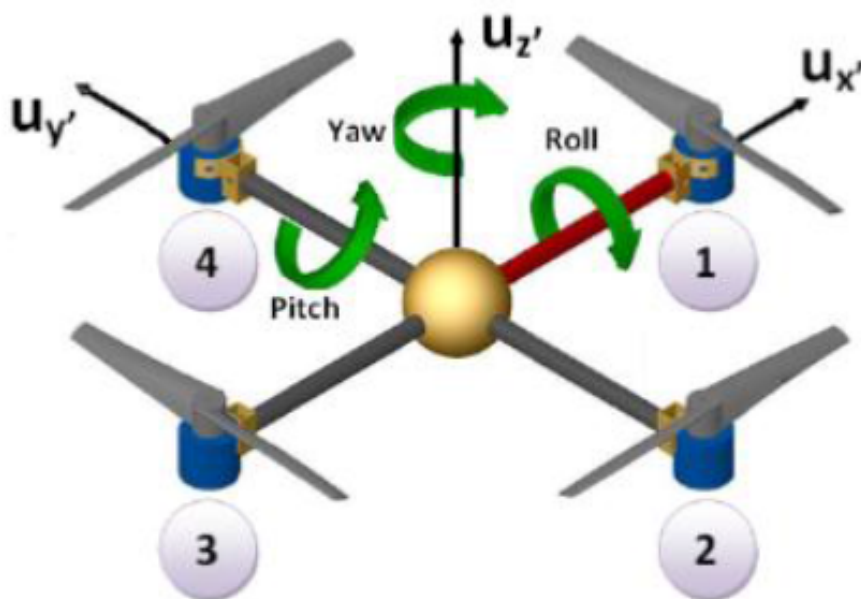


Figura 8 – Orientação do quadrotor. Fonte: Pfeifer (2013).

Com essa configuração de hélices é possível o quadrotor se movimentar pelos eixos X, Y, Z da referência do corpo do VANT. Na Figura 10 são mostrados todos os possíveis movimentos. A Figura 10 a) demonstra que quando a velocidade da hélice 1 é maior que a velocidade da hélice 2 o veículo é deslocado para trás (direção do eixo X negativo). Na Figura 10 b) é mostrado o sentido contrário, ou seja, o deslocamento para frente (eixo positivo de X). Esses deslocamentos geram mudanças negativas e positivas do ângulo de *Pitch* (Arfagem), respectivamente. Na Figura 10 c) é ilustrado o movimento lateral

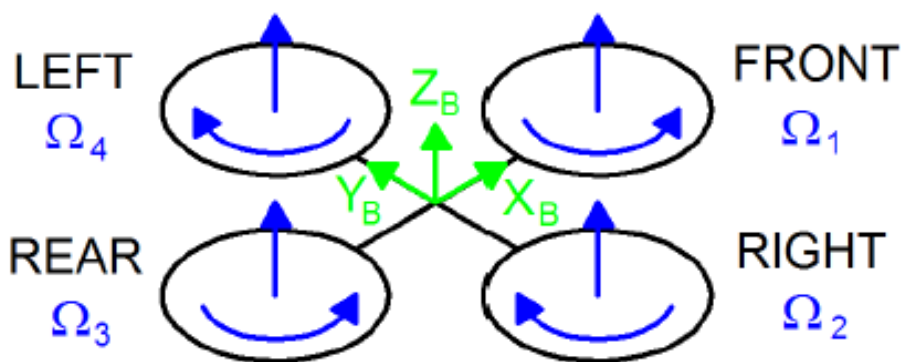


Figura 9 – Orientação das hélices do quadrotor. Fonte: Bresciani (2008).

esquerdo, resultante do aumento da velocidade da hélice 2 e da diminuição da velocidade da hélice 4. Enquanto, na Figura 10 d) é ilustrado o movimento para a direita resultante do aumento da velocidade da hélice 4 e da diminuição da velocidade da hélice 2. Esses movimentos laterais geram mudanças na atitude *Roll* (Rolamento) positivas e negativas respectivamente. Nas Figuras 10 e) e 10 f) é demonstrado como é feita a elevação ou queda, respectivamente, do quadrotor. As Figuras 10 g) e 10 h) ilustram que a combinação de aumento das velocidades das hélices sobre um eixo e a diminuição das velocidades das hélices do outro eixo geram o movimento de *Yaw* (guinada) (PFEIFER, 2013).

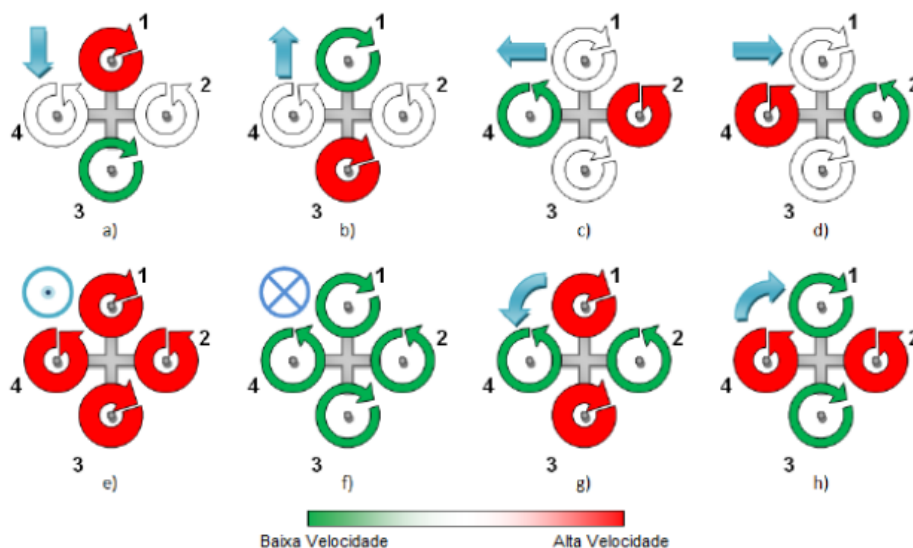


Figura 10 – Movimentos do quadrotor. Fonte: Bresciani (2008).

2.5.2 Forças e momentos aerodinâmicos

Cada hélice do quadrotor é responsável por gerar uma intensidade de empuxo. De acordo com Valavanis (2008) e Pfeifer (2013), o empuxo de cada hélice pode ser encontrado

por:

$$\tau_{prop_i} = k_{vprop_i} \cdot \omega_{prop_i}^2, \quad (2.14)$$

em que:

τ_{prop_i} é o empuxo de cada hélice i [N];

k_{vprop_i} é a constante de empuxo de cada hélice i [$N \cdot s^2/rad^2$];

ω_{prop_i} é a velocidade angular de cada hélice i [rad/s].

Como mostrado na seção anterior, as forças que agem no quadrotor descrevem a orientação do veículo (BRESCIANI, 2008; VALAVANIS, 2008; PFEIFER, 2013). Primeiramente descreve-se a força resultante na direção do eixo Z_B , dada por:

$$U_1 = \sum_{j=1}^4 \tau_{prop_j} = F_z^{corpo}, \quad (2.15)$$

em que:

U_1 é a soma de todos os empuxos de cada hélice;

F_z^{corpo} é a força resultante na direção do eixo Z.

Salienta-se que os eixos de referência são tomados com base na Figura 9.

Além das forças de empuxo em cada hélice, têm-se ainda os momentos referentes à diferença de velocidades das hélices em determinado movimento. Todas as equações foram tomadas com base nos trabalhos de Valavanis (2008) e Pfeifer (2013).

Para o eixo X:

$$U_2 = L(\tau_{prop4} - \tau_{prop2}) = \tau_x^{corpo}, \quad (2.16)$$

em que:

U_2 é o momento resultante;

τ_x^{corpo} é o momento resultante em torno do eixo X;

L é a distância do centro do quadrotor até o centro do propulsor.

Para o eixo Y:

$$U_3 = (\tau_{prop3} - \tau_{prop1})L = \tau_y^{corpo}, \quad (2.17)$$

em que:

U_3 é o momento resultante;

τ_y^{corpo} é o momento resultante em torno do eixo Y.

O momento de cada hélice em torno do eixo Z é descrito como:

$$M_{prop_i} = k_{mprop_i} \cdot \omega_{prop_i}^2 = \tau_Z^{corpo}, \quad (2.18)$$

em que:

M_{prop_i} é o momento de cada hélice i [Nm];

k_{mprop_i} é a constante de velocidade-momento de cada hélice i [Nms^2/rad^2];

ω_{prop_i} é a velocidade angular de cada hélice i [rad/s].

Por fim, o momento resultante em torno do eixo Z é descrito por:

$$U_4 = \sum_{j=1}^4 M_{prop_j} (-1)^{j-1}, \quad (2.19)$$

em que U_4 é o momento resultante.

Observando (2.19) nota-se que as hélices 1 e 3 causam momentos positivos (sentido horário) e as hélices 2 e 4 causam momentos negativos (sentido anti-horário) (PFEIFER, 2013).

2.5.3 Modelo de Newton-Euler

Para a modelagem do quadrotor é utilizado neste trabalho o modelo de Newton-Euler descritor por:

$$\begin{pmatrix} F \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \times mV \\ \omega \times J\omega \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

em que:

F é o vetor de forças em relação ao corpo do VANT [N];

τ é o vetor de momentos em relação ao VANT [N.m];

m é a massa do corpo [Kg];

$I_{3 \times 3}$ é uma matriz identidade de ordem 3;

\dot{V} são as acelerações lineares;

$\dot{\omega}$ são as acelerações angulares;

ω são as velocidades angulares;

V são as velocidades lineares [m/s];

J é a matriz inercial.

O modelo de Newton-Euler representa a forma pela qual um corpo rígido comporta-se ao longo do tempo, conforme os modelos expostos em Valavanis (2008) e Pfeifer (2013).

Um ponto importante é que este modelo leva em conta o efeito de Coriolis, representado pela matriz:

$$\begin{pmatrix} \omega \times mV \\ \omega \times J\omega \end{pmatrix}.$$

Observando (2.20), constata-se que o modelo de Newton-Euler leva em conta a força da gravidade, a força de propulsão das hélices e também as forças aerodinâmicas de arrasto e sustentação. Note ainda que, como presume-se que as forças estão aplicadas no centro de massa, a força peso não gera momento. As forças aerodinâmicas são decompostas resultando nas forças P , Q , R (OLIVEIRA; BARROS, 2007).

O efeito de Coriolis não é importante em baixas velocidades podendo, no caso do VANT, ser desprezado. Além disso, a matriz de inércia J é diagonal, visto que o eixo do corpo coincide com o eixo de inércia, ou seja, a inércia é própria de cada eixo não influenciando uns aos outros (BRESCIANI, 2008).

Através das equações de forças e momentos, substitui-se (2.15), (2.16), (2.17), (2.19) em (2.20) resultando na equação

$$\begin{pmatrix} F \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x^{corpo} \\ F_y^{corpo} \\ F_z^{corpo} \\ \tau_x^{corpo} \\ \tau_y^{corpo} \\ \tau_z^{corpo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

que é o modelo não linear para o quadrotor. Isolando-se a matriz de acelerações lineares e angulares obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gs\theta - (WQ - VR) \\ -gs\phi c\theta - (UR - WP) \\ \frac{U_1}{m} - gc\phi c\theta - (VP - UQ) \\ \frac{U_2}{J_x} - \frac{QR(J_z - J_y)}{J_x} \\ \frac{U_3}{J_y} - \frac{PR(J_x - J_z)}{J_y} \\ \frac{U_4}{J_z} - \frac{PQ(J_y - J_x)}{J_z} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Observando (2.22) é possível concluir que o modelo é não linear, pois tem a multiplicação dos estados U, V, W, P, Q, R e também senos e cossenos.

2.5.4 Obtenção do modelo linearizado

Obter um modelo significa encontrar uma equação matemática que demonstra a evolução dos estados, ou seja, uma função $\dot{x} = f(x, u)$ em função dos estados x e da entrada u (NISE, 2006). Para muitos casos de controle é usual fazer a linearização do sistema. Para isto usa-se uma simplificação da série de Taylor como mostrado na equação (2.23).

$$\dot{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{m+n} f(x_0, u_0)}{\partial x^m \partial u^n} (x - x_0)^m (u - u_0)^n. \quad (2.23)$$

Simplificando, (2.23) torna-se:

$$f(x, u) \approx f(x_0, u_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u}(u - u_0). \quad (2.24)$$

Note que (2.24) permite obter um modelo simplificado com uma boa aproximação para o modelo do quadrotor desde que a aproximação fornece resultados nos quais (x, u) não fiquem longe do ponto de operação (x_0, u_0) (OLIVEIRA; BARROS, 2007). O modelo de estado usado na literatura de controle é:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.25)$$

em que:

x são as variáveis de estado;

u são as entradas;

A é a matriz de derivadas dos estados de tamanho 12 x 12;

B é a matriz de derivadas das entradas de tamanho 12 x 5.

A partir da equação:

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gs\theta - (WQ - VR) \\ -gs\phi c\theta - (UR - WP) \\ \frac{U_1}{m} - gc\phi c\theta - (VP - UQ) \\ \frac{U_2}{J_x} - \frac{QR(J_z - J_y)}{J_x} \\ \frac{U_3}{J_y} - \frac{PR(J_x - J_z)}{J_y} \\ \frac{U_4}{J_z} - \frac{PQ(J_y - J_x)}{J_z} \\ R^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \\ T^{-1} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

deve-se obter o modelo linearizado em espaço de estados. Primeiramente é preciso encontrar as variáveis de estado que serão usadas. Este trabalho, inicialmente, tem como objetivo obter uma equação matemática do quadrotor e, posteriormente, aplicar técnicas de controle, a fim de fazer o quadrotor estabilizar em um ponto parado. Para isto, todas as velocidades devem ser zero, ou seja, todas as acelerações devem ser iguais a zero. Portanto, as únicas variáveis de estado que importam para esta etapa são os ângulos ϕ e θ , que representam, respectivamente, os ângulos de rolamento e arfagem.

É importante ressaltar que neste caso as variáveis de posição X, Y, Z e o ângulo de guinada ψ são desconsiderados, pois não influenciam no estado do quadrotor parado no ar.

Com as variáveis escolhidas, inicia-se o processo chamado de trimagem do sistema, que consiste em encontrar a entrada u que faz com que $f(x, u) = 0$, no ponto de operação desejado:

- 1º ponto de trimagem: $\phi = 0, \theta = 0$. Substituindo tais valores em (2.26) obtém-se:

$$f(x, u(\phi = 0, \theta = 0)) = \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(WQ - VR) \\ -(UR - WP) \\ \frac{U_1}{m} - g - (VP - UQ) \\ \frac{U_2}{I_x} - \frac{QR(I_z - I_y)}{I_x} \\ \frac{U_3}{I_y} - \frac{PR(I_x - I_z)}{I_y} \\ \frac{U_4}{I_z} - \frac{PQ(I_y - I_x)}{I_z} \\ \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \\ R^{-1} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Substituindo também as velocidades iguais a zero, obtém-se:

$$f(x, u(\phi, \theta, P, Q, R, U, V, W = 0)) = \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{U_1}{m} - g \\ \frac{U_2}{I_x} \\ \frac{U_3}{I_y} \\ \frac{U_4}{I_z} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ R^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Igualando $f(x, u) = 0$ tem-se $\frac{U_1}{m} - g = 0$.

Portanto, as equações obtidas são:

$$U_1 = mg, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0. \quad (2.29)$$

Este resultado é esperado, pois, para estes ângulos de trimagem, o quadrotor estará parado no alto na posição normal. Logo, as forças de propulsão das hélices devem equilibrar a força da gravidade, fazendo com que o VANT fique parado.

- 2º ponto de trimagem $\pi = 0, \theta = 0$. De forma análoga ao item 1, obtém-se:

$$f(x, u(\phi, \theta, P, Q, R, U, V, W = 0)) = \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{U_1}{m} + g \\ \frac{U_2}{I_x} \\ \frac{U_3}{I_y} \\ \frac{U_4}{I_z} \\ R^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

de (2.30) e igualando a zero obtém-se:

$$\frac{U_1}{m} + g = 0, \quad \frac{U_2}{I_x} = 0, \quad \frac{U_3}{I_y} = 0, \quad \frac{U_4}{I_z} = 0. \quad (2.31)$$

Logo:

$$U_1 = -mg, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0. \quad (2.32)$$

Conforme esperado, pois, neste caso, o VANT está de cabeça para baixo e assim as forças da hélice devem equilibrar a força de gravidade.

Para os casos seguintes são mostradas as equações, visto que, é utilizado o mesmo processo obtido para encontrar as equações anteriores.

- 3º ponto de trimagem $\phi = 0, \theta = \pi$.

As equações obtidas são:

$$U_1 = -mg, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0. \quad (2.33)$$

Este resultado é o mesmo para o item 2, pois neste caso o VANT também estará de cabeça para baixo.

- 4º ponto de trimagem $\phi = \pi, \theta = \pi$.

A equações obtidas são:

$$U_1 = mg, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0. \quad (2.34)$$

Este resultado é o mesmo do item 1, pois neste caso o VANT também estará na posição normal de voo.

Obtidas as equações por meio da trimagem, são encontradas as matrizes A e B do modelo de espaço de estados linear. A matriz A é dada pela derivada de (2.26) em relação a x , como mostrado abaixo:

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_{14} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_{22} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ A_{31} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_{34} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_{42} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_{44} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

em que $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ significa uma matriz de ordem 3 de zeros. Assim:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & R & -Q \\ -R & 0 & P \\ Q & -P & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -W & V \\ W & 0 & -U \\ -V & U & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & g c \theta & 0 \\ -g c \phi c \theta & g s \phi s \theta & 0 \\ g s \phi c \theta & g c \phi s \theta & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R(I_z - I_y)}{I_x} & \frac{-Q(I_z - I_y)}{I_x} \\ \frac{-R(I_x - I_z)}{I_y} & 0 & \frac{-P(I_x - I_z)}{I_y} \\ \frac{-Q(I_y - I_x)}{I_z} & \frac{-P(I_y - I_x)}{I_z} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R(I_z - I_y)}{I_x} & \frac{-Q(I_z - I_y)}{I_x} \\ \frac{-R(I_x - I_z)}{I_y} & 0 & \frac{-P(I_x - I_z)}{I_y} \\ \frac{-Q(I_y - I_x)}{I_z} & \frac{-P(I_y - I_x)}{I_z} & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{34} &= \begin{bmatrix} 0 & (s \phi s \psi + c \phi s \theta c \psi) V & (c \phi s \psi - s \phi s \theta c \psi) W \\ -s \psi s \theta U & s \phi c \theta s \psi V & c \phi c \theta s \psi W \\ -c \theta U & -s \phi s \theta V & -c \phi s \theta W \end{bmatrix}, \\ A_{42} &= \begin{bmatrix} 1 & t \theta s \phi & t \theta c \phi \\ 0 & c \phi & -s \phi \\ 0 & \frac{-s \phi}{c \theta} & \frac{c \phi}{c \theta} \end{bmatrix}, \quad A_{44} = \begin{bmatrix} t \theta c \phi Q - t \theta s \phi R & \sec^2 \theta s \phi Q + \sec^2 \theta c \phi R & 0 \\ -s \phi Q - c \phi R & 0 & 0 \\ \frac{c \phi}{c \theta} Q + \left(\frac{-s \phi}{c \theta}\right) R & \frac{s \phi s \theta}{c^2 \theta} Q + \frac{c \phi s \theta}{c^2 \theta} R & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e a matriz B é dada pela derivada de (2.26) em relação a entrada U , como mostrado abaixo:

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial U} = \begin{bmatrix} B_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ B_{21} & B_{22} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}.$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO DA MODELAGEM

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos por meio de simulações dos diferentes estados de operação. As simulações levam em conta um regime estacionário do quadrotor em uma determinada altitude. Para comprovar se os pontos de trimagem estão corretos, foram realizadas as simulações dos estados e, como ilustrado na Figura 11, obtiveram-se os resultados esperados, ou seja, os pontos obtidos na trimagem são os pontos em que as forças são constantes, conforme as considerações de velocidades iguais a zero, para que assim sejam obtidas acelerações iguais a zero. Desse modo, o gráfico constante significa que o quadrotor ficará parado em uma determinada posição.

Para $\phi = 0$ e $\theta = 0$, o quadrotor está na posição normal ("cabeça para cima"). Para $\phi = \pi$ e $\theta = 0$, o quadrotor encontra-se na posição angular invertida, ou seja, de "cabeça para baixo", devido ao ângulo de rolamento. Para $\phi = 0$ e $\theta = \pi$, o VANT encontra-se também de "cabeça para baixo", no entanto, por meio do movimento de arfagem $\theta = \pi$. O resultado é o mesmo do caso $\phi = \pi$ e $\theta = 0$, mas com posições angulares diferentes, visto que os ângulos usados são diferentes.

Para $\phi = \pi$ e $\theta = \pi$, o VANT encontra-se de "cabeça para cima", o que ocorre igualmente para os ângulos $\phi = 0$ e $\theta = 0$, no entanto este movimento ocorre através do ângulo de rolamento π e de arfagem θ .

Na Figura 12 são mostradas as simulações para os mesmos casos da Figura 11, no entanto, aplicando entrada ao degrau. As linhas em amarelo indicam o degrau aplicado e as linhas em vermelho indicam a altitude do quadrotor. Os gráficos representam como a força das hélices devem equilibrar a força de gravidade, para que o quadrotor permaneça em uma determinada altura. No entanto, como as simulações estão em malha aberta, o quadrotor subirá sem limite como observado nos gráficos da Figura 12.

Para $\phi = 0$ e $\theta = 0$, o quadrotor encontra-se na posição normal ("cabeça para cima"). Aplicando-se a entrada ao degrau a força das hélices deve ser tal que anule a força da gravidade. Enquanto para $\phi = \pi$ e $\theta = 0$, o quadrotor encontra-se na posição angular igual a $\phi = \pi$. Como visto no gráfico, essa força será negativa, pois o quadrotor encontra-se na posição inversa ("cabeça para baixo").

Para $\phi = 0$ e $\theta = \pi$, o quadrotor encontra-se na posição angular igual a $\theta = \pi$. Como visto no gráfico, essa força será negativa, pois o quadrotor encontra-se na posição inversa ("cabeça para baixo"). Já para $\phi = \pi$ e $\theta = \pi$, o quadrotor encontra-se na posição normal ("cabeça para cima"). Aplicando-se a entrada ao degrau a força das hélices deve ser tal que anule a força da gravidade.

Nas figuras 13, 14, 15, 16 são apresentadas as simulações do modelo linear e a

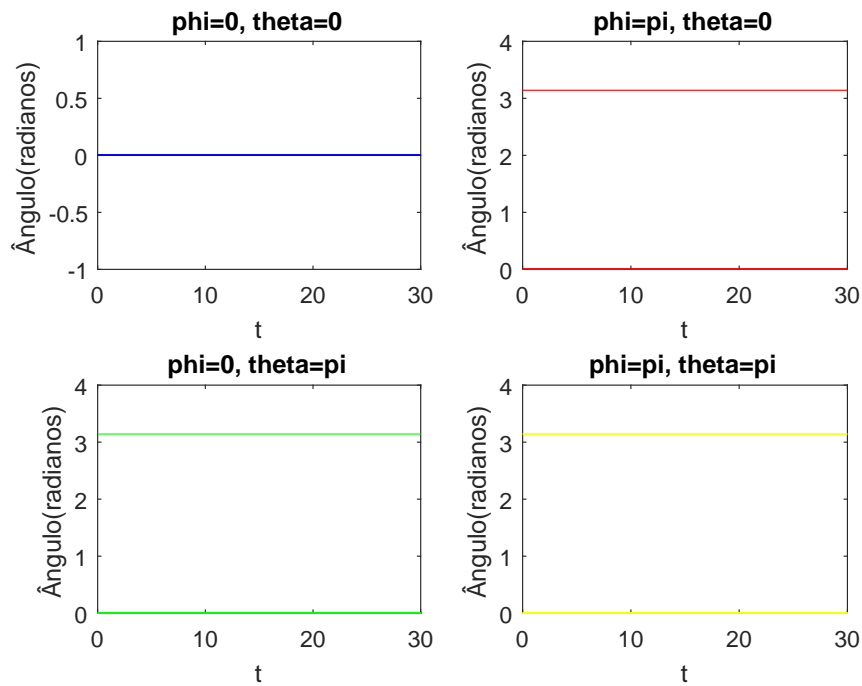


Figura 11 – Simulação do modelo não linear para os diferentes casos de trimagem.

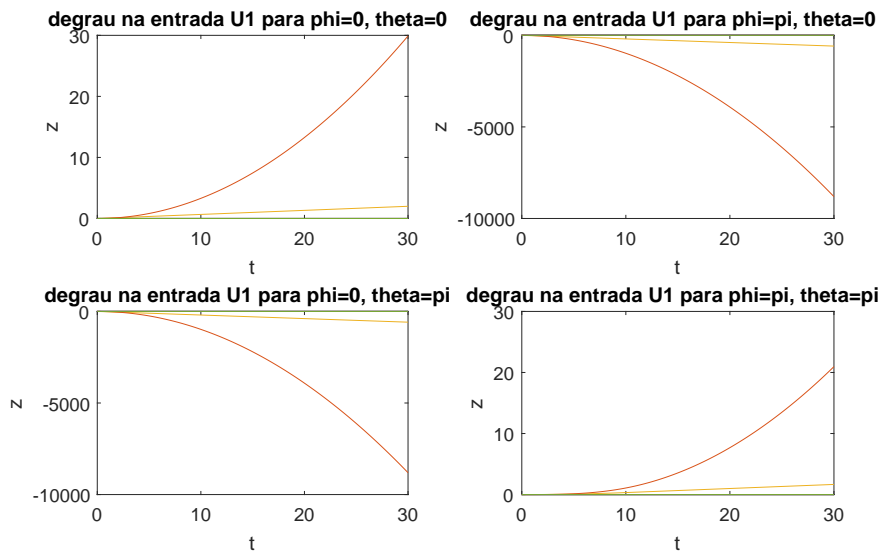


Figura 12 – Simulação do modelo não linear para os diferentes casos para entrada ao degrau.

comparação com o modelo não linear. Nessas figuras as linhas azul e amarela correspondem as velocidades e a linha laranja representa a altitude do quadrotor. Observa-se que cada ponto de trimagem resultou nos mesmos gráficos e isso comprova que os pontos de operação são os pontos desejados, validando o modelo.

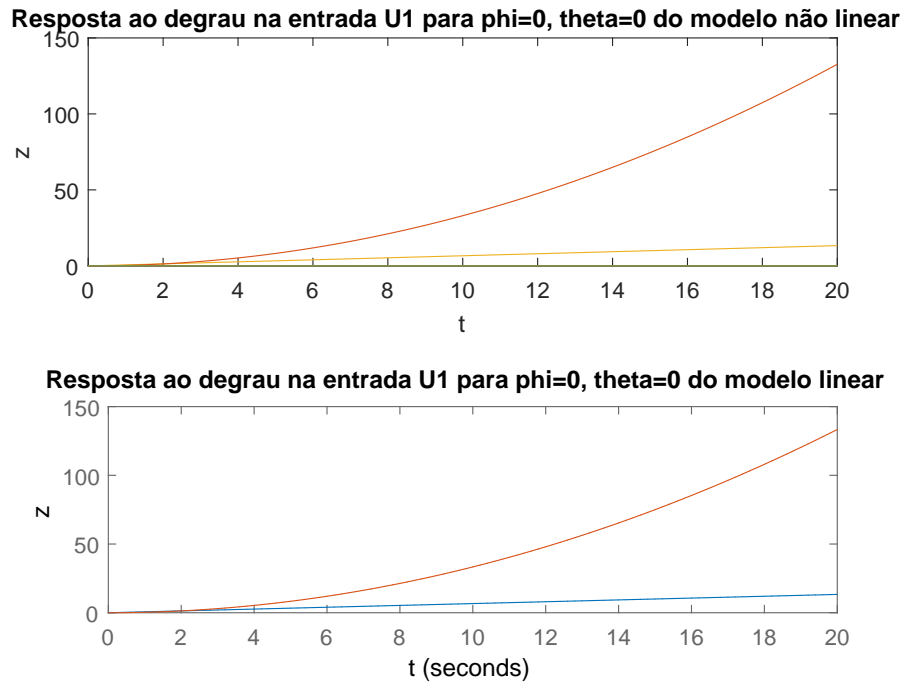


Figura 13 – Comparação da resposta ao degrau dos modelos não linear e linear para o primeiro caso de trimagem.

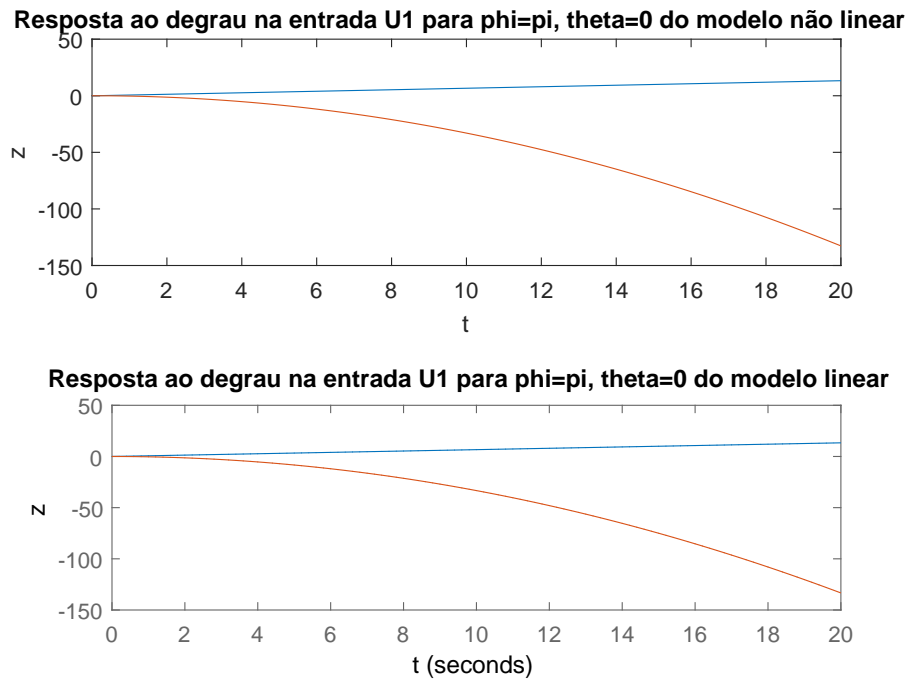


Figura 14 – Comparação da resposta ao degrau dos modelos não linear e linear para o segundo caso de trimagem.

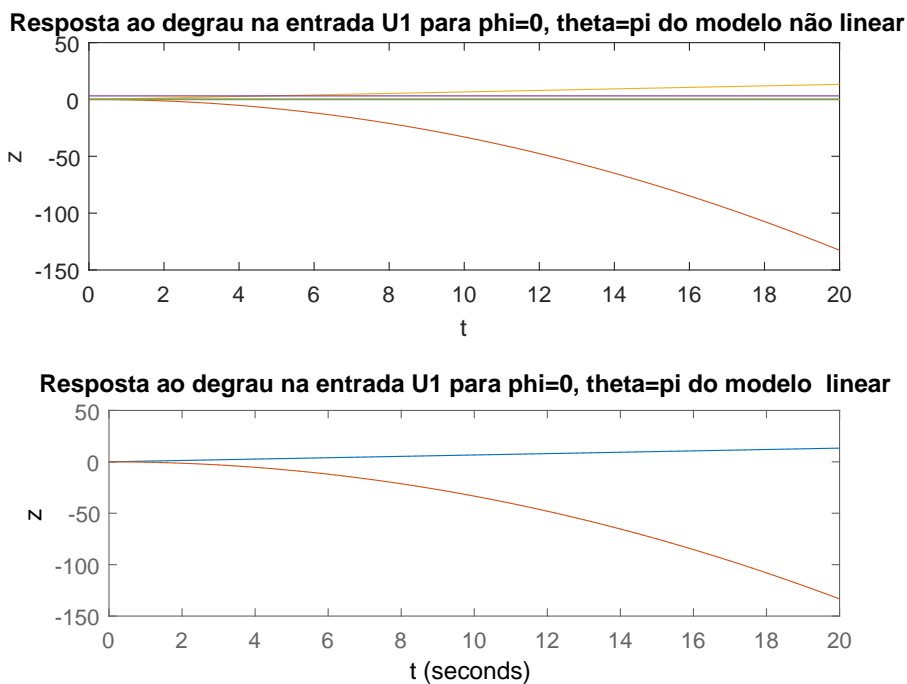


Figura 15 – Comparação da resposta ao degrau do modelos não linear e linear para o terceiro caso de trimagem.

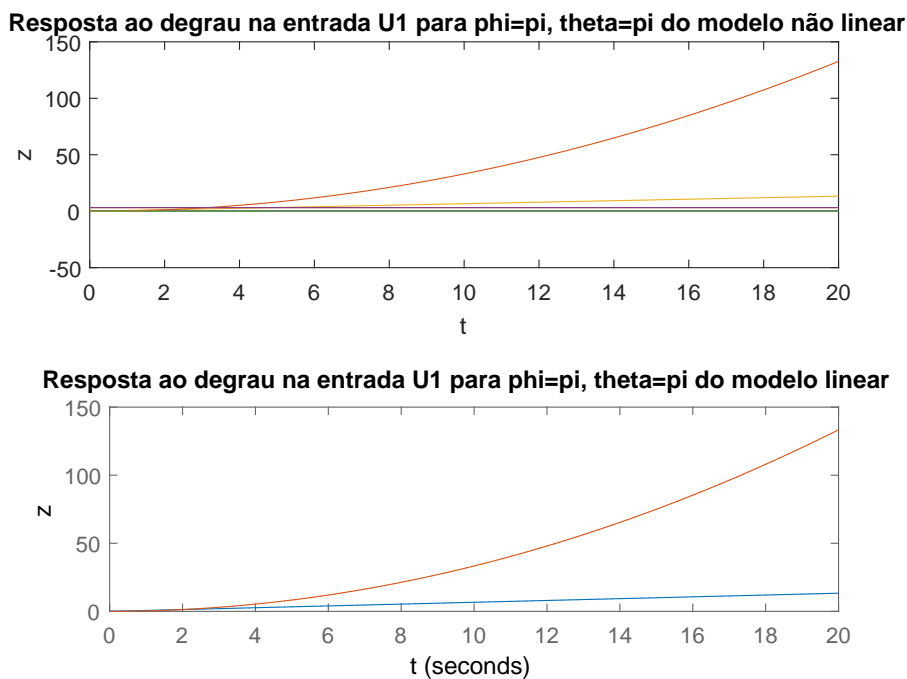


Figura 16 – Comparação da resposta ao degrau dos modelos não linear e linear para o quarto caso de trimagem.

4 PROJETO DE CONTROLE

O presente capítulo tem como objetivo projetar três tipos de controladores, um pela técnica de alocação de polos, um controlador pela técnica do Regulador Linear Quadrático -LQR- e outro controlador por seguimento de referência.

A teoria de controle é dividida em controle clássico e controle moderno. O controle clássico compreende todas as técnicas de controle desenvolvidas até 1950, após esse ano até os dias atuais é utilizado o controle moderno (BAPTISTA, 2015).

As técnicas de controle moderno levam em conta o custo e o desempenho do sistema. Segundo Baptista (2015), os algoritmos de controle ótimo, às vezes, não controlam a saída da forma desejada quando ocorrem alterações no sistema de controle. Assim, o controle robusto foi criado para minimizar os efeitos de perturbações no sistema.

Primeiramente foram estudadas as características de Controlabilidade e Observabilidade do sistema. Segundo Ogata (2003), a primeira é uma condição necessária e suficiente para a alocação arbitrária de polos, caso o sistema seja completamente controlável, assim todos os autovalores da matriz A poderão ser alocados arbitrariamente. Enquanto a segunda é uma condição para o controle, caso os estados não estejam todos disponíveis para a medição e necessitem ser estimados.

4.1 Controlabilidade

Um sistema é considerado controlável se existir um controle u sem restrições que possa levar um sistema de um estado inicial $x(0)$ para um estado $x(t)$ (DORF, 2009). Para o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.1)$$

determina-se a controlabilidade por meio do cálculo da condição:

$$\text{posto} \begin{pmatrix} A & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n, \quad (4.2)$$

em que n é a dimensão do vetor de estados.

Essa condição mostra que as linhas na matriz de controlabilidade são Linearmente Independentes. Essa demonstração pode ser encontrada em Ogata (2003).

Usando o software MatLab, por meio do comando:

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A, B)), \quad (4.3)$$

foi obtido um posto igual a 12 para as matrizes A e B , dadas, respectivamente, em (2.35) e (2.36). Como o total de variáveis de estado são 12, conclui-se que o sistema é completamente controlável. Essa é uma condição necessária para o projeto de controle por

alocação de polos e garante que todos os autovalores da matriz $[A - BK]$, em que A e B são as matrizes de estado e K a matriz de ganhos, são controláveis por realimentação de estados (OGATA, 2003).

Um detalhe importante é que se o sistema é estabilizável, mas não é completamente controlável também é possível alocar apenas os polos controláveis, tornando o sistema estável.

4.2 Observabilidade

Na prática, nem todos os estados são mensuráveis, ou seja, nem todos estão disponíveis para medição. Neste caso, deve-se projetar um observador de estados para estimar as variáveis não disponíveis. Essa estimativa é chamada de observação. Para que ela seja possível, o sistema deve ser observável. Inicialmente, supôs no trabalho que todas as variáveis de estado são conhecidas, não havendo necessidade de observadores de estado. O sistema é considerado observável, se todo estado $x(t_0)$ pode ser determinado pela observação da saída $y(t)$ em um intervalo de tempo finito, $t_0 < t < t_1$ (OGATA, 2003). A observabilidade pode ser encontrada a partir do cálculo da condição:

$$\text{posto} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n, \quad (4.4)$$

em que n é a dimensão do vetor de estados.

Usando o software Matlab, obteve-se o posto da matriz observabilidade. O comando usado foi:

$$\text{rank}(\text{obsv}(A, C)). \quad (4.5)$$

Igualmente para a controlabilidade, o resultado é igual a 12, mostrando que o sistema é de "posto cheio", sendo observável, ou seja, as linhas são linearmente independentes.

Com as considerações de controlabilidade e observabilidade feitas, iniciou-se o projeto das técnicas de controle.

4.3 Projeto do Controlador por Alocação de Polos

No projeto de alocação de polos, foi admitido inicialmente que todas as variáveis de estado eram conhecidas. Como mostrado anteriormente, o sistema é completamente controlável e observável, o que permite a alocação dos polos, para que sejam obtidas as respostas desejadas.

A realimentação usada é

$$u = -Kx, \quad (4.6)$$

em que K é a matriz dos ganhos obtidos com a técnica de controle. O sistema é mostrado na Figura 17.

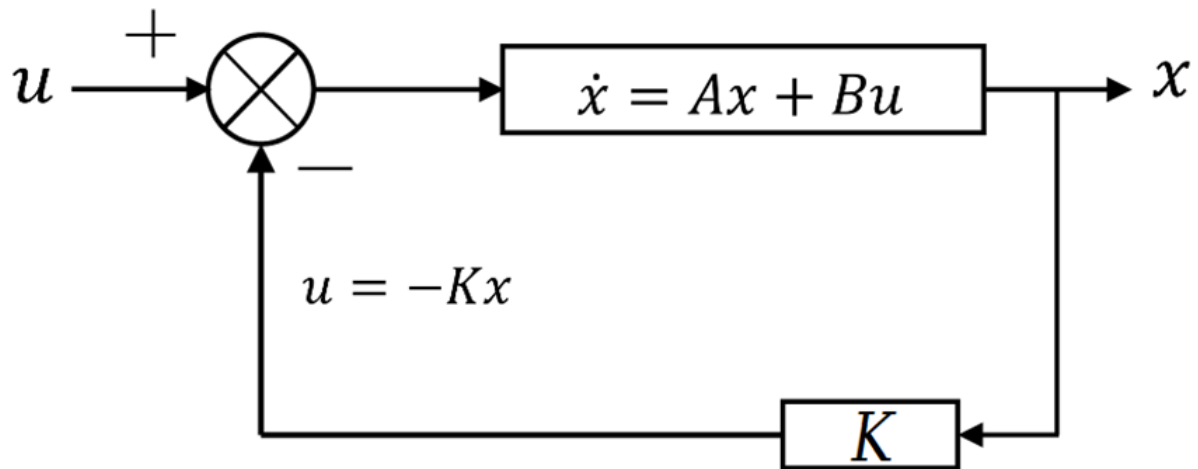


Figura 17 – Diagrama de blocos da realimentação de estados. Fonte: Baptista (2015).

Note que (4.6) permite que o desempenho transitório seja o desejado, pois as raízes da equação característica serão alocadas para este fim.

Para sistemas mais simples, de primeira ou de segunda ordem, existe uma matriz de ganhos K mais simples. No caso do quadrotor, existem 4 entradas e 12 saídas. Assim, tem-se a matriz de ganhos diferentes para cada entrada, tornando o sistema de controle mais complexo.

Sabendo que o sistema de controle é dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.7)$$

$$y = Cx + Du, \quad (4.8)$$

em que:

x é vetor de estado;

y é sinal de saída;

u é sinal de controle;

A , B , C e D são matrizes constantes.

Por meio da substituição de 4.6 em 4.8, tem-se:

$$\dot{x} = (A - BK)x. \quad (4.9)$$

A solução de 4.9 é dada por:

$$e^{(A-BK)t}x(0), \quad (4.10)$$

em que $x(0)$ são estados iniciais.

Em 4.10, os autovalores da matriz $A - BK$ definem a estabilidade e a característica da resposta temporal. Logo, se os polos forem alocados do lado esquerdo do plano s , $x(t)$ tenderá a zero com t tendendo ao infinito.

Para escolher os polos desejados, normalmente especifica-se de 2 a 5 vezes os valores dos polos dominantes (NISE, 2006). No caso do quadrotor, isto não se aplica, pois os polos dominantes são zeros. Dessa maneira, serão feitas simulações, utilizando-se o Matlab, para que seja analisada qual a melhor resposta de controle dentre as várias escolhas de polos.

Nas biografias estudadas neste trabalho, como a de Pfeifer (2013), utilizam-se alguns valores de parâmetros válidos para aplicação em quadrotores, entre eles: o tempo de acomodação, dado em segundos ($T_{Acom.}$) e a taxa percentual de sobressinal (%os). Para as escolhas dos polos, inicialmente, usamos os valores descritos na Tabela 3 para o cálculo dos polos.

Tabela 3 – Valores dos parâmetros usados.

Estado	$T_{Acom.}[s]$	%os
X	5	2
Y	5	2
Z	5	5
ϕ	6	1
θ	6	1
ψ	6	1

Fonte: (PFEIFER, 2013)

Utilizando-se as fórmulas descritas em Nise (2006), ilustradas em (4.11), (4.12) e (4.13),

$$s = -\zeta W_n \pm j W_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (4.11)$$

onde,

s são os polos complexos conjugados;

W_n é a frequência natural;

ζ é o fator de amortecimento.

$$\%os = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100, \quad (4.12)$$

$$T_{Acom.} = \frac{4}{\zeta W_n}, \quad (4.13)$$

Calcularam-se os polos desejados para cada valor dos parâmetros. É válido ressaltar que foram utilizados os 6 estados, pois como o controle é feito para estabilizar o quadrotor,

esses estados são importantes para isso. Os outros estados que estão relacionados com a velocidade e o momento angular não são dominantes para o sistema de estabilização, como mostrado nos valores dos polos.

Com os cálculos, especificou-se $\zeta W_n \geq 0.8$ para $T_{Acom.}$ de 5 segundos e para os outros estados uma taxa de sobressinal de 1%. Com base nisso e usando (4.12) foram obtidas as frequências naturais e, usando (4.11), encontram-se os polos descritos na Tabela 4. Pela Tabela 4, pode-se observar que o polo dominante é do estado ψ e do estado

Tabela 4 – Valores dos polos calculados.

Estado	Pólo
U	-1+0.5i
V	-1-0.5i
W	-1.1+0.5i
P	-1.1-0.5i
Q	-1.2+0.5i
R	-1.2-0.5i
X	-0.8+0.642i
Y	-0.8-0.642i
Z	-0.6901+0.8389i
ϕ	-0.826+0.4548i
θ	-0.826-0.4548i
ψ	-0.6901-0.8389i

Z, porque estão mais pertos do eixo imaginário, ou seja, esses polos é que oferecem a característica predominante ao sistema. Nas simulações serão mostrados que os polos mais à esquerda do eixo iw não predominam nas características do sistema, assim não importando para o controle. A exigência é que eles sejam complexos conjugados e do lado esquerdo do eixo iw para garantir a estabilidade.

Com os valores dos polos desejados, utilizou-se o Matlab para obter a matriz de ganhos K . O comando usado para obter K foi:

$$K = place(A, B, P), \quad (4.14)$$

em que:

A é a matriz de estados;

B é a matriz de entradas;

P é a matriz de polos desejados.

Assim, a matriz de ganhos K forçará os autovalores de $A - BK$ irem para as posições desejadas. As deduções matemáticas podem ser encontradas nas referências de

Ogata (2003) e DORF (2009). Outra forma de encontrar a matriz K é através da fórmula de Ackermann, no entanto, esse método só se aplica a sistemas de uma entrada e uma saída, que não é o caso do quadrotor.

Algumas considerações devem ser feitas a respeito da escolha dos polos. A primeira é que, os polos devem estar localizados do lado esquerdo do plano s , para que assim o sistema seja estável. A segunda consiste no fato de que, ao se alocar os polos muito distantes do eixo jw , a velocidade de resposta será mais rápida, porém aparecerão características não lineares no sistema, o que não é pretendido. Além disso, uma velocidade muito rápida requer sinais de controle com maior energia, o que resultará em equipamentos maiores, o que também não é viável neste trabalho.

4.3.1 Simulações

Para as simulações, utilizaram-se diferentes valores de polos para comparar as características do sistema em relação aos polos calculados. Isso foi feito para comprovar os diferentes desempenhos do sistema de acordo com as posições dos polos.

O grupo de polos escolhidos, como mostrado na Tabela 4, foi aquele que utilizava o menor esforço de controle para estabilizar o sistema de acordo com as simulações. Nas Figuras 18, 19, 20 e 21 estão os gráficos do esforço de controle para cada grupo de polos analisados. Observa-se que os polos escolhidos foram os que utilizaram menos esforço de controle para estabilizar o sistema, sendo assim os mais vantajosos nessa técnica de controle.

A razão para que esses polos tenham menos esforço, é a matriz de ganhos gerada, que possui valores menores, do que as matrizes de ganho geradas pelos outros polos.

Realizando uma análise dos estados, observa-se que existem dois estados críticos ϕ (rolamento) e θ (arfagem), que exigem uma atenção maior. Sua criticidade, deve-se ao fato de interferirem diretamente na atitude do quadrotor. Nas Figuras 22, 23, 24 e 25 são mostradas o controle dos estados para o sistema linear.

Os gráficos mostram um controle com respostas satisfatórias. É importante ressaltar que os cálculos dos polos foram aproximados para um sistema de segunda ordem, o que resultou nos valores dos polos da Tabela 4. Observa-se pela Figura 25, que os ângulos estão estabilizando por volta de 5 segundos, o que é uma boa resposta, de acordo com as literaturas utilizadas neste trabalho.

Observando os gráficos mostrados nas Figuras 23, 24, 25 e 26 percebe-se que a estabilização ocorre por volta de 4 a 7 segundos, dependendo do estado. Isso se deve a escolha dos polos, descrito anteriormente nos cálculos, pois foram considerados o tempo de sobressinal e o tempo de acomodação para os estados em uma aproximação com o sistema de segunda ordem. No entanto, o sistema do quadrotor é de ordem superior, por isso ele não se estabiliza no ponto calculado, mas apenas na aproximação do ponto calculado, como visto nos gráficos.

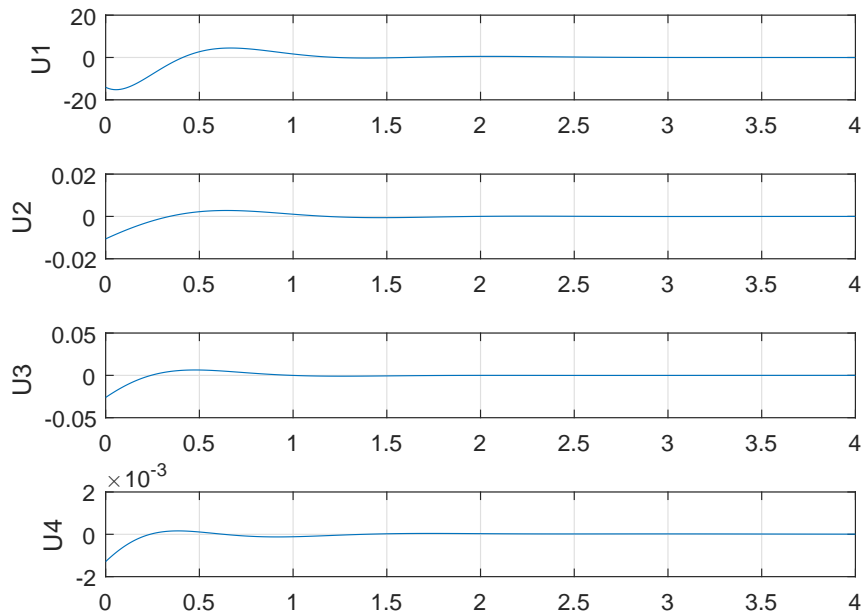


Figura 18 – Esforço de controle do grupo de polos 1.

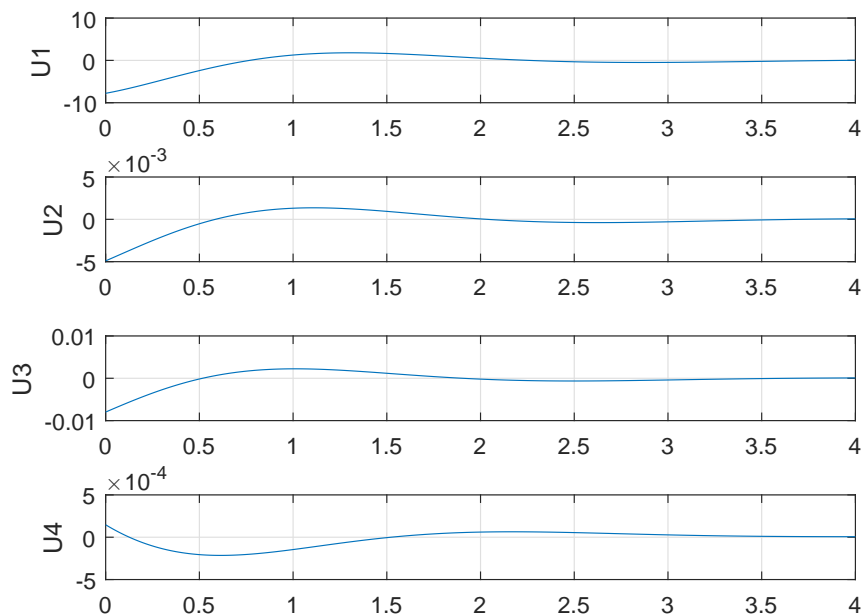


Figura 19 – Esforço de controle do grupo de polos 2.

As Figuras 26, 27, 28 e 29 ilustram as simulações de controle do sistema não linear com cada estado separado. Analisando a Figura 29, observa-se que o estado de rolamento (ϕ) entra em equilíbrio aproximadamente em 3 segundos, o que mostra que o controle é

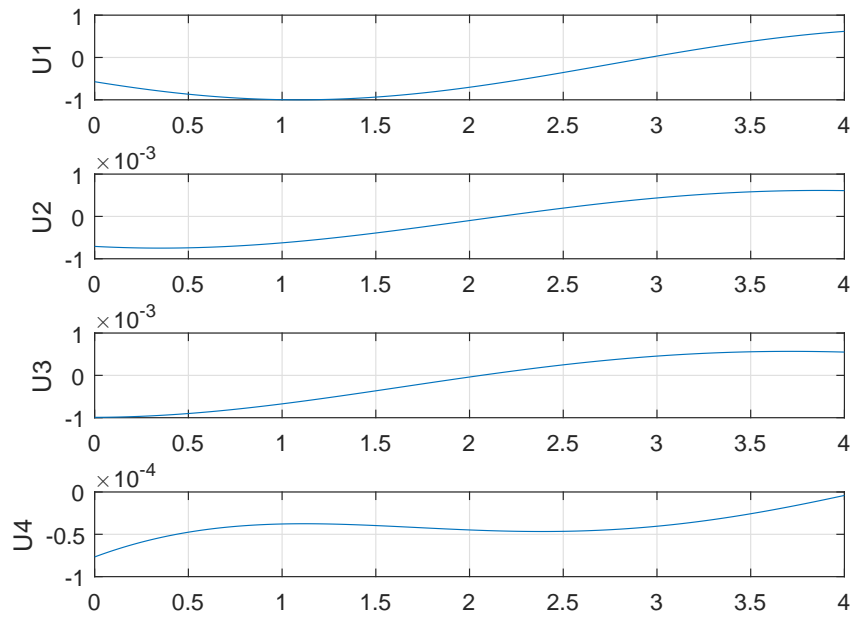


Figura 20 – Esforço de controle do grupo de polos 3.

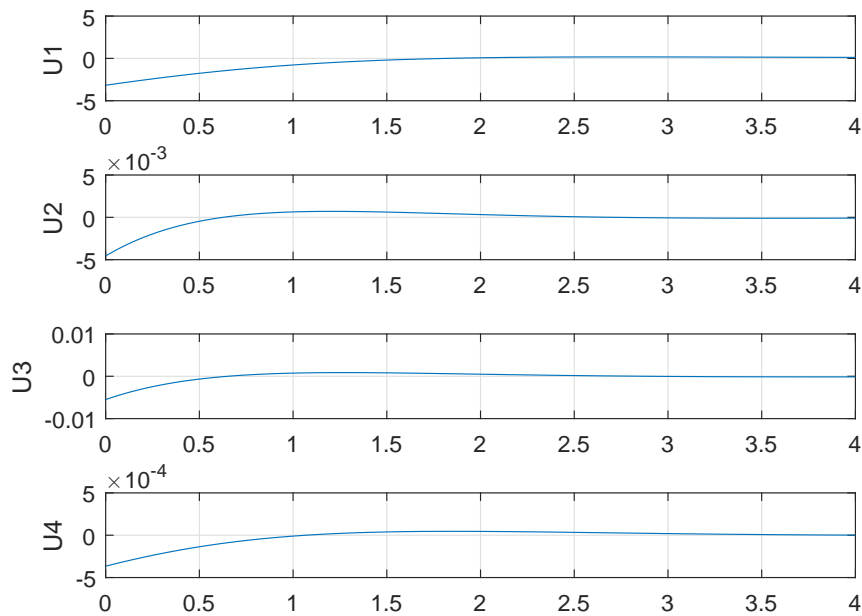


Figura 21 – Esforço de controle do grupo de polos escolhidos.

bem efetivo para este estado. O outro estado, que é o de arfagem (θ), entra em equilíbrio aproximadamente em 7,5 segundos.

Em relação aos outros estados, todos obtiveram bons resultados, entrando em

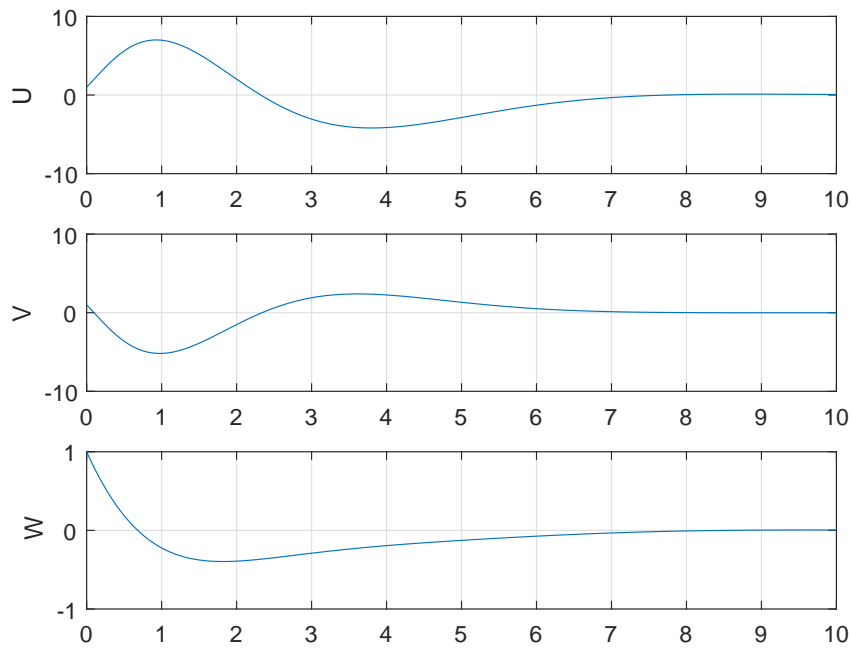


Figura 22 – Controle do sistema linear para estados U, V, W.

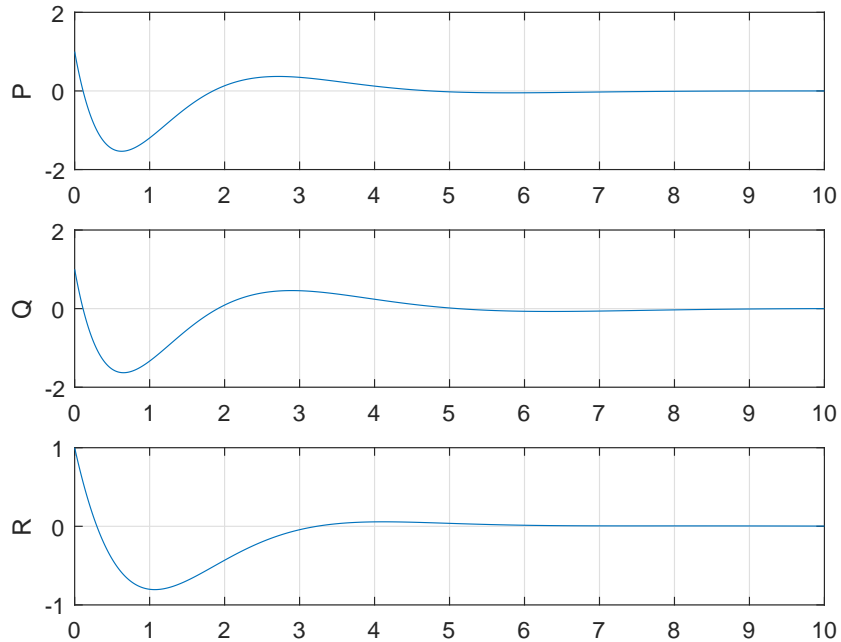
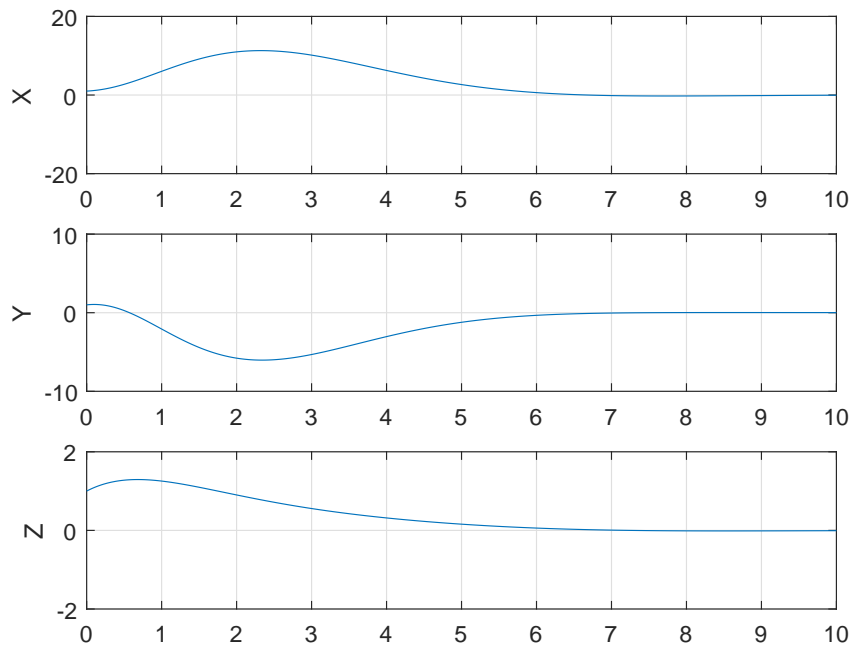
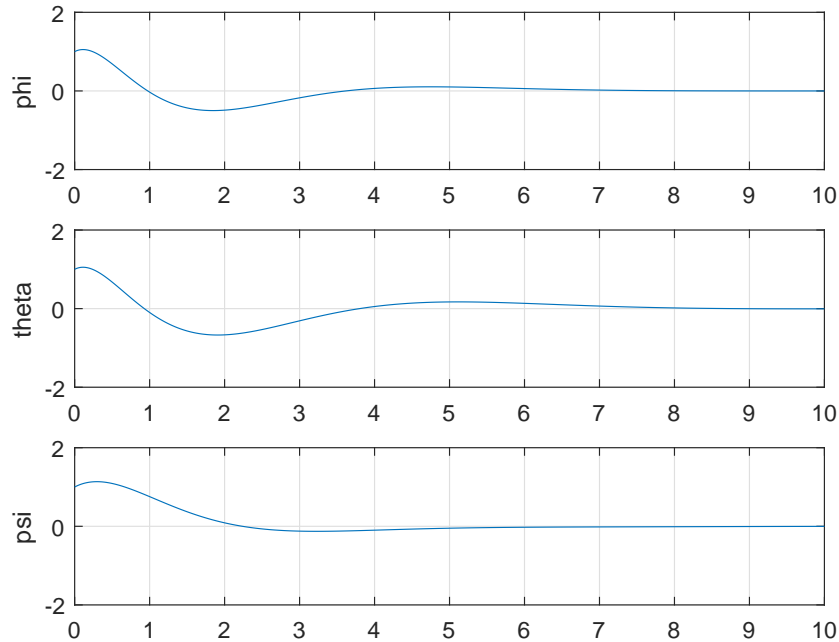


Figura 23 – Controle do sistema linear para estados P, Q, R.

equilíbrio até os 8 segundos. A Figura 30 corresponde à simulação realizada com todos os estados. Por meio dela, é possível concluir que o sistema como um todo entra em equilíbrio a partir de 10 segundos. Note ainda que as maiores amplitudes são dos estados de posição

Figura 24 – Controle do sistema linear para estados X , Y , Z .Figura 25 – Controle do sistema linear para estados ϕ , θ , ψ .

(X), representado pela cor vermelha, e da velocidade (U), representada pela cor azul.

Além disso, por meio da análise dos gráficos pôde-se descrever os limites de operação do quadrotor. Essa escolha foi feita, a partir da realização de simulações para diversos

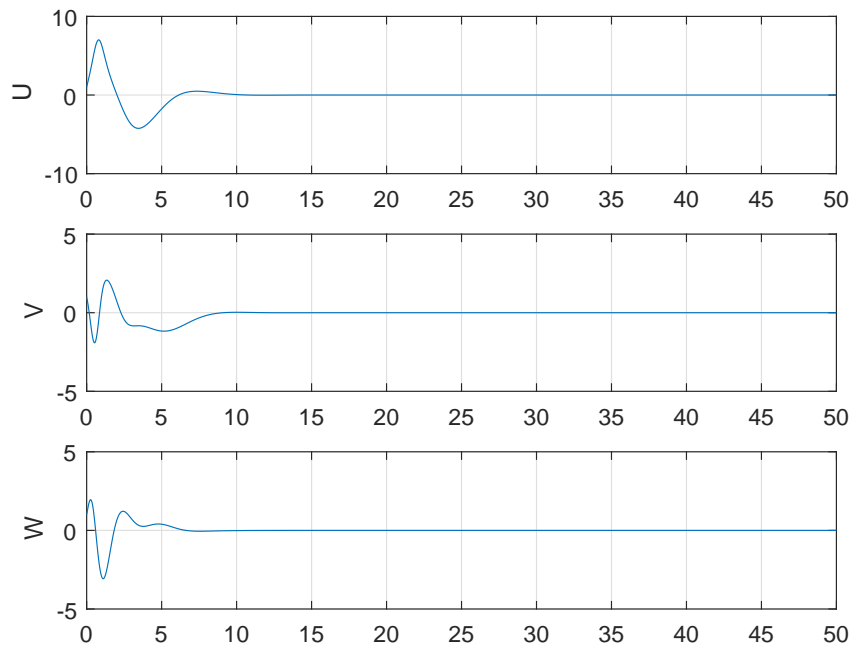


Figura 26 – Controle do sistema não linear para os estados U, V, W.

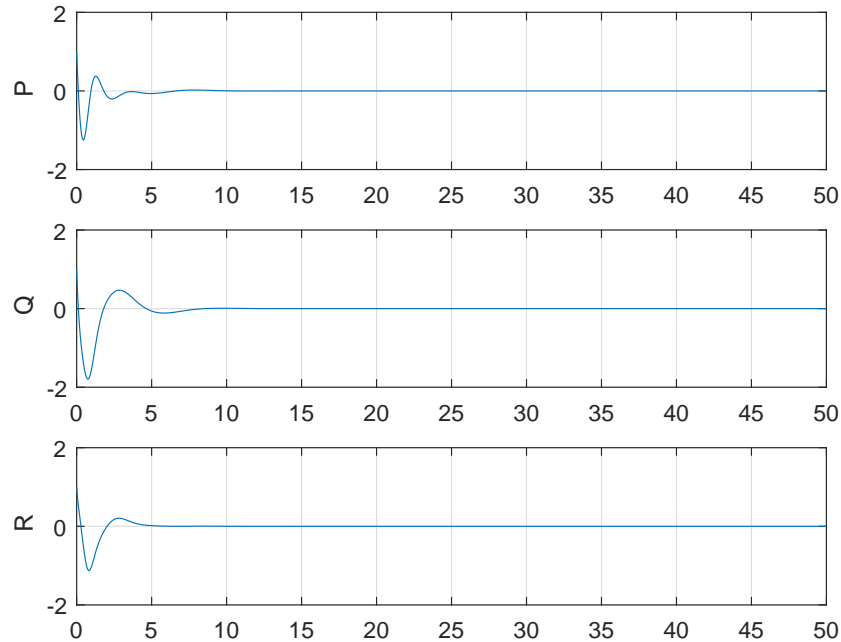
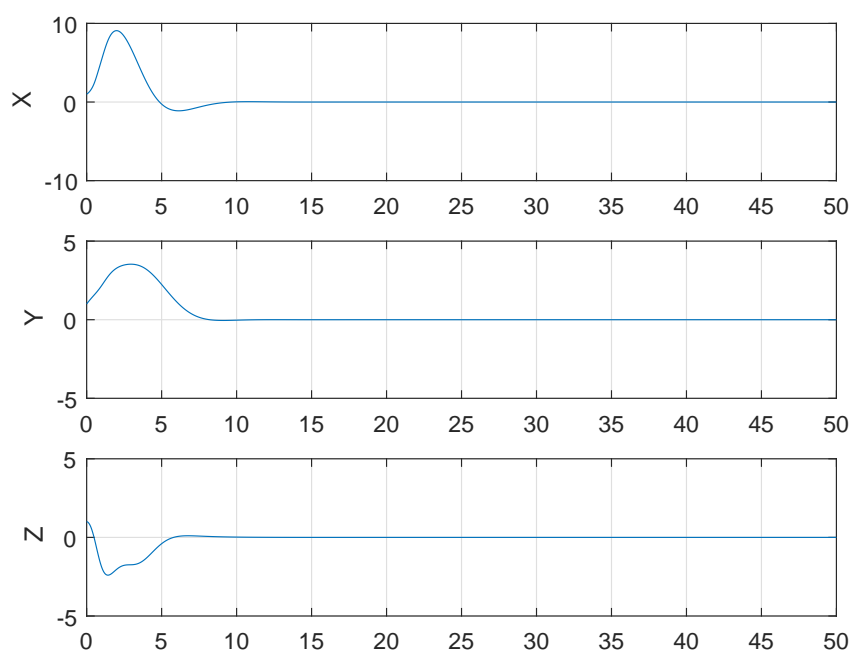
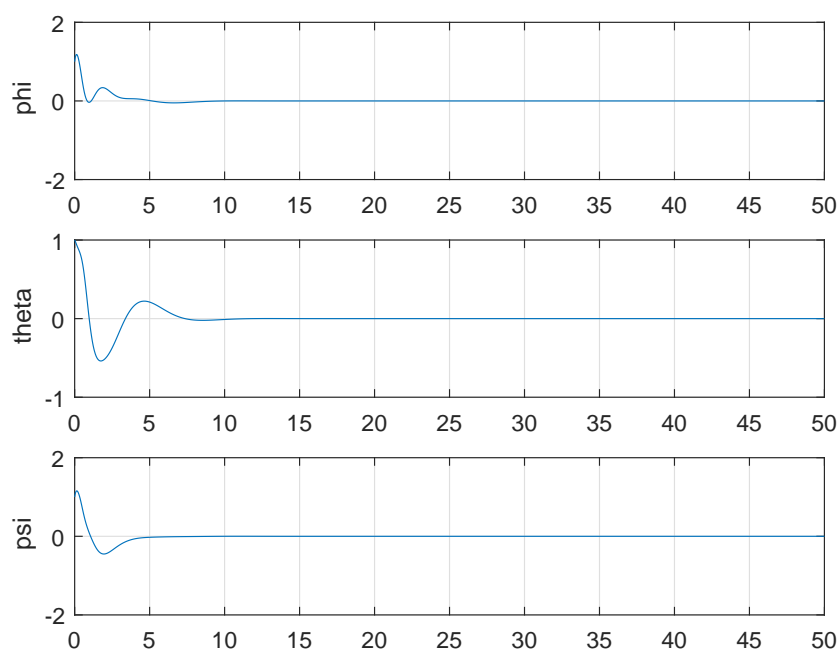


Figura 27 – Controle do sistema não linear para os estados P, Q, R.

valores de condições iniciais. Com esses testes, verificou-se que o controle do quadrotor era efetivo para as condições iniciais $1,57 \geq x_0 \geq -1,3$. Nessa faixa de valores, o quadrotor é controlado, obtendo um bom funcionamento. Fora dessa faixa de valores, ele

Figura 28 – Controle do sistema não linear para os estados X , Y , Z .Figura 29 – Controle do sistema não linear para os estados ϕ , θ , ψ .

não é controlável ou demora mais tempo para atingir o equilíbrio, o que não é desejado nesta aplicação. Esses valores podem ser de ângulos (radianos) ou velocidade angular (radianos/s).

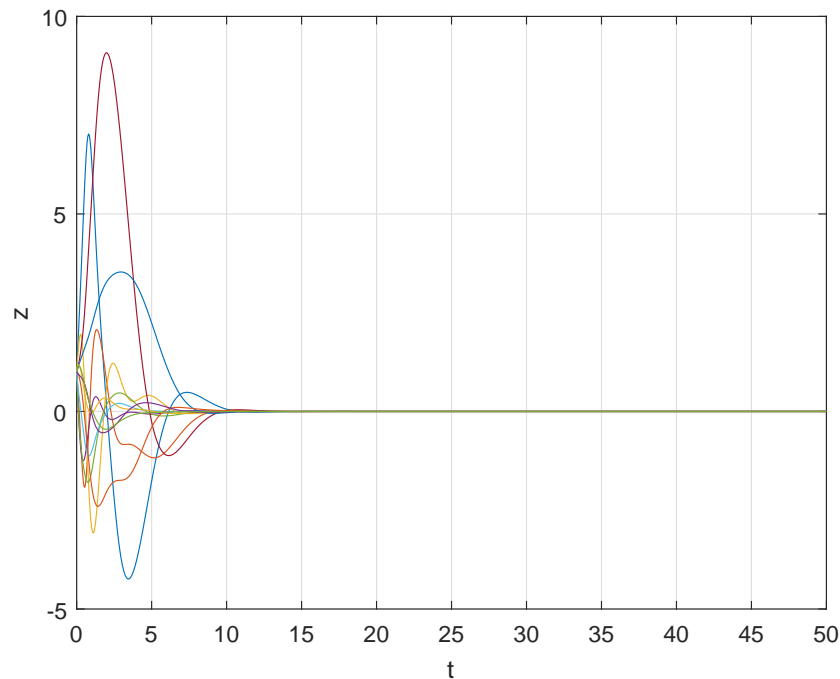


Figura 30 – Controle do sistema não linear com todos os estados.

4.4 Projeto do Regulador Linear Quadrático –LQR–

A estratégia de controle via Regulador Linear Quadrático obtém uma solução ótima, para uma função que relaciona as entradas e as saídas do sistema, por meio do sinal de erro dos estados. A função é conhecida como índice de desempenho ou função custo (HERNANDEZ; RINCON; CASTELLO, 2014).

O –LQR– é um controlador ótimo que ajusta o sistema para obter um compromisso entre o esforço de controle, a amplitude e a velocidade de resposta (BAPTISTA, 2015). Com todas essas características que tornam a resposta do sistema melhor, o regulador linear quadrático é mais vantajoso em relação ao projeto de alocação de polos, pois fornece um modo de cálculo da matriz de ganho de controle por realimentação de estado, sem depender de escolhas de polos resultando em uma matriz de ganho ótima (OGATA, 2003).

Primeiramente, deve-se resolver a função de otimização mostrada abaixo:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (4.15)$$

em que Q e R são matrizes definidas positivas e reais simétricas.

As matrizes Q e R são também chamadas de matrizes de ponderação, pois têm a função de acelerar ou desacelerar a ação de controle sobre um determinado estado. Para que isto aconteça, escolhem-se as matrizes diagonais com valores maiores que zero, assim cada elemento da diagonal atuará somente sobre uma entrada ou estado (HERNANDEZ; RINCON; CASTELLO, 2014).

Neste trabalho os valores das matrizes Q e R são definidos pelo método de Bryson. Esse método representa cada elemento da diagonal como sendo:

$$q_{ii} = \frac{1}{x_{i\text{máx}}^2}, \quad r_{ii} = \frac{1}{u_{i\text{máx}}^2}, \quad (4.16)$$

em que:

q_{ii} é o elemento da diagonal principal da matriz Q ;

r_{ii} é o elemento da diagonal principal da matriz R ;

$x_{i\text{máx}}$ é o valor máximo desejado do estado x_i ;

$u_{i\text{máx}}$ é o valor máximo desejado do controle u_i .

A teoria de controle por $-LQR-$, diz que é preciso resolver a equação matricial reduzida de Riccati, dada por:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (4.17)$$

em que P é uma matriz definida positiva. Encontrando a matriz P , de 4.17 e substituindo em 4.18, obtém-se o valor da matriz de ganho ótima.

$$K_{LQR} = R^{-1}B^T P. \quad (4.18)$$

O processo descrito acima resulta na matriz K_{LQR} ótima, que pode ser obtida pelo software Matlab por meio do comando

$$[K_{lqr}] = lqr(A, B, Q, R). \quad (4.19)$$

4.4.1 Simulações

A Figura 31 demonstra o esforço de controle em relação as entradas. Por meio da análise desse gráfico pode-se concluir que o esforço de controle é menor do que o esforço de controle por alocação de polos, o que já era esperado, visto, que o método $-LQR-$ é mais eficiente.

Nas Figuras 32, 33, 34 e 35 são mostradas as respostas lineares do controlador para cada estado. Na Figura 32, o estado U atinge regime permanente em 4,2 segundos, o estado V em 2 segundos e o estado W em 10 segundos. Na Figura 33, o estado P é controlado em 1 segundo, o estado Q em 1,7 segundos e o estado R em 4 segundos, aproximadamente. Na Figura 34, o estado X é controlado em 5 segundos, o estado Y em 4 segundos e o estado Z em 10 segundos. Na Figura 35, o estado ϕ é controlado em 2 segundos, o estado θ em 3 segundos e o estado ψ em 4 segundos.

Todos os resultados são melhores quando comparados com o controle por alocação de polos, tanto em relação ao tempo para atingir o regime permanente quanto na menor

quantidade de oscilações. O que demonstra melhor capacidade de controle usando o método -LQR-. O estados críticos para o quadrotor, que são os estados de rolamento (ϕ) e o de arfagem (θ), obtiveram uma melhoria significativa.

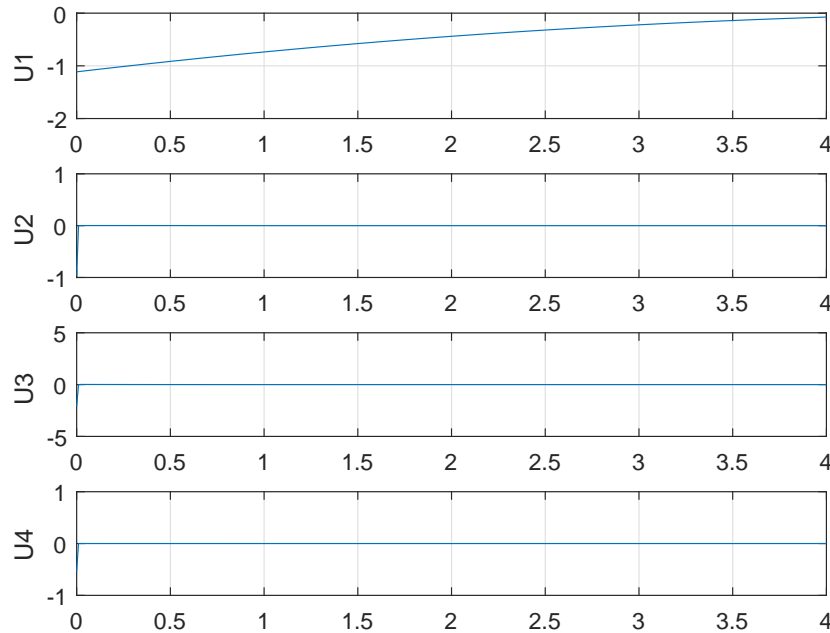


Figura 31 – Esforço de controle do controlador -LQR-.

Nas Figuras 36, 37, 38 e 39 são mostradas a resposta não linear para os estados separados. No geral, os estados obtiveram bons resultados. Especialmente os estados críticos que obtiveram um tempo de controle de aproximadamente 1,5 segundos para o estado ϕ e 2 segundos para o estado θ , o que representa uma melhoria em relação ao controle por alocação de polos.

Na Figura 40 é mostrado o controle não linear com todos os estados no mesmo gráfico, no qual todos os estados foram controlados por volta dos 12 segundos.

Durante as simulações foram encontradas dificuldades, devido as matrizes Q e R, para se chegar aos gráficos que melhor satisfaziam o controle. A matriz Q representa o esforço do estado e a matriz R representa o esforço da lei de controle, o que é visto matematicamente em 4.15. De acordo com 4.18, quanto maior o valor da matriz R menor o valor do ganho K_{lqr} , e assim menor o esforço da lei de controle.

Inicialmente nas simulações foram usados os valores presentes na bibliografia (PFEIFER, 2013). No entanto, foram obtidos resultados indesejáveis, que consistiram em uma matriz de ganho alta e um esforço que penalizava o controlador, o que resultou em simulações do processamento lento. Conforme a Tabela 5 de simulações com vários valores de entrada e da matriz R aumentada em N vezes.

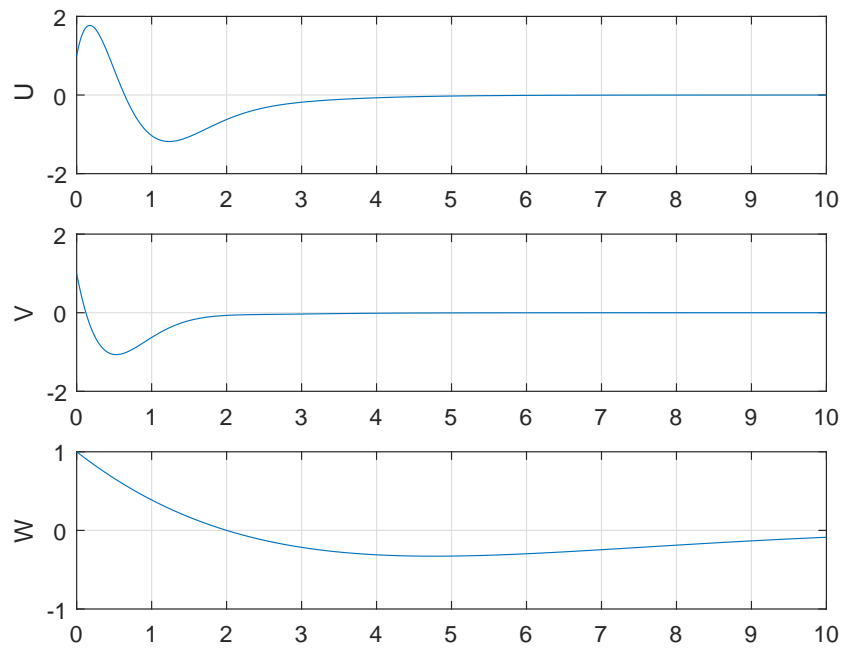


Figura 32 – Controle do sistema linear para os estados U, V, W.

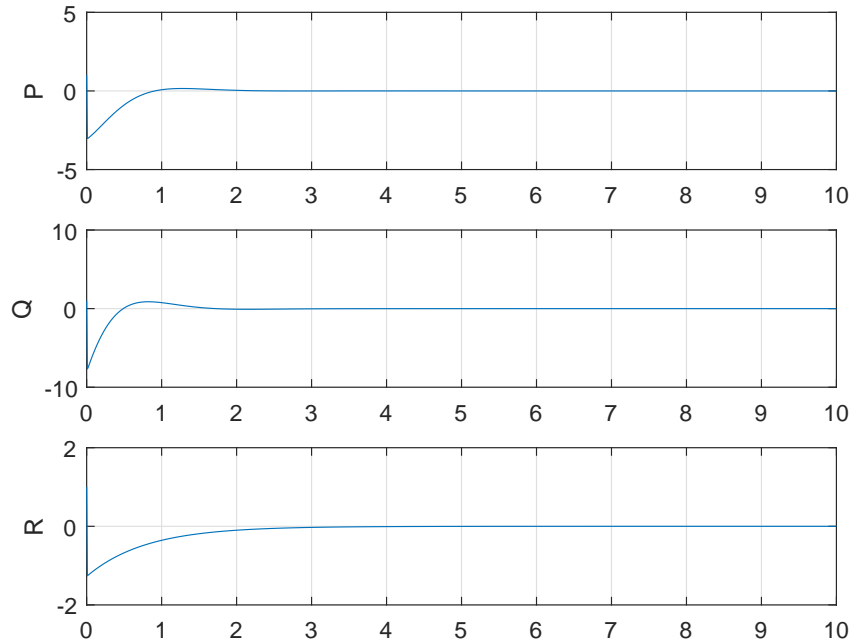


Figura 33 – Controle do sistema linear para os estados P, Q, R.

A Tabela 5 possui o tempo de simulação para diferentes valores de U e R, e mostra o quanto a matriz R é aumentada e quanto a entrada U pode ser modificada para que seja obtido um esforço no controlador desejável. Nas simulações que serão mostradas a

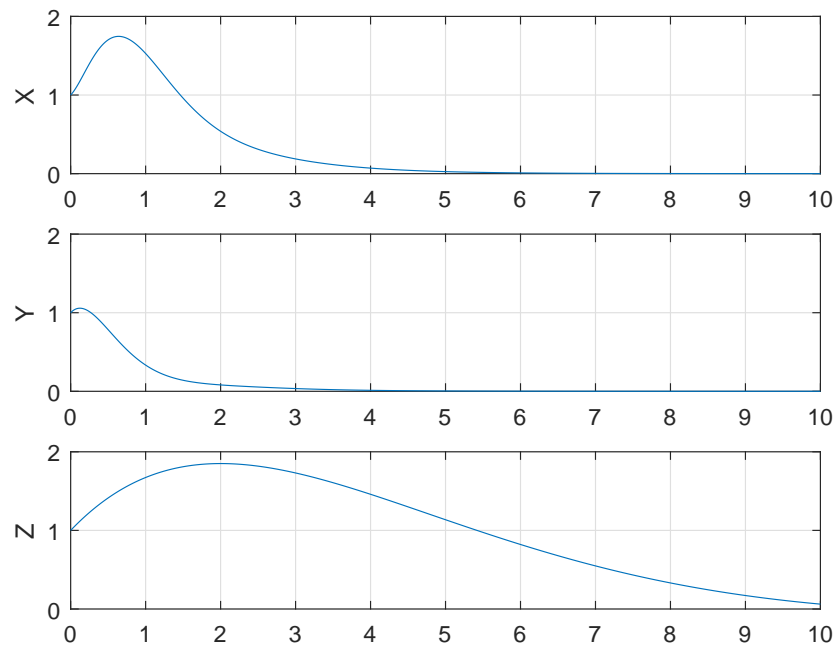


Figura 34 – Controle do sistema linear para os estados X, Y, Z.

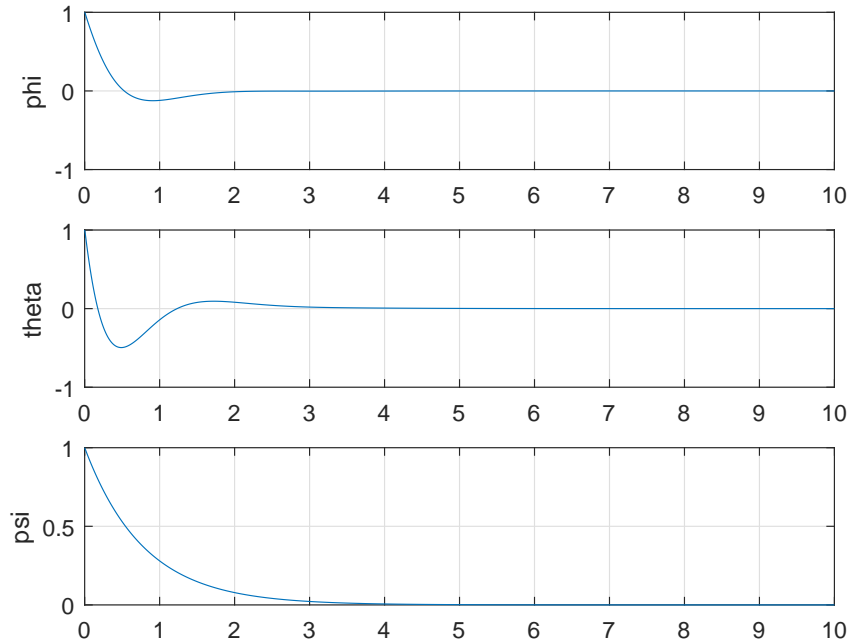


Figura 35 – Controle do sistema linear para os estados ϕ, θ, ψ .

seguir, foram utilizados $U=1.5$, e R aumentada em 10 vezes ($10R$), resultando em uma matriz de ganho menor, de acordo com (4.18) e um tempo de simulação de 6 segundos. Essas modificações foram feitas para que se tenha uma ação de controle maior na função

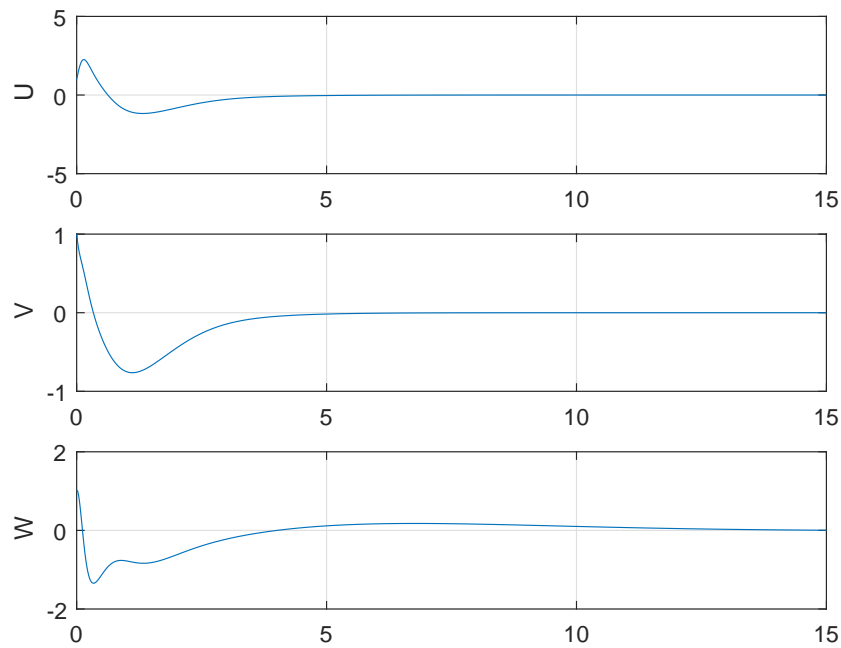


Figura 36 – Controle do sistema não linear para os estados U, V, W.

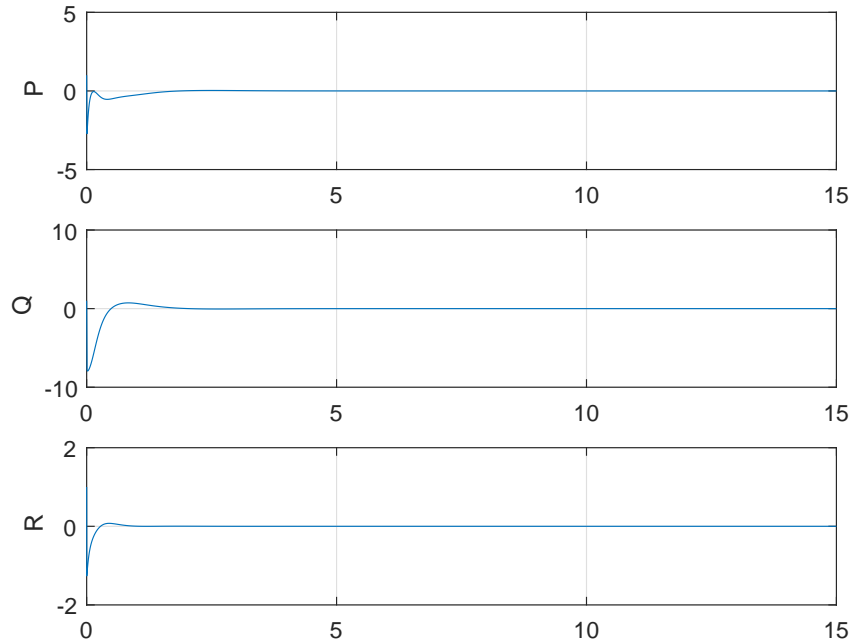


Figura 37 – Controle do sistema não linear para os estados P, Q, R.

de custo, garantindo um esforço de controle menor.

Fisicamente, um controlador com grande esforço no controle requer muita energia e, conseqüentemente, equipamentos de construção mais caros, o que não é desejável. Outro

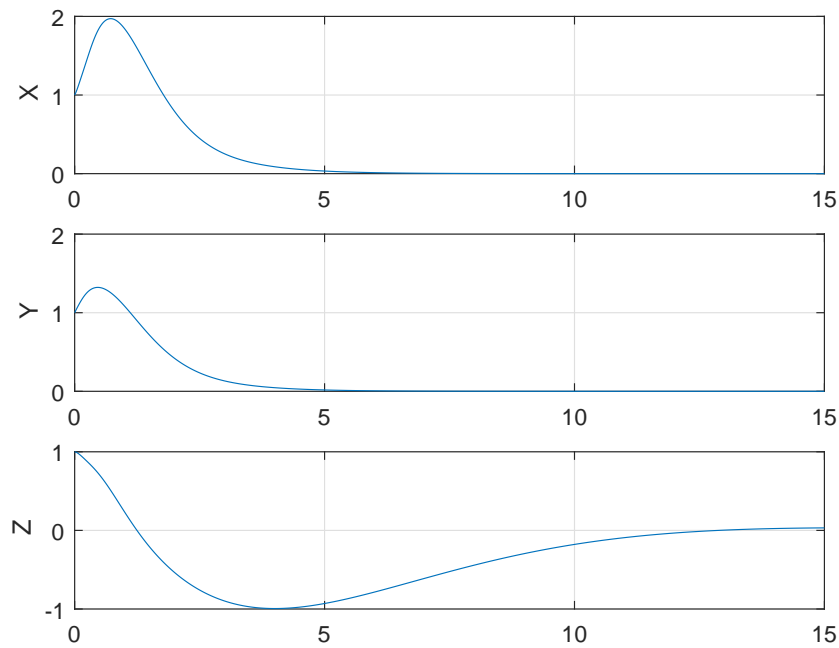


Figura 38 – Controle do sistema não linear para os estados X , Y , Z . Fonte: Elaborado pelo autor.

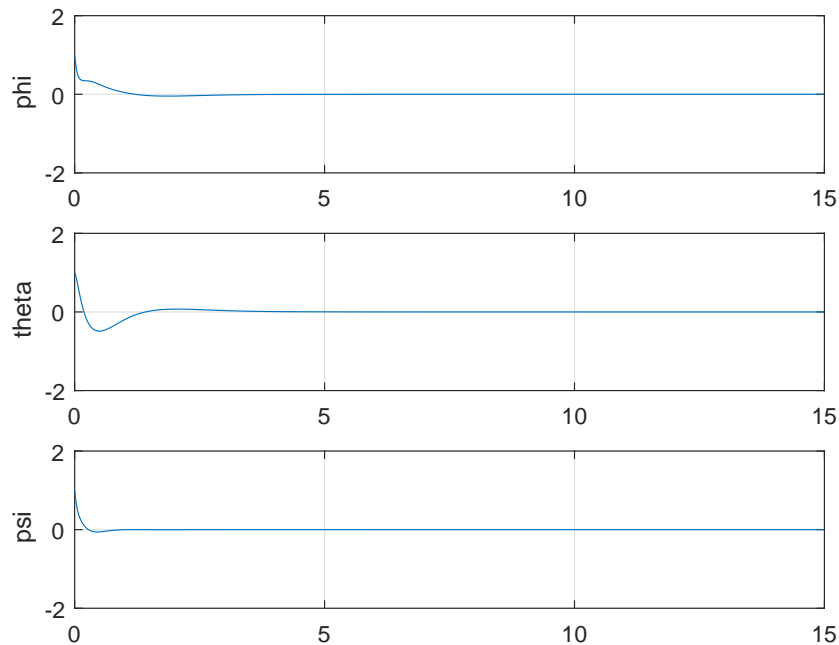


Figura 39 – Controle do sistema não linear para os estados ϕ , θ , ψ .

ponto a ser observado no projeto está relacionado com os motores, visto que, as entradas são os momentos das hélices. É importante observar que o valor de U é de acordo com o

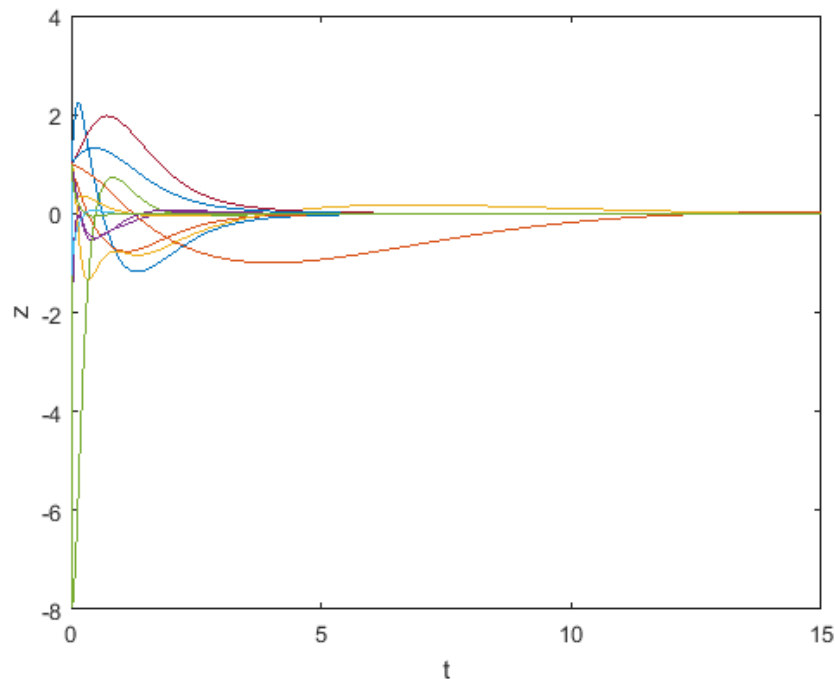


Figura 40 – Controle do sistema não linear com todos os estados.

Tabela 5 – Análise do tempo de simulação do controlador -LQR-.

Entrada U	Matriz R multiplicada	Tempo de simulação
149,30	1R	10 min:26 seg
149,30	10R	3 min:19 seg
149,30	5R	4 min:41 seg
14,930	10R	21 segundos
1,5	10R	6 segundos
1,5	1R	17 segundos
15	5R	38 segundos
15	10R	21 segundos
15	100R	16 segundos
15	20R	15 segundos
50	10R	1:00

dimensionamento do motor e com os valores encontrados no mercado, ou seja, o projetista deve-se atentar para encontrar motores que respeitem os valores mostrados na Tabela 5. Como o projeto físico não é o foco do trabalho, utilizou-se o valor que obteve a melhor resposta nas simulações, mas não quer dizer que os valores da simulação são valores práticos, ou seja, que correspondem a motores comercializados no mercado.

Assim como visto no controle por alocação de polos, existem valores de operação para o controlador. Para esse controlador -LQR-, os limites de operação são $1,57 \geq x_0 \geq -1,57$, fora dessa faixa o controle não é efetivo, como mostrado na Figura 41.

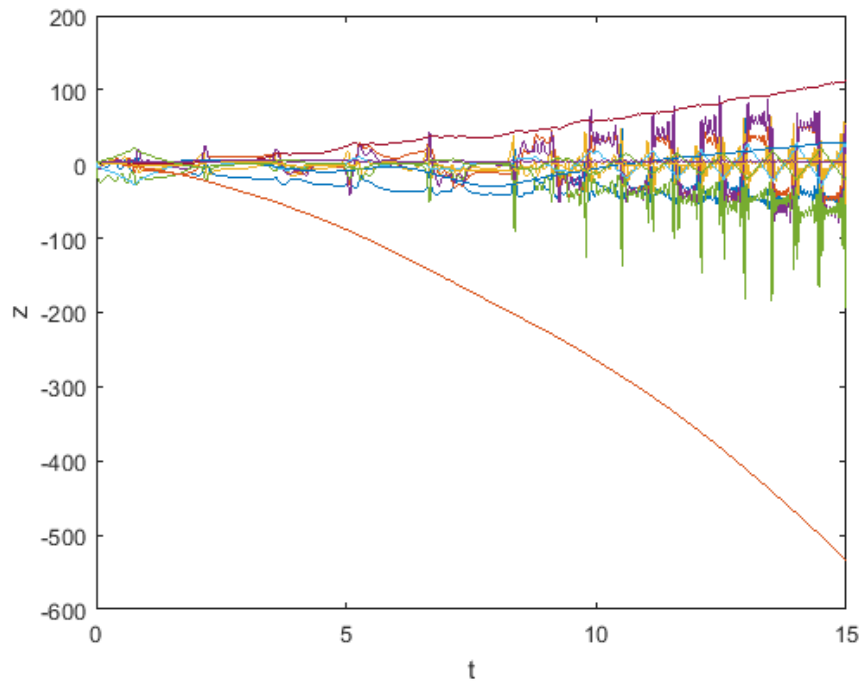


Figura 41 – Simulação de controle não efetivo -LQR-.

4.5 Projeto de controle para seguimento de referência

Existem dois tipos de projetos de controle. Controle por regulação e controle por seguimento de referência (servo). O controle por regulação é aquele no qual a entrada de referência (r) é igual a zero, como mostrado na Figura 42, e o controle por seguimento de referência é aquele no qual a saída deve ser controlada para seguir uma entrada r , como mostrado na Figura 43.

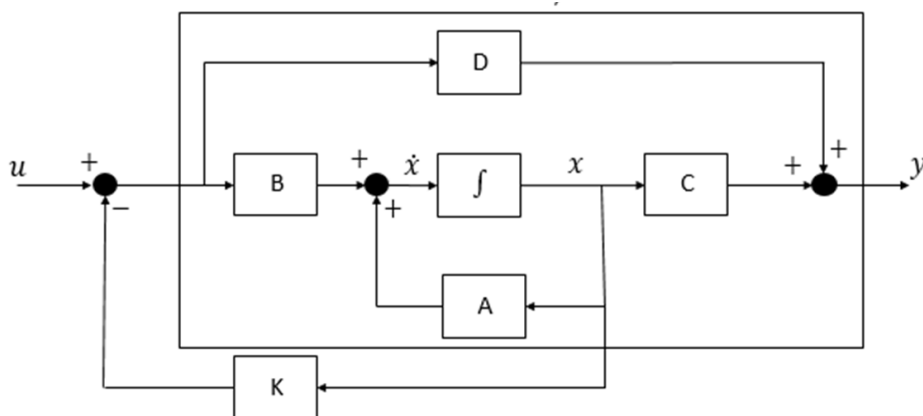


Figura 42 – Controle por regulação. Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Figura 43, observa-se que $e(t) = r(t) - y(t)$, onde $e(t)$ representa o erro entre a entrada de referência e a saída. O projeto desse tipo de controlador requer que a saída

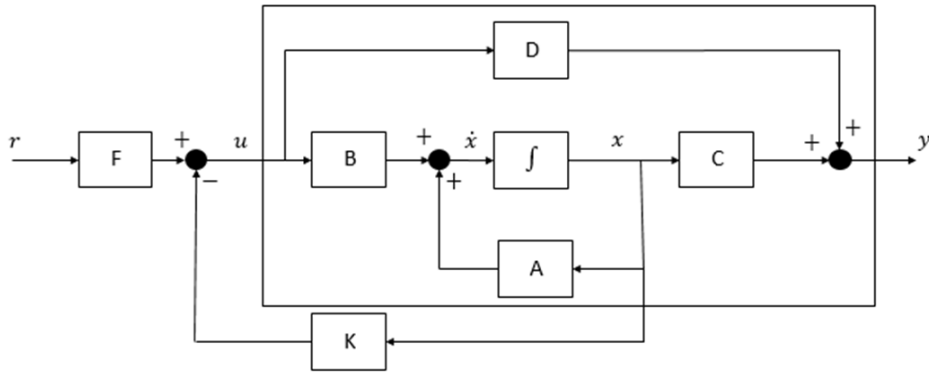


Figura 43 – Controle servo. Fonte: Elaborado pelo autor.

tenha erro nulo em regime permanente. Para isso acrescenta-se a integral do erro na lei de controle, como mostrado em 4.20.

$$u = -Kx - K_i \int_0^t e(\tau) d(\tau), \quad (4.20)$$

em que K_i é a matriz de ganhos do integrador.

A inclusão da integral faz com que o sistema seja aumentado, ou seja, a integral tornará um estado do sistema. Com isso, o sistema em espaço de estados será da forma mostrada em 4.21

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r, \quad (4.21)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + Du, \quad (4.22)$$

em que x_i é o novo estado introduzido pela integral. Note pelas equações de estado que as matrizes A, B e D são as mesmas do sistema original. No entanto, ocorreram dificuldades com a simulação, em relação a matriz C, pois existem estados que não são controláveis e assim não é possível obter a matriz de ganhos K . Depois de alguns testes, foram obtidos os estados que serão controlados, que são os estados X, Y, Z e o estado ψ . A alocação dos polos do integrador foi tomada com base no fato de que o integrador deve ter uma resposta mais rápida que o sistema, ou seja, os polos do integrador devem estar mais a esquerda do último polo do sistema. Esse estudo pode ser encontrado em Brogan (1982).

4.5.1 Simulações

As simulações para o projeto de controle por seguimento de referência foram feitas utilizando o sistema aumentado, mostrado em 4.21 e 4.22. Os resultados são mostrados nas Figuras 44, 45, 46, 47 e 48 que apresentam os resultados das simulações para referências descritas na Tabela 6. A tabela também mostra os estados, a amplitude do sinal de referência e o tempo no qual o sinal foi aplicado.

Tabela 6 – Referências dos estados controlados por seguimento de referência.

Estado	Referência	Tempo[s]
X	10	30
Y	20	40
Z	-10	50
ψ	$\frac{\pi}{8}$	55

As Figuras 44 e 45 mostram os resultados dos estados de velocidade linear U, V e W, e velocidade angular P, Q e R. Pode-se observar que nos primeiros segundos esses estados oscilam devido à condição inicial. Em seguida, eles estabilizam rapidamente até quando o sinal de referência entra no sistema, perturbando as velocidades por alguns instantes e logo estabilizando novamente. Percebe-se que as velocidades lineares são mais sensíveis do que as velocidades angulares, o que é demonstrado pelas amplitudes das velocidades lineares em comparação com as amplitudes das velocidades angulares.

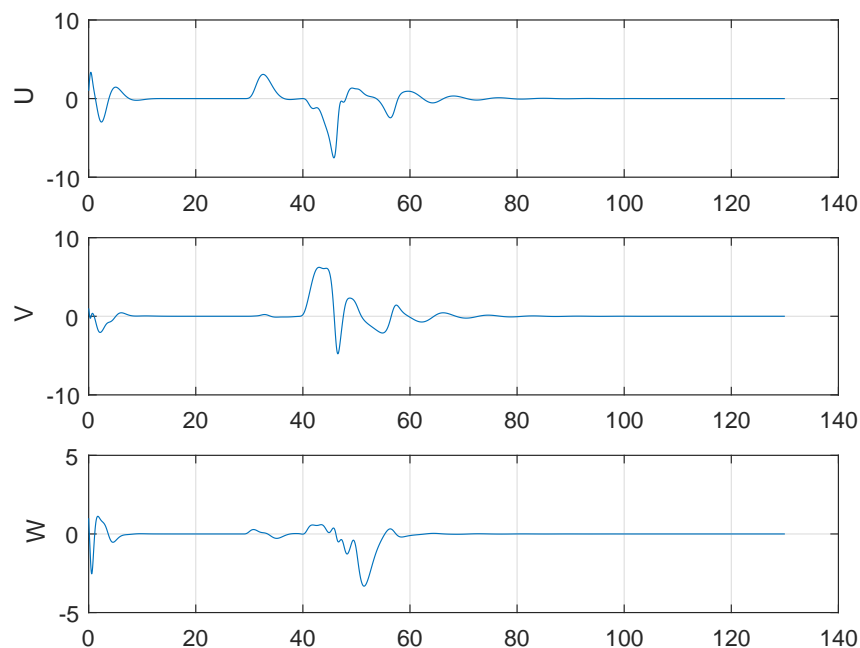


Figura 44 – Simulação de controle para os estados U, V e W.

A Figura 46 mostra o resultado para os estados X, Y e Z. Estes estados são controlados de acordo com o valor da referência, presentes na Tabela 6. Observa-se que inicialmente os estados são perturbados pela condição inicial, mas logo é estabilizado. Assim que o sinal de referência é injetado no sistema os estados seguem para o valor desejado. Verifica-se que ocorre uma perturbação até o estado ser estabilizado, sendo que esta dura poucos segundos, não afetando o controle.

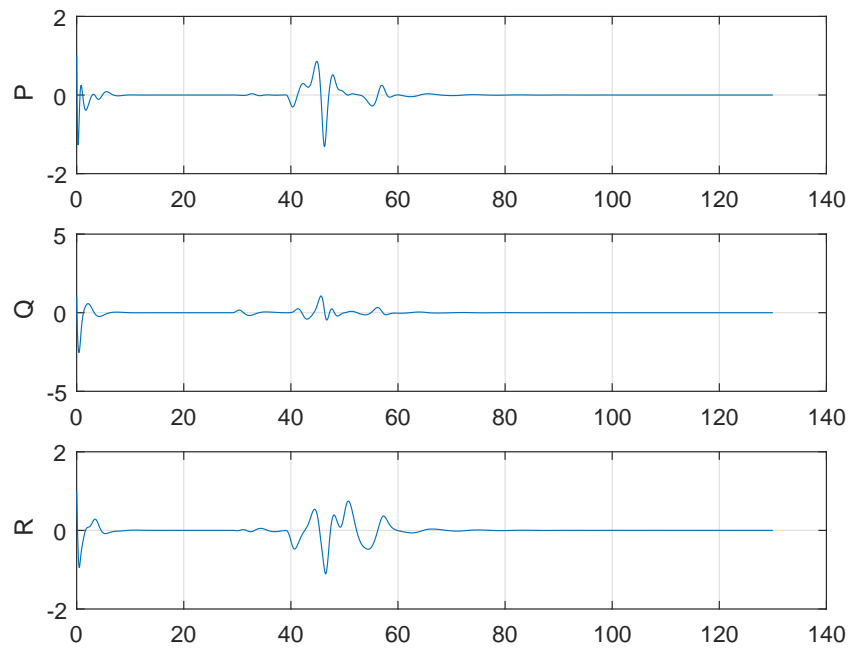


Figura 45 – Simulação de controle para os estados P, Q e R.

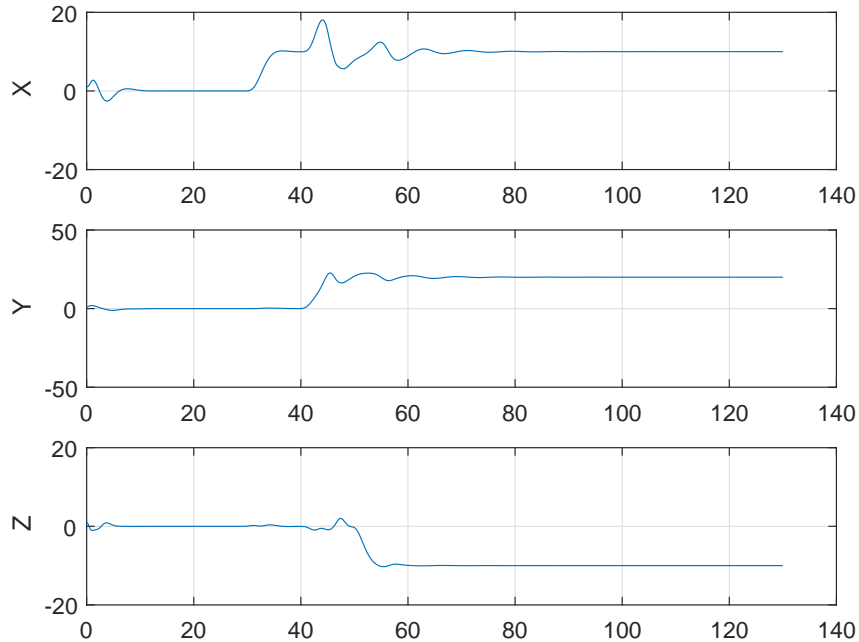


Figura 46 – Simulação de controle para os estados X, Y e Z.

Na Figura 47 ilustra a simulação para os estados ϕ , θ e ψ . De maneira semelhante aos casos apresentados anteriormente, existe inicialmente uma oscilação devido à condição inicial, porém esta se estabiliza rapidamente com a entrada do sinal de referência no

sistema. Neste momento, ocorre outra oscilação e rapidamente o estado é controlado. Como o ângulo ψ é o único ângulo a ser controlado por seguimento de referência, assim que o sinal de referência é injetado no sistema, o ângulo deve seguir para o valor desejado como visto na simulação.

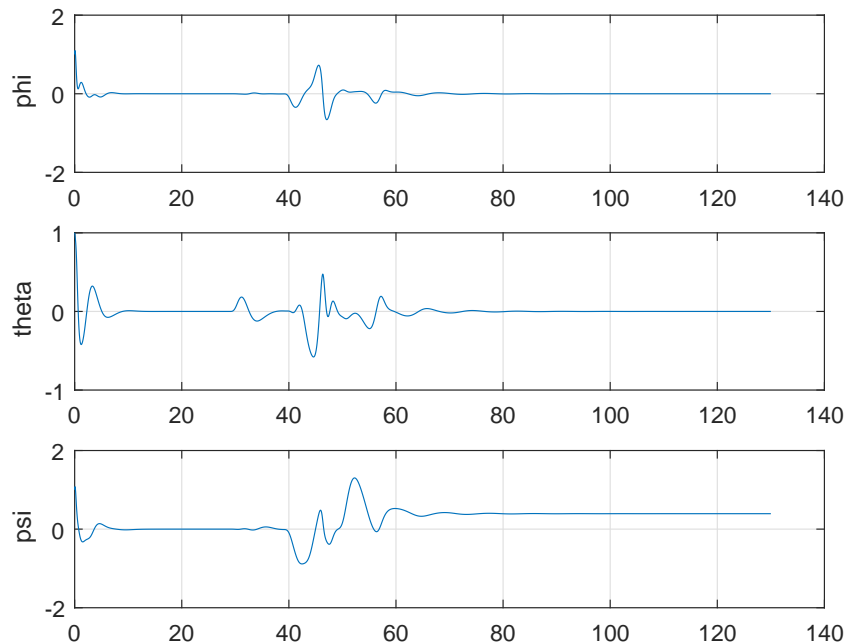


Figura 47 – Simulação de controle para os estados ϕ , θ e ψ .

A Figura 48 mostra a simulação com todos os estados plotados no mesmo gráfico.

Os sistemas de controle possuem faixas de operação, as quais os sinais de entrada devem respeitar para que os sinais a serem controlados sejam estabilizados. No quadrotor essa faixa de operação já foi obtida nos projetos de controle anteriores. No projeto de controle por referência obteve-se uma nova faixa de valores para o estado ψ . A faixa de valores de ângulo ψ no qual o sistema é controlado é de $0,628 \geq \psi \geq 0$, que é equivalente em graus a $36 \geq \psi \geq 0$. Na Tabela 7, são apresentados os estados controlados por seguimento de referência, o valor da referência para cada estado e o tempo em que as referências foram injetadas no sistema. Fora dessa faixa de valores o sistema não é controlado, conforme mostrado nas Figuras 49, 50, 51, 52 e 53.

A Tabela 7 mostra os parâmetros que são iguais ao anterior, exceto o do ângulo ψ que nesse teste é de $\frac{\pi}{5}$ radianos ou 36 graus. Esse é o caso em que o quadrotor não é estabilizado.

Nas Figuras 49, 50, 51 e 52 estão representados os estados do quadrotor. As Figuras 49 e 50 representam as velocidades, observando-se essas figuras pode-se concluir que o sistema não foi estabilizado. A Figura 51 mostra os estados que deveriam ter sido controlados por seguimento de referência mas também não conseguiram estabilizar. A

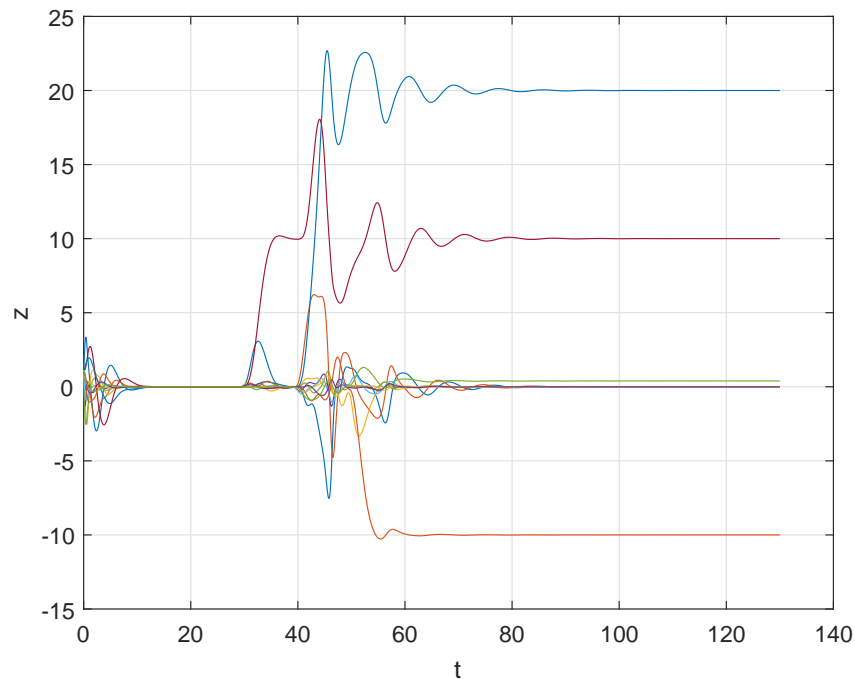


Figura 48 – Simulação com todos os estados. Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7 – Referências e tempo de acionamento dos estados controlados por seguimento de referência.

Estado	Referência	Tempo[s]
X	10	30
Y	20	40
Z	-10	50
ψ	$\frac{\pi}{5}$	55

Figura 52 que foram os parâmetros menos sensíveis e que também não conseguiram se estabilizar. Por fim, a Figura 53 apresenta todos os estados em um mesmo gráfico e assim é possível observar que todos os estados ficaram oscilando em torno da condição de equilíbrio.

Um ponto a ser observado nesse projeto de controle é que em comparação com os projetos anteriores a faixa de operação do quadrotor em relação aos ângulos foi menor. Esse fato se deve a adição do integrador, cuja função é reduzir o erro em regime permanente a zero. Esse integrador adiciona um polo no eixo imaginário fazendo com que o sistema deixe de ser estável para alguns valores que nos quais anteriormente era estável. Em geral, o lugar das raízes que antes era totalmente estável passa a ter pontos de instabilidade, e a consequência disso é a diminuição da faixa de operação do quadrotor.

Na Tabela 8 estão presentes as comparações entre as técnicas implementadas. Analisando o tempo para atingir o regime permanente e o máximo sobressinal observa-se que a técnica por LQR obteve um melhor resultado. No entanto, a única técnica capaz de

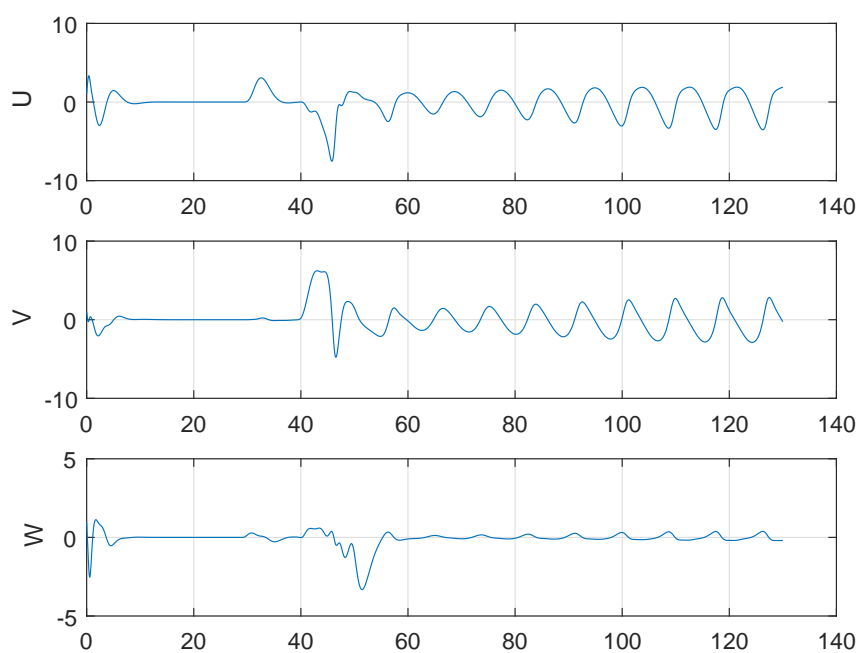


Figura 49 – Simulação de controle não efetivo.

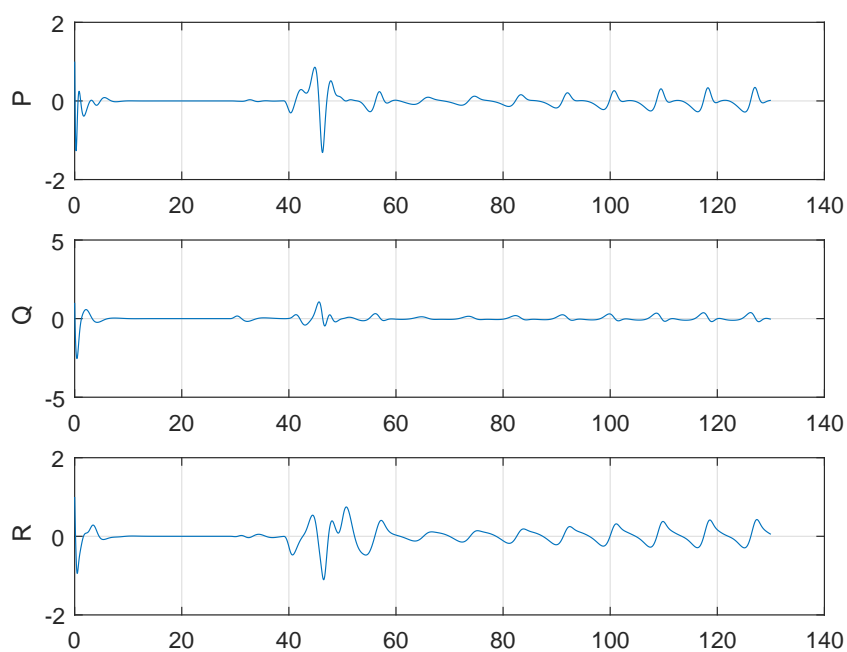


Figura 50 – Simulação de controle não efetivo.

seguir uma determinada referência é a por seguimento de referência.

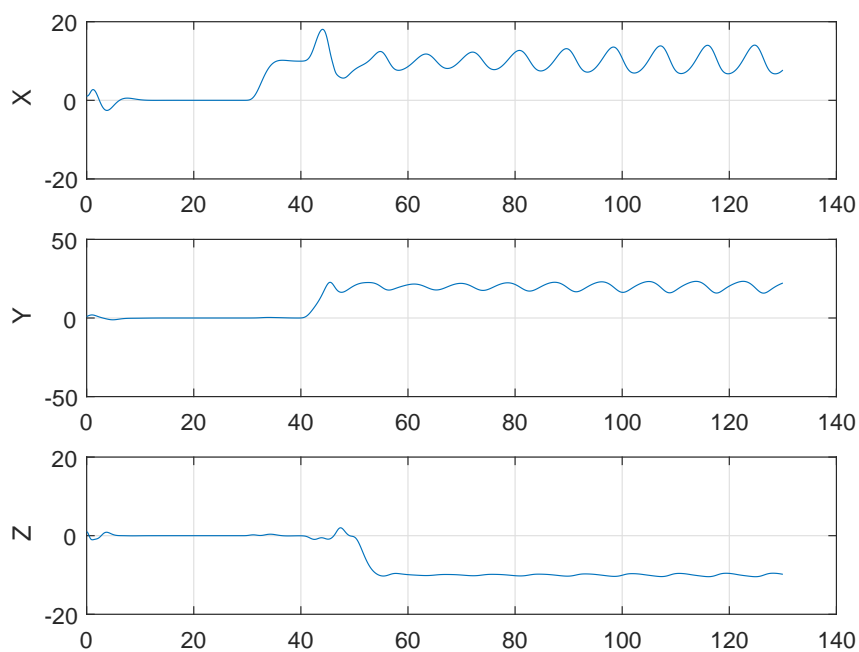


Figura 51 – Simulação de controle não efetivo.

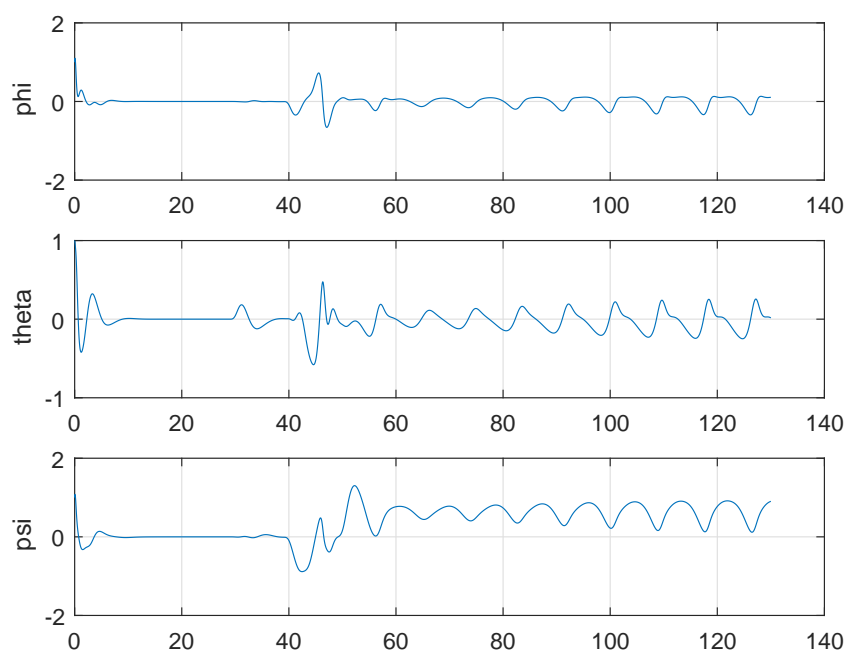


Figura 52 – Simulação de controle não efetivo.

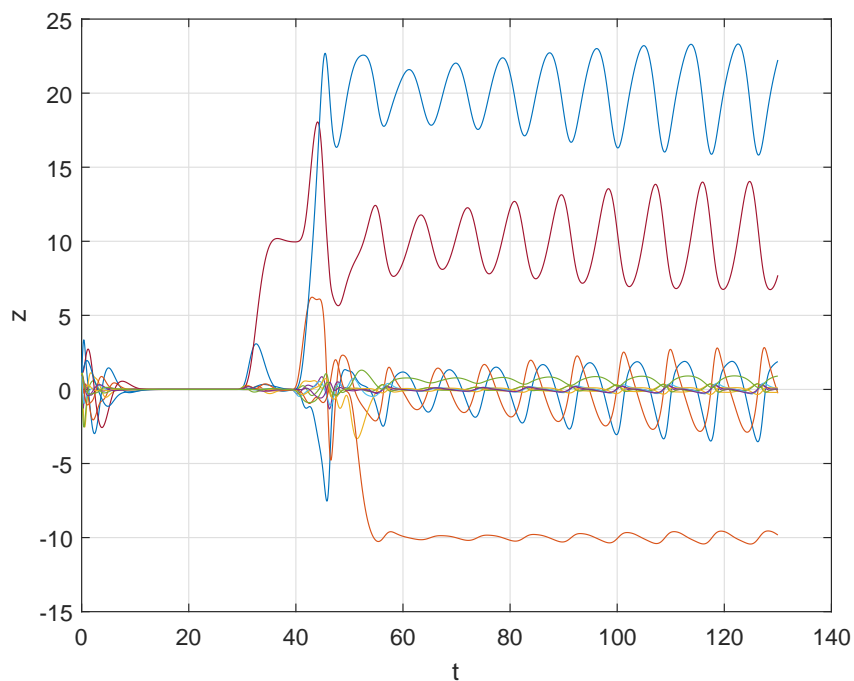


Figura 53 – Simulação de controle não efetivo.

Tabela 8 – Comparação entre as técnicas de controle.

Técnica de controle	Tempo	Sobressinal
Alocação de polos	10	9
LQR	11	2
Seguimento de referência	10	2,5

5 Conclusão e trabalhos futuros

Para se alcançar os objetivos deste trabalho, inicialmente foram realizados estudos bibliográficos sobre as características aerodinâmicas e forças atuantes em uma aeronave, o que é a base para um bom entendimento do funcionamento de um quadrotor.

Posteriormente, para obtenção das equações do modelo foram definidos os parâmetros utilizados em um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrotor. Em seguida, aplicou-se a ferramenta de modelo mais usada na literatura, denominada modelo de Newton-Euler, por meio da qual obteve-se o modelo não linear. Logo após, foi feita a linearização do modelo obtendo-se o modelo em espaço de estados linearizado.

Dessa maneira, foi possível realizar as simulações dos modelos lineares e não lineares e a comparação dos mesmos. Por meio dessas simulações pôde-se concluir que os pontos de operação encontrados, através da trimagem, são pontos definidos do modelo não linear, sendo assim usados no projeto de controle.

Antes de iniciar os projetos de controle foi feito um estudo sobre a controlabilidade e a observabilidade do sistema, pré-requisitos para a implementação de controle do sistema. De acordo com o estudo feito, foi mostrado que o sistema do quadrotor é controlável e observável.

Feitas essas considerações sobre controlabilidade e observabilidade partiu-se para a implementação da técnica por alocação de polos. A limitação encontrada nessa técnica foi de obter os polos que melhor se ajustavam ao sistema. Para isso, foram usados cálculos aplicados a sistemas de segunda ordem para assim ter um ponto de partida para a escolha dos polos. Em seguida, foram realizadas simulações para diversos grupos de polos e analisados os resultados. Por fim, escolheu-se o grupo de polos com menor esforço de controle, ou seja, os polos mais eficientes e que garantiam bons resultados de tempo de acomodação, sobressinal e velocidade de resposta.

A segunda técnica usada foi a de regulador linear quadrático -LQR-, um controle mais eficiente do que o de alocação de polos como mostrado nos resultados, obtendo-se um tempo de estabilidade e esforço de controle menores. Uma dificuldade encontrada foi a obtenção das matrizes de custo Q e R que melhor satisfaziam o sistema. Já que deve-se ter um equilíbrio entre o esforço do estado, representado pela matriz Q e o esforço da lei de controle, representado pela matriz R . Inicialmente teve-se um grande esforço do controlador o que acarretava em simulações demoradas. Para resolver essa situação, a matriz R foi multiplicada por uma constante, obtendo-se uma matriz de ganhos menores e, conseqüente, menor esforço de controle.

A última técnica implementada foi a de controle por seguimento de referência. Esse projeto é o mais completo visto que as saídas controladas podem seguir uma entrada do tipo degrau, desde que esteja dentro das condições de operação do sistema. Nesta etapa

foi comprovado através de simulações que apenas 4 estados poderiam ser controlados por essa técnica. Foi mostrado que todos os estados controlados influenciam os outros quando a entrada é aplicada, e que essa influência gera perturbações passageiras, mas que não afetam o bom funcionamento do quadrotor.

Para trabalhos futuros, sugere-se que sejam realizadas as implementações descritas a seguir, como objetivo de melhorar o modelo e obter uma aproximação mais real do quadrotor. Pode-se incluir no modelo variáveis de perturbação, como o vento e também usar a modelagem por Euler-Lagrange ao invés de Newton-Euler. Técnicas de controle adaptativo também podem ser usadas. Outra técnica que pode ser implementada é o uso de estimadores de estado, uma vez que, como o sistema é observável, é possível observar a saída e estimar os estados do sistema para serem utilizados na lei de controle. Isso é uma grande melhoria, pois na prática nem sempre é possível medir todos os estados e também quanto menos sensores o sistema possuir, menor o custo do projeto.

Referências

- AUSTIN, R. *Unmanned aircraft systems: UAVs design, development and deployment*. Nova York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2011. v. 54. 2
- BAPTISTA, M. P. *Controlo ótimo da atitude de um helicóptero com falha de atuadores*. Tese (Doutorado), 2015. 6, 26, 28, 38
- BOUABDALLAH, S. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. Tese (Doutorado) — Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2007. 1
- BRESCIANI, T. Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter. *MSc Theses*, 2008. 6, 1, 2, 3, 12, 13, 14, 15, 17
- BROGAN, W. L. *Modern control theory*. Las Vegas, Nevada, USA: Pearson education india, 1982. 47
- COOK, M. V. *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Nova York, NY, USA: Butterworth-Heinemann, 2012. 6, 7, 8, 10, 11, 12
- DORF, R. C. *Sistemas de controle modernos*. 11. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 26, 31
- HERNANDEZ, W. P.; RINCON, I. M. S.; CASTELLO, D. *Estratégia de controle ótimo para robôs submarinos tipo rov em atividades de inspeção de risers*. 2014. 38
- NETO, A. A. *Geração de trajetórias para veículos aéreos autônomos não-tripulados*. UFMG, 2008. 1
- NISE, N. S. *Engenharia de sistemas de controle*. São Paulo, SP, Brasil: LTC, 2006. 17, 29
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno/2003*. São Paulo, SP, Brasil: Prentice Hall. 4ed. São Paulo-Brasil. 788p, 2003. 26, 27, 31, 38
- OLIVEIRA, T. D. S. de; BARROS, E. A. de. *Utilização de técnicas de identificação de sistemas aplicadas a veículos aéreos não tripulados (vants)*. 2007. 17, 18
- PFEIFER, E. *Projeto e controle de um UAV quadrirotor*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013. 6, 1, 3, 13, 14, 15, 16, 29, 40
- RAYMER, D. P. *Aircraft Design: A Conceptual Approach and Rds-Student, Software for Aircraft Design, Sizing, and Performance Set (AIAA Education)*. Nova York, NY, USA: AIAA (American Institute of Aeronautics & Ast, 2006. 5
- RODRIGUES, L. E. M. J. *Fundamentos da engenharia aeronáutica*. São José dos Campos, SP, Brasil: [s.n.], 2013. 6, 4
- SPONG, M. W. *Robot modeling and control*. Nova York, NY, USA: [s.n.], 2006. 9
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. *Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems*. Nova York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2015. 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12

THUMS, G. D. *Sintonia PID Robusta Multi-malha para Veiculos Aéreos Nao Tripulados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2012. 1, 2

VALAVANIS, K. P. *Advances in unmanned aerial vehicles: state of the art and the road to autonomy*. Nova York, NY, USA: Springer Science & Business Media, 2008. v. 33. 1, 2, 14, 15, 16