



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil
Curso de Graduação em Engenharia Civil



Cleifane de Freitas Pereira

ANÁLISE AVANÇADA ESTÁTICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS EM AÇO

Ouro Preto

2024

Análise avançada estática de sistemas estruturais reticulados em aço

Cleifane de Freitas Pereira

Trabalho Final de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto.

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Prof.^a Dra. Andréa Regina Dias da Silva – UFOP

Ouro Preto

2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

P436a Pereira, Cleifane de Freitas.
Análise avançada estática de sistemas estruturais reticulados em aço.
[manuscrito] / Cleifane de Freitas Pereira. - 2024.
59 f.

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola
de Minas. Graduação em Engenharia Civil .

1. Método dos elementos finitos. 2. Barras (Engenharia) - Estruturas
reticuladas. 3. Teorias não-lineares - Não linearidade geométrica. 4.
Teorias não-lineares - Não linearidade física. I. Silva, Andréa Regina Dias
da. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 624

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716



FOLHA DE APROVAÇÃO

Cleifane de Freitas Pereira

Análise avançada estática de sistemas estruturais reticulados em aço

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em 21 de fevereiro de 2024.

Membros da banca

Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva - Orientadora (Universidade Federal de Ouro Preto)
Prof. Dr. Walliston dos Santos Fernandes - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Me. Erivaldo Santos Jales - (Instituto Tecnológico da Vale - ITV)

Andréa Regina Dias da Silva, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 21/02/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Andrea Regina Dias da Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 22/02/2024, às 18:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0668084** e o código CRC **E06E3CD0**.

“A persistência é o menor caminho do êxito”.

Charles Chaplin

Dedico este trabalho à minha família, à minha orientadora e aos amigos e colegas de curso cujo apoio foi fundamental ao longo desta jornada.

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio incondicional e pelos valiosos valores transmitidos. Em especial, expresso minha profunda gratidão à minha mãe, Elizabete Freitas, ao meu pai, Jorge Pereira e à minha noiva, Eliene Santos, pelo constante companheirismo e incentivo que tornaram esta jornada ainda mais significativa.

À minha orientadora prof.^a Andréa Regina Dias Silva, pela incansável motivação, pela paciência admirável e pela dedicação exemplar ao me guiar nessa jornada acadêmica.

Aos meus colegas de classe Gabriel Pena, Ingrid Cunha e Marina Assis, expresso minha gratidão pela parceria constante.

Ao meu amigo Allãn Passos, que, mesmo à distância, nunca deixou de me incentivar.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas, expresso meu reconhecimento pelos valiosos ensinamentos.

À Universidade Federal de Ouro Preto por me proporcionar um ensino público de qualidade.

RESUMO

Nas aplicações numéricas estruturais, uma boa interação entre análise e projeto tem sido alcançada através da chamada Análise Avançada. A ideia básica dessa análise é introduzir nos modelos e formulações não lineares todos os fatores considerados relevantes no projeto estrutural, permitindo ao projetista uma solução mais precisa e econômica de projetos de estruturas. Entre esses fatores estão: o efeito de segunda ordem (grandes deslocamentos) e o efeito do escoamento do material. Adicionalmente, a influência das imperfeições geométricas e de carga, bem como das tensões residuais devem ser incluídas na preparação do modelo numérico. Uma vez considerados esses efeitos não lineares, pode-se eliminar a necessidade de realizar a análise estrutural e o projeto em fases separadas. Neste contexto, a presente pesquisa busca obter a resposta não linear estática avançada de estruturas reticuladas em aço. Utiliza-se um programa computacional baseado no Método dos Elementos Finitos para realizar as análises. Os fundamentos teóricos necessários para um melhor entendimento do comportamento estrutural e da metodologia usada serão apresentados ao longo do trabalho. As formulações de elementos finitos, bem como as estratégias incrementais e iterativas empregadas no processo de solução foram também discutidas. Cinco sistemas estruturais foram estudados e tiveram suas respostas comparadas àquelas encontradas na literatura. Ao final, algumas conclusões e observações referentes ao comportamento estrutural foram estabelecidas.

Palavras-chaves: Método dos Elementos Finitos, estruturas reticuladas, não linearidade geométrica, não linearidade física, análise avançada, análise estática não linear.

ABSTRACT

In structural numerical applications, a good interaction between analysis and design has been achieved through what is known as Advanced Analysis. The core concept of this analysis is to incorporate into nonlinear models and formulations all factors considered relevant in structural design, thereby enabling designers to reach more precise and economical solutions for structural projects. These factors include the second-order effect (large displacements) and the material yielding effect. Additionally, the influence of geometric and load imperfections, as well as residual stresses, should be included in the preparation of the numerical model. Once these nonlinear effects are considered, the need to conduct structural analysis and create the design in separate phases can be eliminated. In this context, the present research aims to obtain the advanced nonlinear static response of steel truss structures. A computer program based on the Finite Element Method is used to perform the analyses. Theoretical foundations necessary for a better understanding of structural behavior and the methodology used will be presented throughout the work. Finite element formulations, as well as the incremental and iterative strategies employed in the solution process, will also be discussed. Five structural systems were studied, and their responses were compared to those found in the literature. Finally, some conclusions and observations were made about structural behavior.

Keywords: Finite Element Method, truss structures, geometric nonlinearity, physical nonlinearity, advanced analysis, nonlinear static analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Efeitos de segunda ordem: $P-\Delta$ e $P-\delta$ (SILVA, 2009)	7
Figura 2.2 – Diagrama idealizado tensão-deformação para o aço (SILVA, 2009)	8
Figura 2.3 – Plastificação da seção transversal (SILVA, 2009).....	9
Figura 2.4 – Diagrama de momento curvatura (SILVA, 2009).....	10
Figura 2.5 – Discretização no Método da Zona Plástica (GONÇALVES, 2013)	11
Figura 2.6 – Discretização no Método da Rótula Plástica (GONÇALVES, 2013).....	12
Figura 2.7 – Elemento de viga coluna adotado (SILVA, 2009).....	14
Figura 2.8 – Comportamento da seção transversal (SILVA, 2009).....	15
Figura 2.9 – Elemento de viga coluna com molas fictícias (SILVA, 2009)	21
Figura 2.10 – Distribuição de tensões residuais nos perfis (ECCS, 1983).....	22
Figura 2.11 – Imperfeições iniciais (ECCS, 1983).....	24
Figura 2.12 – Transformações entre os sistemas corrotacionais e globais de coordenadas	26
Figura 2.13 – Programa CS-ASA Análises e Efeitos Considerados (SILVA, 2009)	28
Figura 3.1 – Trajetória de equilíbrio (SILVEIRA, 1995)	31
Figura 3.2 – Solução incremental iterativa (SILVA, 2009)	32
Figura 4.1 – Viga biengastada: geometria, carregamento e discretização	37
Figura 4.2 – Trajetórias de equilíbrio.....	38
Figura 4.3 – Pórtico simples: geometria e carregamento	40
Figura 4.4 – Trajetórias de equilíbrio.....	41
Figura 4.5 – Distribuição de forças internas na base da coluna à direita e índice de plastificação dos membros da estrutura	42
Figura 4.6 – Cargas de colapso e diagramas de momento fletor e força axial	43

Figura 4.7 – Pórtico simples bi rotulado: geometria e carregamento	44
Figura 4.8 – Trajetórias de equilíbrio para o portal simples	45
Figura 4.9 – Distribuição de forças internas e índice de plastificação dos membros da estrutura.....	46
Figura 4.10 – Pórticos com restrição ao movimento lateral.....	47
Figura 4.11 – Discretização e imperfeição geométrica.....	48
Figura 4.12 – Distribuição das forças internas	49
Figura 4.13 – Diagramas de momento fletor e força axial.....	50
Figura 4.14 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com bases rotuladas	51
Figura 4.15 – Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com bases engastadas.....	52
Figura 4.16 – Pórtico de quatro andares.....	53
Figura 4.17 – Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de α	54
Figura 4.18 – A distribuição das forças internas e a plastificação da seção transversal para $\alpha = 0,5$	55

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear (SILVA, 2009)	36
Tabela 4.1 – Cargas de ocorrência de rótulas: análises elasto-plásticas	39
Tabela 4.2 – Cargas de ocorrência de rótulas: análises plástica-refinadas.....	39
Tabela 4.3 – Cargas limites adimensionalizadas	46
Tabela 4.4 – Fatores de carga de colapso para diferentes valores de α	55

SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	VI
Lista de Tabelas	VIII
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos.....	1
1.2 Organização do Trabalho	5
2 FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR AVANÇADA....	6
2.1 Introdução	6
2.2 Não Linearidade Geométrica.....	6
2.3 Não Linearidade Física	8
2.4 Formulação do Elemento Finito Não Linear.....	12
2.5 O Sistema Computacional CS-ASA	27
3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR	29
3.1 Introdução	29
3.2 Metodologia de Solução.....	29
3.2.1 Solução Incremental Preditada.....	32
3.2.2 Ciclo de Iterações: Método de Newton-Raphson.....	33
4 ESTUDOS DE CASOS	37
4.1 Introdução	37
4.2 Viga Biengastada.....	37
4.3 Portal Simples.....	40
4.4 Pórtico Simples Bi Rotulado	44

4.5	Pórtico com Restrição ao Movimento Lateral.....	47
4.6	Pórtico de Quatro Andares	52
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....	56
	REFERÊNCIAS.....	57

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

Os sistemas estruturais reticulados em aço desempenham um papel fundamental na construção civil contemporânea, destacando-se pela eficiência resultante da combinação entre leveza e alta resistência, possibilitando a concepção de estruturas capazes de superar grandes vãos. A flexibilidade do aço impulsiona a inovação em design arquitetônico, adaptando-se a diversas formas e tamanhos. Além da rapidez na construção, contribuindo para a redução de prazos e custos, o aço destaca-se como um material sustentável, promovendo a conscientização ambiental na indústria. Além disso, os elementos estruturais em aço possuem alta ductibilidade, característica que se refere à capacidade de sofrer deformação plástica sem ruptura, consolidando sua posição como um componente confiável na engenharia estrutural moderna.

Diante desse cenário, os sistemas estruturais em aço têm sido cada vez mais utilizados em plataformas off-shore, coberturas, construção de pontes, edifícios de grande porte, torres, estádios e arenas, entre outras construções. Nesses casos, torna-se necessário utilizar uma análise estrutural estática ou dinâmica que apresenta o comportamento mais realista da estrutura, assegurando que o dimensionamento seja econômico, eficiente e seguro, e exigindo a consideração dos efeitos não lineares (SILVA, 2009).

A análise estática, capaz de proporcionar uma representação mais precisa do comportamento das estruturas, abrange uma variedade de fatores que a influenciam. Entre esses fatores, incluem-se grandes deslocamentos, inelasticidade do material, flexibilidade das ligações, imperfeições geométricas de carregamento e tensões residuais. A análise que incorpora tais fatores é dita avançada (SILVA, 2009).

A ausência de compreensão sobre como os elementos estruturais respondem às solicitações extremas podem resultar no colapso parcial ou total do sistema, uma vez que essas solicitações têm o potencial de causar grandes deformações permanentes. Em tais circunstâncias, a realização exclusiva de uma análise estática linear elástica tende a ser desfavorável do ponto de vista econômico, devido à necessidade de aplicação de fatores de segurança mais elevados (VIANA *et al.*, 2018).

O propósito desta pesquisa é aprofundar na análise da estabilidade de estruturas reticuladas, empregando uma abordagem avançada que incorpora tanto não linearidades geométricas quanto do material. A não linearidade geométrica surge devido aos efeitos de segunda ordem $P-\Delta$ e $P-\delta$, decorrentes da deformação da estrutura à medida que é submetida a solicitações. Já a não linearidade do material é representada pela perda de rigidez dos elementos estruturais, à medida que parte ou todo material de uma seção entra em escoamento.

O objetivo aqui é compreender de maneira mais abrangente a resposta de estruturas esbeltas considerando os efeitos não lineares supracitados. Estudos envolvendo algumas estruturas reticuladas mostraram a importância de se adotar análise estrutural avançada nos projetos atuais. Trajetória de equilíbrio possibilitando definir a carga limite de estabilidade da estrutura, superfície de resistência plástica, níveis de plastificação da seção serão apresentados e discutidos.

O programa computacional CS-ASA (SILVA,2009), uma ferramenta desenvolvida para análise estática e dinâmica de estruturas de aço, será utilizado. Esse programa é baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), uma técnica numérica eficiente para resolução de equações diferenciais que descrevem o comportamento físico de sistemas complexos. Para a solução do problema não linear emprega-se o método de Newton-Raphson acoplado a técnicas de continuação.

Na literatura, é possível encontrar pesquisas que abordam temas diretamente relacionados ao trabalho aqui desenvolvido, e alguns deles serão discutidos. Lavall (1996) estudou uma formulação teórica consistente voltada para a análise não linear, abordando as perspectivas física e geométrica de pórticos planos de aço por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF). Essa formulação leva em consideração barras com imperfeições iniciais e tensões residuais em suas seções transversais. A fim de aplicar essa formulação, foi desenvolvido um programa em linguagem FORTRAN. Esse programa tem a capacidade de conduzir análises não lineares elasto-plástica, baseando-se em um processo incremental-iterativo.

Machado (2005) desenvolveu uma formulação para análise inelástica de segunda ordem em sistemas estruturais metálicos bidimensionais. O autor explorou duas formulações inelásticas, a elasto-plástica e a plástica-refinada, ambas baseadas no método da rótula plástica. A primeira seguiu as diretrizes do Instituto Americano de Construção em Aço (AISC-LRFD,

1986, 1994) para definir uma superfície de interação, enquanto a segunda incorporou formulações específicas para simular a degradação da rigidez da seção e do módulo de elasticidade. Ambas as abordagens utilizam funções de estabilidade para modelar a não linearidade geométrica. A eficiência dessas formulações foi posteriormente avaliada através da análise de diversos problemas estruturais metálicos encontrados na literatura, e os resultados dessas análises foram empregados explicitamente para validação das formulações inelásticas.

Almeida (2006) refinou a formulação inicial proposta por Lavall (1996). Isso permitiu a análise de problemas que envolvem ligações articuladas entre as barras de estruturas, a aplicação de tensões residuais na alma do perfil e a consideração de vários carregamentos nodais com incrementos e fatores de ponderação diferenciados. O autor empiricamente validou a aplicabilidade prática dessa formulação desenvolvida por meio da apresentação de exemplos ilustrativos, os quais evidenciam sua eficácia. Os casos analisados permitiram investigar fenômenos como a plastificação gradual, o impacto das tensões residuais e o papel das imperfeições iniciais explicitamente introduzidas na determinação da resistência última das estruturas de aço.

Yang *et al.* (2007) conduziram uma análise incremental e iterativa de estruturas elasticamente não lineares em três fases essenciais: preditora, corretora e verificação de erros. Na fase preditora, solucionaram os deslocamentos estruturais para incrementos de carga, influenciando o número de iterações. A fase corretora focou na recuperação das forças do elemento para determinados deslocamentos, afetando a precisão da solução. Utilizando um esquema incremental-iterativo robusto, empregou exclusivamente a matriz de rigidez linear tanto no preditor quanto no corretor, sendo suficiente para resolver uma ampla gama de problemas moderadamente não lineares. Para situações altamente não lineares, introduziu uma matriz de rigidez geométrica qualificada de corpo rígido no preditor, derivada da equação de trabalho virtual, crucial para garantir direções adequadas de iteração em casos de respostas pós-flambagem. Essas abordagens foram demonstradas na solução bem-sucedida de diversos problemas não lineares.

Silva (2009) desenvolveu uma ferramenta computacional baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas reticuladas. A abordagem incluiu a consideração de duas fontes de não linearidades, a

geométrica e a física, relacionadas à inelasticidade do aço e à semirrigidez das ligações entre os membros estruturais. Esses efeitos não lineares foram integrados diretamente na formulação do elemento, possibilitando uma estimativa precisa dos modos de colapso sem a necessidade de fases distintas para análise e dimensionamento estrutural. A validação da metodologia foi realizada através da avaliação da estabilidade estática e dinâmica de diversos sistemas estruturais, utilizando soluções analíticas ou numéricas encontradas na literatura.

Kim e Park (2009) introduziram um inovador elemento estrutural denominado viga-pilar baseado em estabilidade. Sua proposta incorporou a consideração dos efeitos geométricos de segunda ordem e a inelasticidade do material. Uma contribuição fundamental do trabalho foi a criação de uma nova matriz de funções de interpolação de força, direcionada a representar com maior precisão a ampliação de momento resultante da interação entre força axial e o deslocamento lateral. Na modelagem do comportamento constitutivo da seção transversal, os autores adotaram uma abordagem que integra a resposta uniaxial tensão-deformação das fibras, proporcionando uma representação mais refinada da inelasticidade do material. Para resolver as equações não lineares, empregaram o método de controle de deslocamento generalizado (GDC) em conjunto com o método de rigidez secante incremental. Os resultados obtidos na avaliação revelaram que o método proposto demonstrou consistentemente sua capacidade de prever o comportamento inelástico não linear de estruturas metálicas e mistas. Destaca-se, ainda, a eficiência computacional da abordagem, enfatizando sua aplicabilidade prática e utilidade na análise estrutural.

Chen *et al.* (2022) inovou ao desenvolver e aprimorar o método do módulo tangente modificado (MTM), originalmente proposto por Ziemian e MCGuire (2002), para conduzir análises não lineares em membros de aço com seções não simétricas. Introduzindo um método preciso de análise de seção transversal, o autor criou uma abordagem capaz de gerar superfícies de escoamento em seções de aço de formas variadas. Essas superfícies de escoamento foram estrategicamente utilizadas na avaliação da condição de escoamento total. Observou-se que a abordagem proposta, incorporando o MTM e a formulação aprimorada do elemento finito, ultrapassou as limitações da plasticidade concentrada ao analisar membros com seções não simétricas.

1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho é estruturado em cinco capítulos. No presente primeiro capítulo, foi fornecida uma introdução, acompanhada dos objetivos da pesquisa. Além disso, uma breve revisão bibliográfica foi realizada sobre os temas diretamente relacionados ao escopo desta monografia.

No segundo capítulo, são abordados os fundamentos teóricos para análise estática não linear de estruturas reticuladas planas. Aborda-se a formulação do elemento finito de viga-coluna utilizado na modelagem. São explicados os comportamentos não lineares resultantes de grandes deslocamentos e deformações, os métodos de análise plástica, as equações de equilíbrio e, principalmente, o processo de obtenção dos vetores de forças internas e da matriz de rigidez do elemento. Por fim, é feita uma breve apresentação do programa computacional utilizado nas análises.

No terceiro capítulo, a metodologia empregada para resolver sistemas não lineares é apresentada. Essa abordagem é caracterizada por um esquema incremental iterativo de solução, em que, após cada incremento inicial de carga, iterações são conduzidas utilizando o método de Newton-Raphson para estabelecer uma nova configuração de equilíbrio para a estrutura. Além disso, são descritos detalhes sobre a estratégia de iteração, juntamente com a explicação da abordagem de controle do parâmetro de carga.

No capítulo quatro, realiza-se a análise da estabilidade estática de cinco sistemas estruturais. Concluindo, no capítulo cinco, são apresentadas considerações e conclusões abrangentes relacionadas ao trabalho realizado.

2 FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR AVANÇADA

2.1 Introdução

Na atualidade, a engenharia estrutural enfrenta desafios consideráveis devido à crescente sofisticação das construções e à necessidade de projetos mais eficientes e seguros. Sendo assim, a análise não linear, abrangendo tanto aspectos geométricos quanto físicos, surge como uma ferramenta essencial. A busca por estruturas mais esbeltas e elevadas, aliada aos avanços nas tecnologias de construção, demanda uma compreensão aprofundada do comportamento estrutural em situações realistas, levando em consideração a possibilidade de haver deformações significativas e grandes deslocamentos.

Ressalta-se ainda a importância de reconhecer que estruturas podem manifestar comportamentos não lineares, mesmo quando compostas por materiais que obedecem à lei de Hooke. A não linearidade geométrica, influenciada por deformações consideráveis, e a não linearidade física, relacionada à ductilidade dos materiais, representam elementos cruciais a serem compreendidos para assegurar a segurança e eficiência de projetos estruturais em aço. Além disso, destaca-se a formulação do elemento finito não linear como um procedimento essencial na discretização de problemas estruturais complexos. Vale ressaltar que a resposta estrutural não linear é altamente dependente da eficiência de uma formulação de elemento finito, acoplado à metodologia de solução empregada.

Este capítulo também apresenta o programa computacional CS-ASA usado nas análises estruturais, proporcionando uma compreensão mais precisa do comportamento das estruturas. Cada um desses efeitos não lineares será abordado nas seções seguintes.

2.2 Não Linearidade Geométrica

Uma estrutura pode apresentar um comportamento não linear, mesmo que seja composta por um material que segue a lei de Hooke (SILVA, 2009). Quando os deslocamentos são consideravelmente altos, a deflexão lateral de um componente pode resultar no surgimento de momentos fletores adicionais, conhecidos como efeitos de segunda ordem, devido à presença de um esforço normal. Os comportamentos mencionados levam em conta os efeitos $P-\Delta$

(global), decorrentes dos deslocamentos laterais da estrutura, e $P-\delta$ (local, a nível de elemento), decorrentes da não linearidade dos eixos das barras, provenientes das deformações da estrutura durante as etapas de carregamento. A representação desses efeitos é apresentada na Figura 2.1.

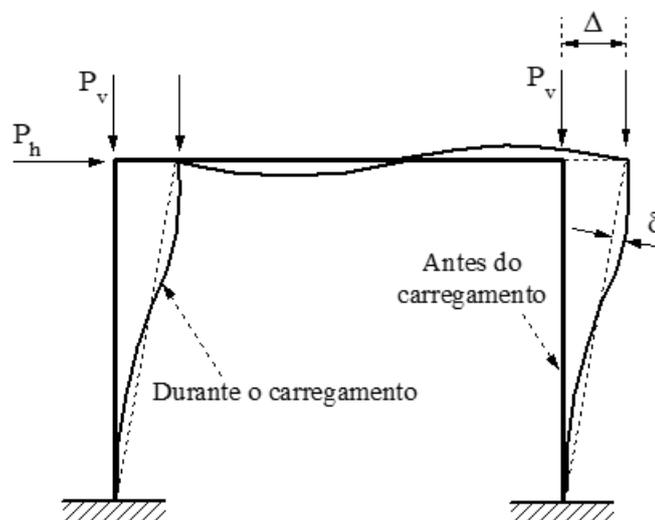


Figura 2.1 Efeitos de segunda ordem: $P-\Delta$ e $P-\delta$ (SILVA, 2009)

A base teórica para conduzir a análise não linear geométrica de estruturas encontra-se na teoria da elasticidade não linear. A não linearidade geométrica se manifesta na teoria da elasticidade de duas maneiras principais: nas equações de equilíbrio, que são formuladas usando as configurações deformadas do corpo, e nas relações deformação-deslocamento, que incorporam termos não lineares nos deslocamentos. Essa não linearidade geométrica surge devido à alteração na geometria da estrutura durante o processo de deformação do corpo. Esse fenômeno pode ocorrer devido a uma deformação significativa, a grandes deslocamentos e rotações da configuração de referência, ou a uma combinação desses fatores. No âmbito deste trabalho, presume-se a ocorrência de grandes deslocamentos e rotações, mas com pequenas deformações.

2.3 Não Linearidade Física

A inelasticidade ou plastificação do aço refere-se ao processo de escoamento das fibras, causando alterações na distribuição de tensões da seção transversal conforme as forças atuantes aumentam (SILVA, 2009). Por simplificação, o aço é idealizado como um material elástico perfeitamente plástico. A Figura 2.2 apresenta a relação tensão-deformação para esse caso, incluindo a curva real, onde σ_y representa a tensão de escoamento e ϵ_y a deformação correspondente. A Figura 2.3 ilustra a evolução das deformações e tensões de uma seção à medida que o carregamento aumenta, considerando o material com comportamento elasto-plástico.

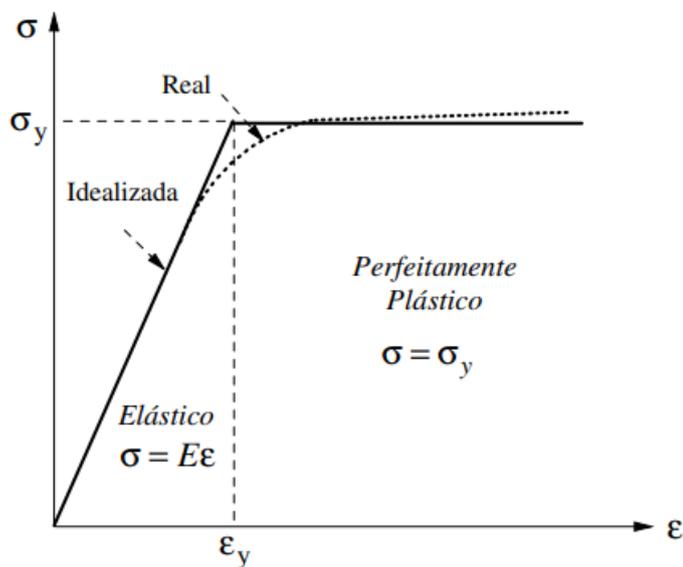


Figura 2.2 Diagrama idealizado tensão-deformação para o aço (SILVA, 2009)

Inicialmente, as fibras da seção estão no regime elástico ($\epsilon < \epsilon_y$ e $\sigma < \sigma_y$) conforme indicado na Figura 2.3a. Ao atingirem a tensão de escoamento ($\sigma = \sigma_y = E\epsilon_y$), como ilustrado na Figura 2.3b, as fibras mais externas apresentam o comportamento plástico, enquanto as demais permanecem no regime elástico. As fibras que já escoaram continuam a suportar uma tensão constante, limitada à tensão de escoamento, porém, com deformação superior a ϵ_y . Outras fibras recebem uma tensão adicional devido ao aumento no momento. Com o incremento

da carga, mais fibras entram na fase plástica (Figura 2.3c), formando a denominada zona plástica. Esse processo continua até que toda a seção esteja plastificada (Figura 2.3d), alcançando assim a capacidade de momento ou momento plástico, M_p , da seção transversal. A redistribuição de momento ocorrida durante o processo de carregamento resulta em um momento plástico limite superior ao momento de escoamento. Nas figuras, Φ é a curvatura da seção, ϵ_y é a deformação quando a seção sofre escoamento, e σ_y refere-se à resistência ao escoamento.

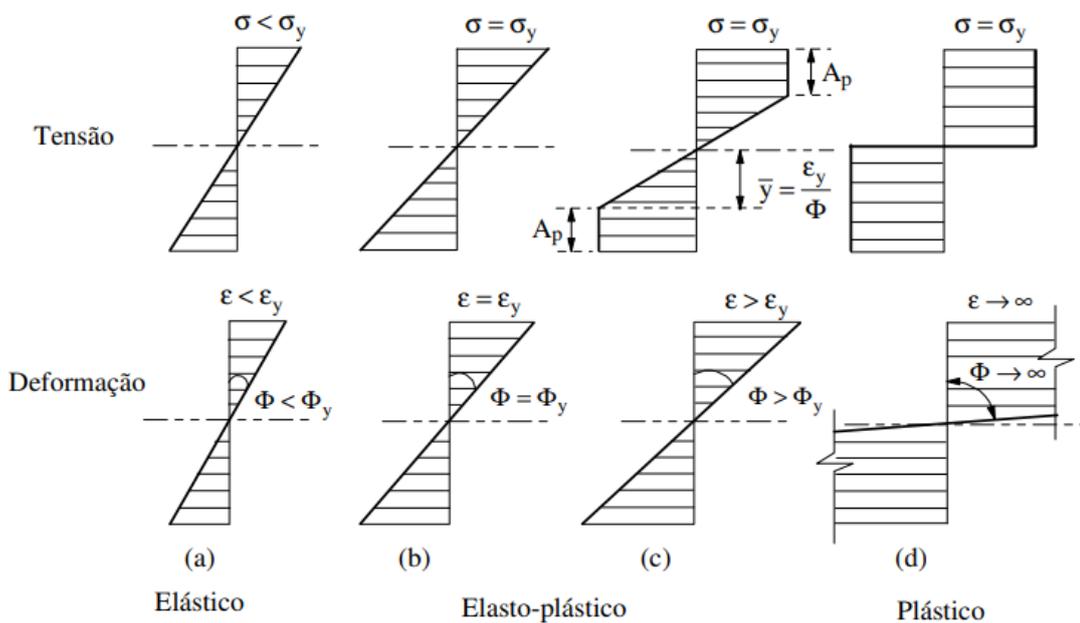


Figura 2.3 Plastificação da seção transversal (SILVA, 2009)

Durante o processo de plastificação, uma parte da seção tem suas fibras já plastificadas, enquanto outra parte mantém-se no domínio elástico. Nessa condição, a seção encontra-se em regime elasto-plástico, caracterizando pela transição entre o regime elástico e o plástico. A Figura 2.4 apresenta a relação momento-curvatura, ilustrando o comportamento da seção transversal nos regimes elástico (A), elasto-plástico (C) e plástico (D). O ponto B marca o início do escoamento da seção, indicando a plastificação das fibras extremas.

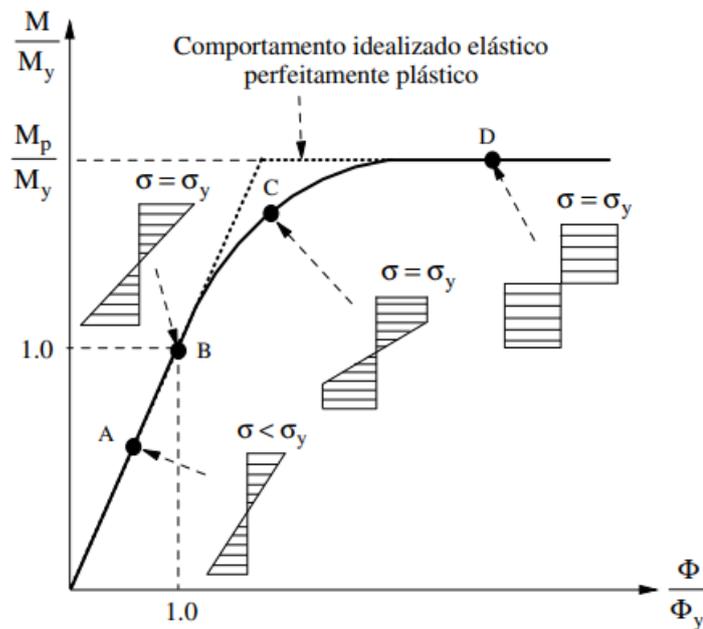


Figura 2.4 Diagrama momento-curvatura (SILVA, 2009)

A maior parte das pesquisas sobre análise numérica inelástica é fundamentada no método da zona plástica (ou plasticidade distribuída) ou no método da rótula plástica (ou plasticidade concentrada). A principal distinção entre os dois está no nível de detalhamento empregado para descrever a plastificação do elemento estrutural. Enquanto o método da rótula plástica com abordagem elasto-plástica ou plástica-refinado representa uma formulação consistente, porém mais simples, o método da zona plástica demanda um refinamento mais acentuado e, portanto, um resultado mais preciso.

No método da zona plástica, a estrutura é discretizada em elementos finitos, e a seção transversal de cada elemento é dividida em fibras, o que possibilita o acompanhamento gradual do escoamento na seção, conforme ilustrado na Figura 2.5. Os efeitos de segunda ordem e as tensões residuais podem ser diretamente integrados na análise.

De acordo com Chen e Kim (1997), em uma análise baseada na zona plástica, que leva em consideração explicitamente os efeitos de segunda ordem, a distribuição da plasticidade e as tensões residuais, não é necessário avaliar separadamente a capacidade de cada membro estrutural. Por esse motivo, a solução gerada por esse método é considerada uma aproximação

próxima da exatidão. Embora a eficácia do método da zona plástica seja significativa, sua aplicação é restrita à simulação de estruturas simples devido ao alto custo computacional, sendo muitas vezes utilizado para calibrar o desenvolvimento de métodos mais práticos de análise inelástica.

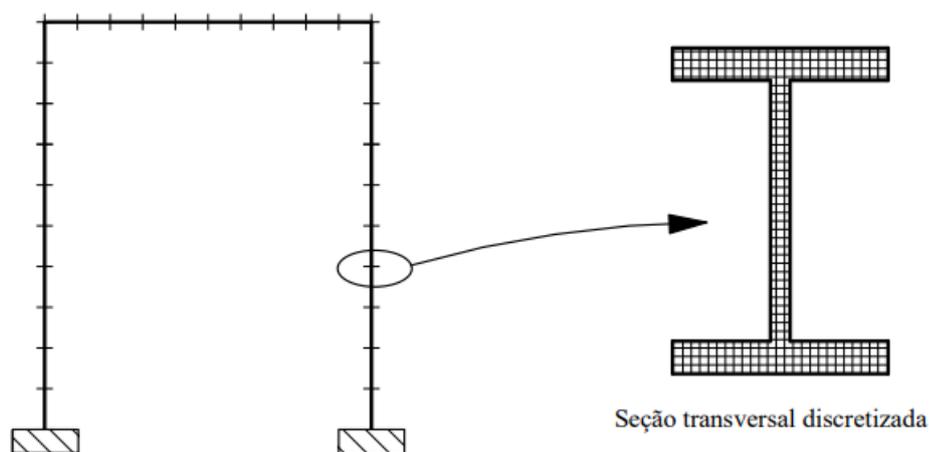


Figura 2.5 Discretização no Método da Zona Plástica (GONÇALVES, 2013)

Em contra partida, o método da rótula plástica assume que os efeitos da plasticidade estão concentrados nos nós de cada elemento, conforme exibido na Figura 2.6. Nessas junções nodais, podem se formar as rótulas plásticas, que representam uma seção completamente plastificada. De acordo com Ziemian (1993), essa abordagem de solução inelástica é consideravelmente mais eficiente computacionalmente em comparação com a mencionada anteriormente. Além disso, o método da rótula plástica pode ser classificado em método da rótula elasto-plástica e método da rótula plástica refinado.

A abordagem da rótula elasto-plástica representa a maneira mais básica de incorporar os efeitos da inelasticidade na análise. Nesse método, assume-se que o elemento permanece em estado elástico até atingir a resistência plástica da seção, formando assim uma rótula plástica. Importante ressaltar que os efeitos das tensões residuais não são levados em consideração. Por outro lado, no método da rótula plástica refinado, é possível monitorar o processo de plastificação da seção, e as tensões residuais podem ser incluídas na análise. Ao oferecer uma

representação mais detalhada do comportamento do membro em comparação com a abordagem baseada em zonas de plastificação, esse método é consideravelmente mais eficiente computacionalmente (SILVA, 2009).

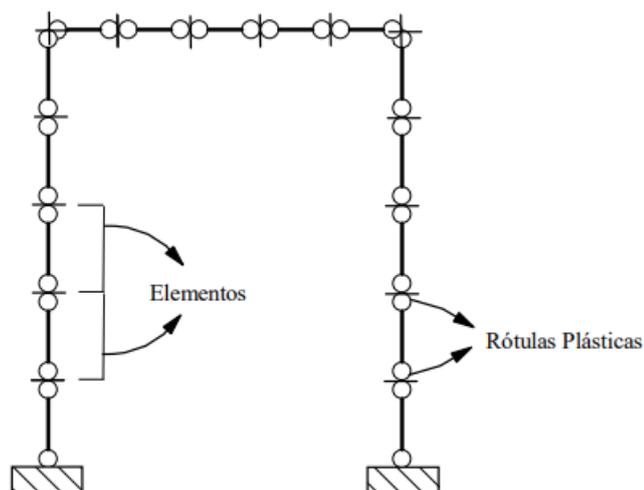


Figura 2.6 Discretização no Método da Rótula Plástica (GONÇALVES, 2013)

2.4 Formulação do Elemento Finito Não Linear

Dentro do campo da Engenharia de Estruturas, um dos procedimentos empregados para a discretização de um problema contínuo e, conseqüentemente, para alcançar soluções numéricas aproximadas é o Método dos Elementos Finitos, em virtude de sua eficácia e aplicabilidade. Por meio dessa técnica, busca-se realizar a divisão do meio contínuo em subdomínios denominados elementos, os quais são conectados por meio de pontos nodais nos quais os graus de liberdade a serem determinados são definidos.

O método fornece resultados mais precisos à medida que a malha é refinada (SILVA, 2009). Aumentar o número de pontos (elementos) na malha, ou seja, discretizá-la mais, aproxima a solução exata. No entanto, é crucial escolher um número de elementos que resulte em uma solução satisfatória, considerando a precisão desejada e o tempo disponível.

Na análise de segunda ordem de estruturas, a maioria das formulações de elementos finitos, abordadas na literatura, utiliza referenciais Lagrangianos. Nesse sentido, os

deslocamentos em um sistema estrutural, originados de uma solicitação determinada, são medidos em relação à configuração inicial desse sistema. Nessa abordagem, o desenvolvimento de metodologias incrementais para análise não linear inicia-se pela subdivisão do percurso de carregamento de um corpo sólido em diversas configurações de equilíbrio. Essas configurações abrangem a configuração inicial ($t = 0$), a última configuração deformada (t) e a configuração deformada corrente ($t + \Delta t$). Na configuração (t), presume-se que todas as variáveis de estado, como tensões, deformações e deslocamentos, assim como o histórico de carregamento, são conhecidas. O objetivo reside na formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração ($t + \Delta t$). Essa determinação ocorre ao considerar que o carregamento externo que atuou na configuração (t) sofreu um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de (t) para ($t + \Delta t$) é comumente denominado passo incremental.

Neste estudo, para realizar a análise não linear geométrica, foi adotada a formulação proposta por Yang e Kuo (1994), a qual foi desenvolvida em um referencial Lagrangiano atualizado. Nessa abordagem, a configuração de referência corresponde à última configuração de equilíbrio, representada por t . Durante uma análise incremental, ao final de cada incremento de carga, o referencial é transferido para a configuração de equilíbrio recém calculada, caracterizando um referencial móvel ($'x, 'y$). Nesse contexto, as rotações de corpo rígido são divididas em componentes menores, permitindo uma melhor aproximação por meio de funções de interpolação.

A Figura 2.7 representa o elemento finito selecionado, que é um elemento reticulado plano de viga-coluna definido pelos pontos nodais i e j . Cada um desses pontos possui três graus de liberdade: deslocamento axial (u), deslocamento transversal (v) e rotação (θ).

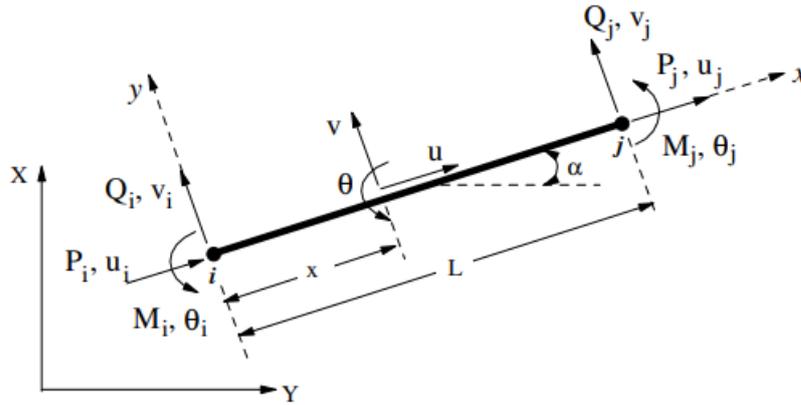


Figura 2.7 Elemento de viga-coluna adotado (SILVA, 2009)

Yang e Kuo (1994) aplicaram à Figura 2.7, previamente apresentada, duas componentes de tensão no elemento: a tensão axial, τ_{xx} e a tensão cisalhante, τ_{xy} de Cauchy. Além disso, consideram duas componentes de deformação associadas, representadas pelos incrementos de deformação de Green-Lagrange atualizados, $\Delta\epsilon_{xx}$ e $\Delta\epsilon_{xy}$. Essas componentes de deformação, decompostas em partes linear e não linear, são:

$$\Delta\epsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta\eta_{xx} \quad (2.1a)$$

$$\Delta\epsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta\eta_{xy} \quad (2.1b)$$

com:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta\bar{u}}{dx} \quad (2.2a)$$

$$\Delta e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta\bar{u}}{dy} + \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (2.2b)$$

$$\Delta\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta\bar{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.2c)$$

$$\Delta\eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\Delta\bar{u}}{dy} \frac{d\Delta\bar{u}}{dx} + \frac{d\Delta v}{dy} \frac{d\Delta v}{dx} \right] \quad (2.2d)$$

onde $\Delta \bar{u}$ representa a variação axial de um ponto B , situado a uma distância y da linha neutra, enquanto Δv denota o deslocamento vertical correspondente a esse ponto, conforme ilustra a Figura 2.8.

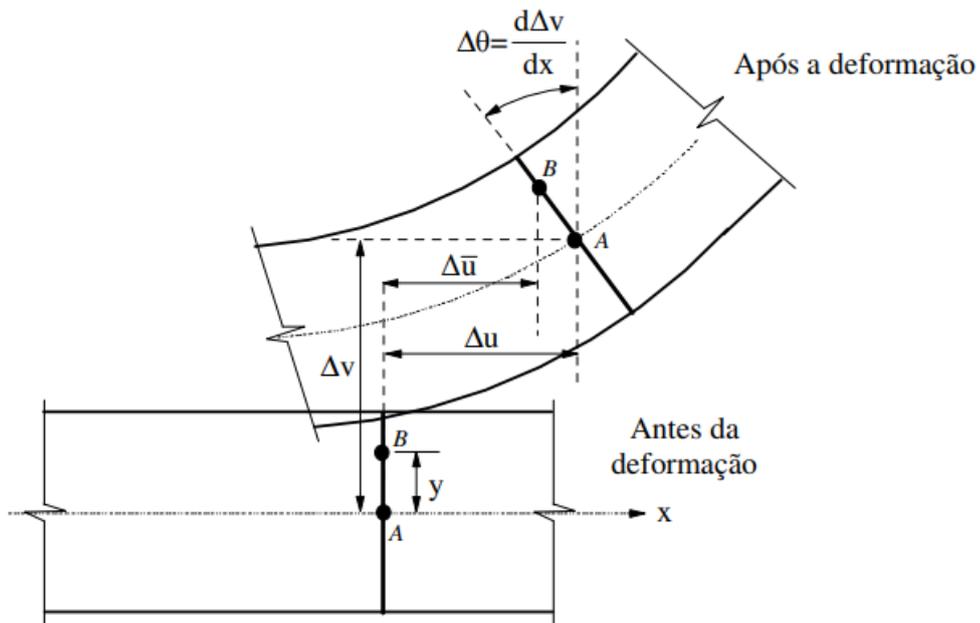


Figura 2.8 Comportamento da seção transversal (SILVA, 2009)

Ao adotar a premissa de Bernoulli-Euler, que pressupõe que as seções transversais inicialmente planas permanecem nesse estado mesmo após a deformação, a expressão para o deslocamento axial do ponto B é a seguinte:

$$\Delta \bar{u} = \Delta u - y \frac{d\Delta v}{dx} \quad (2.3)$$

Na equação fornecida, Δu representa a contribuição constante dos esforços extensionais em cada seção, enquanto a segunda parcela, $y(d\Delta v/dx)$, surge dos esforços de flexão. Importante notar que essa última é linearmente variável em relação à distância da linha neutra, y .

tem-se:

$$\Delta e_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \quad (2.4a)$$

$$\Delta e_{xy} = 0 \quad (2.4b)$$

$$\Delta \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.4c)$$

$$\Delta \eta_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + y \left(\frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] \quad (2.4d)$$

As tensões resultantes, representativas dos esforços iniciais na última configuração de equilíbrio obtida no processo de solução incremental, t , são determinadas por meio da integração das tensões de Cauchy, isto é:

$${}^tP = \int_A {}^t\tau_{xx} dA \quad (2.5a)$$

$${}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA \quad (2.5b)$$

$${}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (2.5c)$$

onde tP representa o esforço axial, tQ denota o esforço cortante e tM indica o momento fletor. Conforme descrito por Galvão (2000), os esforços tQ e tM podem ser reformulados da seguinte maneira:

$${}^tM = -M_i + \frac{(M_i + M_j)}{L} x \quad (2.6a)$$

$${}^tQ = -\frac{(M_i + M_j)}{L} \quad (2.6b)$$

Para um elemento de viga-coluna que adota a hipótese de Bernoulli, somente as tensões axiais, representadas por $\Delta\tau_{xx}$, podem ser obtidas pela lei constitutiva, expressa como $\Delta\tau_{xx} = E\Delta\varepsilon_{xx}$. As tensões cisalhantes incrementais, conforme apontado por Yang e Kuo (1994),

devem ser calculadas por meio das condições de equilíbrio. De acordo com esses autores, o processo é o seguinte:

$$\Delta\tau_{xy} = \Delta\tau_{xy}^l + \Delta\tau_{xy}^{nl} = \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3\Delta v}{dx^3} + \frac{E}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \quad (2.7)$$

tomando h como a medida da altura da seção transversal.

O incremento de energia de deformação pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\Delta U = \int_V \int_{\epsilon_{ij}^t}^{\epsilon_{ij}^t + \Delta\epsilon_{ij}} (\Delta\tau_{ij} d\epsilon_{ij}) dV \quad (2.8)$$

Dado que foram previamente estabelecidas as componentes de tensão e deformação, é viável reformular a equação anteriormente apresentada (GALVÃO, 2000):

$$\Delta U = \int_V \left[\left({}^t\tau_{xx} \Delta\epsilon_{xx} + 2({}^t\tau_{xy}) \Delta\epsilon_{xy} \right) + \left(E / 2\Delta\epsilon_{xx}^2 + 2(\Delta\tau_{xy}) \Delta\epsilon_{xy} \right) \right] dV \quad (2.9)$$

e o incremento de energia potencial das forças externas, representada por $\Delta\Omega$, pode ser definida da seguinte forma:

$$\Delta\Omega = - \int_S f_i \Delta u_i dS = - \left[\int_S {}^t f_i \Delta u_i dS + \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \right] \quad (2.10)$$

Na abordagem deste estudo, a escolha recai sobre a utilização da formulação linearizada, na qual se pressupõe que as deformações incrementais são suficientemente pequenas para que as contribuições não lineares possam ser desprezadas. Dessa forma, a equação (2.9) pode ser reformulada como:

$$\Delta U = \int_V \left({}^t\tau_{xx} \Delta\epsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy} \Delta\epsilon_{xy} \right) dV + \int_V \left(E / 2\Delta\epsilon_{xx}^2 \right) dV \quad (2.11)$$

Segundo Alves (1993), verifica-se a seguinte condição:

$$\int_V \left({}^t\tau_{xx} \Delta\epsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy} \Delta\epsilon_{xy} \right) dV = \int_S {}^t f_i \Delta u_i dS \quad (2.12)$$

Dessa forma, mediante algumas manipulações algébricas, é possível expressar o funcional de energia na configuração $t + \Delta t$ da seguinte maneira:

$$\Delta\Pi = U_l + U_\sigma - \int_S \Delta f_i \Delta u_i dS \quad (2.13)$$

na qual:

$$U_l = \frac{1}{2} \int_{Vol} E \Delta e_{xx}^2 {}^t dVol \quad (2.14a)$$

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_0^L {}^t P \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \quad (2.14b)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^t M \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^t Q \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \right] dx$$

A definição da matriz de rigidez no sistema local e do vetor de forças internas ocorre da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma \quad (2.15)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_i = {}^t\mathbf{f}_i + \Delta\mathbf{f}_i \quad (2.16)$$

Nas equações anteriores, \mathbf{K}_l representa a matriz de rigidez elástica linear convencional, enquanto \mathbf{K}_σ é frequentemente mencionada como a matriz de tensões iniciais ou matriz de rigidez geométrica. Os elementos dessa matriz dependem das forças nodais iniciais. A introdução dos efeitos de segunda ordem na análise é realizada por meio da matriz \mathbf{K}_σ . $\Delta\mathbf{f}_i$ representa o incremento do vetor de forças internas.

Por outro lado, as equações a seguir são empregadas para efetuar a transformação da matriz de rigidez e do vetor de forças internas do elemento, inicialmente definidos no sistema local, para o sistema global de coordenadas:

$$\mathbf{K}_{eg} = {}^t\mathbf{R}^T \mathbf{K}_e {}^t\mathbf{R} \quad (2.17)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_{ig} = {}^t\mathbf{R}_a^T {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_i \quad (2.18)$$

considerando \mathbf{K}_e como a matriz de rigidez do elemento e \mathbf{f}_i como o vetor de forças internas em coordenadas locais. \mathbf{R} é a matriz de rotação entre o sistema global e o sistema local atualizado na configuração t , enquanto \mathbf{R}_a representa a matriz de rotação atualizada na última iteração realizada. As matrizes de rotação são dependentes do ângulo α conforme ilustrado na Figura 2.7, e são expressas da seguinte maneira:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Nesta pesquisa, a análise não linear física será conduzida utilizando a formulação proposta por Chan e Chui (2000). Essa abordagem permite abranger a transição desde o início do escoamento até a plastificação completa da seção transversal. Além disso, os efeitos da plasticidade distribuída relacionados à formação de rótulas plásticas são incorporados por meio de um parâmetro adimensional de redução de rigidez, denotado por ψ , que varia conforme o nível de carregamento. A avaliação desse parâmetro é realizada com base nas forças internas e nas características geométricas da seção do elemento. Importante notar que a formulação emprega o referencial Lagrangiano atualizado.

O parâmetro ψ , desempenha não apenas o papel de monitorar a perda de rigidez, como já mencionado, mas também é empregado para determinar a rigidez dos elementos de mola, conforme apresentado na Figura 2.9. A mola, localizada na extremidade do componente estrutural, é ajustada em conformidade com o nível de plasticidade nessa posição específica. A rigidez da mola diminui à medida que a plastificação aumenta, atingindo anulação para sinalizar que a extremidade do componente se plastificou integralmente. Vale ressaltar que o elemento de mola possui comprimento nulo, e sua rigidez, representada por S_s , é definida como:

$$S_s = \frac{6EI}{L} \frac{\psi}{1-\psi} \quad (2.20)$$

considerando E o módulo de elasticidade, I o momento de inércia e L o comprimento do elemento de viga-coluna.

Durante o regime elástico da seção, a rigidez da mola é infinita, permitindo a completa transferência de momento ao longo do elemento. Isso é representado por $\psi = 1$. No entanto, quando uma rótula plástica se forma, a rigidez da mola é anulada, resultando em $\psi = 0$, indicando que nenhum momento é transferido nesse cenário. A expressão utilizada para definir ψ é a seguinte:

$$\psi = \frac{|M_{pr} - M|}{|M_{pr} - M| + |M - M_{er}|} \quad (2.21)$$

Considerando M_{pr} como o momento de plastificação e M_{er} como o momento de início de escoamento, sendo esse último definido da seguinte forma:

$$M_{er} = (\sigma_y - \sigma_r - P / A)W \quad (2.22)$$

onde σ_y representa a tensão de escoamento, σ_r denota a tensão residual, W é o módulo elástico da seção, P representa a força axial e A é a área da seção transversal.

No caso em que o momento na seção é inferior ao momento de início de escoamento, M_{er} , a seção é considerada em regime elástico, e a rigidez da mola é significativamente alta, aproximando-se do infinito. À medida que o momento aplicado atinge o momento de início de escoamento, inicia-se o processo de redução da rigidez da seção. Quando o momento na seção atinge o momento plastificação, M_{pr} , ocorre a formação da rótula plástica.

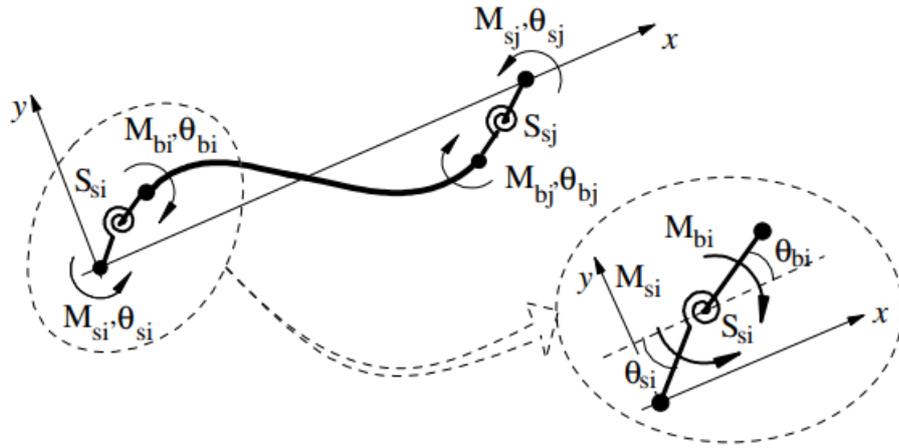


Figura 2.9 Elemento de viga-coluna com molas fictícias (SILVA, 2009)

A introdução de uma força axial de compressão gera tensões adicionais em uma seção previamente sujeita apenas ao momento plástico. Isso resulta no aumento da área da seção onde as fibras estão sob compressão, ao mesmo tempo em que ocorre a diminuição da região onde as fibras estão tracionadas. É relevante destacar que somente serão considerados perfis do tipo *I* (vigas) e *H* (pilares). Sendo assim, é plausível assumir que as áreas submetidas à tensão de compressão e tração, decorrentes do momento fletor, sejam equivalentes devido à simetria dessas seções. A área da seção que suporta a carga axial corresponde a $2\eta t_w$, onde t_w representa a espessura da alma do perfil e 2η a altura dessa região. A área restante é, portanto, responsável por resistir ao momento fletor.

Nesse cenário, torna-se viável estabelecer o momento plástico por meio das seguintes expressões:

$$M_{pr} = \left[B_f t_f (D - t_f) + \left((d/2)^2 - \eta^2 \right) t_w \right] \sigma_y, \text{ para } \eta \leq d/2 \quad (2.23a)$$

$$M_{pr} = \left((D/2)^2 - \eta^2 \right) B_f \sigma_y, \text{ para } d/2 < \eta \leq d/2 + t_f \quad (2.23b)$$

em que:

$$\eta = P / (2\sigma_y t_w), \text{ para } \eta \leq d/2 \quad (2.24a)$$

$$\eta = (P - \sigma_y t_w d) / (2B_f \sigma_y) + d / 2, \text{ para } d / 2 < \eta \leq d / 2 + t_f \quad (2.24b)$$

Nas equações apresentadas, que seguem rigorosamente as fórmulas da norma britânica BS5950 (1990), t_w representa a altura da alma, t_f é a espessura da mesa, B_f é largura da mesa e D denota a altura da seção do perfil. O termo d é definido como:

$$d = D - 2t_f \quad (2.25)$$

É importante destacar que a consideração das tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais devem seguir as orientações normativas aplicável. Por exemplo, o European Convention for Construction Steelwork (ECCS, 1983) estipula que a tensão residual máxima depende da razão entre a altura e a largura da seção, conforme ilustrado na Figura 2.10. Por outro lado, a Figura 2.11 ilustra as deformações geométricas iniciais, como desalinhamento vertical e curvatura inicial, recomendadas pela norma em questão. De acordo com as diretrizes do AISC-LRFD (2003), a curvatura inicial δ_0 é estabelecida como $0.001L$ e o desalinhamento vertical Δ_0 como $0.002L$, onde L representa o comprimento do membro.

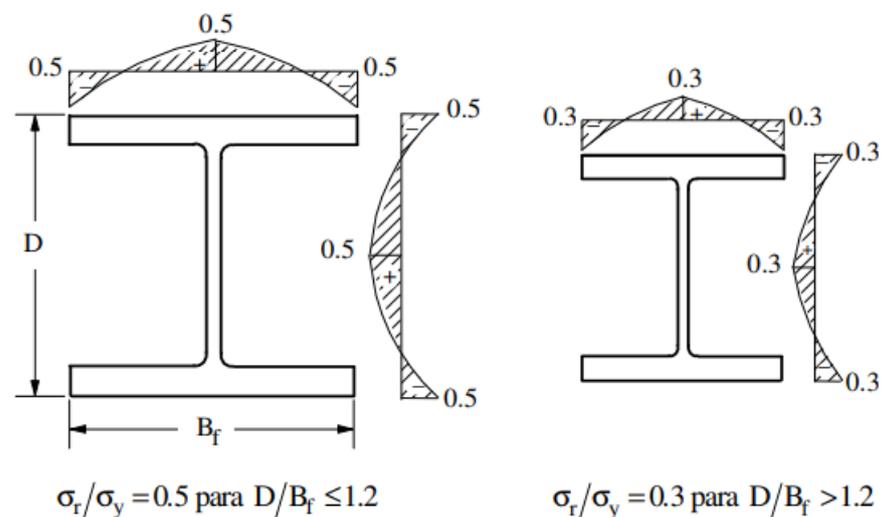


Figura 2.10 Distribuição de tensões residuais nos perfis (ECCS, 1983)

Após a definição dos critérios de plastificação, retome a análise do elemento finito representado na Figura 2.9. As equações que descrevem a condição de equilíbrio do momento fletor nos elementos de mola é a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{si} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{si} & -S_{si} \\ -S_{si} & S_{si} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (2.26a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{sj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{sj} & -S_{sj} \\ -S_{sj} & S_{sj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{sj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (2.26b)$$

onde ΔM_s e ΔM_b representam os incrementos nos momentos do elemento de mola em relação ao nó global, enquanto $\Delta \theta_s$ e $\Delta \theta_b$ são as rotações do elemento de mola em relação ao membro de viga-coluna. Conforme mencionado anteriormente, S_s representa a rigidez da seção transversal.

A matriz de rigidez do elemento precisa ser ajustada para incorporar o efeito da inelasticidade do material após a inclusão das molas nas extremidades do elemento de viga-coluna. Para as seções internas da viga-coluna, a relação entre momento-rotação é descrita por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{(3,3)} & -K_{(3,6)} \\ -K_{(6,3)} & K_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

considerando ΔM_{bi} , ΔM_{bj} , $\Delta \theta_{bi}$, e $\Delta \theta_{bj}$ como os incrementos nos momentos e rotações nodais relacionados aos pontos nodais i e j do elemento de viga-coluna. Os termos $K_{(m,n)}$ da matriz representam os coeficientes de rigidez à flexão, os quais dependem da formulação geometricamente não linear adotada. É possível utilizar as formulações definidas em referencial Lagrangiano atualizado. Adicionalmente, para incorporar os efeitos de segunda ordem, Chan e Chui (2000) propõem o uso de uma formulação simplificada expressa por:

$$K_{(3,3)} = K_{(6,6)} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (2.28a)$$

$$K_{(3,6)} = K_{(6,3)} = \frac{2EI}{L} + \frac{PL}{30} \quad (2.28b)$$

Combinando as expressões (2.26) e (2.27), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{si} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{si} & -S_{si} & 0 & 0 \\ -S_{si} & S_{si} + K_{(3,3)} & K_{(3,6)} & 0 \\ 0 & K_{(6,3)} & S_{sj} + K_{(6,6)} & -S_{sj} \\ 0 & 0 & -S_{sj} & S_{sj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Realizando a operação de multiplicação de matrizes e considerando que as solicitações incidem exclusivamente nos nós globais do elemento, ou seja, que as variações ΔM_{bi} e ΔM_{bj} são nulas, obtemos, mediante algumas manipulações algébricas, a seguinte expressão para a relação entre momento e rotação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{si} \\ \Delta M_{sj} \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{si} & 0 \\ 0 & S_{sj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{si} & 0 \\ 0 & S_{sj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{sj} + K_{(6,6)} & -K_{(3,6)} \\ -K_{(6,3)} & S_{si} + K_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{si} & 0 \\ 0 & S_{sj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

na qual:

$$\beta = (S_{si} + K_{(3,3)})(S_{sj} + K_{(6,6)}) - K_{(6,3)}K_{(3,6)} \quad (2.30)$$

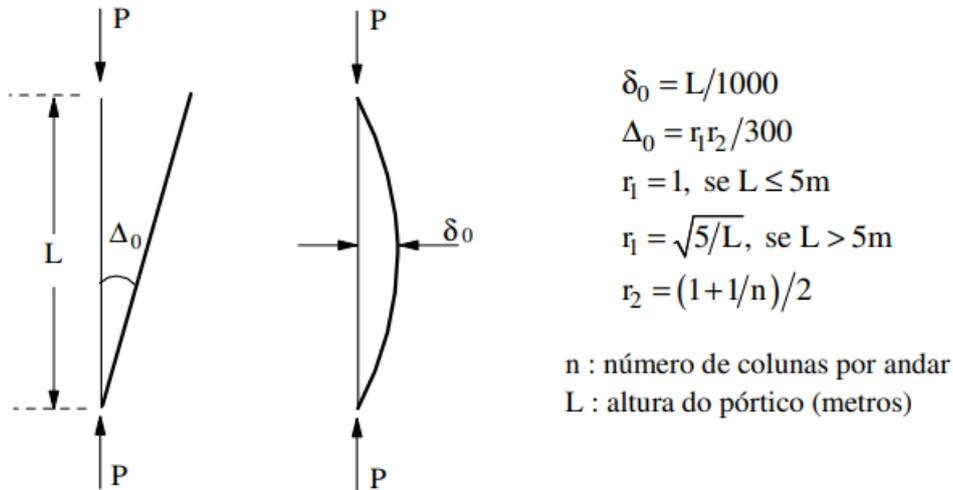


Figura 2.11 Imperfeições iniciais (ECCS, 1983)

Ao realizar as manipulações matriciais conforme descritas na Equação (2.29), é possível obter a expressão de equilíbrio para o elemento finito em sua condição inicial não deformada. Essa relação, expressa de forma incremental, é estabelecida no sistema local corrotacional da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{si} \\ \Delta M_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & S_{si} - S_{si}^2(K_{(6,6)} + S_{sj})/\beta & S_{si}S_{sj}K_{(3,6)}/\beta \\ 0 & S_{si}S_{sj}K_{(6,3)}/\beta & S_{sj} - S_{sj}^2(K_{(3,3)} + S_{si})/\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{si} \\ \Delta \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

considerando ΔP como o incremento de força axial e $\Delta \delta$ como a deformação axial no elemento, é possível reformular a Equação (2.31) de forma simplificada, isto é:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (2.32)$$

levando em conta o vetor $\Delta \mathbf{f}_c^T = \{\Delta P \quad \Delta M_{si} \quad \Delta M_{sj}\}$ como o vetor de forças nodais básicas e $\Delta \mathbf{u}_c^T = \{\Delta \delta \quad \Delta \theta_{si} \quad \Delta \theta_{sj}\}$ como o vetor de deslocamento naturais do elemento, onde o subscrito c denota o sistema de coordenadas empregado.

Para alcançar a expressão final de força-deslocamento para o elemento no sistema global de coordenadas (X, Y) , é necessário inicialmente converter a relação força-deslocamento estabelecida no sistema corrotacional (Equação 2.31) para o sistema local de coordenadas do elemento (x, y) . Aspectos detalhados desses sistemas de coordenadas estão ilustrados na Figura 2.12.

A interconexão entre as componentes de forças do sistema corrotacional e as componentes de forças do sistema local pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c \quad (2.33)$$

considerando $\mathbf{f}_i^T = \{P_i \quad Q_i \quad M_i \quad P_j \quad Q_j \quad M_j\}$ o vetor de forças nodais associado ao sistema local de coordenadas do elemento e \mathbf{T}_{cl} como a matriz de transformação, a qual é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{T}_{cl}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

sendo L o comprimento de elemento.

Através da equação (2.33), é possível expressar o vetor de incremento de forças no sistema local de coordenadas da seguinte forma:)

$$\mathbf{f}_i = \Delta(\mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c) = \mathbf{T}_{cl} \Delta \mathbf{f}_c + \Delta \mathbf{T}_{cl} \mathbf{f}_c \quad (2.35)$$

Na segunda parte da equação acima, temos dois termos distintos. O primeiro termo ($\mathbf{T}_{cl}\Delta\mathbf{f}_c$) reflete a contribuição do incremento nas forças nodais básicas. Já o segundo termo ($\Delta\mathbf{T}_{cl}\mathbf{f}_c$) surge do trabalho realizado por essas forças. Segundo a proposta de Chan e Chui (2000), esse trabalho pode ser equivalente à ($\mathbf{N}\Delta\mathbf{u}$), onde a matriz \mathbf{N} é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P/L & 0 & 0 & -P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P/L & 0 & 0 & P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

considerando que a conexão entre os deslocamentos nodais incrementais nos sistemas corrotacional e local é expressa por:

$$\Delta\mathbf{u}_c = \mathbf{T}_{cl}^T \Delta\mathbf{u} \quad (2.37)$$

a Expressão (2.34) pode ser reformulada da seguinte maneira:

$$\Delta\mathbf{f}_i = (\mathbf{T}_{cl} \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cl}^T + \mathbf{N}) \Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}_e \Delta\mathbf{u} \quad (2.38)$$

sendo $\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_{cl} \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{cl}^T + \mathbf{N}$ a matriz de rigidez do elemento no sistema local de coordenadas.

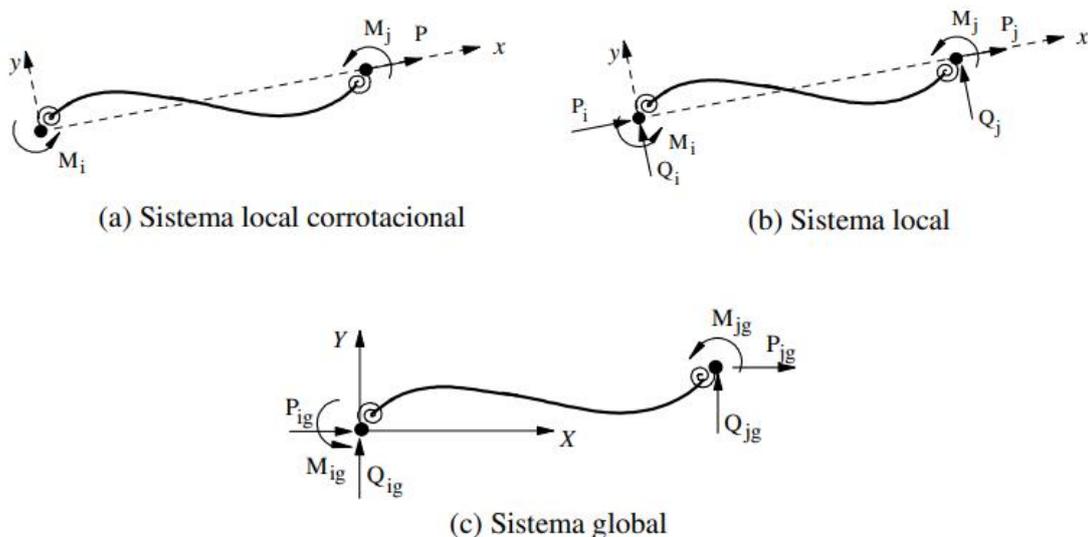


Figura 2.12 Transformações entre os sistemas corrotacionais e globais de coordenadas

A conversão da matriz do sistema local para o sistema global de coordenadas é executada mediante a utilização da equação $\mathbf{K}_{eg} = {}^t\mathbf{R}^T\mathbf{K}_e{}^t\mathbf{R}$ estabelecida anteriormente, conforme descrito na seção 2.4.1.

2.5 O Sistema Computacional CS-ASA

O sistema computacional adotado neste estudo para conduzir as análises é o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*). Desenvolvido por Silva (2009), o CS-ASA é uma ferramenta especializada em análise estrutural, empregando técnicas avançadas de análise numérica, abrangendo tanto o domínio estático quanto o dinâmico, por meio Método dos Elementos Finitos. Implementado em linguagem Fortran 95 (Chapman, 2003), o sistema foi estruturado em módulos, não apenas para aprimorar a eficiência na programação, mas também para facilitar a expansão, permitindo o desenvolvimento de novas funcionalidades de maneira mais simplificada.

Conforme evidenciado na Figura 2.13, o CS ASA adota a configuração convencional de outros programas fundamentados no Método dos Elementos Finitos, no qual o procedimento de simulação numérica é desmembrado em três fases distintas: pré-processamento, análise e pós-processamento. A etapa inicial envolve a leitura de arquivos de texto em formatos específicos. Posteriormente, as informações contidas nesses arquivos são processadas e registradas para posterior manipulação na fase de pós-processamento.

A fase inicial de pré-processamento, responsável pela entrada de dados, compreende a definição abrangente do modelo a ser submetido à análise. Nesse estágio, o usuário é incumbido de determinar o tipo de análise, seja ela linear ou não linear; o modelo estrutural a ser examinado, podendo ser treliça ou pórtico; e a natureza da análise, estática ou dinâmica. No caso de análises estáticas, é viável explorar o regime elástico ou inelástico. Além disso, são necessárias informações sobre as características geométricas e físicas do modelo estrutural, a discretização em elementos finitos, as condições de contorno e o carregamento aplicado.

Na realização de uma análise estática não linear, é crucial fornecer informações sobre a formulação escolhida, a qual deve ser selecionada de acordo com o efeito desejado na análise. Além da formulação, é necessário informar sobre os parâmetros que supervisionam a estratégia incremental-iterativa. Esses parâmetros englobam o número de passos de carga, o máximo

desejado de iterações, o incremento inicial do parâmetro de carga, as estratégias escolhidas para incremento de carga e iteração, além da tolerância para convergência.

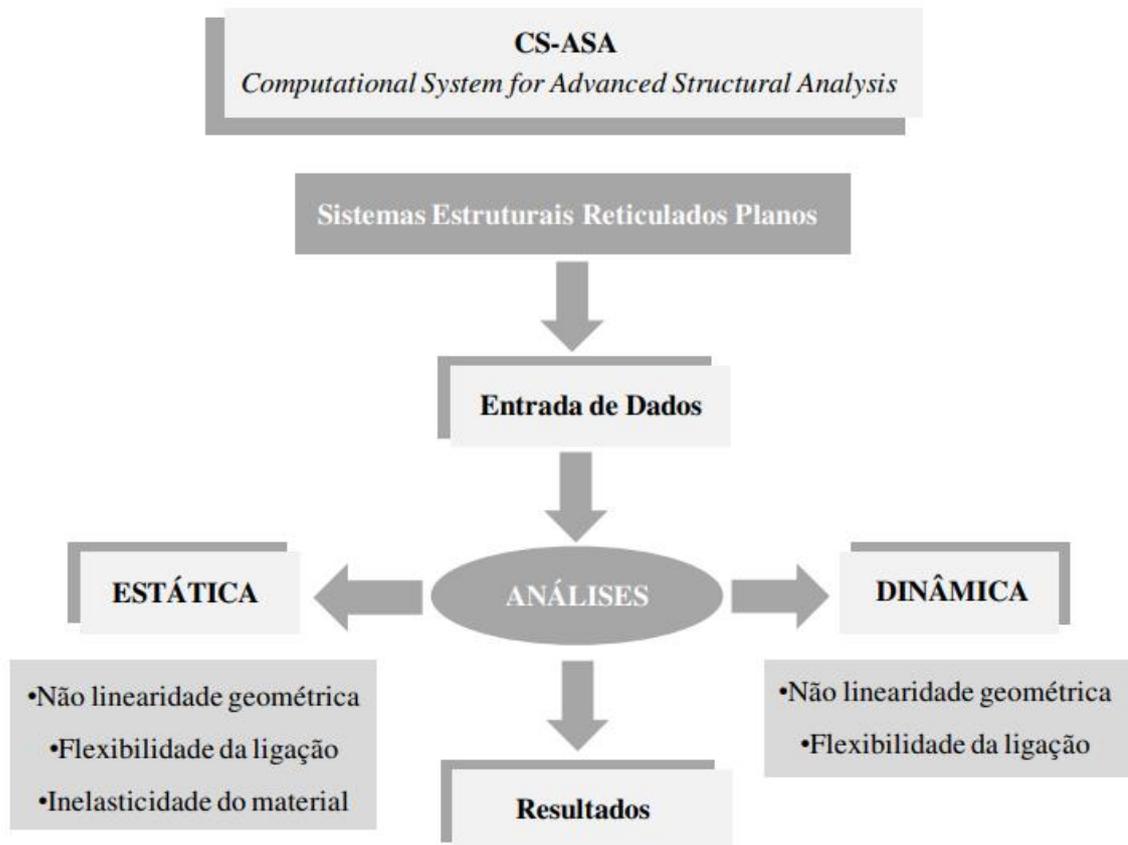


Figura 2.13 Programa CS-ASA Análises e Efeitos Considerados (SILVA, 2009)

A partir da especificação de todas as informações de entrada no sistema, uma malha de elementos finitos é gerada para o modelo estrutural em questão, dando início à análise numérica. Os principais resultados obtidos durante essa análise incluem os deslocamentos nodais e os esforços atuantes na estrutura. Em uma análise estática não linear, essas grandezas são determinadas a cada incremento de carga. Por outro lado, em uma análise dinâmica, variáveis adicionais, como velocidade e aceleração em cada intervalo de tempo, também são calculadas.

Finalmente, os resultados são exibidos em arquivos de saída. Prado (2012) elaborou um guia que aborda a utilização do programa CS-ASA.

3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR

3.1 Introdução

Para resolver um problema estático não linear em sistemas estruturais, emprega-se um método incremental, que envolve a aplicação gradual do carregamento, denominada incremento de carga, de forma acumulativa durante a análise até que toda a carga seja aplicada. Em cada etapa da análise incremental, as equações de equilíbrio são resolvidas através de um esquema iterativo, baseado no método de Newton-Raphson, seja na forma padrão ou modificada. A diferença entre esses métodos reside no fato de que, no método modificado, a matriz de rigidez é calculada apenas no início de cada passo de carga. No entanto, é importante notar que, em ambas as formas, o método de Newton-Raphson não é capaz de ultrapassar os pontos limites que possam surgir ao longo da trajetória de equilíbrio, uma vez que os resultados convergem próximo ao primeiro ponto limite. Além disso, é possível empregar técnicas de continuação, que incluem equações restritivas no sistema algébrico para superar esses pontos limites (SILVA,2009).

3.2 Metodologia de Solução

Um sistema estrutural é considerado como conservativo quando o trabalho realizado pelos esforços internos e externos não depende do trajeto percorrido pela estrutura durante a transição da condição de equilíbrio inicial (ou de referência) para outra configuração. Para que essa nova configuração seja aceitável, é necessário que ela atenda às relações de compatibilidade e cumpra as condições de contorno fundamentais do sistema (SILVA, 2009). Nessa configuração específica, a expressão para energia potencial total do sistema, denotada por Π , é dada por:

$$\Pi = U + \Omega \tag{3.1}$$

na qual U é a energia interna associada à deformação elástica e Ω é a energia potencial das cargas aplicadas.

Ao aplicar o Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste na divisão do meio contínuo em subdomínios conectados pelos pontos nodais, nos quais são especificados os graus

de liberdade a serem calculados, torna-se possível atingir o equilíbrio estrutural. Isso é realizado ao avaliar a energia potencial total, conforme expressa na Equação (3.2), e somar as contribuições de cada elemento. Nesse contexto, a condição de equilíbrio estático para os problemas estruturais abordados neste estudo pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi) \cong \mathbf{F}_e, \text{ ou } \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi) \cong \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.2)$$

onde, \mathbf{F}_i denota o vetor de forças internas, uma função não linear dos deslocamentos nodais \mathbf{U} , dos esforços internos nos membros P e dos efeitos da inelasticidade do material, Ψ . O termo \mathbf{F}_e representa o vetor de forças externas, sendo expresso como o produto do parâmetro de carga λ pelo vetor de forças externas de referência \mathbf{F}_r , que define a direção da solicitação externa atuante.

A solução de um problema estático não linear em um sistema estrutural geralmente é apresentada por meio de uma representação gráfica, que consiste no traçado de uma curva carga-deslocamento (ou carga-rotação). Na referida curva, a abscissa corresponde a uma componente de deslocamento de um nó específico, enquanto a ordenada representa o parâmetro de carga. Essa representação é conhecida como trajetória de equilíbrio, na qual cada ponto representa uma configuração de equilíbrio estático do sistema estrutural.

Para obter a resposta da estrutura sob uma solicitação específica, é essencial resolver equações algébricas não lineares. É conhecido que métodos eficazes para abordar essas equações devem ser capazes de percorrer o caminho de equilíbrio do sistema estrutural em análise. Adicionalmente, se necessário, devem identificar e atravessar todos os pontos críticos, tais como pontos limites que incluem os fenômenos de *snap-through* (salto dinâmico controlado por carga) e *snap-back* (salto dinâmico controlado por deslocamento); e pontos de bifurcação, que resultam de duas ou mais trajetórias de equilíbrio. Esses pontos são exemplificados na Figura 3.1.

A resolução da Equação (3.2) é obtida por meio de um processo incremental e iterativo, organizado em duas etapas. Inicialmente, a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, escolhe-se o incremento inicial de carga $\Delta\lambda^0$ procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Com o $\Delta\lambda^0$ determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais, $\Delta\mathbf{U}^0$. Os $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$ caracterizam a chamada solução predita que, a

princípio, não satisfaz a Equação (3.2), pois essa é uma função não linear de deslocamentos. Na segunda etapa da solução, denominada corretiva, o objetivo é corrigir as forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos por meio de um processo iterativo, utilizando o método de Newton-Raphson. As forças internas são, então, comparadas com o carregamento externo, resultando na quantificação do desequilíbrio entre forças internas e externas. O processo corretivo é repetido até que algum critério de convergência seja satisfeito, levando a estrutura ao estado de equilíbrio. A Figura 3.2 ilustra a metodologia incremental-iterativa para um acréscimo de carga único.

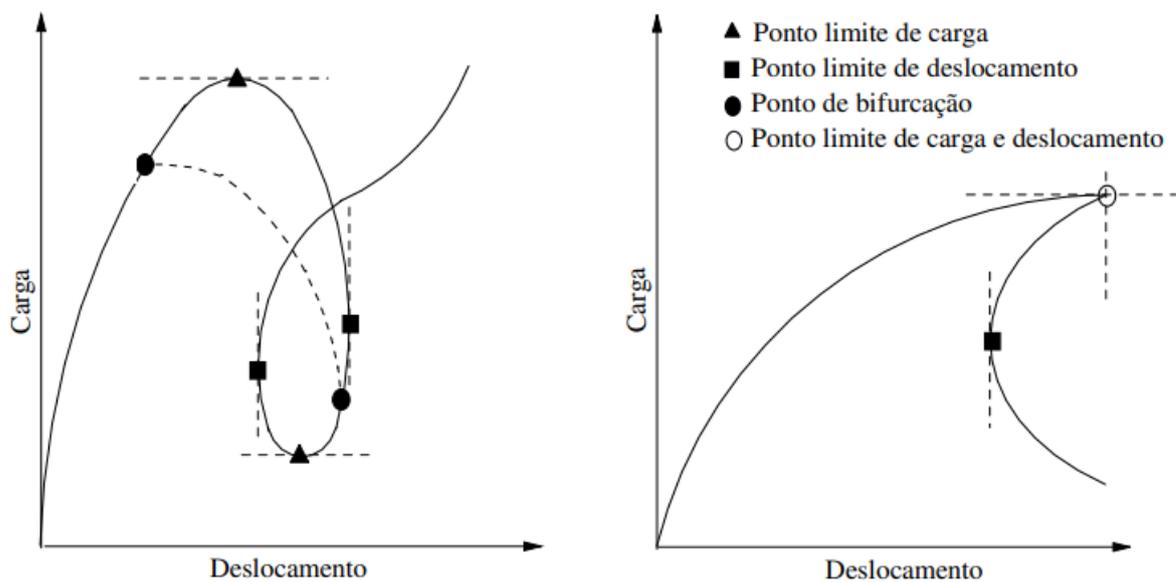


Figura 3.1 Trajetórias de equilíbrio (SILVEIRA, 1995)

Segue abaixo alguns dos passos fundamentais da metodologia de análise não linear. Antes de prosseguir, é essencial realizar algumas observações referentes à notação que será empregada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga, $t + \Delta t$;
- k se refere ao contador do número de iterações em um determinado passo de carga. Para k

= 0 tem-se a solução incremental predita, e para outros diferentes de zero tem-se o ciclo iterativo;

- λ e \mathbf{U} definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

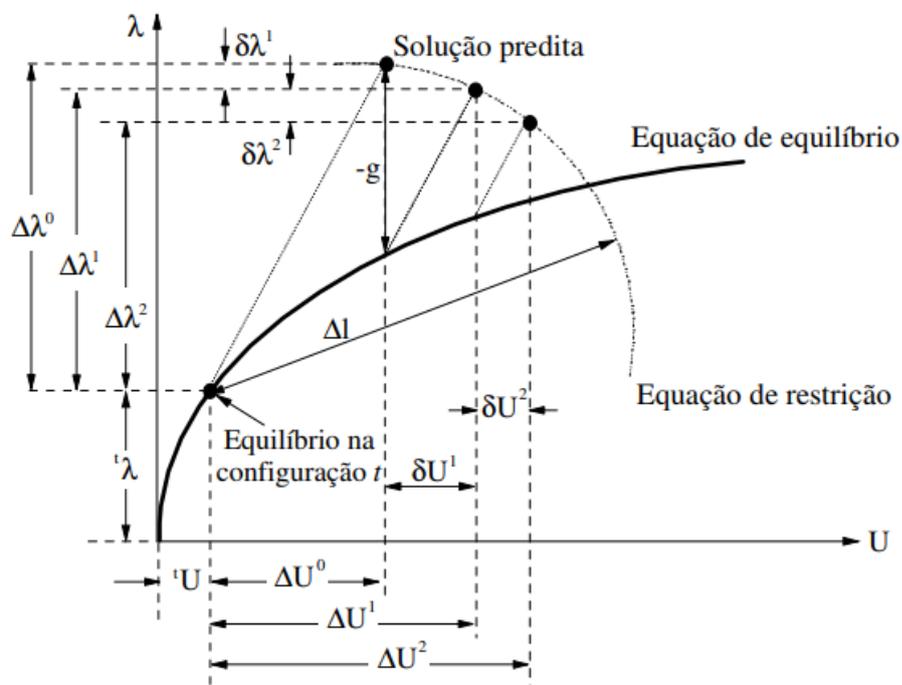


Figura 3.2 Solução incremental-iterativa (SILVA, 2009)

3.2.1 Solução Incremental Predita

Para começar, é fundamental realizar a etapa de obtenção da solução incremental predita (ou solução inicial tangente, $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$). Essa fase envolve a construção da matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} , utilizando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura. Posteriormente, determina-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais, $\delta\mathbf{U}_r$, por meio da seguinte relação:

$$\delta \mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.3)$$

Através de uma estratégia de incremento progressivo de carga, torna-se viável realizar uma escolha automatizada do aumento inicial do parâmetro de carga. Essa escolha pode ser condicionada por uma equação de restrição adicional aplicada ao problema, conforme mostrada na Figura 3.2, para a restrição do comprimento de arco (CRISFIELD, 1981;1991). Na sequência serão apresentadas as particularidades da estratégia adotada para incremento de carga neste estudo.

Depois de fixar o incremento inicial de carga, os deslocamentos nodais incrementais tangenciais $\Delta \mathbf{U}^0$, são determinados escalonando-se, $\delta \mathbf{U}_r$ da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{U}^0 = \Delta \lambda^0 \delta \mathbf{U}_r \quad (3.4)$$

Dessa maneira, é possível atualizar o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais utilizando as relações a seguir:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta \lambda^0 \quad (3.5a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^0 \quad (3.5b)$$

nas quais ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ representam o ponto de equilíbrio alcançado no último estágio de carga, conforme mostrado na Figura 3.2.

As expressões (3.5a) e (3.5b) ocasionalmente não atendem à condição de equilíbrio do sistema. Consequentemente, é essencial realizar iterações adicionais a fim de reestabelecer o equilíbrio.

3.2.2 Ciclo de Iterações: Método de Newton-Raphson

Ao empregar o método de Newton-Raphson na resolução de problemas não lineares, o parâmetro de carga é mantido constante ao longo do ciclo iterativo. No entanto, para obter de maneira completa o caminho de equilíbrio, considerando possíveis passagens por pontos críticos, como pontos limites e/ou pontos de bifurcação, é essencial permitir a variação desse parâmetro em cada iteração. Uma proposta apresentada por Batoz e Dhatt (1979) sugere uma

abordagem em que a alteração nos deslocamentos nodais é regida pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(K-1)}\delta\mathbf{U}^K = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(K-1)}, \lambda^k), k \geq 1 \quad (3.6)$$

Na equação acima, \mathbf{g} , referido como vetor gradiente, denota o vetor de forças desequilibradas, cujo valor é nulo quando o equilíbrio estrutural é alcançado. Vale ressaltar que \mathbf{g} é uma função dos deslocamentos nodais totais, $\mathbf{U}^{(k-1)}$ calculados na última iteração, e do valor atual do parâmetro de carga total, λ^k , expresso como:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.7)$$

onde $\delta\lambda^k$ é a correção do parâmetro de carga. Ao substituir a expressão (3.7) em (3.6) e realizar as devidas manipulações algébricas matriciais, obtém-se à seguinte equação procurada para trabalhar durante o ciclo iterativo:

$$\mathbf{K}^{(K-1)}\delta\mathbf{U}^K = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.8)$$

A partir da expressão (3.8), os deslocamentos nodais obtidos de maneira iterativa podem ser decompostos em duas partes, resultando em:

$$\delta\mathbf{U}^K = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.9)$$

sendo:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.10)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.11)$$

onde, $\delta\mathbf{U}_g$ representa a correção que seria alcançada ao aplicar o método de Newton-Raphson com a abordagem convencional de incremento constante no parâmetro de carga, enquanto $\delta\mathbf{U}_r$ é o vetor de deslocamentos obtidos de forma iterativa, resultante da aplicação de \mathbf{F}_r .

Após obter a solução iterativa com $\delta\lambda^k$ e $\delta\mathbf{U}_r^k$ procede-se à atualização das variáveis incrementais do problema utilizando as relações a seguir:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.12)$$

$$\Delta\mathbf{U}^K = \Delta\mathbf{U}^{(K-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.13)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais têm-se:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.14)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.15)$$

Assim como em qualquer procedimento numérico, a solução obtida é apenas uma estimativa da solução exata. Por isso, é essencial estabelecer critérios que determinem o término do processo iterativo. Isso ocorre quando um ou ambos os critérios de convergência são atendidos. O primeiro critério de convergência, calculado no início da iteração atual utilizando parâmetros da iteração anterior, é formulado com base nas relações de forças e é definido como:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.16)$$

o numerador, representa a norma Euclidiana do vetor de forças desequilibradas, obtida ao calcular o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior. No denominador, está a norma Euclidiana do vetor de incremento de carga externa, enquanto ζ corresponde a um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada.

O segundo critério de convergência segue relações de deslocamento e é sempre avaliado ao término da iteração atual. Sua definição é a seguinte:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.17)$$

considerando que o numerador representa a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos e o denominador corresponde a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, ambos referentes à iteração atual.

Tabela 3.1 Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear (SILVA, 2009)

1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros particulares referentes ao tipo de análise.
2. Define o vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{F}_r , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado.
3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^t\lambda$
4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:** $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
 - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente: $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi)$
 - 4b. Resolve: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
 - 4c. Define $\Delta\lambda^0$ usando a estratégia de incremento de carga
 - 4d. Determina: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
 - 4e. Atualiza as variáveis na configuração $t + \Delta t$: ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e $\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:** $k = 1, 2, 3, \dots$
 - 5a. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
 - 5b. Calcula o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
 - 5c. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}
 - 5d. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, usando a estratégia de iteração
 - 5e. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$, com:
$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$$
 - 5f. Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :
 - a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
 - b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
 - 5g. Verifica a convergência:

SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
 - 5h. Retorna ao passo 5
6. Atualiza a variável Ψ e outras que forem necessárias
7. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**

4 ESTUDOS DE CASOS

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta o resultado de análises não lineares, elástica e inelástica, de diferentes sistemas estruturais em aço: viga biengastada, portal simples, pórtico simples bi rotulado, pórtico com restrição ao movimento lateral e pórtico de quatro andares. As investigações são fundamentadas na metodologia numérica discutida nos capítulos anteriores, e as respostas obtidas são comparadas estudados na com aquelas encontradas na literatura.

Nos exemplos desta seção, o método de Newton-Raphson padrão, e a estratégia do incremento direto do parâmetro de carga, com iteração a carga constante será adotada, pois, o principal interesse é a obtenção da carga limite do sistema estrutural. Dessa forma, incrementos de carga muito pequenos, de forma a avaliar com precisão a carga de colapso do sistema, foram considerados, além de adotar uma tolerância $\zeta = 10^{-3}$ no processo iterativo de solução. Para simular os efeitos de segunda ordem a formulação descrita na Seção 2.4 é usada, e a inelasticidade do aço é avaliada através da formulação proposta por Chan e Chui (2000).

4.2 Viga Biengastada

A Figura 4.1 ilustra o sistema estrutural inicialmente analisado neste capítulo. Alguns pesquisadores, incluindo Chen et al. (1996) e Chan e Chui (2000), analisaram o comportamento inelástico dessa viga. O objetivo aqui é avaliar o método rótula elasto-plástica e plástica-refinada em um contexto de problema relativamente simples, onde prevalece o comportamento de flexão da viga.

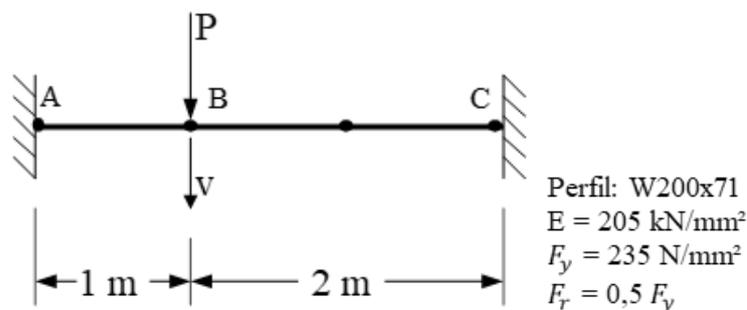


Figura 4.1 Viga biengastada: geometria, carregamento e discretização

A viga é constituída pelo perfil W200x71. O módulo de elasticidade e a tensão de escoamento são, respectivamente, 205kN/mm² e 235N/mm². Para a tensão residual, adotou-se 50% da tensão de escoamento. O valor do incremento do parâmetro de carga adotado é de 0,1. A estrutura foi discretizada em três elementos e está submetida a uma solicitação concentrada P aplicada no ponto B , conforme ilustrado também na Figura 4.1.

Na Figura 4.2(a) é apresentada a trajetória de equilíbrio para a análise não linear elástica, na qual admite-se que o material permanece em regime elástico independente da intensidade da solicitação. Já a Figura 4.2(b) exhibe as curvas carga-deslocamento obtidas com a análise plástica, através das abordagens plástica-refinada e elasto-plástica. Na obtenção de tais curvas de equilíbrio, foi considerado o deslocamento vertical, v , na seção B . Para efeitos de comparação, foram utilizadas as trajetórias obtidas por Chan e Chui (2000). Ao analisar a Figura 4.2(b), é evidente que as trajetórias apresentam boa concordância comparadas às curvas identificadas por esse autor.

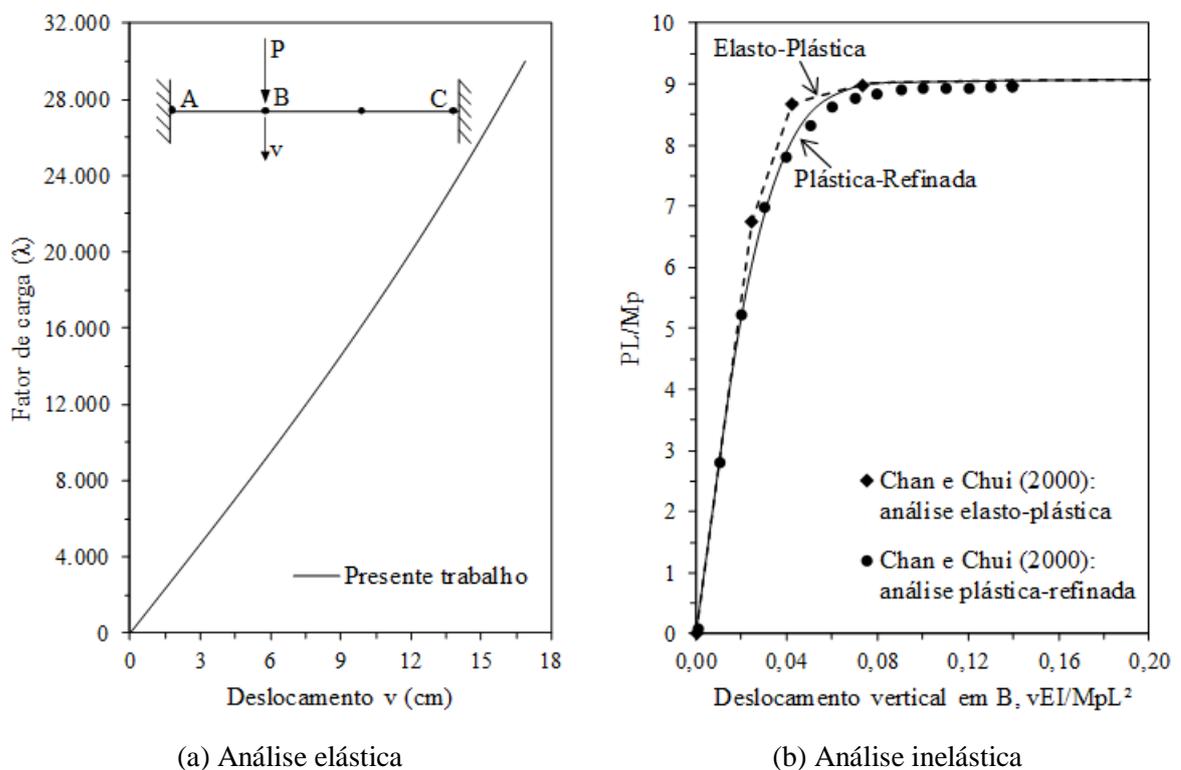


Figura 4.2 Trajetórias de equilíbrio

Observa-se ainda, comparando as Figuras 4.2a-b que as solicitações limites de estabilidade são significativamente menores na análise inelástica em comparação à elástica. Sendo assim, verifica-se a importância de se estabelecer uma representação adequada para o comportamento do material.

As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam a solicitação normalizada PL/M_p , onde P representa a solicitação, L é o comprimento da viga e M_p é o momento de plastificação, resultando na formação das rótulas em pontos específicos da estrutura. Nas análises elasto-plásticas, é evidente que o valor da carga de ocorrência de rótula no ponto A está em conformidade com os registros da literatura. Na seção B não houve formação de rótula na análise plástica-refinada, diferindo dos resultados encontrados na literatura.

Tabela 4.1 Cargas de ocorrência de rótulas: análises elasto-plásticas

Referência	Rótula em A	Rótula em B	Rótula em C
Presente trabalho	6,75	9,08	9,08
Chen <i>et al.</i> (1996)	6,76	8,65	8,99
Chan e Chui (2000)	6,74	8,67	8,91

Tabela 4.2 Cargas de ocorrência de rótulas: análises plástica-refinadas

Referência	Rótula em A	Rótula em B	Rótula em C
Presente trabalho	9,02	-	9,02
Chen <i>et al.</i> (1996)	8,31	8,76	8,91
Chan e Chui (2000)	8,25	8,82	8,97

4.3 Portal Simples

A parte em questão investiga o comportamento da estrutura mostrada na Figura 4.3, um portal simples biengastado. As colunas desse pórtico são formadas pelos perfis HEB300, cujas dimensões de 300mm tanto para a altura (D) quanto para a largura da mesa (B_f). Por sua vez, a viga é composta pelo perfil HEA340, caracterizado por dimensões 330mm e 300mm para a altura e largura da mesa. Os parâmetros adotados para o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento foram, respectivamente, 205GPa e 235MPa. No que diz respeito à tensão residual, em conformidade com as diretrizes do ECCS (1983) para relação $D/B_f \leq 1,2$, foi adotado equivalente a 50% da tensão de escoamento. Para o incremento do parâmetro de carga usa-se o valor de 0,001.

A viga foi discretizada em quatro elementos, enquanto cada coluna foi dividida em dois. Na mesma representação gráfica (Figura 4.3), além de exibir as solicitações aplicadas à estrutura, evidencia-se uma imperfeição inicial de Δ_0 nas colunas. Nota-se ainda que nos extremos da viga são aplicadas cargas concentradas verticais de intensidade λP , e no topo da coluna à esquerda, uma carga horizontal de $0,0125\lambda P$ está presente. O parâmetro de carga λ é progressivamente ajustado até que a carga de colapso seja atingida ao longo do processo.

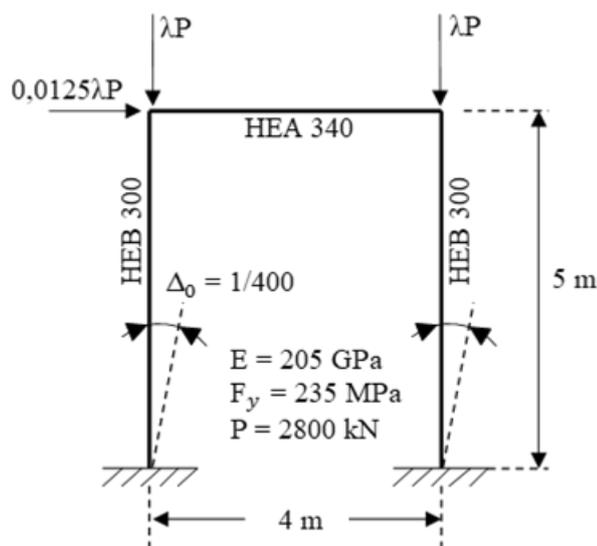


Figura 4.3 Pórtico simples: geometria e carregamento

As Figuras 4.4a-b exibem as curvas carga-deslocamento encontradas efetuando as análises não lineares elástica e inelástica, respectivamente. O deslocamento horizontal, u , no topo da coluna à direita foi controlado durante o processo incremental de análise. Para efeito de comparação, usam-se as trajetórias obtidas por Chen et al. (1996) e Vogel (1985).

Observando as Figuras supracitadas pode-se perceber que as trajetórias de equilíbrio não exibem grandes discrepâncias em relação às curvas desses autores. Os fatores de sollicitações máximos estimados pelos métodos da rótula plástica refinado e elasto-plástica, adotados neste estudo assim como pelo método da rótula plástica refinado utilizado por Chen *et al.* (1996), demonstram ser inferiores aos fatores obtidos pelo método da zona plástica empregado por Vogel (1985). Detalhes sobre os fatores de carga críticos serão fornecidos posteriormente.

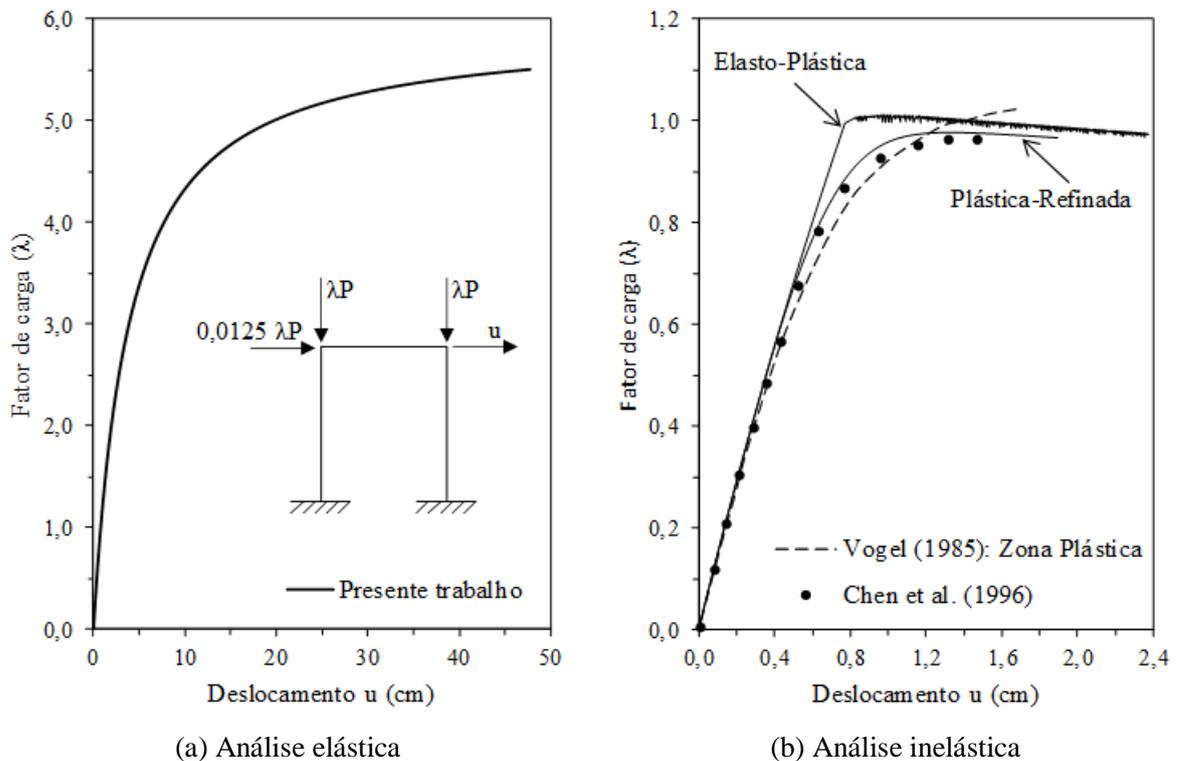


Figura 4.4 Trajetórias de equilíbrio

A Figura 4.5(a) ilustra como a força axial P e do momento fletor M variam na seção transversal da base da coluna à direita durante o carregamento. Além disso, as superfícies de

resistência plástica e de início de escoamento são apresentadas. Nota-se que a distribuição da plasticidade é predominantemente influenciada pela ação da força axial. O colapso da estrutura está associado à instabilidade inelástica das colunas, destacada pelo aumento significativo do deslocamento horizontal no topo da estrutura, u , e não pela formação de rótulas plásticas. É importante notar que as forças internas não atingem a superfície de plastificação.

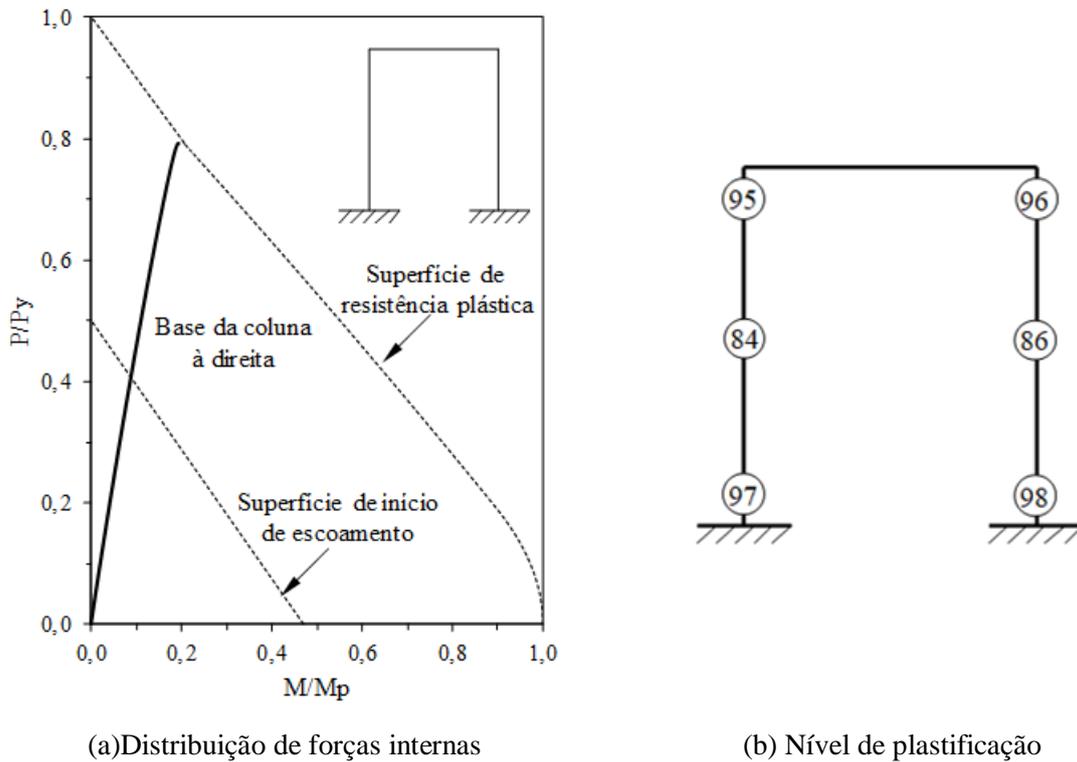


Figura 4.5 Distribuição de forças internas na base da coluna à direita e índice de plastificação dos membros da estrutura

O nível de escoamento das seções ao se atingir a carga de limite de estabilidade é exibido na Figura 4.5(b). O índice de escoamento, representado em porcentagem dentro dos círculos, é calculado por meio da seguinte relação:

$$p = 100(1 - \psi) \tag{4.1}$$

na qual ψ é o parâmetro relacionado ao efeito de plastificação na extremidade do elemento.

Esse coeficiente é unitário quando a seção está no regime elástico ($p = 0$), e se anula quando a mesma atinge completa plastificação ($p = 100\%$). Embora essa definição do índice de escoamento não proporcione uma representação "exata" do grau de escoamento, ela fornece informações úteis sobre a localização de seções críticas ou áreas com alto grau de plastificação nos sistemas estruturais.

Ao examinar a Figura 4.5(b), nota-se uma significativa redução na rigidez das colunas da estrutura, especialmente em suas extremidades, a base e o topo, são superiores em comparação com a região central. No estudo sobre zona plástica realizado por Ziemian (1990), aproximadamente 60% da área da seção transversal das colunas experimentou plastificação.

A representação gráfica na Figura 4.6 exhibe os diagramas de momento fletor e força axial associados à carga de colapso, cujo valor é também indicado na Figura por meio do fator de carga λ . Vale destacar que, embora não esteja explicitamente ilustrado nessa Figura, Vogel (1985) determinou que o valor limite para o fator de carga é de 1,022.

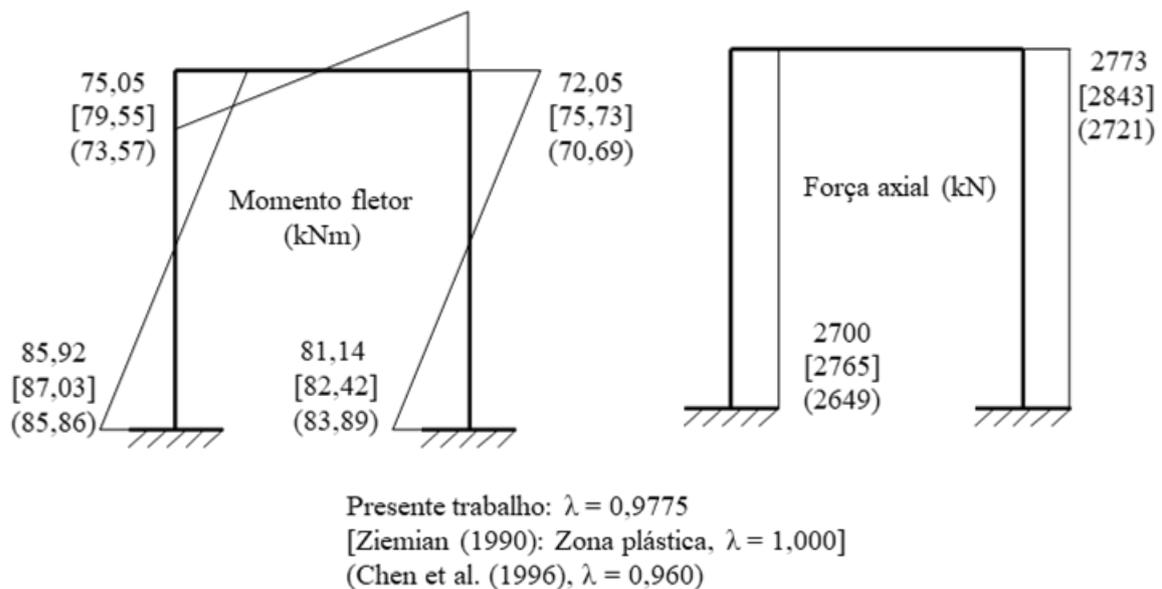


Figura 4.6 Cargas de colapso e diagramas de momento fletor e força axial

O resultado obtido na Figura 4.6 é comparado com os resultados alcançados por Ziemian (1990) por meio do método da zona plástica e com os fornecidos por Chen *et al.* (1996), que utilizou, como mencionado anteriormente, o método da rótula plástica refinado. Observa-se uma boa concordância entre os resultados encontrados e os apresentados na literatura. É importante notar que as forças axiais nas vigas são insignificantes quando comparadas com as forças axiais desenvolvidas nas colunas e, por esse motivo, não foram detalhadas.

4.4 Pórtico Simples Bi Rotulado

A Figura 4.7 ilustra o pórtico simples bi rotulado estudado nesta seção. A solicitação de colapso desse pórtico foi inicialmente investigada por Lui e Chen (1988) e posteriormente reanalisada por Chan e Chui (2000), cujos resultados numéricos são utilizados como referência aqui neste trabalho.

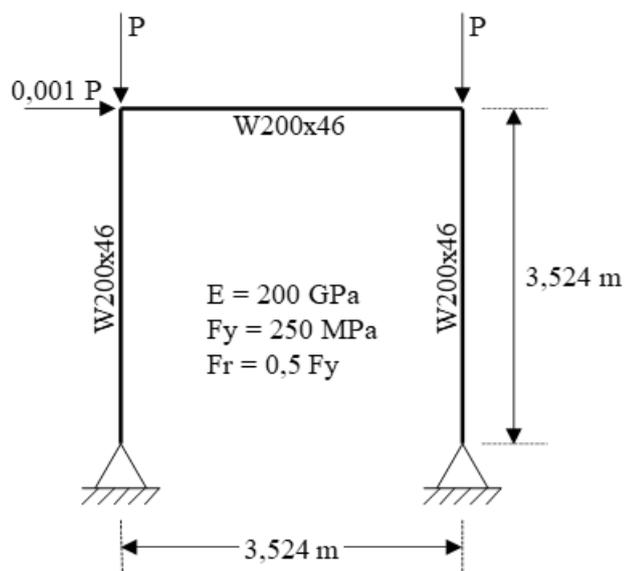


Figura 4.7 Pórtico simples bi rotulado: geometria e carregamento

O pórtico é composto pelo perfil W200x46, com o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento, sendo, respectivamente, 200GPa e 250MPa. Para a tensão residual, foi adotada o correspondente a 50% da tensão de escoamento. Utiliza-se 1 para o incremento do parâmetro

de carga. A estrutura foi discretizada em um único elemento por membro e está sujeita a duas cargas concentradas verticais, denotadas por P , aplicadas no topo de cada coluna. Adicionalmente, a fim de produzir uma instabilidade lateral, uma pequena força horizontal, com intensidade de $0,001P$, é aplicada no topo da coluna da esquerda.

A representação gráfica nas Figuras 4.8a-b mostra a variação entre o fator de carga aplicado e o deslocamento horizontal, u , no ponto mais alto da coluna localizada à direita. Na Figura 4.8(a), a trajetória de equilíbrio da análise não linear elástica é apresentada. Na Figura 4.8(b) as trajetórias de equilíbrio obtidas com a análise inelástica são exibidas. Para fins de comparação, utilizam-se os resultados obtidos por Chan e Chui (2000). Ao examinar a Figura 4.8(b), percebe-se que tanto a análise plástica refinado quanto a elasto-plástica apresentaram resultados em boa concordância com aqueles encontrados na literatura. Comparando as análises elástica e inelástica percebe-se novamente como a solicitação limite de estabilidade numa análise elástica de segunda ordem é superestimada comparada à análise na qual o comportamento do material é não linear.

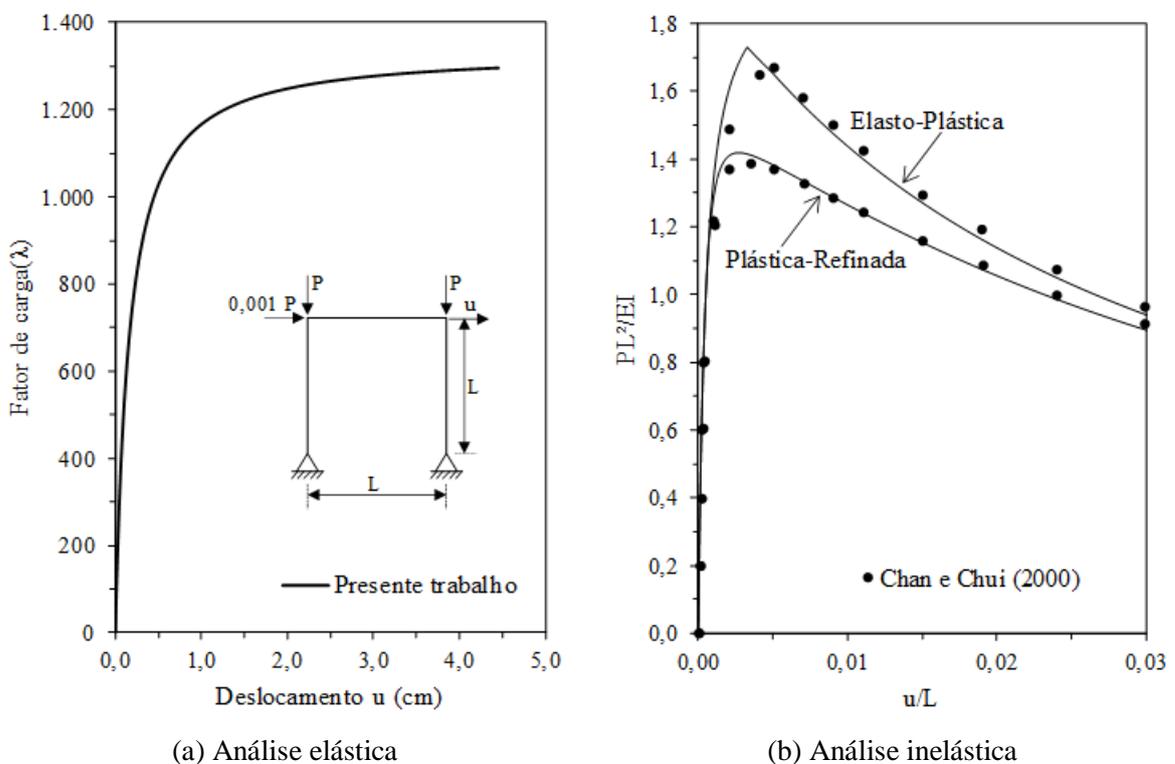


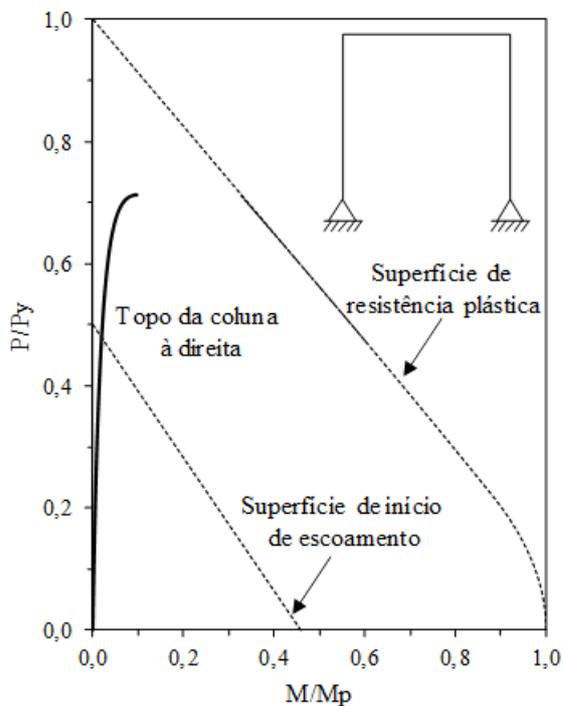
Figura 4.8 Trajetórias de equilíbrio para o portal simples

A Tabela 4.3 apresenta as cargas limites obtidas nas análises elasto-plástica e plástica-refinada. Nesse caso, os resultados encontrados são menores quando se considera o efeito das tensões residuais na análise.

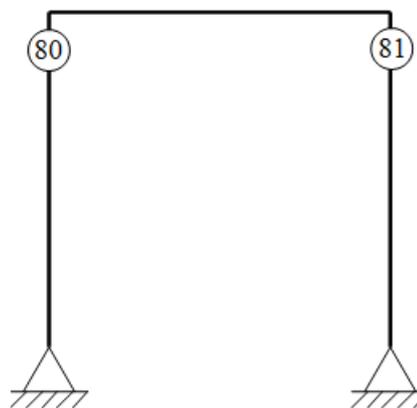
Tabela 4.3 Cargas limites adimensionalizadas

Referência	Análise elasto plástica	Análise plástica refinada
Presente Trabalho	1,73	1,42
Chan e Chui (2000)	1,68	1,39

A Figura 4.9(a) ilustra as superfícies de início de escoamento e de resistência plástica na parte superior da coluna à direita. Conforme evidenciado na Figura, é perceptível que a propagação de deformação plástica é impactada pela força axial. Observa-se que as forças internas não alcançam a superfície de resistência plástica, resultando na ausência de formação de rótula. Portanto, a falha da estrutura ocorre devido ao deslocamento horizontal excessivo no topo da coluna à direita (efeitos de segunda ordem).



(a) Distribuição de forças internas



(b) Nível de plastificação

Figuras 4.9 Distribuição de forças internas e índice de plastificação dos membros da estrutura

Conforme descrito na Seção 4.3, a Figura 4.9(b) apresenta os elementos estruturais evidenciando o nível de plastificação no momento do colapso. Destaca-se uma considerável diminuição de rigidez no topo das colunas, expressa em porcentagem.

4.5 Pórtico com Restrição ao Movimento Lateral

A Figura 4.10 ilustra o próximo pórtico a ser analisado. Nessa estrutura é imposta a uma restrição ao movimento lateral, simulando um contraventamento por meio de um membro inclinado ou um sistema rígido, como uma parede de concreto. Na Figura 4.10(a), o pórtico é apresentado com as bases engastadas, enquanto na Figura 4.10(b), as bases são devidamente rotuladas. Carga uniformemente distribuída na viga e forças verticais concentradas em suas extremidades atuam nesses dois sistemas estruturais.

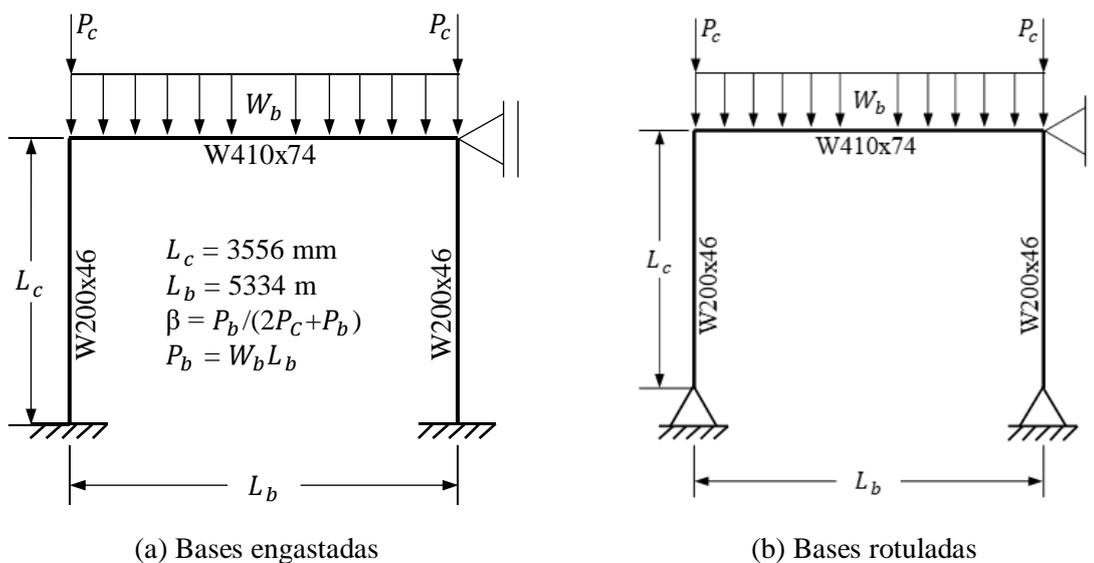


Figura 4.10 Pórticos com restrição ao movimento lateral

A viga, composta por um perfil W410x74, foi discretizada em oito elementos finitos. Por sua vez, as colunas empregam o perfil W200x46 e foram divididas em quatro elementos. Essa divisão visa uma representação mais precisa da imperfeição geométrica, adotando uma forma

senoidal, com o valor máximo no ponto central equivalente a $L_c/1000$. Na Figura 4.11 indica-se tanto a imperfeição geométrica inicial quanto a discretização realizada.

Além disso, em conformidade com a norma ECCS (1983), as tensões residuais nas vigas e colunas foram consideradas como sendo 30% e 50% da tensão de escoamento, respectivamente. O módulo de elasticidade utilizado na análise é 205kN/mm^2 , enquanto a tensão de escoamento é estabelecida em 235N/mm^2 . Para o incremento do parâmetro de carga utiliza-se 0,001.

A análise dessa estrutura foi conduzida por Chen *et al.* (1990) utilizando o método da zona plástica, enquanto Liew *et al.* (1993) e Chan e Chui (2000) abordaram-na por meio da técnica de rótulas plásticas. Neste estudo, os resultados foram obtidos considerando um fator de carga β , conforme indicado na Figura 4.10, com o valor de 0,34. Esse parâmetro estabelece a relação entre a carga na viga e a carga total aplicada na estrutura.

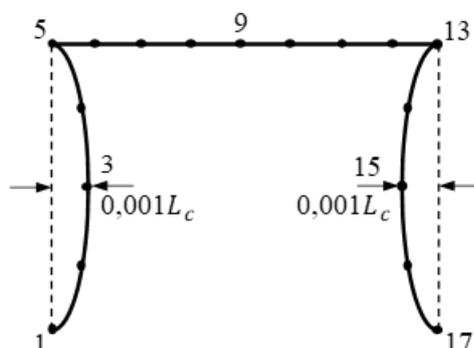


Figura 4.11 Discretização e imperfeição geométrica

A Figura 4.12a-b apresenta as superfícies de início de escoamento e de plastificação, juntamente com as forças internas associadas às seções escolhidas. No contexto do pórtico rotulado, Figura 4.12(a), as seções consideradas compreendem o topo da coluna à esquerda e o centro da viga, representados pelos pontos nodais 5 e 9, respectivamente. Em contrapartida, para o pórtico engastado, Figura 4.12(b), foram considerados, além dos pontos nodais 5 e 9, já mencionados, o ponto nodal 1 na base da coluna à esquerda. Esses pontos nodais podem ser observados na Figura 4.11.

Ao analisar os resultados, torna-se evidente que, à medida que a força axial aumenta no topo das colunas, as forças internas nessa seção direcionam-se para superfície de resistência plástica, formando uma rótula. A partir desse ponto, há uma redistribuição de momentos fletores na viga, resultando no alcance do momento plástico no centro da viga. Conseqüentemente, a estrutura se torna instável (hipostática) após a formação de três rótulas plásticas. Os resultados foram comparados aos encontrados por Chen *et al.* (1990) como indicado na Figura.

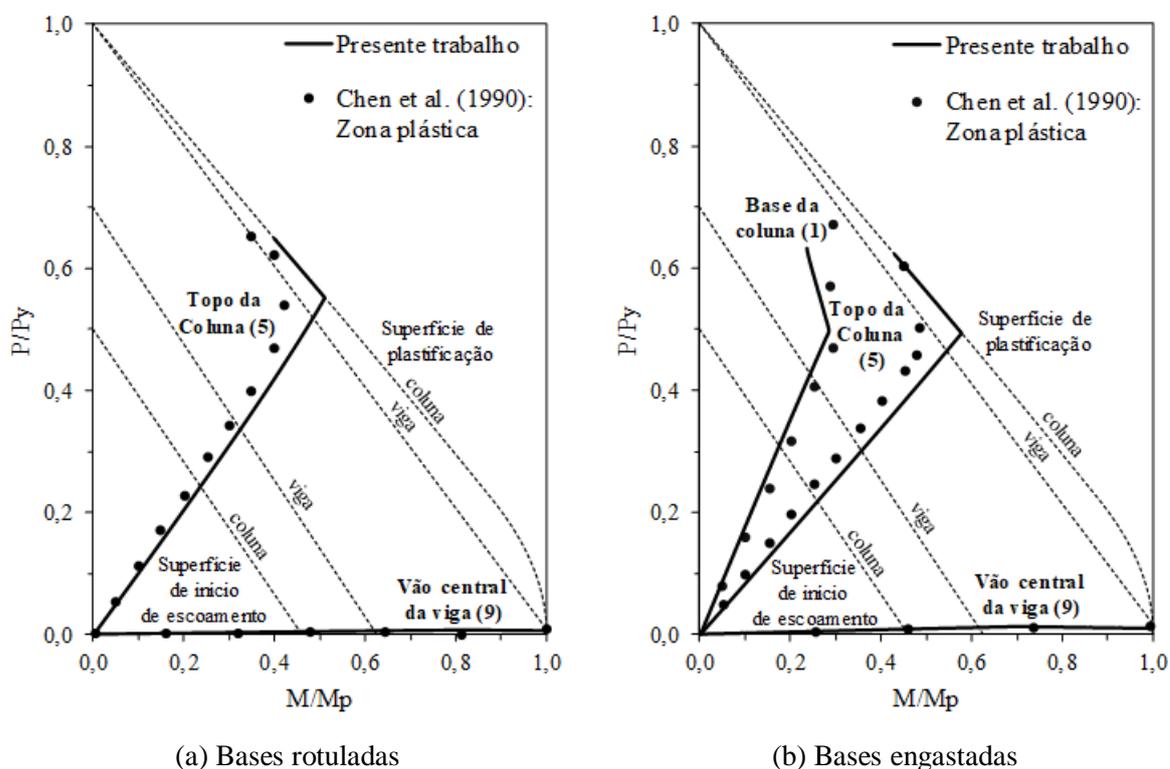
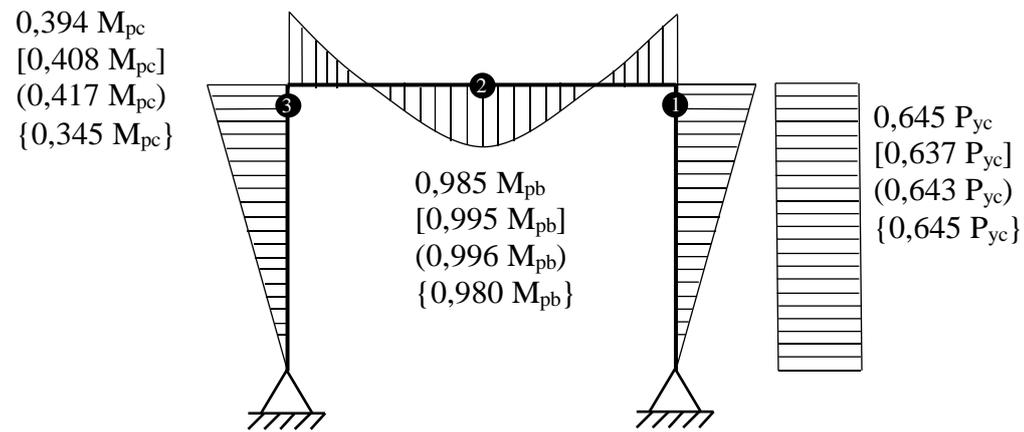


Figura 4.12 Distribuição das forças internas

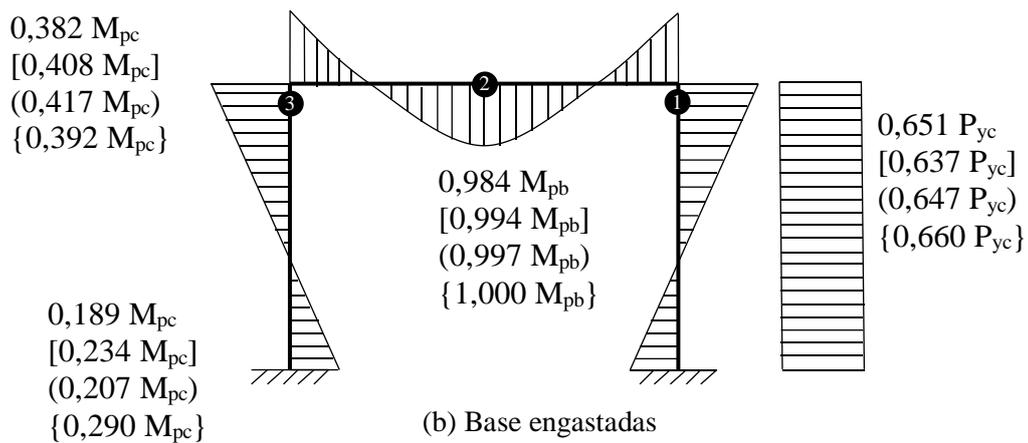
A distribuição do momento fletor e da força axial, bem como as rótulas formadas durante o colapso da estrutura, são apresentados na Figura 4.13a-b. Os resultados obtidos foram comparados com os estudos por Liew *et al.* (1993), Chan e Chui (2000) e Chen *et al.* (1990), evidenciando uma notável concordância entre os resultados.

A Figura 4.13 não apenas destaca as rótulas previamente mencionadas, mas também apresenta a sequência de sua formação, indicada pelos números dispostos dentro do círculo.

Nota-se que os momentos de plastificação são denotados por M_p , enquanto a força axial de escoamento é representada por P_y . Além disso os subscritos b e c referem-se, respectivamente, à viga e à coluna.



(a) Base rotuladas



(b) Base engastadas

Presente trabalho

Valores normalizados: [Liew *et al.* (1993): Rótula plástica]
(Chan e Chui (2000): Rótula plástica)
{Chen *et al.* (1990): Zona plástica}

● Sequência de formação de rótulas plástica

Figura 4.13 Diagramas de momento fletor e força axial

Por fim, as Figuras 4.14a-b e 4.15a-b exibem as trajetórias de equilíbrio, tanto para a análise não linear elástica quanto para a análise plástica, utilizando o método da rótula plástica.

Para traçar essas trajetórias, foram considerados o deslocamento horizontal no centro da coluna à esquerda e o deslocamento vertical no meio do vão da viga. Mais uma vez, observa-se que a solitação limite na análise inelástica é inferior àquela obtida na análise elástica.

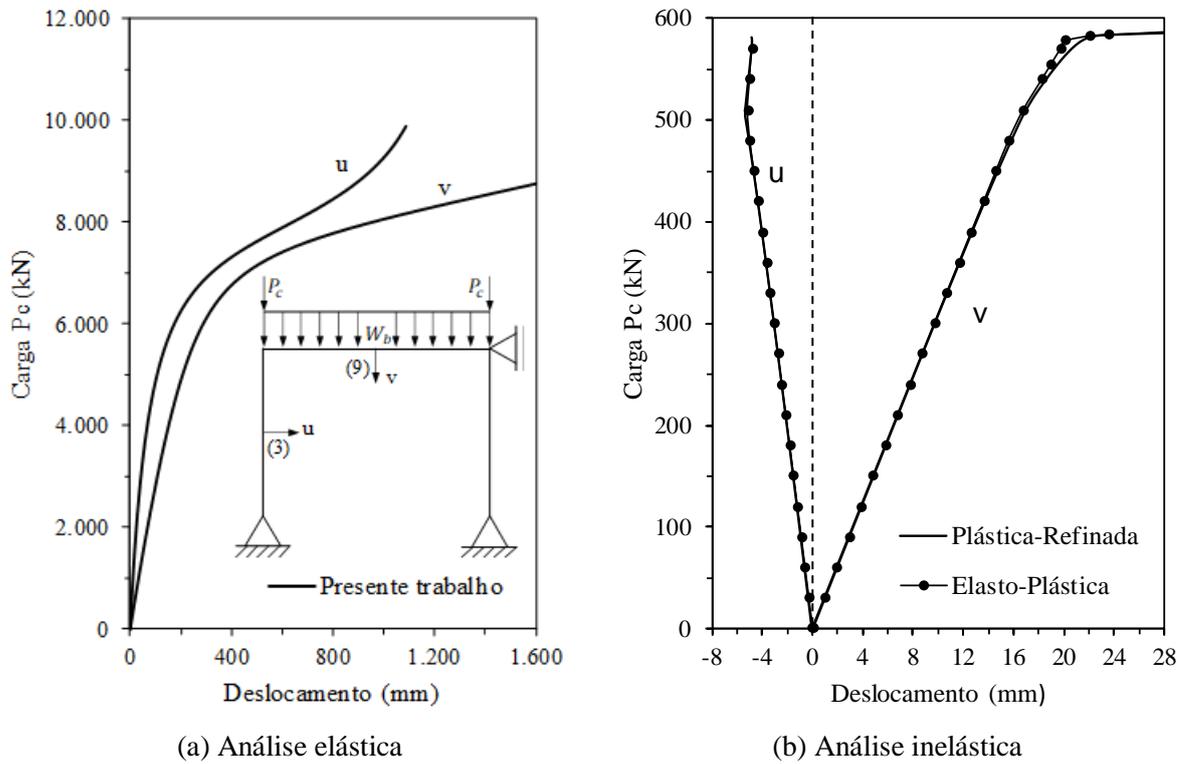


Figura 4.14 Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com bases rotuladas

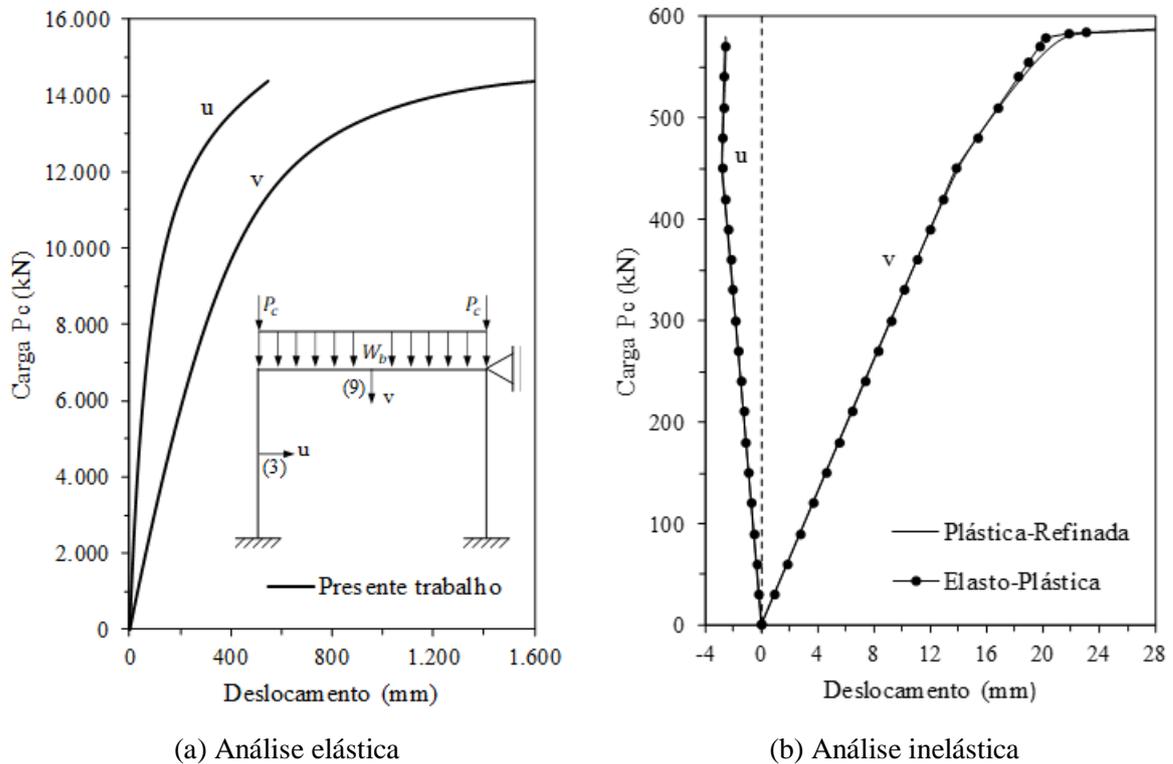


Figura 4.15 Trajetórias de equilíbrio para o pórtico com bases engastadas

4.6 Pórtico de Quatro Andares

Finalmente, a Figura 4.16 apresenta o pórtico de quatro andares a ser estudado. As colunas do primeiro pavimento são constituídas por perfil W12x79, enquanto as demais utilizam o perfil W10x60. Para as vigas, é adotado o perfil W16x40. Os módulos de elasticidade e a tensão de escoamento são, respectivamente, 201GPa e 236MPa. A tensão residual é assumida como sendo 30% da tensão de escoamento. Para o incremento do parâmetro de carga usa-se 0,001.

Nas vigas de tal pórtico, são aplicadas cargas verticais com magnitudes P e $P/2$, localizadas no centro do vão e nas ligações entre vigas e colunas, respectivamente. No topo das colunas, atuam cargas horizontais αP , sendo α um coeficiente adimensional. Durante a análise, essas cargas são progressivamente aumentadas pelo parâmetro λ até alcançar a carga de colapso. A solicitação P é de 133,4kN. Para a discretização das vigas, são utilizados dois elementos, enquanto cada coluna é representada por um único elemento.

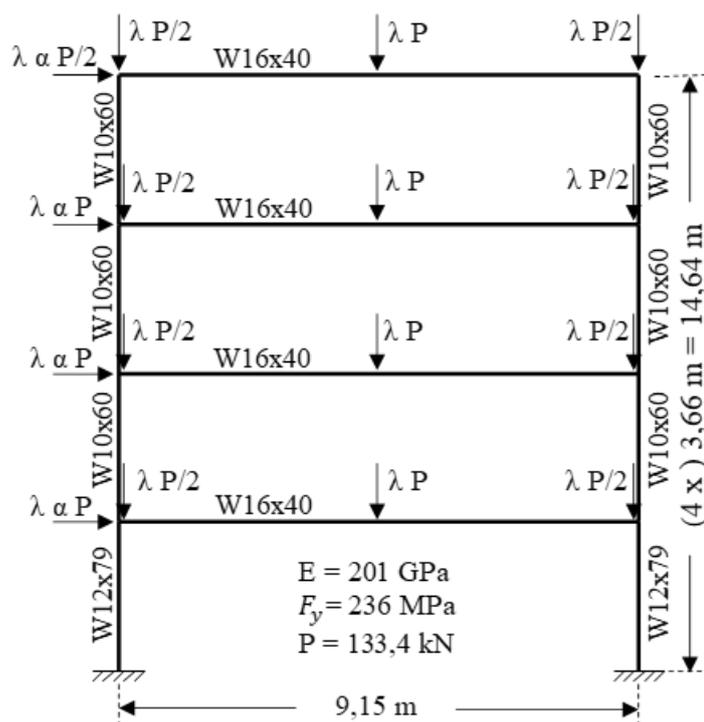


Figura 4.16 Pórtico de quatro andares

Essa estrutura foi inicialmente examinada por Kassimali (1983) e, mais recentemente, por Yoo e Choi (2008) com o propósito de validar as formulações que eles desenvolveram. Kassimali (1983) empregou o método da rótula elasto-plástica em sua análise, enquanto Yoo e Choi (2008) apresentaram um novo método para analisar a flambagem inelástica e determinar a carga crítica em estruturas metálicas. Nesse novo método, a solicitação crítica é determinada através de um problema de autovalor, fazendo uso da teoria do módulo tangente e da curva de resistência para colunas do AISC-LRFD (AISC, 1986). Adicionalmente, como parte de sua abordagem comparativa, eles também empregam o método da rótula plástica refinado.

A Figura 4.17a-b mostra a variação do deslocamento horizontal (u) do quarto pavimento ao longo do carregamento, exibindo as respostas correspondentes para os valores de α igual a 0,1, 0,24 e 0,5. Na Figura 4.17(a), destaca-se a análise não linear elástica, evidenciando a capacidade da estrutura sofrer deformações consideráveis. Por outro lado, a Figura 4.17(b) ilustra a análise plástica. No método da rótula plástica refinado, observa-se que, ao comparar os resultados com os obtidos por Yoo e Choi (2008), as trajetórias apresentam notáveis

semelhanças. Já no método da rótula elasto-plástica, nota-se que a sollicitação de colapso é superior em comparação com a análise plástica refinado, o que está em conformidade com a literatura.

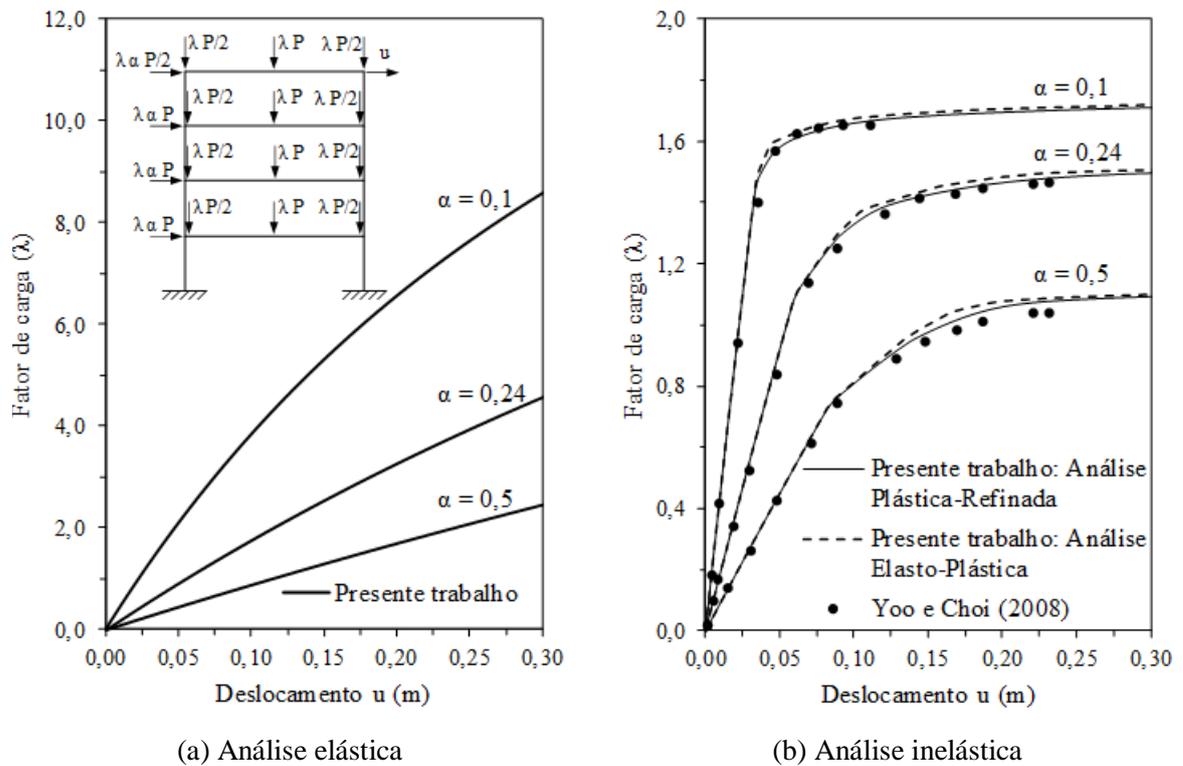


Figura 4.17 Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de α

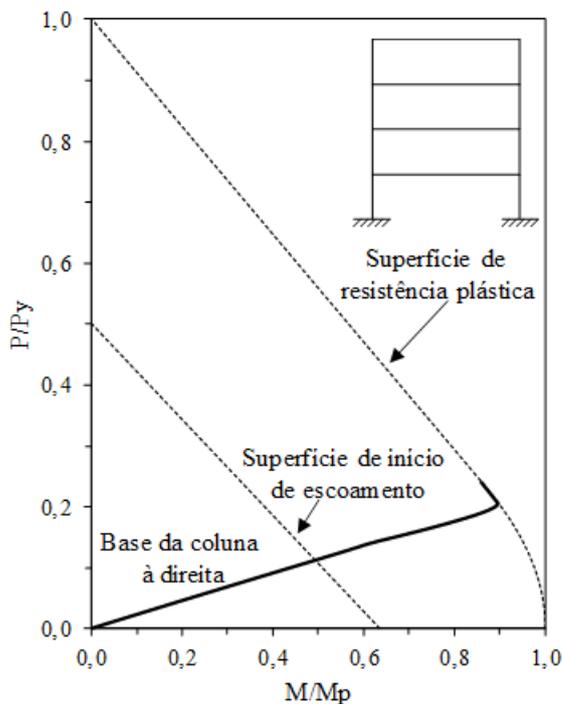
As cargas limites para α igual a 0,1; 0,24 e 0,5 estão apresentados na Tabela 4.4. Observa-se uma tendência de superestimação nas sollicitações limites obtidas por Kassimali (1983). Tal comportamento se deve ao fato de que o método da rótula elasto-plástica utilizado por esse autor não contempla a degradação gradual da rigidez da seção transversal e o impacto das tensões residuais.

A distribuição das forças internas e o índice de plastificação da seção transversal para $\alpha = 0,5$ são apresentados na Figura 4.18a-b. Na Figura 4.18(a), é possível observar a distribuição da plasticidade na base da coluna à direita, onde a força interna, influenciada pela força axial, atinge a superfície de resistência plástica, resultando na formação de uma rótula.

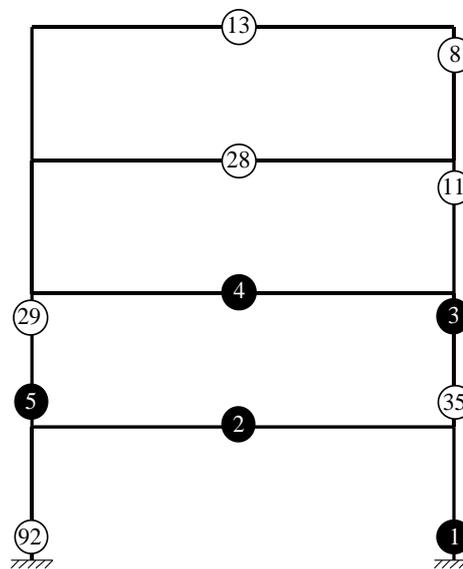
Conforme destacado na Figura 4.18(b), ao longo do processo de carregamento, a estrutura forma cinco rótulas plásticas, cada uma associada a um valor específico do parâmetro de carga λ : 1,076; 1,097; 1,112; 1,116 e 1,125. A sequência de formação dessas rótulas é identificada no centro do círculo completamente preenchido. Além disso, a Figura 4.18(b) ilustra a degradação de sete seções, expressa em porcentagem no interior do círculo não preenchimento.

Tabela 4.4 Fatores de carga de colapso para diferentes valores de α

α	Kassimali (1983)	Yoo e Choi (2008)	Presente trabalho	
			Plástica Refinado	Elasto Plástica
0,1	1,687	1,660	1,720	1,722
0,24	1,502	1,479	1,529	1,525
0,5	1,075	1,062	1,124	1,136



(a) Distribuição da plasticidade



(b) Índice de plastificação

Figura 4.18 A distribuição das forças internas e a plastificação da seção transversal para $\alpha = 0,5$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Ao finalizar esta pesquisa, é possível afirmar que a aplicação de métodos avançados se mostrou indispensável para uma compreensão mais aprofundada e precisa do comportamento de estruturas reticuladas. O objetivo principal foi aprofundar a análise da estabilidade dessas estruturas, empregando uma abordagem avançada que abrange não apenas as não linearidades geométricas, mas também as não linearidades físicas. Além disso, buscou-se compreender as complexidades e identificar os benefícios associados à aplicação dessas técnicas.

A metodologia empregada demonstrou eficácia ao comparar os resultados obtidos com as soluções disponíveis na literatura, apresentando um notável acordo em alguns casos e, em outros, discrepância significativa. Essa diferença pode ser justificada pela adoção de formulações distintas. A estratégia numérica adotada possibilitou a obtenção de caminhos de equilíbrio sob condições específicas de carregamento, destacando-se pela precisa identificação de pontos limite ao longo das trajetórias analisadas.

As pequenas diferenças identificadas nas cargas de colapso entre os métodos podem ser atribuídas às abordagens distintas de cada método em lidar com a degradação gradual da rigidez e as tensões residuais. Adicionalmente, a metodologia permitiu uma compreensão da distribuição de forças internas, índice de plastificação e formação de rótulas plásticas. Essa abordagem possibilita conhecimentos valiosos que podem orientar decisões de projeto e aprimorar o desempenho das estruturas.

Assim, após a análise dos elementos estruturais, conclui-se que ao incorporar a não linearidade no comportamento das estruturas, é possível alcançar uma representação mais próxima da realidade. Isso, por conseguinte, poderá proporcionar economia na execução de projetos, permitindo uma estimativa mais precisa da capacidade de carga do sistema estrutural e dos deslocamentos, evitando assim, a elaboração de projetos superdimensionados.

REFERÊNCIAS

- AISC-LRFD. *Manual of Steel Construction, Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. American Institute of Steel Construction, AISC, 1st edn., Chicago, IL, 2003.
- ALMEIDA, A. C. B. *Análise Inelástica de Pórtico Planos Considerando a Plasticidade Distribuída e o Efeito das Tensões Residuais nos Perfis Estruturais de Aço*. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte, MG: UFMG, 2006.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1262-1267, 1979.
- CHAN, S. L.; Chui, P. P. T. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford, 2000.
- CHAPMAN, S. J. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn, 2003.
- CHEN, L.; GAO, W. L.; LIU, S. W.; ZIEMIAN, R. D.; CHAN, S.L. Geometric and material nonlinear analysis of steel members with nonsymmetric sections. *Journal of Constructional Steel Research*. v. 198, p. 107537, 2022.
- CHEN, W. F.; DUAN, L.; ZHOU, S. P. Second-order inelastic analysis of braced portal frames – Evaluation of design formulae in LRFD and GBJ specification. *Journal of Singapore Structural Steel Society*. v. 1(1), p. 5-15, 1990.
- CHEN, W. F.; GOTO, Y.; LIEW, J. Y. R.; *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Wiley & Sons Inc, USA, 1996.
- CHEN, W. F., KIM, S. E., *LRFS Steel Design using Advanced Analysis*. CRC Press, Inc., Flórida, USA, 1997.
- CHEN, W. F.; SOHAL, I. *Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, v. 13, p. 52-62, 1981.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons Inc., 1991.
- ECCS. *Ultimate Limit State Calculation of Sway Frames with Rigid Joints*. Pub. nº. 33, European Convention for Constructional Steelwork, 1983.
- GALVÃO, A. S. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-

Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2000.

GONÇALVES, G. A. *Modelagem do Comportamento Inelástico de Estruturas de Aço: Membros sob Flexão em Torno do Eixo de Menor Inércia*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2013.

KASSIMALI, A. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. *Journal of Structural Engineering*, v. 109(8), p. 1869–1886, 1983.

KIM, S. E.; PARK, J. W. Análise inelástica de segunda ordem de estruturas de estrutura de estrutura utilizando o elemento viga-pilar baseado em estabilidade. *Avanços em Engenharia de Estruturas*. v. 12(4), p. 513-527, 2009.

LAVALL, A. C. C. *Uma Formulação Consistente para Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Aço Considerando Imperfeição Iniciais e Tensões Residuais*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia de Estruturas, São Carlos, SP: USP, 1996.

LIEW, J. Y. R.; WHITE, D. W.; CHEN, W. F.; Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, v. 119(11), p. 3196-3216, 1993a.

LIEW, J. Y. R.; WHITE, D. W.; CHEN, W. F.; Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, v. 119(11), p. 3217-3237, 1993b.

LUI, E. M.; CHEN, W. F. Behavior of braced and unbraced semi-rigid frame. *International Journal of Solids and Structures*, v. 24(9), p. 893-913, 1988.

MACHADO, F. C. S. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2005.

PRADO, I. M. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Interativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2012.

SILVA, A. R. D. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2009.

VIANA, H. F.; DA SILVA, R.G.L.; CESAR, A.; LAVALL, C., COSTA, R.S. Análise Avançada de Pórticos Planos de Aço considerando Ligações Semirrígidas. *XIII SIMMEC*, Vitória, ES: UFES, 2018.

VOGEL, U.; Calibrating Frames. *Stahlbau*, v. 54 (october), p. 295-311, 1985.

- YANG, Y. B.; KUO, S. B. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall, 1994.
- YANG, Y. B.; LIN, S. P.; LEU, L. J. Estratégia de solução e elemento rígido para análise não linear de estruturas elásticas com base em formulação lagrangiana atualizada. *Engenharia de Estruturas*. v. 29(6), p. 1189-1200, 2007.
- YOO, H.; Choi, D. H.; New method of inelastic buckling analysis for steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 64, p. 1152-1164, 2008.
- ZIEMIAN, R. D. *Advanced Methods of Inelastic Analysis in the Limit States Design of Steel Structures*. Ph.D. dissertation, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY, 1990.
- ZIEMIAN, R. D. Verification and benchmarking problems: Examples of frames studies used to verify advanced methods of inelastic analysis. In White, D.W.; Chen, W.F.; eds, *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames: An assessment of the state of art*. Structural Stability Research Council (SSRC), section 3, 1993.