



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil  
Curso de Graduação em Engenharia Civil

---



**Ingred Caroline Freire Cunha**

# **ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS EM AÇO COM CONTRAVENTAMENTO**

Ouro Preto

2024

# Análise Estática Não Linear de Estruturas Reticuladas em Aço com Contraventamento

Ingred Caroline Freire Cunha

Trabalho Final de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto.

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Andréa Regina Dias da Silva – UFOP

Ouro Preto

2024

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C972a Cunha, Ingrid Caroline Freire.  
Análise estática não linear de estruturas reticuladas em aço com  
contraventamento. [manuscrito] / Ingrid Caroline Freire Cunha. - 2024.  
70 f.: il.: , gráf..

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.  
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Escola de Minas. Graduação em Engenharia Civil .

1. Engenharia - Estática. 2. Teorias não-lineares - Análise funcional  
não-linear física. 3. Teorias não-lineares - Análise funcional não-linear  
geométrica. I. Silva, Andréa Regina Dias da. II. Universidade Federal de  
Ouro Preto. III. Título.

CDU 624

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Ingred Caroline Freire Cunha**

### **Análise estática não linear de estruturas reticuladas em aço com contraventamento**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil

Aprovada em 21 fevereiro de 2024.

#### Membros da banca

Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva - Orientadora (Universidade Federal de Ouro Preto)  
Prof. Dr. Walliston dos Santos Fernandes - (Universidade Federal de Ouro Preto)  
Me. Erivaldo Santos Jales - (Instituto Tecnológico da Vale - ITV)

Andréa Regina Dias da Silva, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 21/02/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Andrea Regina Dias da Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 22/02/2024, às 19:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0668064** e o código CRC **04D519AE**.

*“O homem não teria alcançado o possível se, repetidas vezes,  
não tivesse tentado o impossível.”*

***Max Weber***

*Dedico este trabalho à minha mãe,  
à minha família e à minha orientadora.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que me deu força para passar por todos os obstáculos nesta trajetória.

À minha mãe, Daniele, pelo apoio incondicional, paciência e incentivo.

À toda minha família pelo amor, companheirismo, motivação e presença constante na minha trajetória.

À minha orientadora, prof.<sup>a</sup> Andréa Regina Dias da Silva, expresse minha gratidão pela motivação, oportunidade e amizade. Muito obrigada pela dedicação, paciência e orientação.

À República Saia Justa, por ser minha segunda casa, agradeço imensamente a todas as meninas pelos momentos incríveis que compartilhamos.

Aos meus amigos Cleifane, Marina e Gabriel, pela amizade, convivência e troca de conhecimentos.

Aos colegas da Defesa Civil de Itabirito pelo apoio constante, encorajamento, pela experiência adquirida durante o estágio e pela oportunidade de desenvolvimento profissional.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas pelos ensinamentos.

À Universidade Federal de Ouro Preto por me proporcionar um ensino público de qualidade.

## RESUMO

A utilização de materiais de maior resistência tem conduzido ao desenvolvimento de elementos estruturais com seções transversais cada vez mais esbeltas. Contudo, tais elementos estruturais podem estar sujeitos a efeitos não lineares, resultando na possível perda de estabilidade da estrutura antes de atingir a sollicitação de ruptura do material. Diante desse cenário, a necessidade de projetar estruturas mais leves e eficientes impulsiona a consideração da inelasticidade do material e dos efeitos de segunda ordem. Além disso, a adoção de componentes estruturais de contraventamento desempenha um papel fundamental, proporcionando maior estabilidade ao sistema. Essa abordagem visa oferecer aos profissionais da área condições para conceber projetos mais seguros e econômicos, com maior rapidez e eficiência. Nesse sentido, o objetivo é analisar a estabilidade de estruturas reticuladas, avaliando seu comportamento não linear físico e geométrico por meio de análises estáticas. Durante o estudo, investiga-se a influência de alguns parâmetros dos sistemas de contraventamento como: o tipo de ligação com os outros membros da estrutura, as propriedades da seção transversal, a posição das barras, além da variação na intensidade das cargas laterais. As análises estáticas foram realizadas via programa MASTAN2. A partir das investigações realizadas, constatou-se que os sistemas de contraventamento exerceram uma influência significativa em todas as estruturas analisadas. Isso resultou em um aumento na rigidez e, por conseguinte, em uma redução na deslocabilidade lateral. Outras conclusões e observações referentes ao comportamento estrutural de cada estrutura investigada e diretamente relacionadas às análises efetuadas serão estabelecidas.

Palavras-chaves: Análise estática, estruturas reticuladas, sistemas de contraventamento, Método dos Elementos Finitos, não linearidade física, não linearidade geométrica, estabilidade estrutural.

## **ABSTRACT**

The use of higher-strength materials has led to the development of structural elements with increasingly slender cross-sectional profiles. However, such structural elements may be susceptible to nonlinear effects, potentially leading to the loss of structure stability before reaching the material's rupture capacity. In this scenario, the need to design lighter and more efficient structures drives the consideration of material inelasticity and second-order effects. Additionally, the adoption of bracing structural components plays a crucial role in providing greater stability to the system. This approach aims to provide professionals in the field with the conditions to conceive safer and more economical projects, with increased speed and efficiency. In this context, the goal is to analyze the stability of truss structures by assessing their physical and geometric nonlinear behavior through static analyses. During the study, the influence of various parameters of bracing systems is investigated, such as the type of connection with other structure members, cross-sectional properties, bar positions, and variations in lateral load intensities. Static analyses were conducted using the MASTAN2 program. The investigations revealed that bracing systems had a significant influence on all analyzed structures, resulting in increased stiffness and, consequently, a reduction in lateral displacements. Further conclusions and observations regarding the structural behavior of each investigated structure, directly related to the performed analyses, will be established.

**Keywords:** Static analysis, reticulated structures, bracing systems, Finite Element Method, physical nonlinearity, geometric nonlinearity, structural stability.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Funcionalidades do programa MASTAN2 (AZEVEDO, 2021).....	4
Figura 2.1 Contraventamentos horizontais (SOUSA, 2021).....	6
Figura 2.2 Contraventamentos verticais (ALCOA, 2014).....	7
Figura 2.3 Classificação dos sistemas (BARROS, 2010).....	7
Figura 2.4 Sistemas de contraventamento concêntricos (CHAVES, 2009).....	8
Figura 2.5 Sistemas de contraventamento excêntricos (CHAVES, 2009).....	9
Figura 2.6 Efeitos de 2ª ordem: P-D e P- $\delta$ (SILVA,2009).....	10
Figura 2.7 Relação tensão x deformação do material elastoplástico idealizada (SILVA, 2009).....	11
Figura 2.8 Deformações e tensões na seção transversal (SILVA, 2009).....	12
Figura 2.9 Elemento finito adotado (AZEVEDO, 2021).....	15
Figura 2.10 Alongamento e rotação de corpo rígido (AZEVEDO, 2021).....	16
Figura 2.11 Flexão do elemento finito (AZEVEDO, 2021).....	16
Figura 2.12 Superfície de escoamento (MCGUIRE <i>et. al</i> , 2014).....	18
Figura 3.1 Solução incremental-iterativa (SILVA, 2009).....	23
Figura 3.2 Trajetórias de equilíbrio (SILVEIRA, 1995).....	24
Figura 3.3 Estratégia generalizada para análise estática não linear (SILVA, 2009).....	28
Figura 4.1 Pórtico simples: geometria e carregamento.....	30
Figura 4.2 Trajetória de equilíbrio para pórtico simples.....	31

Figura 4.3 Sistema de contraventamento do pórtico simples.....	32
Figura 4.4 Trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento.....	32
Figura 4.5 Pórtico de dois andares: geometria e carregamento.....	34
Figura 4.6 Trajetórias de equilíbrio para pórtico de dois andares.....	35
Figura 4.7 Sistema de contraventamento do pórtico de dois andares.....	36
Figura 4.8 Trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento.....	37
Figura 4.9 Pórtico de quatro andares: geometria e carregamento.....	38
Figura 4.10 Trajetória de equilíbrio para pórtico de quatro andares.....	39
Figura 4.11 Sistema de contraventamento do pórtico de quatro andares.....	40
Figura 4.12 Comparação das trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento.....	41
Figura 4.13 Configuração deformada da estrutura.....	42
Figura 4.14 Sistema estrutural do pórtico de seis andares.....	43
Figura 4.15 Trajetórias de equilíbrio para pórtico de seis andares.....	45
Figura 4.16 Sistema de contraventamento do pórtico de seis andares.....	46
Figura 4.17 Comparação das trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento.....	47
Figura 4.18 Sistema estrutural do pórtico de sete andares.....	48
Figura 4.19 Trajetórias de equilíbrio para pórtico de sete andares.....	49
Figura 4.20 Sistema de contraventamento do pórtico de sete andares.....	50
Figura 4.21 Comparação das trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento.....	51
Figura 4.22 Comparação de diferentes perfis nas barras em X.....	52

Figura 4.23 Comparação de diferentes perfis nas barras em V invertido.....	53
Figura 4.24 Comparação de diferentes perfis nas barras em diagonal direita.....	53

## SUMÁRIO

1	Introdução .....	1
1.1	Considerações Iniciais e Objetivos.....	1
1.2	O Sistema Computacional Mastan2 .....	4
1.3	Organização do Trabalho.....	5
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	6
2.1	Sistemas de Contraventamento.....	6
2.2	Não Linearidade Geométrica.....	9
2.3	Não Linearidade Física.....	11
2.4	Formulação do Elemento Finito Não Linear .....	14
3	Metodologia para análise estática não linear .....	20
3.1	Metodologia de Solução .....	20
3.1.1	Solução Incremental Preditada.....	23
3.1.2	Ciclo de Iterações: Método de Newton-Raphson.....	24
4	ESTUDO DE CASOS .....	29
4.1	Introdução.....	29
4.2	Pórtico Simples.....	30
4.3	Pórtico de Dois Andares .....	34
4.4	Pórtico de Quatro Andares .....	38
4.5	Pórtico de Seis Andares .....	43
4.6	Pórtico de Sete Andares.....	48
5	Considerações finais e conclusões .....	54

5.1 Sugestões para trabalhos futuros .....	55
REFERÊNCIAS .....	56

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

As estruturas em aço vêm sendo bastante utilizadas no campo da engenharia civil por possuir características como: versatilidade, resistência e durabilidade. Em comparação com o concreto armado, as estruturas em aço proporcionam uma produtividade consideravelmente superior. Conforme destacado por Chen e Toma (1994), a aplicação de estruturas metálicas tornou-se essencial em diversas indústrias, incluindo civil, naval, oceânica e aeronáutica. A crescente demanda por projetos mais eficientes e leves tem impulsionado o uso de aço, permitindo a criação de estruturas mais esbeltas e, ao mesmo tempo, robustas.

A análise estrutural tem como objetivo fundamental a avaliação da resposta da estrutura diante de diversas condições. Essa prática engloba a aplicação de princípios matemáticos e físicos para compreender como as estruturas suportam solicitações e reagem a variadas condições de carregamento. Como destacado por diversos pesquisadores, incluindo Imanpour e Tremblay (2012), a análise estrutural não se limita apenas a considerar cargas estáticas, mas também leva em conta fatores dinâmicos, deformações, e até mesmo a relação não linear dos materiais.

Os projetos de estruturas geralmente são concebidos considerando uma abordagem de estrutura ideal, utilizando análise elástica linear. Nesse contexto, as equações de equilíbrio são formuladas com base na configuração inicial não deformada da estrutura, assumindo que as deformações são pequenas e seus efeitos sobre o equilíbrio e resposta do sistema são insignificantes. No entanto, a limitação da análise elástica linear reside em sua incapacidade de representar adequadamente o comportamento real das estruturas em condições não convencionais ou próximas aos limites de carga.

A maioria das estruturas apresenta comportamento não linear antes de atingir seus limites de resistência. Portanto, as normas, baseadas no conceito de modelo de resistência última, têm incorporado medidas para que os engenheiros estruturais considerem a não linearidade, empregando técnicas de análise precisas ou aproximadas. Busca-se, por meio da análise não linear, aprimorar a simulação do comportamento de uma estrutura em diversos aspectos.

Por outro lado, edifícios de múltiplos pavimentos resultam da integração de componentes estruturais, incluindo pilares, vigas, lajes e, crucialmente, sistemas de contraventamento. Segundo Chaves (2009), a seleção cuidadosa da disposição desses elementos está

intrinsecamente ligada à sua capacidade de resistir aos esforços horizontais e verticais, como forças gravitacionais, laterais e cargas decorrentes do uso e ocupação do espaço. Dada a incerteza dos deslocamentos da estrutura, é imperativo que os contraventamentos garantam a imobilidade em todas as direções. Além disso, a escolha adequada do material do contraventamento pode otimizar o desempenho estrutural, resultando em projetos mais econômicos e seguros.

Na busca por eficiência, economia e segurança no dimensionamento estrutural, os engenheiros têm concentrado esforços no aprimoramento de suas análises, incorporando cada vez mais os efeitos não lineares, pois a demanda por estruturas mais leves impulsiona a análise de efeitos de segunda ordem e a inelasticidade do material. Reconhecendo a importância de representar fielmente o comportamento real das estruturas, levando em consideração as deformações gerais das estruturas.

Com isso, as formulações numéricas e computacionais elaboradas por meio do Método dos Elementos Finitos têm se destacado e demonstrado eficácia na resolução de problemas estruturais. Esse método numérico permite a modelagem de estruturas complexas dividindo-as em elementos menores, nos quais as equações diferenciais que descrevem o comportamento estrutural são aproximadas, permitindo a previsão de respostas sob diferentes condições de carga. Essa abordagem, muitas vezes integrada a softwares avançados, permite aos engenheiros realizar análises mais refinadas, otimizar o design de estruturas e garantir a segurança e eficiência dos projetos em diversas aplicações, desde pontes e edifícios até componentes de máquinas e dispositivos médicos.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é realizar análises numéricas em estruturas reticuladas, empregando uma abordagem estática que considere os efeitos de segunda ordem e a não linearidade do material por meio do Método dos Elementos Finitos. As estruturas estudadas neste trabalho já são documentadas na literatura, tratando-se de pórticos, que apresentam diferentes números de pavimentos e são construídos com perfis em aço. A investigação visa avaliar a influência da introdução de um sistema de contraventamento, analisando também o comportamento da estrutura ao modificar o posicionamento, o tipo de ligação (rígida ou rotulada) e as propriedades da seção transversal dessas barras.

O software MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014), especializado na análise avançada de estruturas, foi empregado para realizar as análises. Esse programa se baseia no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a discretização do problema. A

investigação dos desafios de estabilidade na resolução do problema não linear foi conduzida por meio da aplicação do método de Newton-Raphson, aliado a técnicas de continuação.

Estudos relacionados ao tema proposto podem ser identificados na literatura. Silva (2009) desenvolveu uma ferramenta computacional para análise estática e dinâmica de estruturas metálicas reticuladas por meio do MEF. A compreensão do comportamento estático e dinâmico é crucial para projetar estruturas mais leves e esbeltas sem comprometer a segurança e qualidade. A abordagem adota teorias complexas, como formulações não lineares, para evitar simplificações no processo de análise/projeto. Os efeitos não lineares são diretamente incorporados na formulação do elemento, eliminando a necessidade de etapas distintas para análise e dimensionamento estrutural.

Rai e Goel (2003) exploram a preocupação com o desempenho de estruturas de aço equipadas com contraventamentos concêntricos em formato de "V" invertido. Demonstraram que aprimorar a eficiência sísmica de contraventamentos não dúcteis envolve o preenchimento das seções tubulares com concreto, retardando assim a fratura das travas de reforço. Uma outra melhoria implementada pelos autores foi a alteração na configuração dos contraventamentos, passando de "V" invertido para uma configuração em "X" de dois andares, capaz de prevenir a instabilidade e a formação de rótulas plásticas nas vigas. Apesar disso, mesmo que essas alterações proporcionem uma distribuição razoável de danos ao longo da altura do edifício, as estruturas em "V" invertido continuam sendo escolhidas para edifícios de aço devido à sua funcionalidade arquitetônica e aos custos reduzidos de fabricação e montagem.

Andrade, Oliveira e Afonso (2010) propõem uma metodologia para a análise de confiabilidade estrutural de pórticos planos, levando em consideração a não-linearidade geométrica. Ferramentas computacionais serão empregadas tanto para a análise estrutural quanto para a análise de confiabilidade. O método analítico FORM (First Order Reliability Method) é utilizado para obter a confiabilidade da estrutura, envolvendo um procedimento iterativo para determinar a probabilidade de falha e medidas de sensibilidade. O foco recai na não-linearidade geométrica, decorrente de efeitos de segunda ordem em situações de deslocamentos relativamente grandes sob esforço normal.

Bloom (2009) investigou a estabilidade de estruturas de contraventamento concêntrico de dois painéis, comumente usadas em instalações industriais contraventos e terremotos. A pesquisa analisa o impacto das cargas de gravidade e laterais na estabilidade local e global, considerando momentos de flexão inelástica, forças laterais transversais e deslocamentos

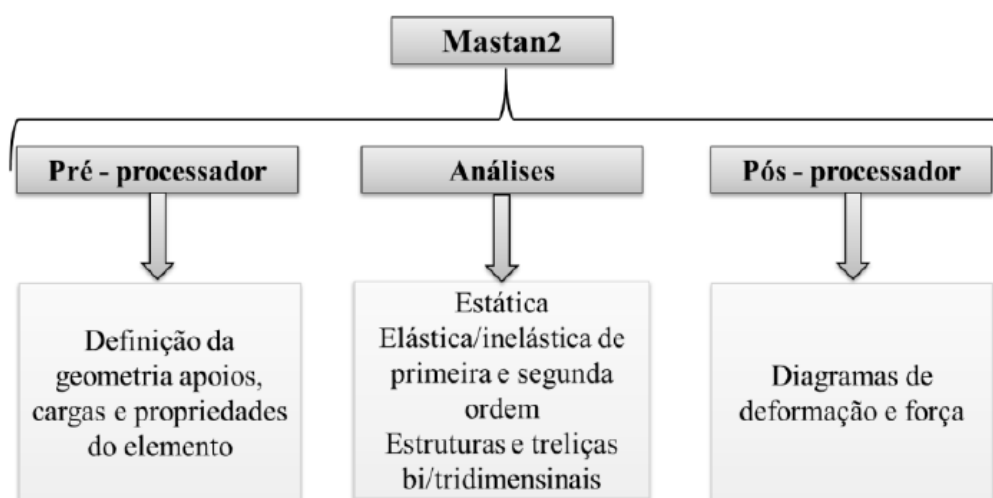


diferenciais entre andares. Utilizando métodos dos elementos finitos, o estudo avalia como as variáveis: solicitação lateral, altura da estrutura e orientação das colunas afetam o comportamento de estabilidade, destacando a influência significativa da razão entre solicitação lateral e carga de gravidade, assim como a proporção da estrutura.

## 1.2 O Sistema Computacional Mastan2

Para as análises estruturais conduzidas neste trabalho, será empregado o software MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014). Desenvolvido no ambiente MATLAB (Kwon et al., 1997; Mathworks, 2013) por Ronald D. Ziemian e Willian McGuire, o MASTAN2 é um sistema computacional especializado na análise avançada de estruturas reticuladas bi e tridimensionais, apresentando amplas capacidades de pré-processamento e pós-processamento. Esse software integra formulações que contemplam, nas análises estáticas, os efeitos de segunda ordem, englobando tanto análises elásticas quanto inelásticas.

Conforme ilustrado na Figura 1.1, no estágio de pré-processamento, oferece opções para definir a geometria da estrutura, especificar condições de contorno, aplicar cargas e atribuir propriedades aos elementos. O pós-processador possibilita a interpretação do comportamento estrutural através de diagramas de deformação e esforços, a impressão de resultados em arquivos de formato texto e facilidades para desenho de curvas carga-deslocamento.



**Figura 1.1** Funcionalidades do programa MASTAN2 (AZEVEDO, 2021)

### **1.3 Organização do Trabalho**

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos. O primeiro capítulo é introduzido os objetivos da pesquisa, fornecendo uma breve revisão bibliográfica sobre os temas pertinentes ao estudo. Além disso, apresenta o software utilizado nas análises estruturais realizadas.

No segundo capítulo, é dedicada atenção a uma breve discussão dos temas pertinentes ao desenvolvimento das análises. São explorados primeiramente os sistemas de contraventamentos, incluindo a definição desse tipo de sistema e as diversas variantes empregadas em estruturas reais. Em seguida, estão abordadas as causas das não linearidades que impactam a análise estrutural, englobando a não linearidade geométrica e a inelasticidade do aço. Por último, é discutida a formulação do elemento finito não linear.

O Capítulo 3 está descrito a metodologia adotada nas análises estáticas não lineares realizadas no trabalho. É explorado os métodos de solução, incluindo a solução incremental predita, os ciclos de interações e apresentamos o método de Newton-Raphson.

No Capítulo 4, são apresentadas as cinco análises numéricas conduzidas. Em cada uma delas, utilizam-se diferentes sistemas estruturais, realizando análises elásticas e inelásticas para verificar a eficiência dos sistemas de contraventamentos adotados.

Finalmente, o Capítulo 5 é mostrado as considerações finais e conclusões do trabalho, juntamente com sugestões para pesquisas futuras. Esse delineamento proporciona uma visão abrangente e estruturada do desenvolvimento e resultados deste trabalho.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Sistemas de Contraventamento

Contraventamentos consistem em barras adicionadas às estruturas com o propósito de diminuir ou evitar movimentos horizontais, sendo predominantemente empregados para conferir estabilidade a estruturas sujeitas à ação do vento. Podem ser empregados tanto na orientação vertical quanto na horizontal. O contraventamento horizontal, embora seja denominado dessa forma, geralmente não está restrito a esse plano específico. Comumente, são configurados como treliças nos níveis superiores de coberturas, conforme ilustrado na Figura 2.1. Em contraste, os contraventamentos verticais, apresentados na Figura 2.2, são empregados para reforçar vigas e pilares. É relevante ressaltar que, nas aplicações deste trabalho, serão abordados exclusivamente os contraventamentos verticais.



(a) Coberturas em treliças



(b) Cobertura de um ginásio

Figura 2.1 Contraventamentos horizontais (SOUSA, 2021)

A utilização de contraventamentos é recomendada para edifícios de menor porte quando estão expostos a forças do vento ou apresentam elevada esbeltez. Em contrapartida, para edifícios de grande porte e múltiplos pavimentos, os contraventamentos devem ser considerados uma parte essencial do projeto, devido aos deslocamentos horizontais que podem ser provocados pelo vento ao longo da vida útil do edifício.

Segundo Barros (2010), um pórtico sem contraventamento, também conhecido como pórtico deslocável, ilustrado na Figura 2.3a, é definido como aquele em que a estabilidade lateral é determinada pela rigidez à flexão de vigas e pilares que estão rigidamente interconectados. Quando a solicitação vertical atuante alcança sua intensidade crítica, ocorre

um deslocamento lateral devido à instabilidade. Um pórtico com contraventamento, ilustrado na Figura 2.3b, assegura a estabilidade lateral por meio de sistemas apropriados de contraventamentos diagonais. Quando esses contraventamentos apresentam rigidez suficiente para enfrentar os carregamentos laterais em ação, o comportamento do sistema se aproxima ao de um pórtico indeslocável.

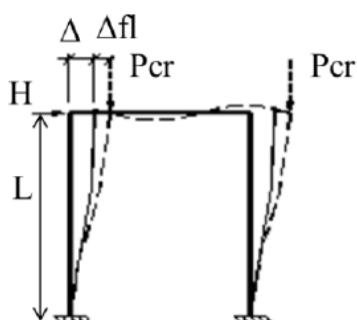


(a) Contraventamentos em X

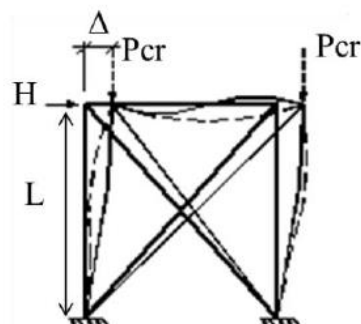


(b) Contraventamentos em V invertido

**Figura 2.2** Contraventamentos verticais (ALCOA, 2014)



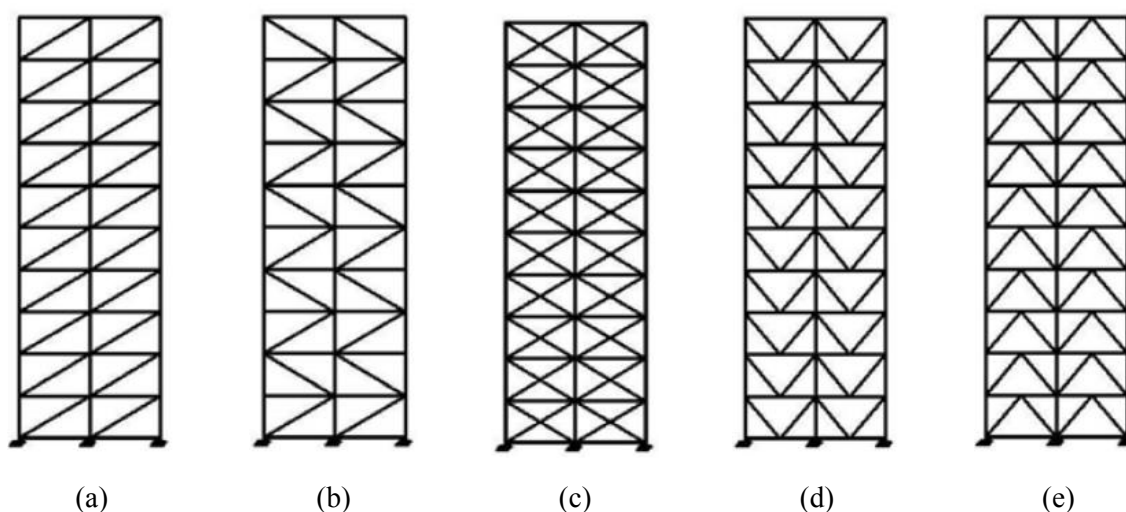
(a) Pórtico sem contraventamento.



(b) Pórtico com contraventamento.

**Figura 2.3** Classificação dos sistemas (BARROS, 2010)

Conforme Smith e Coull (1991), os sistemas de contraventamentos verticais mais eficazes são aqueles nos quais as barras formam treliças com triângulos "totais", abrangendo toda a estrutura. Os autores os caracterizam estes contraventamentos como concêntricos. Diversos tipos desses sistemas, empregados na prática, são exemplificados na Figura 2.4. Esses incluem barras dispostas diagonalmente com mesma direção (Figura 2.4a), barras diagonais em direções alternadas (Figura 2.4b), em X (Figura 2.4c), em V (Figura 2.4d) e em V invertido (Figura 2.4e). A utilização desses sistemas pode ser limitada pela arquitetura específica do edifício, uma vez que eles podem obstruir vãos. Diante desse cenário, os autores sugerem sua aplicação em áreas onde não há exigência de aberturas, como nas paredes laterais.



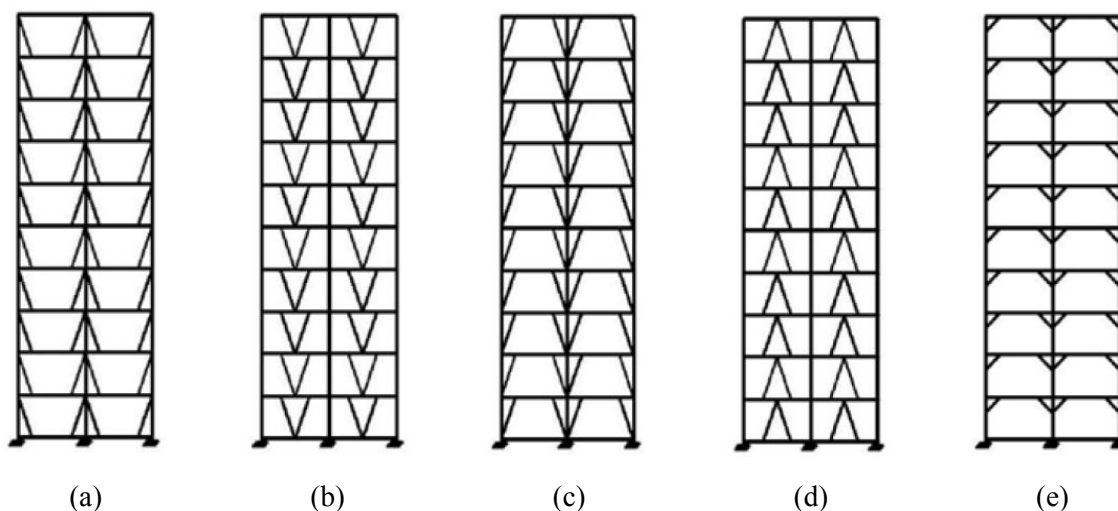
**Figura 2.4** Sistemas de contraventamento concêntricos (CHAVES, 2009)

De acordo com Chaves (2009), uma alternativa para reduzir a obstrução de vãos é a adoção de contraventamentos excêntricos. Esses arranjos não formam triângulos completos com todas as barras da estrutura. A Figura 2.5 ilustra diferentes disposições, incluindo barras em diagonal viga coluna (Figura 2.5a), barras em formato de V (Figura 2.5b), diagonal coluna viga (Figura 2.5c), V invertido (Figura 2.5d) e em mãos francesas (Figura 2.5e).

As conexões das barras diagonais são propositadamente afastadas das ligações entre vigas e colunas. Isso geralmente resulta em contraventamentos menos rígidos e, conseqüentemente, menos eficazes do que outros tipos. Segundo Franca (2003), essas formas de contraventamento

podem ser empregadas para criar estruturas mais dúcteis, o que é especialmente relevante em regiões sujeitas a abalos sísmicos.

A forma para se conceber um sistema de contraventamento irá depender das necessidades de utilização do edifício, porém, as formas mais usuais são as apresentadas na Figura 2.4. Sendo assim neste trabalho, optou-se por investigar o comportamento de pórticos com contraventamentos dispostos em diagonais, X, V, V invertido e mãos francesas.



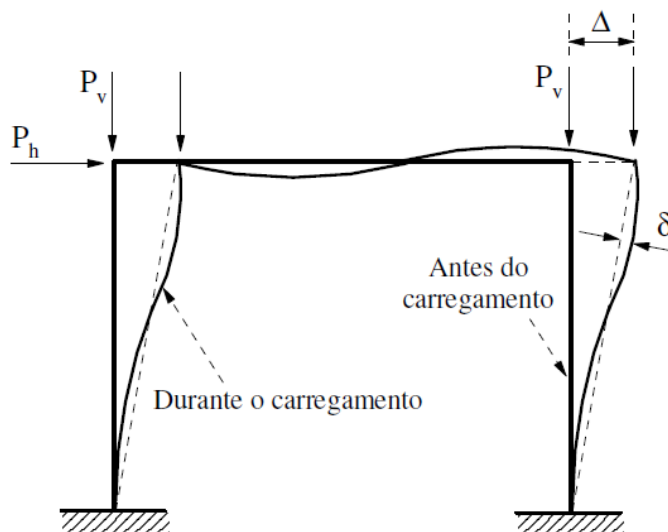
**Figura 2.5** Sistemas de contraventamento excêntricos (CHAVES, 2009)

## 2.2 Não Linearidade Geométrica

Na maioria dos projetos tradicionais de engenharia estrutural, os métodos aproximados têm demonstrado eficácia, uma vez que os deslocamentos costumam ser limitados em relação às dimensões das peças estruturais. Contudo, à medida que as exigências urbanas se transformam, com cidades adotando uma verticalização crescente e avanços contínuos em materiais e técnicas construtivas, a demanda por estruturas mais esbeltas tem crescido. Para se manter alinhado a esse avanço tecnológico, torna-se essencial a aplicação de abordagens analíticas mais aprimoradas, com o objetivo de obter resultados mais precisos e confiáveis para profissionais de engenharia e cálculos estruturais. A avaliação segura da capacidade de carga e dos níveis de deslocamento da estrutura está diretamente relacionada à obtenção desses resultados mais detalhados.

O comportamento não linear de estruturas manifesta-se quando as relações entre ações e deslocamentos não seguem uma proporção direta. A não linearidade geométrica, ou efeitos de segunda ordem, surge quando as alterações na geometria, causadas pela aplicação de solicitações à estrutura, são notáveis e impactam na rigidez do sistema. Esse tipo de comportamento induz efeitos de segunda ordem, como momentos fletores adicionais devido a deflexões laterais de membros, especialmente quando a estrutura é submetida a deslocamentos significativos. (SILVA, 2009)

Tais comportamentos levam em consideração os efeitos  $P-\Delta$  (global) e  $P-\delta$  (local, a nível de elemento), decorrentes das deformações da estrutura durante o carregamento. A Figura 2.6 ilustra os efeitos mencionados. A base para a formulação da análise não linear geométrica de estruturas é fundamentada na teoria da elasticidade não linear. A presença da não linearidade geométrica é evidente tanto nas equações de equilíbrio, que consideram as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações entre deformação e deslocamento, que incluem termos não lineares.

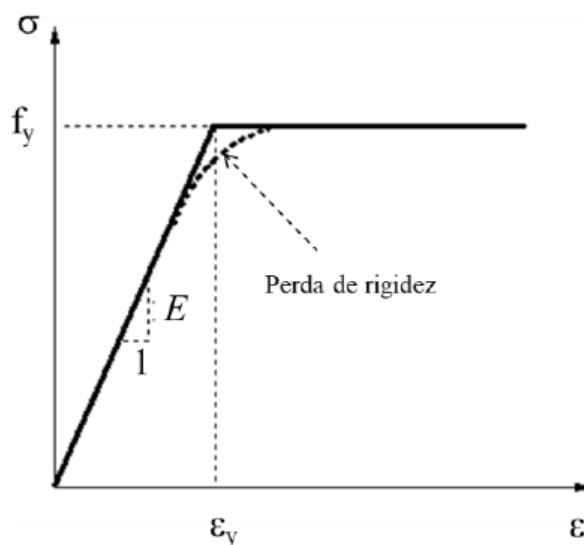


**Figura 2.6** Efeitos de 2ª ordem:  $P-\Delta$  e  $P-\delta$  (SILVA,2009)

### 2.3 Não Linearidade Física

A não linearidade física em estruturas é evidenciada quando os materiais exibem comportamentos que não seguem uma relação linear direta entre as forças aplicadas e as deformações resultantes, indicando um comportamento não elástico linear. Em muitos casos, a resposta de um material à solitação não é proporcional, e essa não linearidade pode ser causada por diversos fatores, como a plasticidade do material, o escoamento, efeitos térmicos, entre outros.

A análise da não linearidade física torna-se crucial em situações em que as deformações são significativas, influenciando diretamente na resposta estrutural. Nesse contexto, a Lei de Hooke não é aplicável, como evidenciado pela representação na Figura 2.7. A perda de resistência do material ao longo do histórico de carregamento da estrutura é incorporada.



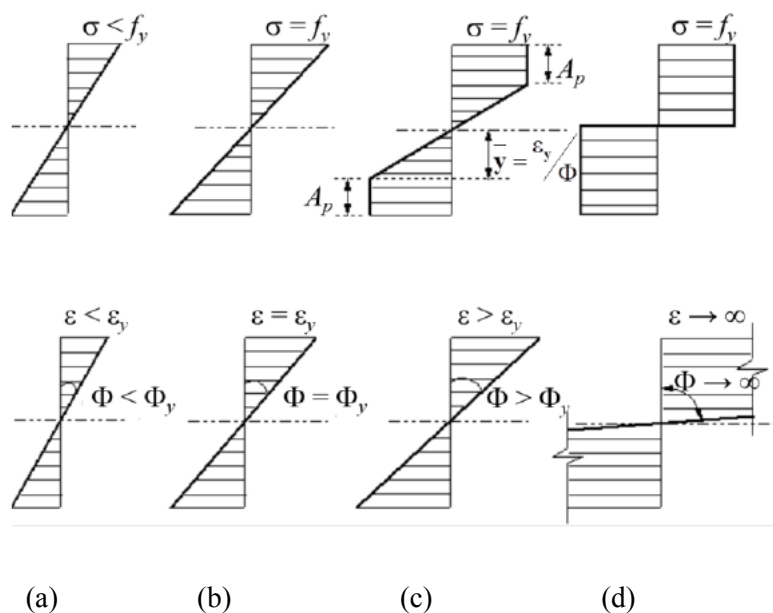
**Figura 2.7** Relação tensão x deformação do material elastoplástico idealizada (SILVA, 2009)

A Figura 2.8 visualiza a progressão das deformações e tensões em uma seção à medida que o carregamento aumenta, considerando o comportamento elastoplástico do material. No estágio inicial, as fibras da seção encontram-se no domínio elástico ( $\epsilon < \epsilon_y$  e  $\sigma < f_y$ ), conforme destacado na Figura 2.8a. Ao alcançarem a tensão de escoamento ( $\sigma = f_y = E\epsilon_y$ ), como mostrado na Figura 2.8b, as fibras mais externas entram no regime plástico, enquanto as demais permanecem no



domínio elástico. Aquelas que passaram pelo escoamento continuam sustentando uma tensão constante, limitada à tensão de escoamento, embora com deformação superior a  $\epsilon_y$ . Simultaneamente, outras fibras recebem uma tensão adicional devido ao aumento do momento. Com o aumento da carga, mais fibras passam para o estado plástico, ilustrado na Figura 2.8c. A região onde o material está em escoamento, indicada na figura pelo símbolo  $A_p$ , é conhecida como zona plástica. Esse processo continua até que toda a seção tenha sido plastificada, como ilustrado na Figura 2.8d.

No âmbito do Método dos Elementos Finitos (MEF), quando se trata de incorporar a não linearidade do material nas análises, geralmente, duas abordagens são empregadas para sistemas estruturais reticulados planos ou espaciais. Essas abordagens se fundamentam no método da zona plástica (MZP) e no método da rótula plástica (MRP). A distinção fundamental entre essas abordagens reside no nível de refinamento utilizado para descrever a plastificação da seção.



**Figura 2.8** Deformações e tensões na seção transversal (SILVA, 2009)

No MZP, a seção transversal é dividida em duas regiões distintas: uma elástica e outra plástica. Essa divisão permite uma modelagem mais refinada do comportamento do material durante a plastificação, resultando em análises mais precisas em comparação com abordagens

menos detalhadas. Já no MRP considera os efeitos não lineares do material apenas nos nós do sistema estrutural discretizado, sendo adotado como uma abordagem de plasticidade concentrada.

O MRP pode ser classificado em método da rótula elasto-plástica e método da rótula plástica refinado. O primeiro assume que o elemento permanece no domínio elástico até que a capacidade resistente da seção seja atingida, formando uma rótula plástica. Por outro lado, no método da rótula plástica refinado, permite-se o acompanhamento do processo de plastificação da seção, e as tensões residuais podem ser consideradas. Com isso, monitora a degradação da rigidez da seção transversal ao longo do processo de análise. Controlar a rigidez da seção pode ser alcançado por meio da aplicação do módulo de elasticidade tangente, conforme indicado por Fong (2012), que propõe sua representação por meio de curvas de plastificação. Outra abordagem, conforme apontada por Chiorean (2013), envolve a relação entre o momento aplicado e a curvatura da seção.

A abordagem do método do módulo tangente é uma aproximação da redução da rigidez da seção do elemento. Essa concepção fundamenta-se na suposição de que, durante o processo de flambagem inelástica, as tensões ao longo da seção transversal alcançam o ponto de escoamento do material (LUI E CHEN, 1986). Assim, o comportamento tensão-deformação das fibras que constituem a seção é modificada, passando a ser regida, a partir desse ponto, pela variação do módulo tangente  $E_t$ . Nesse método, originado por Engesser (1889) e inicialmente descrito por Gaylord e Gaylord (1972), o módulo de elasticidade é substituído por um módulo tangente. Esse parâmetro varia em função do esforço axial exercido sobre o elemento.

A aplicação dessa técnica foi adotada por Orbison (1982), White et al. (1993) e Liew et al. (1993) com o intuito de aprimorar a precisão da análise elasto-plástica por meio de rótulas plásticas, especialmente em estruturas onde os membros estão submetidos a consideráveis esforços axiais.

McGuire, Gallagher e Ziemian (2014), baseando-se nas as equações de resistência para colunas propostas pelo CRC (Galambos, 1998), apresentaram a expressão a seguir para o módulo tangente:

$$E_t = 4 \frac{P}{P_y} \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) \quad (2.1)$$

em que  $P$  é o esforço normal atuante e  $P_y$  é o esforço normal de escoamento.

Pela equação anterior, o módulo tangente é função apenas do esforço normal atuante no elemento. Ziemian e McGuire (2002) propuseram uma modificação com o intuito de melhorar os resultados de sistemas estruturais com colunas que poderiam fletir em torno do eixo de menor inércia, ou seja:

$$E_t = \tau E \text{ em que } \tau = \min \left( \frac{1.0}{(1+2p)[1-(p+\beta m_y)]} \right) \quad (2.2)$$

com:

$$p = \max \left( \frac{\frac{P}{P_y}}{(0.5 - \beta m_y)} \right) \quad (2.3)$$

e

$$m_y = \frac{M_y}{M_{py}} \quad (2.4)$$

Nas Equações (2.2) e (2.3), o termo  $\beta$  é um parâmetro empírico, e para análises inelásticas de segunda ordem é nulo para o eixo  $x$  (maior inércia) e é igual a 0.65 para o eixo  $y$  (menor inércia) (ZIEMIAN E MCGUIRE, 2002). Em (2.4),  $M_y$  e  $M_{py}$  são, respectivamente, o momento de flexão e o momento plástico de flexão, ambos em relação ao eixo  $y$ .

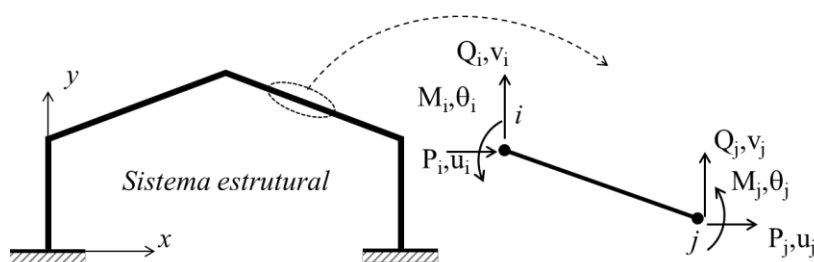
## 2.4 Formulação do Elemento Finito Não Linear

Na área Estrutural, um dos procedimentos empregados para a discretização de um problema contínuo, visando a obtenção de soluções numéricas aproximadas, é conhecido como Método dos Elementos Finitos. Esse método destaca-se como uma ferramenta amplamente empregada para soluções numéricas nesse campo, sendo reconhecido por sua eficácia e aplicabilidade. Utilizando essa abordagem, se busca fragmentar o meio contínuo em subdomínios denominados elementos, os quais são conectados por meio de pontos nodais nos quais são estabelecidos os graus de liberdade a serem determinados. Em condições específicas de convergência, os resultados obtidos pelo método tendem a aumentar em precisão à medida que a malha é refinada. Isso, em última instância, poderia conduzir a uma solução exata do problema. Portanto, é necessário escolher um número adequado de elementos que proporcione uma solução satisfatória dentro da precisão desejada e no tempo esperado. Nesta seção, a

formulação de elementos finitos que permite considerar os efeitos da inelasticidade do material e da não linearidade geométrica é apresentada.

Segundo Silva (2009), existem duas formulações principais para descrever o movimento de corpos sólidos: Euleriana e Lagrangiana. Na abordagem Euleriana, as coordenadas espaciais, associadas ao corpo deformado, são utilizadas como coordenadas de referência. Já na formulação Lagrangiana, os deslocamentos em um sistema estrutural, resultantes de uma solicitação específica, são medidos em relação à configuração inicial desse sistema. A maioria das formulações de elementos finitos encontradas na literatura para análise de segunda ordem de estruturas baseia-se em referenciais Lagrangianos.

O elemento finito empregado neste trabalho é um elemento reticulado plano, com pontos nodais  $i$  e  $j$ , conforme ilustrado na Figura 2.9. Cada um desses pontos nodais é caracterizado por três graus de liberdade, que correspondem aos deslocamentos axial ( $u$ ), transversal ( $v$ ), e uma rotação ( $\theta$ ). O comportamento inelástico é restrito às extremidades do elemento que simulam a formação de rótulas plásticas.



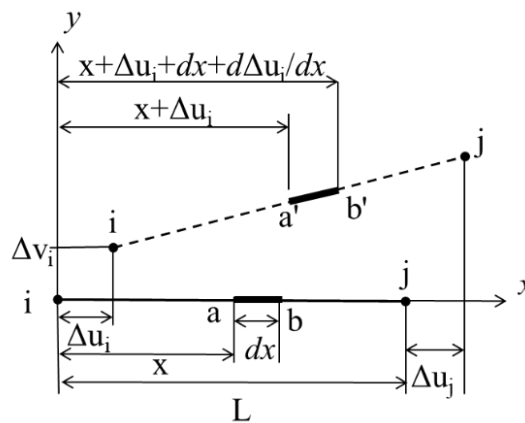
**Figura 2.9** Elemento finito adotado (AZEVEDO, 2021)

Conforme abordado por McGuire, Gallagher e Ziemian (2014), na análise inelástica de segunda ordem, a equação de equilíbrio do elemento finito na configuração deformada é formulada considerando tanto a não linearidade geométrica quanto a não linearidade do material. A expressão que governa o equilíbrio é a seguinte:

$$\Delta \mathbf{f} = [\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_m] \Delta \mathbf{u} \quad (2.5)$$

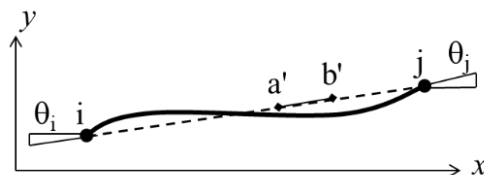
em que  $\Delta \mathbf{u}$  é o vetor com os incrementos de deslocamentos e rotações nodais,  $\mathbf{k}_e$  é a matriz de rigidez linear elástica,  $\mathbf{k}_g$  é a matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{k}_m$  é a matriz que considera a degradação da resistência do material e  $\Delta \mathbf{f}$  é o vetor de forças incrementais.

Para incorporar os efeitos geométricos na matriz, é adotado o elemento finito representado na Figura 2.9. Assume-se que o elemento é reto e isento de deformações na configuração de referência, sendo essa formulação fundamentada na teoria de vigas Euler-Bernoulli. O referencial Lagrangiano atualizado e o tensor de deformação de Green-Lagrange são utilizados. Dessa forma, ao considerar a representação no sistema global de coordenadas após a aplicação do esforço axial e da rotação do corpo rígido, conforme mostrado na Figura 2.10, é possível expressar o tensor de deformação.



**Figura 2.10** Alongamento e rotação de corpo rígido (AZEVEDO, 2021)

A fim de incorporar os efeitos da flexão na matriz de rigidez geométrica, a deformação experimentada pelo elemento, conforme ilustrado na Figura 2.11, deve ser somada ao tensor de deformações. Nesse contexto, os efeitos da rotação e do alongamento não são considerados.



**Figura 2.11** Flexão do elemento finito (AZEVEDO, 2021)

Ao empregar o princípio dos trabalhos virtuais, é possível formular a variação da energia interna de deformação,  $U$ , como uma função da deformação axial, das rotações do elemento,

do módulo de elasticidade e do tensor de deformações. As integrais derivadas dessa relação resultam na matriz de rigidez elástica linear e na matriz de rigidez geométrica. A expressão para a matriz de rigidez elástica linear é a seguinte:

$$\mathbf{k}_e = \int_{vol} \mathbf{N}' E \mathbf{N}' d(vol) \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{N}$  a matriz que contem a função de forma e suas derivadas, e  $E$  é o modulo de elasticidade do material.

Já a matriz de rigidez geométrica é expressa pela seguinte equação:

$$\mathbf{k}_g = P \int_0^L [\mathbf{N}'_u{}^T \mathbf{N}'_u + \mathbf{N}'_v{}^T \mathbf{N}'_v] dx \quad (2.7)$$

sendo  $\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_v$  funções de interpolação para as respectivas coordenadas de deslocamento e  $P$  a força axial atuante no elemento.

Na análise de um elemento sujeito à flexão simples, opta-se por funções de interpolação linear para o deslocamento horizontal ( $u$ ) e quadrática para o deslocamento vertical ( $v$ ). Dessa maneira, é viável expressar a matriz de rigidez geométrica da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_g = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Adotando à Teoria da Plasticidade, é necessário incorporar o conceito de uma superfície de escoamento derivada da tensão aplicada. Para o elemento em questão, essa superfície é considerada uma função convexa contínua entre a força axial e o momento fletor na seção transversal, podendo ser representada como:

$$\Phi \left( \frac{P}{P_y}, \frac{M}{M_y} \right) = 1 \quad (2.9)$$

onde  $P$  é a força axial calculada,  $M$  é o momento máximo na barra,  $P_y$  é a carga axial de escoamento e  $M_y$  o momento plástico da seção.

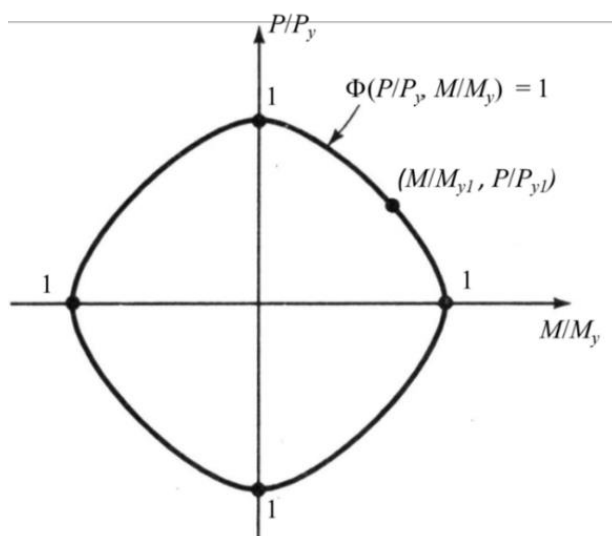
A Figura 2.12 representa a curva de interação da função da superfície de escoamento, permitindo a identificação do regime de trabalho. Quando os pontos de força estão localizados dentro da curva, o sistema está no regime elástico; caso estejam sobre a curva, o regime é considerado plástico. Pontos localizados fora da superfície não são aceitáveis devido à premissa de o material ser perfeitamente elasto-plástico.

Conforme as diretrizes de projeto estipuladas na especificação AISC (1989), os elementos estruturais planos de edifícios de aço sujeitos à força axial combinada com momento de flexão devem atender às seguintes condições:

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{\left(1 - \frac{P}{P_e}\right) M_m} \leq 1,0 \quad (2.10)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{1,18M_y} \leq 1,0; M \leq M_y \quad (2.11)$$

A Equação (2.10) incorpora coeficientes e termos estabelecidos nas diretrizes da especificação AISC, visando a estabilização dos membros. Enquanto isso, a Equação (2.11) descreve a formação de rótula plástica.



**Figura 2.12** Superfície de escoamento (MCGUIRE *et al*, 2014)

Admite-se que o deslocamento incremental em uma extremidade plastificada, representado por  $\Delta \mathbf{u}_{ij}$ , pode ser considerado como a soma das contribuições elástica,  $\Delta \mathbf{u}_e$  e plástica,  $\Delta \mathbf{u}_p$  conforme demonstrado na seguinte equação:

$$\Delta \mathbf{u}_{ij} = \Delta \mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_p \quad (2.12)$$

Na extremidade plastificada aplica-se o critério de normalidade:

$$\Delta \mathbf{u}_{p(i,j)} = \omega_{ij} \mathbf{G}_{ij} \quad (2.13)$$

Em que  $\omega_{ij}$  é a magnitude da deformação plástica do nó em análise e  $\mathbf{G}_{ij}$  é o gradiente da superfície de interação, para a análise da extremidade plastificada é dado por:

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial P_{ij}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{ij}} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Os elementos não nulos na matriz  $\mathbf{G}$  estão localizados nas extremidades do elemento plastificado. Nessas regiões, as resistências axiais e rotacionais diminuem. Além disso, assegura-se que a contribuição da deformação elástica seja tangente à superfície de escoamento.

Com base nas relações anteriores e assumindo a ortogonalidade das deformações plásticas, é calculado o vetor de forças incrementais. Adotando  $\omega_{ij}$  arbitrário, é factível obter a matriz de redução plástica do elemento, representada pela Equação (2.15), conforme descrito a seguir:

$$\mathbf{k}_m = -\mathbf{k}_e \mathbf{G} \left[ \mathbf{G}^T \mathbf{k}_e \mathbf{G} \right]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{k}_e \quad (2.15)$$



### 3 METODOLOGIA PARA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

#### 3.1 Metodologia de Solução

Na resolução de problemas estáticos não lineares, são empregadas abordagens que combinam procedimentos incrementais e iterativos. Neste capítulo é introduz uma metodologia abrangente para a análise estática de estruturas reticuladas planas, especialmente desenvolvida para guiar o processo de solução do problema. É detalhada a metodologia de solução do problema estrutural não linear, explanando sobre as duas etapas do processo: a fase incremental predita e o ciclo iterativo. O método de Newton-Raphson (BATHE, 1996) é o alicerce desses esquemas numéricos, sendo utilizado na forma padrão ou modificada.

De acordo com Silva (2009), em ambas as abordagens, seja na forma padrão ou modificada, a carga permanece constante ao longo dos ciclos iterativos. Esse aspecto limita as formulações, impedindo-as de ultrapassar os pontos limites que podem surgir no delineamento da curva da trajetória de equilíbrio, uma vez que os resultados convergem próximos ao primeiro ponto limite. Adicionalmente, é viável aplicar técnicas de continuação, que envolvem a inclusão de equações de restrição ao sistema algébrico. Essas técnicas têm como objetivo superar os pontos limites e proporcionar uma abordagem mais abrangente à análise estrutural.

Conforme descrito em Silva (2009), um sistema estrutural é denominado conservativo quando o trabalho executado pelos esforços internos e externos não é afetado pelo trajeto seguido pela estrutura durante a transição da condição de equilíbrio inicial (ou de referência) para uma configuração diferente. A nova configuração, para ser considerada aceitável, deve atender às relações de compatibilidade e às condições de contorno essenciais do sistema.

A energia potencial total do sistema,  $\Pi$ , consiste da energia interna de deformação,  $U$ , e do potencial das cargas externas,  $\Omega$ , ou seja:

$$\Pi = U + \Omega \quad (3.1)$$

A configuração de equilíbrio de um sistema estrutural pode ser obtida através do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária, o qual estabelece que entre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem as condições de equilíbrio tornam a energia potencial estacionária (Cook *et al.*, 1989).

A energia armazenada na estrutura para mover-se da configuração de equilíbrio  $t$  para  $t+\Delta t$  pode ser escrita como (Yang e Kuo, 1994):

$$U = \int_{\omega V} \left( \omega \tau_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \right) \Delta \varepsilon_{ij}^{\omega} dV \quad (3.2)$$

onde  $\tau_{ij}$  representa as componentes do tensor de Cauchy,  $\Delta \varepsilon_{ij}$  são as componentes do tensor incremento de deformações de Green-Lagrange,  $C_{ijkl}$  é o tensor com relações constitutivas, e o sobrescrito  $\omega$  refere-se à uma configuração de referência conhecida que depende do tipo de referencial Lagrangiano.

Assumindo que o carregamento externo atuante é dependente do estado de deformação do corpo, tem-se que a energia potencial das forças externas é definida como:

$$\Omega = - \int_S F_i \Delta d_i dS \quad (3.3)$$

onde  $\Delta d_i$  as componentes dos deslocamentos incrementais e  $S$  define a região onde as forças externas são prescritas.

Ao empregar o Método dos Elementos Finitos (MEF), faz-se a subdivisão do meio contínuo em subdomínios interconectados por meio de pontos nodais, nos quais são definidos os graus de liberdade a serem determinados. Esse método permite uma representação eficaz do comportamento estrutural, onde as incógnitas do problema são expressas em termos das mesmas incógnitas nos pontos nodais de cada elemento. Ao avaliar a energia potencial total e somar as contribuições de cada elemento, obtém-se um sistema total de equações cuja solução proporciona determinar as incógnitas nos pontos nodais, contribuindo assim para uma análise abrangente do equilíbrio estrutural.

Ao investigar o comportamento não linear de uma estrutura, é essencial manter a matriz de rigidez continuamente atualizada para refletir o estado de equilíbrio diante de variações na geometria e influências do escoamento do material. Nesse contexto, torna-se imperativo conduzir uma análise incremental e iterativa para abordar devidamente tais mudanças e garantir uma compreensão precisa do comportamento estrutural.

Em uma análise incremental não linear que incorpora procedimentos iterativos em cada passo incremental, é possível identificar duas distintas fases. A primeira, chamada de fase predita, consiste na resolução dos deslocamentos incrementais por meio das equações de equilíbrio da estrutura, com base em um aumento específico na sollicitação. Já a segunda fase, conhecida como corretiva, tem como objetivo corrigir as forças internas incrementais derivadas dos incrementos nos deslocamentos por meio de um processo iterativo. Essas forças internas

são comparadas ao carregamento externo, proporcionando a quantificação do desequilíbrio entre forças internas e externas.

Em um contexto computacional, para um determinado passo de carga, esse procedimento pode ser resumido em duas etapas distintas. Inicialmente, a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é escolhido um incremento de carga,  $\Delta\lambda^0$ , que é definido como o incremento inicial do parâmetro de carga, atendendo a alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção de  $\Delta\lambda^0$ , calcula-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ . As estimativas  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$  representam o que é comumente denominado como a solução incremental predita. Na segunda etapa da solução, por meio de uma estratégia de iteração específica, o objetivo é corrigir a solução incremental proposta na etapa anterior para restaurar o equilíbrio da estrutura de maneira eficiente. Se as iterações envolvem não apenas os deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ , mas também o parâmetro de carga,  $\lambda$ , uma equação adicional de restrição é necessária. A forma dessa equação de restrição distingue as diversas estratégias de iteração. (Silveira, 1995; Galvão, 2000)

A equação que estabelece o equilíbrio estático dos sistemas estruturais pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi) = \mathbf{F}_e \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{F}_i$  refere-se ao vetor de forças internas, uma função não linear dos deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ , dos esforços internos nos membros,  $\mathbf{P}$ , e dos efeitos da inelasticidade do material,  $\Psi$ ;  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas, que pode ser representado pelo produto do parâmetro de carga  $\lambda$  e o vetor de forças externas de referência  $\mathbf{F}_r$ .

A seguir, são apresentados alguns dos passos essenciais da metodologia de análise não linear. Entretanto, é importante ressaltar algumas observações pertinentes à notação a ser utilizada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga  $t$ , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga,  $t+\Delta t$ ;
- $k$  se refere ao contendor do número de iterações em um determinado passo de carga. Para  $k = 0$ , tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo;
- $\lambda$  e  $\mathbf{U}$  definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;

- $\Delta\lambda$  e  $\Delta\mathbf{U}$  caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{U}$  denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

### 3.1.1 Solução Incremental Preditada

A fase inicial na obtenção da solução incremental predita ou solução incremental inicial tangente ( $\Delta\lambda^0$ ,  $\Delta\mathbf{U}^0$ ) envolve a construção da matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{K}$  utilizando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura. Em seguida, o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_r$ , é determinado por meio da seguinte expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.5)$$

Através de uma abordagem que gradualmente aumenta a carga, é viável realizar uma seleção automatizada do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ . Essa escolha pode ser submetida a uma equação de restrição adicional aplicada ao problema, como ilustrado na Figura 3.1, por exemplo, para limitar o comprimento do arco (CRISFIELD, 1981; 1991). A seguir, serão apresentadas as especificações da estratégia de incremento de carga utilizada neste estudo.

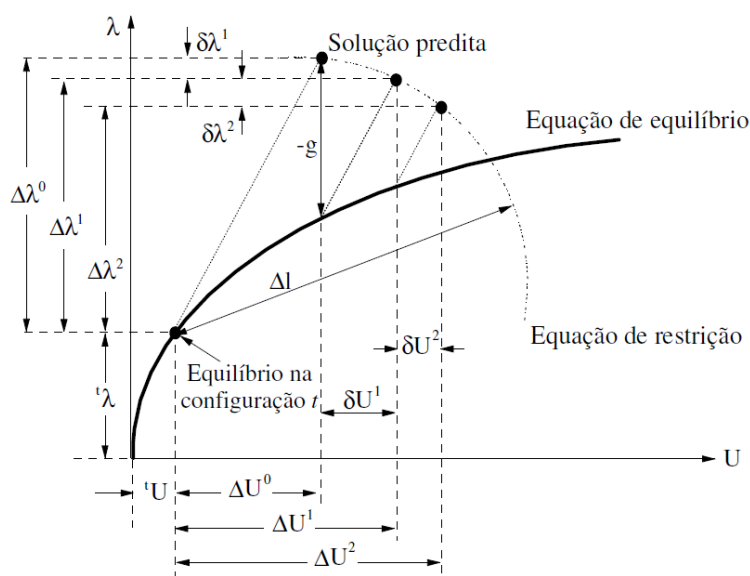


Figura 3.1 Solução incremental-iterativa (SILVA, 2009)

Após a definição de  $\Delta\lambda^0$ , é possível determinar o deslocamento nodal tangencial  $\Delta\mathbf{U}^0$ , escalonando  $\delta\mathbf{U}_r$  ou seja:

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (3.6)$$

Nesse sentido, é possível atualizar os parâmetros de carga e os deslocamentos totais através das seguintes relações:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.7)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.8)$$

onde  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  representam o ponto de equilíbrio alcançado no último passo de carga, conforme indicado na Figura 3.1.

Uma vez que as Equações (3.7) e (3.8) nem sempre atendem à condição de equilíbrio do sistema, iterações são essenciais para restabelecer o equilíbrio necessário.

### 3.1.2 Ciclo de Iterações: Método de Newton-Raphson

As soluções para problemas estruturais que envolvem não linearidades geométricas e físicas podem ser identificadas pela presença de pontos críticos. Esses pontos críticos incluem situações como pontos de limite com fenômenos de *snap-through* (pontos de limite de carga) e *snap-back* (pontos de limite de deslocamento), bem como bifurcações ao longo da trajetória de equilíbrio. Ilustrados na Figura 3.2, esses fenômenos geralmente resultam em desafios para os métodos convencionais de solução numérica, tornando-os menos eficientes.

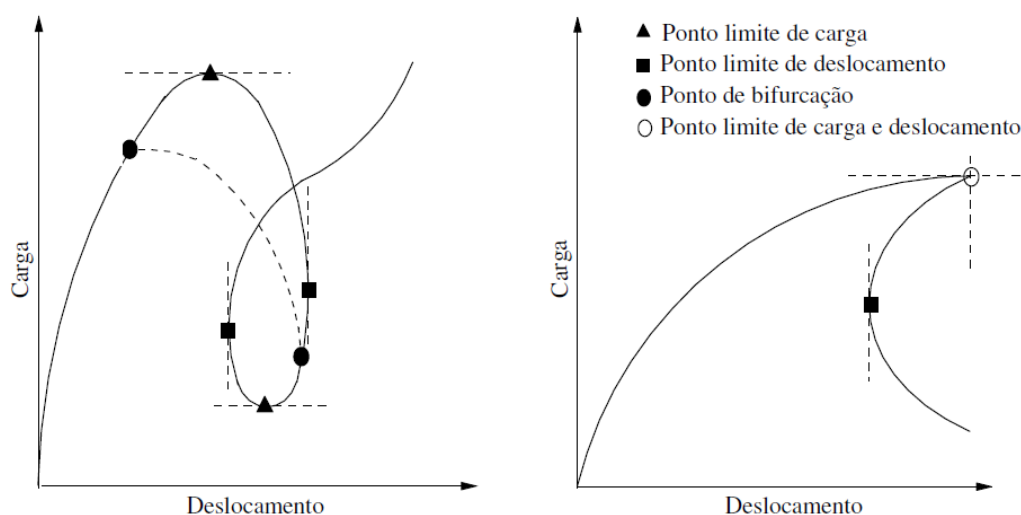


Figura 3.2 Trajetórias de equilíbrio (SILVEIRA, 1995)

Na análise numérica, o propósito do método de Newton-Raphson (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989) é identificar as raízes ou os zeros de uma equação não linear. Esse método parte de uma estimativa inicial para a raiz, buscando determinar uma sequência de correções até atingir uma solução com uma precisão satisfatória. Para isso, a equação não linear, da qual se buscam as raízes, é aproximada por meio de uma série de Taylor (PRESS et al., 1986; HEATH, 1997).

Na abordagem convencional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  permanece inalterado ao longo do ciclo iterativo. Contudo, para rastrear de forma abrangente a trajetória de equilíbrio, incluindo possíveis passagens por pontos limites e/ou bifurcações, torna-se necessário permitir a variação de  $\lambda$  a cada iteração. Assim, adotando a técnica geral de solução inicialmente proposta por Batoz e Dhatt (1979), que permite a variação do parâmetro de carga, é possível considerar que as mudanças nos deslocamentos nodais são regidas pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), k \geq 1 \quad (3.9)$$

na qual  $\mathbf{g}$  representa, na terminologia da programação, o vetor gradiente que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando assim que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido.

Conforme expresso na equação anterior (3.9), observa-se que  $\mathbf{g}$  é uma função dos deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{U}^{(k-1)}$ , computados na última iteração, e do valor atual do parâmetro de carga total,  $\lambda^k$ , que, por sua vez, é tratado como uma incógnita, sendo expresso da seguinte forma:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (3.10)$$

onde  $\delta \lambda^k$  é a correção do parâmetro de carga.

Ao substituir a Equação (3.10) em (3.9) e realizar manipulações algébricas matriciais, obtém-se a seguinte equação fundamental que será utilizada ao longo do ciclo iterativo:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.11)$$

Da Equação anterior (3.11), os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas, obtendo-se:

$$\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.12)$$

em que:

$$\delta \mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.13)$$

$$\delta \mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.14)$$

Nas equações anteriores,  $\delta \mathbf{U}_g$  é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante e  $\delta \mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ .

Após alcançar a solução iterativa,  $\delta \lambda^k$  e  $\delta \mathbf{U}^k$ , procede-se com a atualização das variáveis incrementais do problema por meio das seguintes relações:

$$\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (3.15)$$

$$\Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.16)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais têm-se:

$${}^{(t+\Delta t)} \lambda^k = {}^t \lambda + \Delta \lambda^k \quad (3.17)$$

$${}^{(t+\Delta t)} \mathbf{U}^k = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k \quad (3.18)$$

Em todo processo iterativo, a solução não é exata, sendo calculada de forma aproximada. Portanto, é necessário estabelecer limites de tolerância para interromper esse processo. A iteração chega ao fim, indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura analisada, quando pelo menos um dos dois critérios de convergência a seguir é atendido. O primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração atual, utilizando parâmetros da iteração anterior. Sua definição é a seguinte:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (3.19)$$

na qual o numerador, é representada a norma Euclidiana do vetor de forças desequilibradas, calculada utilizando o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior. Já o denominador corresponde à norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo, sendo  $\zeta$  um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada.

O segundo critério de convergência segue relações de deslocamentos e é sempre avaliado ao término da iteração atual. Sua definição é a seguinte:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.20)$$

nessa expressão, o numerador corresponde à norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais), enquanto o denominador refere-se à norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais. Esses últimos são obtidos após a correção do processo iterativo, e  $\zeta$  mantém a mesma definição do critério anterior.

A Figura 3.3 ilustra os procedimentos descritos nesta seção.



**Figura 3.3** Estratégia generalizada para análise estática não linear (SILVA, 2009)

---

**1.** Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida,  $t$ :  ${}^t\mathbf{U}$  e  ${}^t\lambda$

**2. SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:**  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$

**2a.** Monta-se a matriz de rigidez tangente:  $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P})$

**2b.** Resolve:  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$

**2c.** Define  $\Delta\lambda^0$  usando a estratégia de incremento de carga

**2d.** Determina:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$

**2e.** Atualiza as variáveis na configuração  $t + \Delta t$ :

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \text{ e } {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$$

**3. PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:**  $k = 1, 2, 3, \dots$

**3a.** Avalia o vetor de forças internas:  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$

**3b.** Calcula o vetor de forças residuais:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$$

**3c.** Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$

**3d.** Obtém a correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , usando a estratégia de iteração

**3e.** Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais:  $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$ ,

com:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$$

**3f.** Atualiza o parâmetro de carga,  $\lambda$ , e o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :

a) *Incremental:*  $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$  e  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$

b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$

**3g.** Verifica a convergência:

**SIM** (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 4*

**3h.** Retorna ao passo 3

**4.** Atualiza as variáveis que forem necessárias

**5. REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 2**

---

## 4 ESTUDO DE CASOS

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, são analisados alguns sistemas estruturais, seguida por um estudo dos efeitos resultantes da consideração de sistemas de contraventamento na estabilidade das estruturas em questão. Como mencionado anteriormente, as análises numéricas são conduzidas por meio do software MASTAN2 (MCGUIRE, GALLAGHER E ZIEMIAN, 2014). Tais análises abrangerão a inelasticidade do aço e a não linearidade geométrica da estrutura, com foco em pórticos planos de múltiplos pavimentos. Os resultados obtidos serão comparados com análises já documentadas na literatura, proporcionando uma base para avaliar os impactos da adoção desses sistemas na estabilidade estrutural.

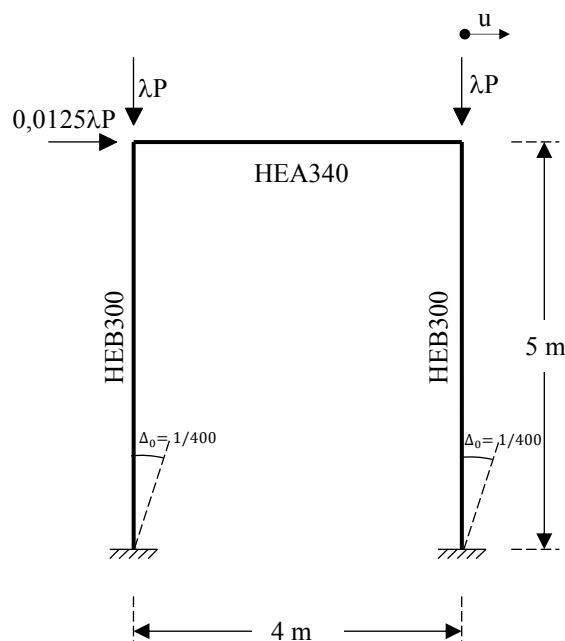
Ao levar em consideração a degradação da rigidez do material por meio da análise inelástica, que abrange o escoamento gradual do material, bem como a não linearidade geométrica que incorpora os efeitos  $P-\Delta$  e  $P-\delta$ , juntamente com as imperfeições geométricas, notáveis características que exercem impacto considerável no comportamento das estruturas metálicas, possibilita uma investigação minuciosa das respostas do sistema estrutural em diversas condições.

São realizadas avaliações dos tipos de ligação das barras de contraventamento, bem como diferentes configurações de disposição das barras na estrutura serão examinadas, assim como variações no tipo de material das mesmas. Dessa forma, é conduzida uma análise abrangente para compreender a influência desses fatores no comportamento final do deslocamento lateral do sistema estrutural.

Vale ressaltar que as barras do sistema de contraventamento estão discretizadas por meio de um elemento finito único, em contraste com as vigas e colunas das estruturas analisadas, que serão discretizadas em múltiplos elementos.

## 4.2 Pórtico Simples

Na primeira aplicação, tem-se um portal simples biengastado ilustrado na Figura 4.1. Trata-se de um problema clássico que foi analisado por Vogel (1985) através do método da zona plástica e, posteriormente, por Chen, Goto e Liew (1996) usando o método da rótula plástica refinado.



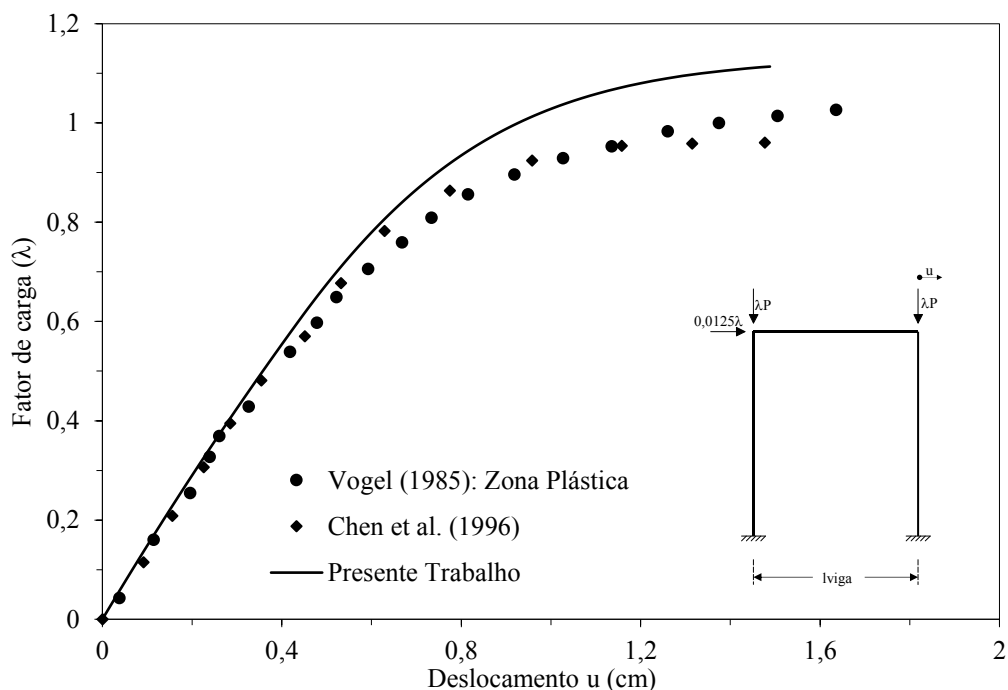
**Figura 4.1** Pórtico simples: geometria e carregamento

A estrutura possui viga formada por perfil HEA340 e colunas constituídas por perfis HEB300, dispostas de modo que a flexão ocorra em torno do eixo de maior inércia. O perfil HEA340 possui propriedades: área  $133\text{cm}^2$ , momento de inércia  $27690\text{cm}^4$  e momento plástico  $1680\text{cm}^3$ , enquanto o perfil HEB300 possui: área  $149\text{cm}^2$ , momento de inércia  $25170\text{cm}^4$  e momento plástico  $1680\text{cm}^3$ . Como identificado na figura considerou-se uma imperfeição inicial  $\Delta_0$  nas colunas, além disso são fornecidos: o módulo de elasticidade  $E = 205\text{GPa}$  e a tensão de escoamento  $\sigma_y = 235\text{MPa}$ .

As solicitações externas atuantes na estrutura também estão exibidas na Figura 4.1. O parâmetro  $\lambda$  é utilizado para controlar a intensidade do carregamento aplicado, e sua intensidade é automaticamente ajustada durante o processo incremental e iterativo até atingir a carga de colapso, e  $P$  possui intensidade de  $2800\text{kN}$ .

A discretização por elementos finitos do sistema estrutural envolveu a adoção de quatro elementos na viga e dois elementos nas colunas. Durante as análises inelásticas, o módulo de elasticidade tangente foi utilizado como parâmetro controlador para a degradação da rigidez do material. Os valores para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada na análise elástica foram, respectivamente: 0,1; 100000 e 100000. Já para a análise inelástica, esses parâmetros foram ajustados para 0,01; 10000 e 10000, respectivamente. Para traçar a trajetória de equilíbrio da análise inelástica, controlou-se o deslocamento lateral sofrido pela seção no topo da coluna direita.

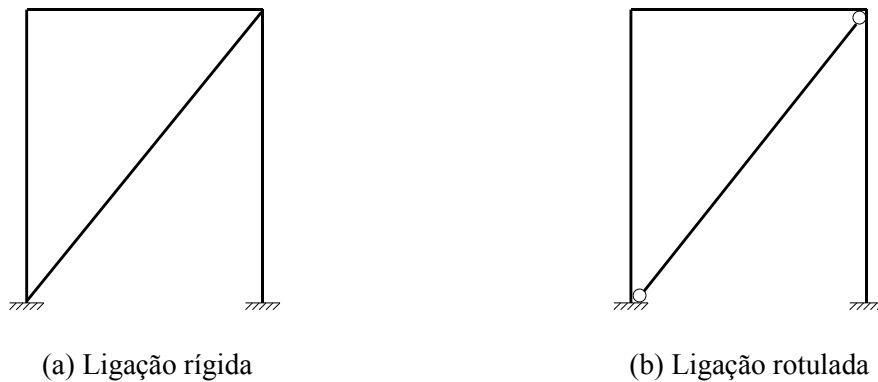
Os resultados retratados na Figura 4.2 trazem a relação entre a variação do deslocamento ( $u$ ) e o fator de carga aplicado. Ao comparar esses resultados com os dados encontrados por Vogel (1985) e Chen *et al.* (1996), percebe-se uma discreta variação nas respostas. Isso pode ser devido às diferentes formas de considerar a plastificação do material nas formulações de elementos finitos adotadas por esses autores.



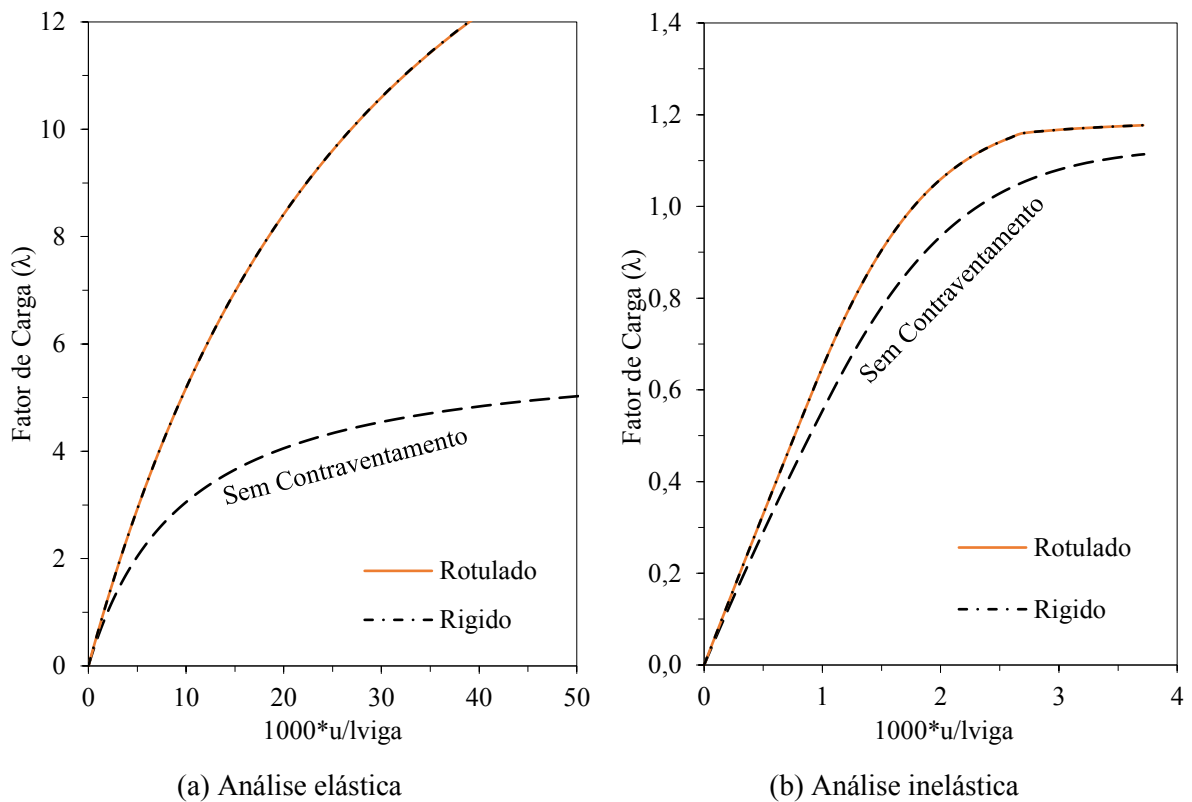
**Figura 4.2** Trajetória de equilíbrio para pórtico simples

Com o propósito de analisar o comportamento do sistema de contraventamento,

adicionou-se uma barra diagonal no pórtico, confeccionada com um perfil de aço com as seguintes características: L76X76X12,5, apresentando uma área de 17,58cm<sup>2</sup>, momento de inércia de 92,4cm<sup>4</sup> e módulo plástico de 31,3cm<sup>3</sup>. Adicionalmente, para investigar a influência do tipo de ligação entre essa barra e as demais do pórtico, foram incorporadas ligações tanto rígidas quanto rotuladas, conforme apresentado na Figura 4.3.



**Figura 4.3** Sistema de contraventamento do pórtico simples



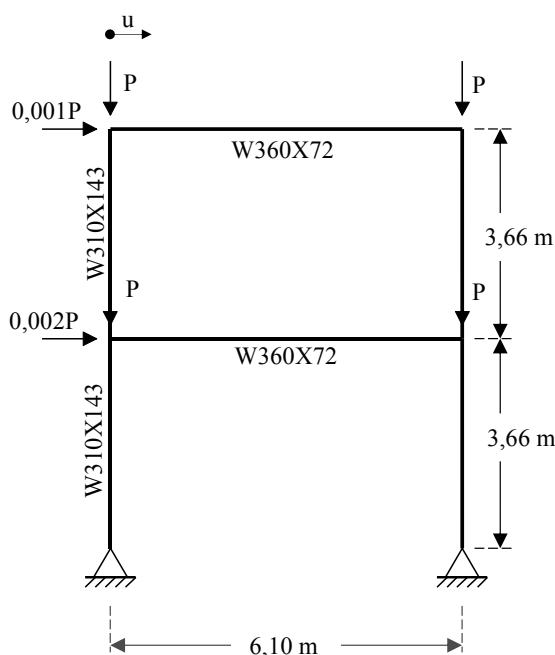
**Figura 4.4** Trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento

Verificou-se que a flexibilidade da ligação não exerce uma influência significativa na capacidade de carga e no deslocamento lateral da estrutura, conforme evidenciado na Figura 4.4. Além disso, constatou-se que a introdução da barra de contraventamento resultou em uma considerável redução do deslocamento lateral para uma carga equivalente. Ao examinar a carga limite, destaca-se que a diferença maior ocorre na análise elástica. Na análise inelástica, embora a carga limite não seja substancialmente maior, há uma melhoria perceptível no deslocamento lateral.

Com base nos resultados dessa análise, optou-se por usar conexões rotuladas nas ligações entre as barras de contraventamento e os membros estruturais nas análises subsequentes. Dessa forma, o contraventamento fica sujeito exclusivamente ao esforço axial.

### 4.3 Pórtico de Dois Andares

O pórtico de dois pavimentos com ligações viga-coluna rígidas ilustrado na Figura 4.5 será investigado nesta seção. Esse problema foi anteriormente abordado por Chan e Chui (2000) e Silva (2009), os quais investigaram a capacidade de carga do sistema ao contemplar as ligações entre as vigas e colunas como semirrígidas. Além disso, realizaram análises considerando diferentes configurações de apoio, incluindo bases engastadas e articuladas. Na abordagem de Azevedo (2021) foi utilizado todas as ligações rígidas como o presente trabalho.



**Figura 4.5** Pórtico de dois andares: geometria e carregamento

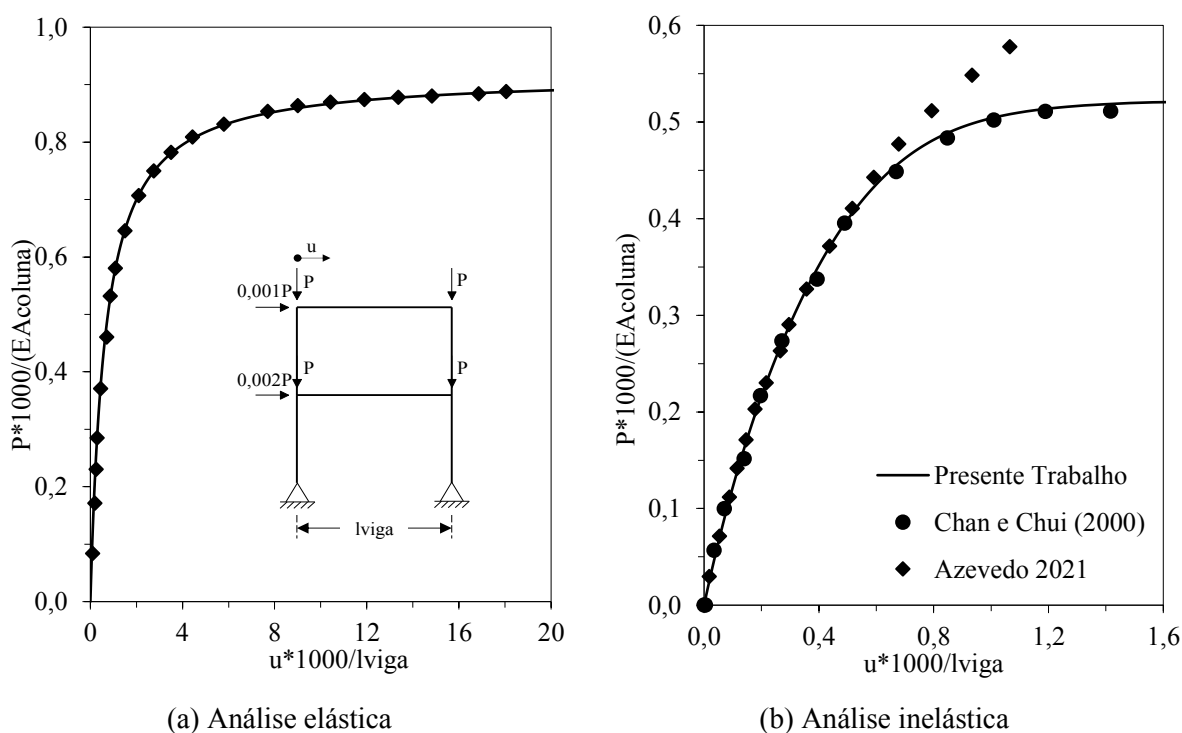
A estrutura possui vigas e colunas formadas por perfis W360X72 e W310X143, respectivamente. Tais perfis foram dispostos de modo que a flexão ocorra em torno do eixo de maior inércia. O perfil W360X72 possui propriedades: área  $91,6\text{cm}^2$ , momento de inércia  $20169\text{cm}^4$  e módulo plástico  $1285,9\text{cm}^3$ . Já o perfil W310X143 possui: área  $182,5\text{cm}^2$ , momento de inercia  $34812\text{cm}^4$  e módulo plástico  $2422,2\text{cm}^3$ . São fornecidos: o módulo de elasticidade  $E = 200\text{GPa}$  e a tensão de escoamento  $\sigma_y = 235\text{MPa}$ .

Nas extremidades das vigas, estão aplicadas forças concentradas verticais de magnitude  $\lambda P$ . No topo da coluna à esquerda, uma solitação horizontal de  $0,001\lambda P$  está presente, e na extremidade esquerda da viga central uma força horizontal de  $0,002\lambda P$ . O parâmetro  $\lambda$

representa a intensidade da carga, e esse parâmetro é ajustado incrementalmente durante o processo até atingir a carga de colapso.

A discretização por elementos finitos do sistema estrutural envolveu a adoção de dois elementos nas vigas e um elemento nas colunas. Foi realizada análise elástica e inelástica da estrutura. Os valores para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada na análise elástica foram, respectivamente: 10; 10000 e 100000. Já para a análise inelástica, esses parâmetros foram ajustados para 10; 10000 e 10000, respectivamente.

A Figura 4.6 mostra as trajetórias de equilíbrio para as análises elástica (Figura 4.6a) e inelástica (Figura 4.6b). Que foram encontradas controlando o deslocamento horizontal no topo da coluna da esquerda.

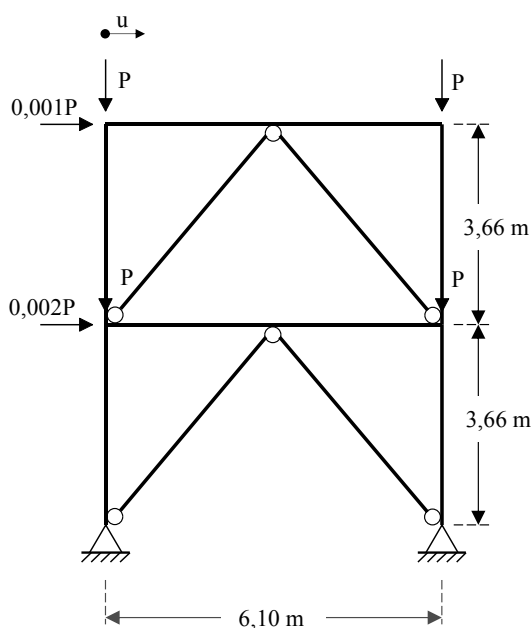


**Figura 4.6** Trajetórias de equilíbrio para pórtico de dois andares

Observa-se que os resultados obtidos, representado na Figura 4.6, estão em concordância com os descritos na literatura de Chan e Chui (2000). Importante mencionar que as cargas e os



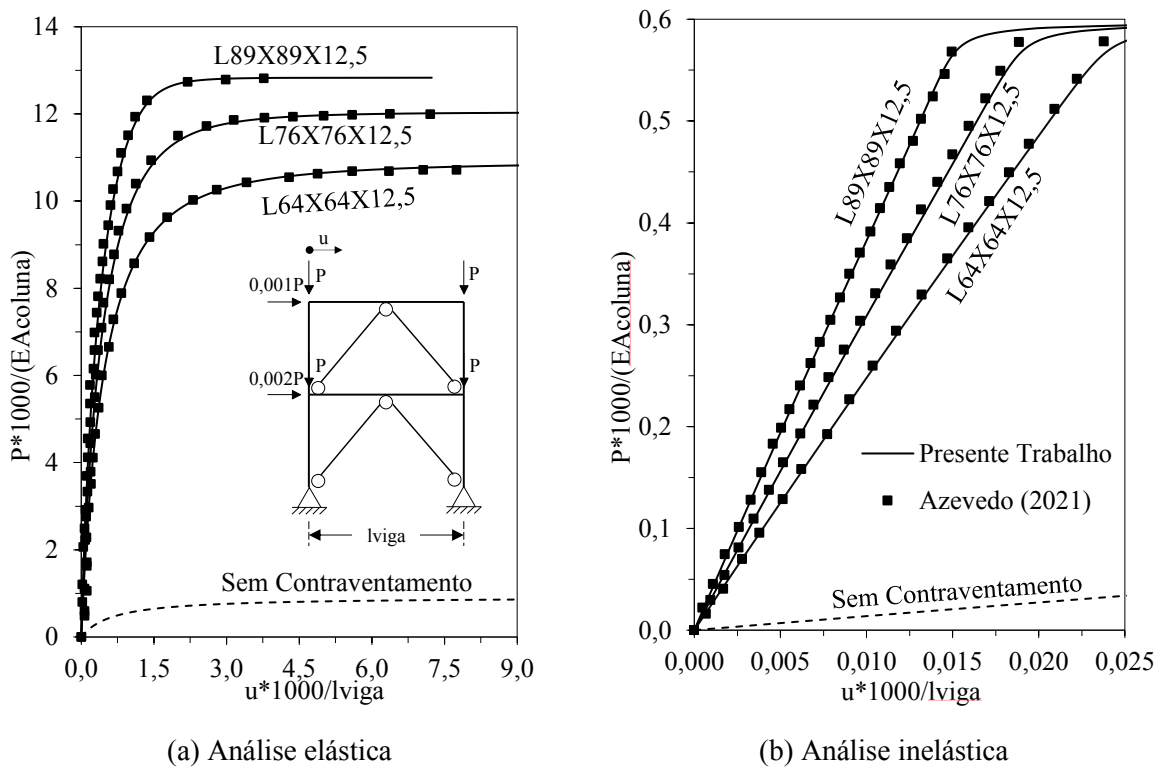
deslocamentos foram normalizados, a carga pela relação do módulo de elasticidade do material multiplicado pela área da seção transversal da coluna e os deslocamentos pelo comprimento das vigas. Posteriormente, foram incorporadas barras de contraventamento dispostas em formato de um "V" invertido nos dois pavimentos, conforme representado na Figura 4.7, utilizando conexões rotuladas nas barras de contraventamento. O objetivo desse estudo é avaliar a influência de barras com propriedades geométricas distintas. Foram empregados três perfis de aço: o L89X89X12,5, com as seguintes propriedades: área de 21cm<sup>2</sup>, momento de inércia de 151,5cm<sup>4</sup> e módulo plástico de 43,59cm<sup>3</sup>; o L76X76X12,5, com área de 17,58cm<sup>2</sup>, momento de inércia de 92,4cm<sup>4</sup> e módulo plástico de 31,3cm<sup>3</sup>; e, por fim, o perfil L64X64X12,5, com área de 14,52cm<sup>2</sup>, momento de inércia de 51,2cm<sup>4</sup> e módulo plástico de 21,14cm<sup>3</sup>. Assim como a estrutura inicial sem o contraventamento foi realizado análises elástica e inelástica da estrutura com todas as três barras.



**Figura 4.7** Sistema de contraventamento do pórtico de dois andares

A Figura 4.8 ilustra a trajetória de equilíbrio obtida controlando o deslocamento horizontal no topo da coluna à esquerda usando os diferentes perfis citados no parágrafo anterior nos dois tipos de análises: elástica (Figura 4.8a) e inelástica (Figura 4.8b).

Os resultados apresentados na Figura 4.8a revelam, na análise elástica, que nas barras com o perfil L89X89X12,5 a estrutura demonstra uma maior rigidez, suportando, conseqüentemente, uma solicitação mais elevada e experimentando um deslocamento menor. Por outro lado, o perfil L64X64X12,5 exibe a menor rigidez na estrutura. Nas análises inelásticas, Figura 4.8b, observa-se a mesma tendência, em que a barra de maior área contribui para um deslocamento lateral inferior na estrutura. Dessa forma, conclui-se que a rigidez está diretamente relacionada à área da barra de contraventamento.



**Figura 4.8** Trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento

#### 4.4 Pórtico de Quatro Andares

Nesta seção o estudo foi feito com o pórtico de quatro pavimentos e bases engastadas ilustrado na Figura 4.9. Esse problema foi anteriormente abordado na literatura, Kassimali (1983) propôs uma solução do mesmo baseada no método da rótula elasto-plástica. Yoo e Choi (2008) avaliaram um novo método de análise com a flambagem inelástica para determinar a carga crítica da estrutura, utilizando a teoria do módulo tangente e a curva de resistência para colunas do AISC-LRFD (AISC, 1986).

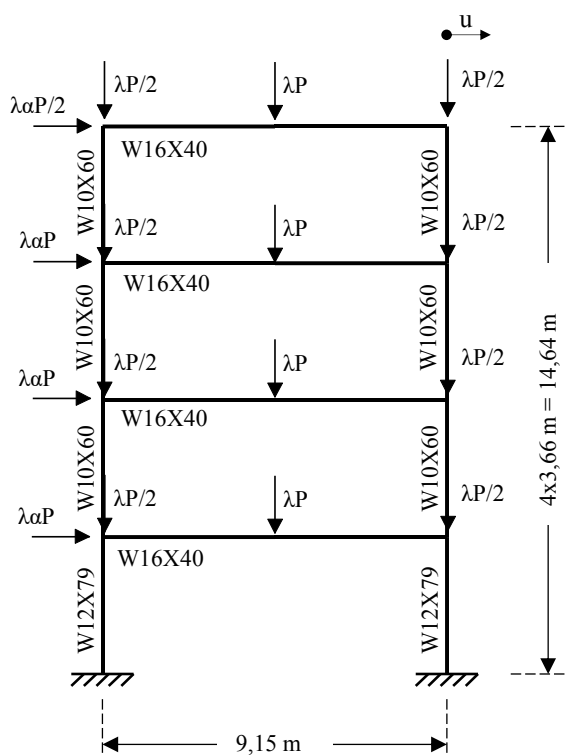


Figura 4.9 Pórtico de quatro andares: geometria e carregamento

A estrutura possui vigas formadas por perfis W16X40 e colunas com perfis W10X60 e W12X79, dispostas de modo que a flexão ocorra em torno do eixo de maior inércia. O perfil W16X40 possui propriedades: área  $75,79 \text{ cm}^2$ , momento de inércia  $21707 \text{ cm}^4$  e módulo plástico  $1201,5 \text{ cm}^3$  enquanto o perfil W12X79 possui: área  $149,7 \text{ cm}^2$ , momento de inercia  $27510 \text{ cm}^4$  e módulo plástico  $1949 \text{ cm}^3$  e por fim o W10X60 possui: área  $114,1 \text{ cm}^2$ , momento de inercia  $14260 \text{ cm}^4$  e módulo plástico  $1226 \text{ cm}^3$ . São adotados: o módulo de elasticidade  $E = 201 \text{ GPa}$  e a tensão de escoamento  $\sigma_y = 236 \text{ MPa}$ . Nas extremidades das vigas, estão aplicadas cargas

concentradas verticais de magnitude  $\lambda P/2$ . No centro das vigas atuam cargas verticais de intensidade  $\lambda P$ . Cargas horizontais no topo das colunas com intensidades  $\alpha\lambda P/2$  e  $\alpha\lambda P$  como mostra a Figura 4.9 são consideradas. Usa-se o parâmetro  $\alpha$  com o objetivo de avaliar o comportamento da estrutura com diferentes magnitudes de carregamento. Neste trabalho, foram utilizados três diferentes alfas 0,1; 0,24 e 0,5 nas análises. As cargas foram incrementadas através do parâmetro  $\lambda$  até atingir a carga de colapso.

A discretização por elementos finitos do sistema estrutural envolveu a adoção de dois elementos nas vigas e um elemento nas colunas. Diferentemente das aplicações anteriores, foi realizada apenas análise inelástica dessa estrutura. Os valores para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada na análise foram, respectivamente: 0,01; 10000 e 10000.

A Figura 4.10 mostra as trajetórias de equilíbrio obtidas na análise inelástica para o pórtico de quatro andares. São representadas as curvas com a variação do deslocamento horizontal controlado no topo da coluna da direita durante o processo de carregamento da estrutura.

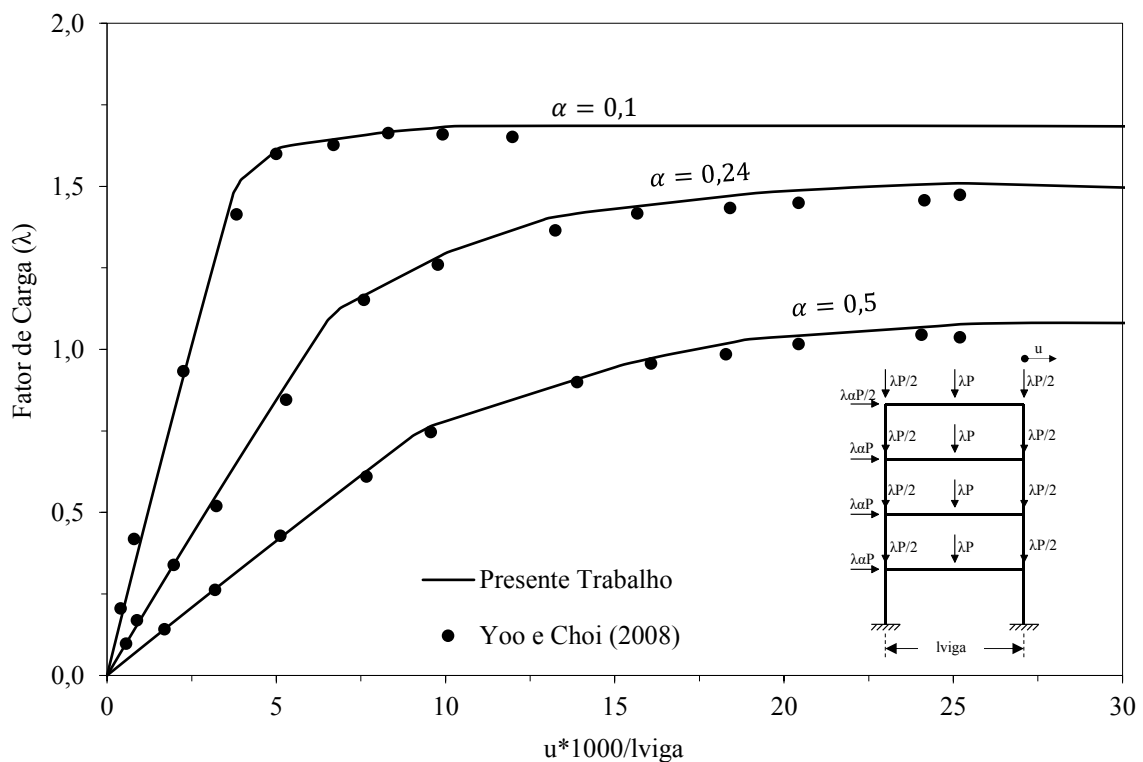
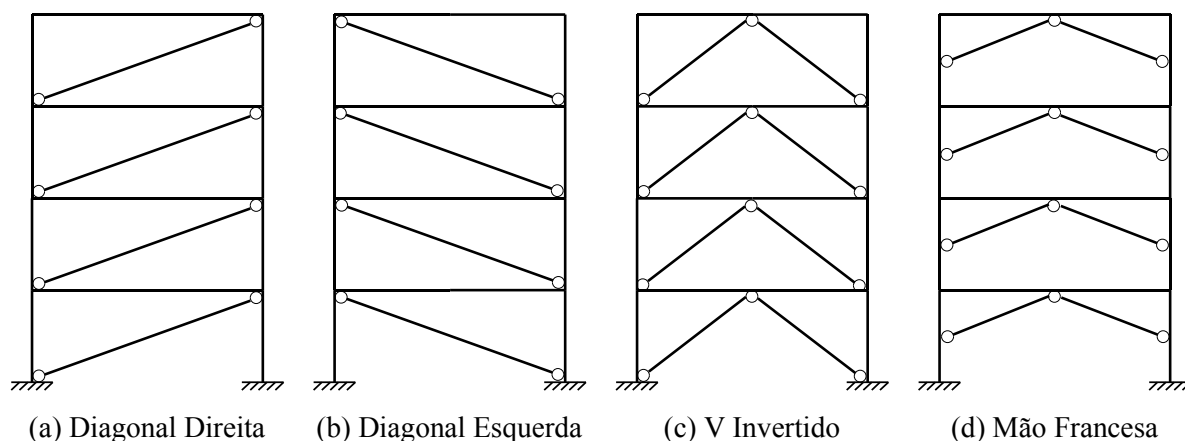


Figura 4.10 Trajetória de equilíbrio para pórtico de quatro andares

Comparando os resultados com o da literatura de Yoo e Choi (2008) e Azevedo (2021) através da Figura 4.10 é possível notar que o resultado é satisfatório, pois obtém-se uma concordância nos resultados. Quando o parâmetro  $\alpha$  é considerado igual a 0,5 a estrutura suporta uma menor intensidade de carga, visto que o carregamento atuante é maior que nas outras hipóteses analisadas, concluímos assim que quanto maior a carga aplicada na estrutura maior vai ser seu deslocamento horizontal.

Buscando avaliar o efeito dos sistemas de contraventamento foram introduzidas barras de contraventamentos no pórtico. Os esquemas adotados estão ilustrados na Figura 4.11(a-d): contraventamento em diagonal para direita (a), em diagonal para esquerda (b), em V invertido (c) e mão francesas conectadas no centro das barras das vigas e colunas (d).

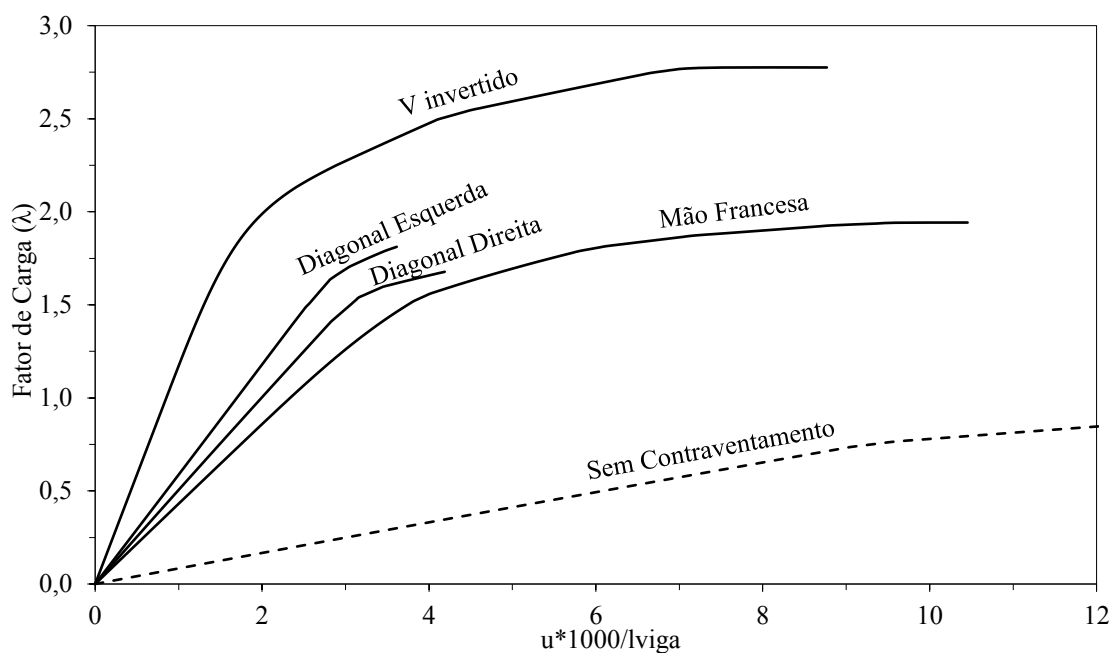


**Figura 4.11** Sistema de contraventamento do pórtico de quatro andares

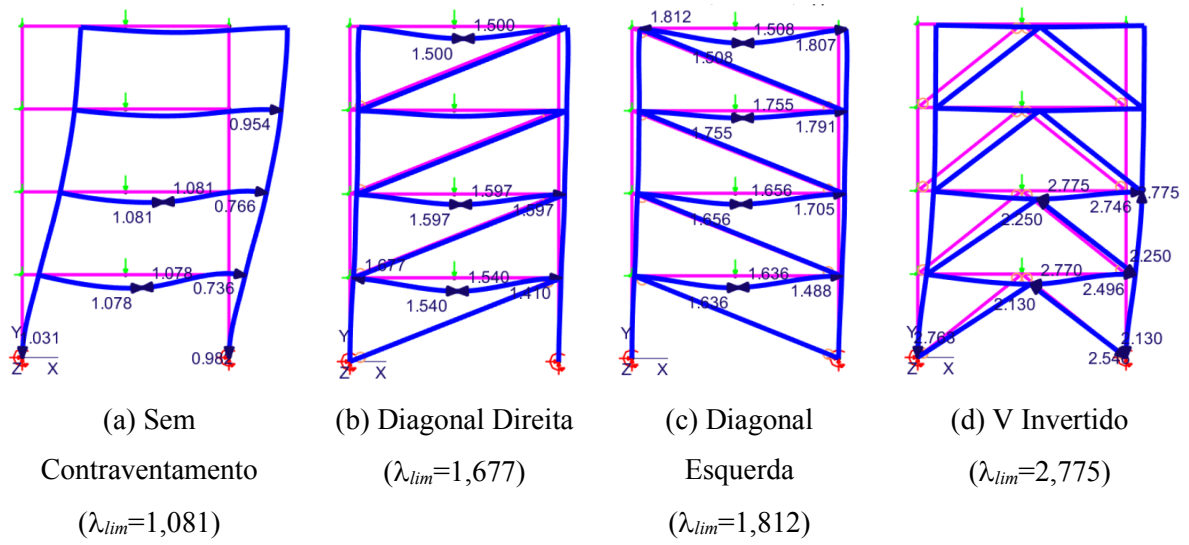
A Figura 4.12 mostra as trajetórias de equilíbrio obtidas na análise inelástica dos pórticos com diferentes sistemas de contraventamento onde se controla o deslocamento no topo da coluna. Importante mencionar que as análises com tais esquemas foram feitas considerando o parâmetro de carga  $\alpha$  igual a 0,5. Os resultados obtidos indicam que em todos os cenários houve a possibilidade de diminuir o deslocamento lateral da estrutura e aumentar a carga limite da estrutura. Isso evidencia que a incorporação de sistemas de contraventamento, resulta em uma melhoria significativa no desempenho da estrutura. É possível observar também que com a inclusão das barras em diagonal a estrutura obteve o pior desempenho em relação a capacidade

de carga. Já na estrutura com barras em V invertido foi possível observar o melhor desempenho da estrutura.

A Figura 4.13 apresenta a configuração deformada da estrutura em diferentes cenários: sem contraventamento, com contraventamento diagonal em ambos os lados e com contraventamento em forma de V invertido. Em cada estrutura, estão indicados os locais e os fatores de carga nos quais se desenvolveram rótulas plásticas. Na Figura 4.13a, as rótulas foram mais frequentes nas vigas devido aos acréscimos de forças axiais de compressão. Nas Figuras 4.13b e 4.13c, com barras diagonais, houve uma considerável redução no deslocamento lateral, as rótulas se formaram para uma intensidade de carga maior, e persistiram nas vigas. Por fim, na Figura 4.13d, com barras dispostas em V invertido, apenas quatro rótulas ocorreram nas vigas. É importante ressaltar que essa disposição foi identificada como a mais eficaz durante a análise, proporcionando uma maior capacidade de carga.



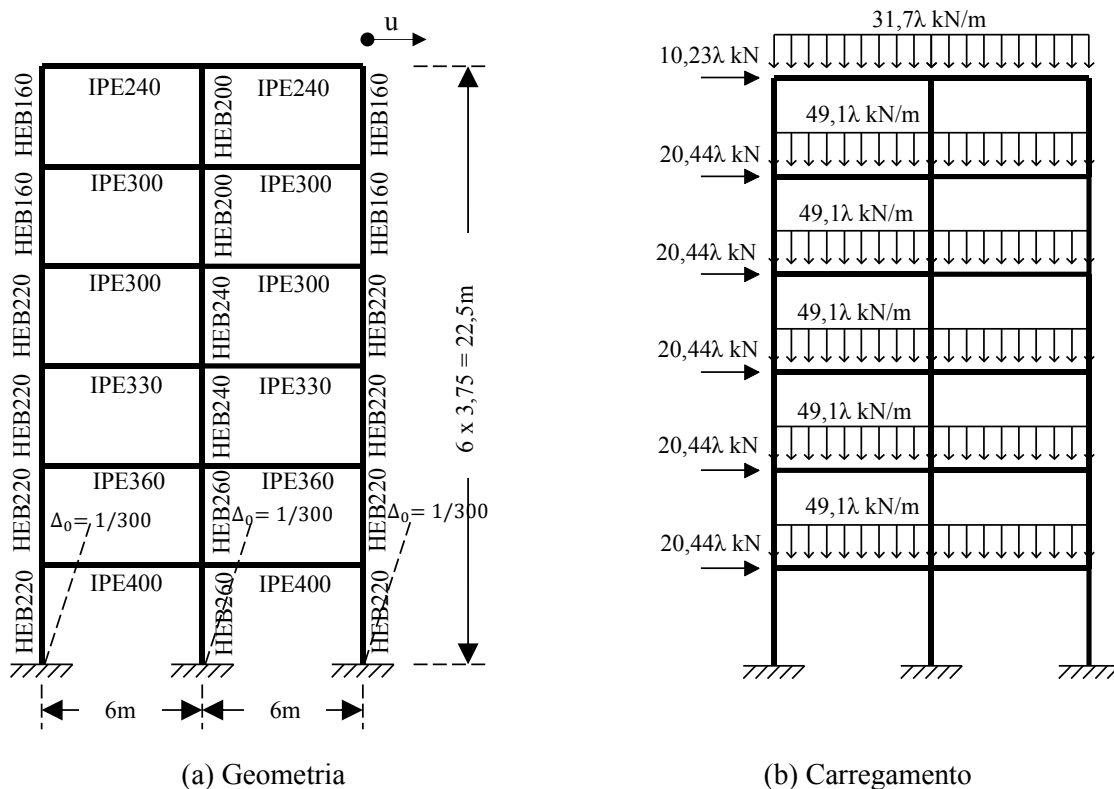
**Figura 4.12** Comparação das trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento



**Figura 4.13** Configuração deformada da estrutura

#### 4.5 Pórtico de Seis Andares

A Figura 4.14 exibe o pórtico de quadro duplo composto por seis pavimentos estudado nesta seção. Trata-se também de um problema clássico proposto por Vogel (1985) para a calibração de formulações inelásticas. Abordado anteriormente também por Chan e Chui (2000), Silva (2009) e Azevedo (2021), cujos estudos serão utilizados como base de comparação dos resultados obtidos no presente trabalho.



**Figura 4.14** Sistema estrutural do pórtico de seis andares

A estrutura é composta por vigas constituídas pelos perfis IPE240, IPE300, IPE330, IPE360 e IPE400, e colunas utilizando perfis HEB160, HEB200, HEB220, HEB240 e HEB260. Esses elementos são dispostos de forma a favorecer a flexão em torno do eixo de maior inércia. As propriedades específicas de cada perfil são as seguintes:

- IPE240: área  $39,1\text{cm}^2$ , momento de inércia  $3892\text{cm}^4$  e módulo plástico  $366,76\text{cm}^3$ ;
- IPE300: área  $53,8\text{cm}^2$ , momento de inércia  $8356\text{cm}^4$  e módulo plástico  $628,51\text{cm}^3$ ;



- IPE330: área 63,3cm<sup>2</sup>, momento de inércia 11908cm<sup>4</sup> e módulo plástico 814,22cm<sup>3</sup>;
- IPE360: área 72,7cm<sup>2</sup>, momento de inércia 16270cm<sup>4</sup> e módulo plástico 1019cm<sup>3</sup>;
- IPE400: área 84,5cm<sup>2</sup>, momento de inércia 23130cm<sup>4</sup> e módulo plástico 1307cm<sup>3</sup>.

Quanto dos perfis das colunas:

- HEB160: área 54,3cm<sup>2</sup>, momento de inércia 2492cm<sup>4</sup> e módulo plástico 354cm<sup>3</sup>;
- HEB200: área 78,1cm<sup>2</sup>, momento de inércia 5696cm<sup>4</sup> e módulo plástico 642,5cm<sup>3</sup>;
- HEB220: área 91cm<sup>2</sup>, momento de inércia 8091cm<sup>4</sup> e módulo plástico 827cm<sup>3</sup>;
- HEB240: área 106cm<sup>2</sup>, momento de inércia 11260cm<sup>4</sup> e módulo plástico 1053cm<sup>3</sup>;
- HEB260: área 118,4cm<sup>2</sup>, momento de inércia 14920cm<sup>4</sup> e módulo plástico 1283cm<sup>3</sup>.

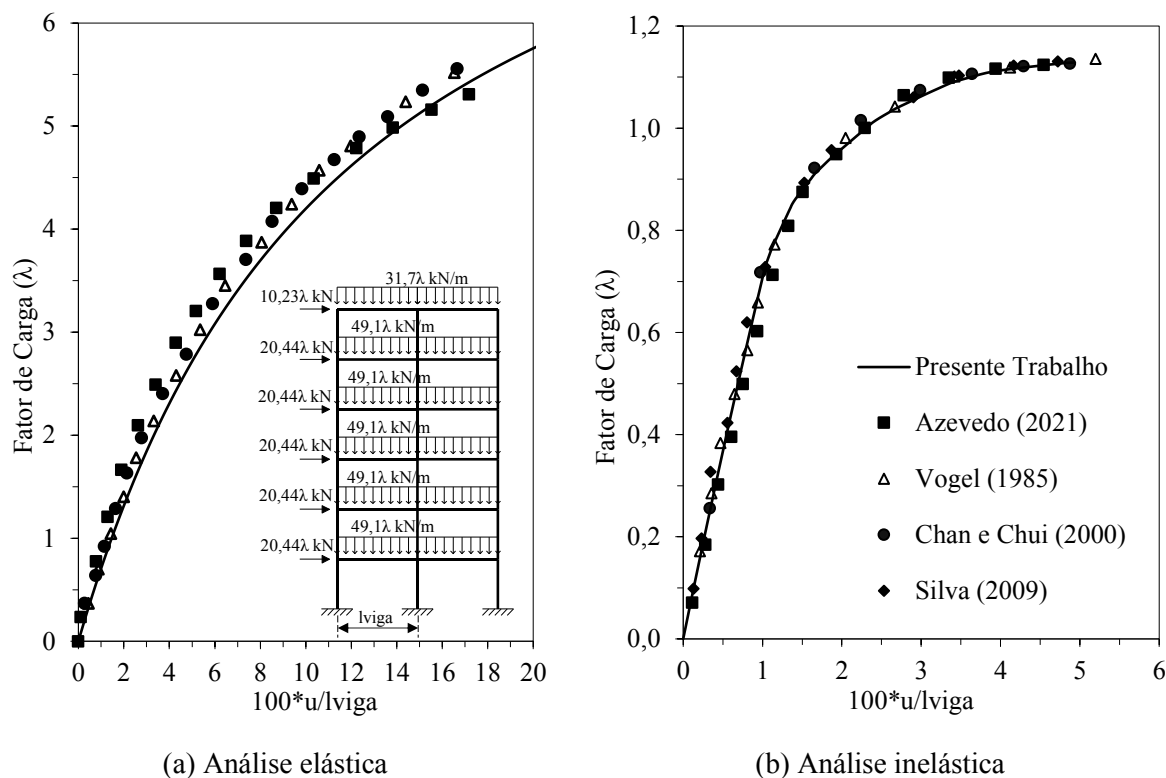
São fornecidos: o módulo de elasticidade igual a 205GPa e a tensão de escoamento, 235MPa. O carregamento atuante na estrutura pode ser verificado na Figura 4.14. Todas as cargas aplicadas estão sujeitas a variações representadas pelo parâmetro  $\lambda$ . Esse parâmetro  $\lambda$  denota o fator da carga, sendo ajustado incrementalmente durante o processo até alcançar a carga de colapso. Uma pequena inclinação das colunas é considerada através de uma imperfeição de  $\Delta_0 = 1/300$ .

A discretização por elementos finitos do sistema estrutural envolveu a adoção de sete elementos nas vigas e dois elementos nas colunas. Foram realizadas análises elástica e inelástica da estrutura. Os valores para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada na análise elástica foram, respectivamente: 0,1; 100000 e 100000. Já para a análise inelástica, esses parâmetros foram ajustados para 0,01; 10000 e 10000, respectivamente.

A Figura 4.15 ilustra as variações do deslocamento horizontal, no topo da coluna da direita durante o processo de carregamento. São apresentados também os resultados numéricos obtidos por Azevedo (2021), Vogel (1985) Chan e Chui (2000) e Silva (2009).

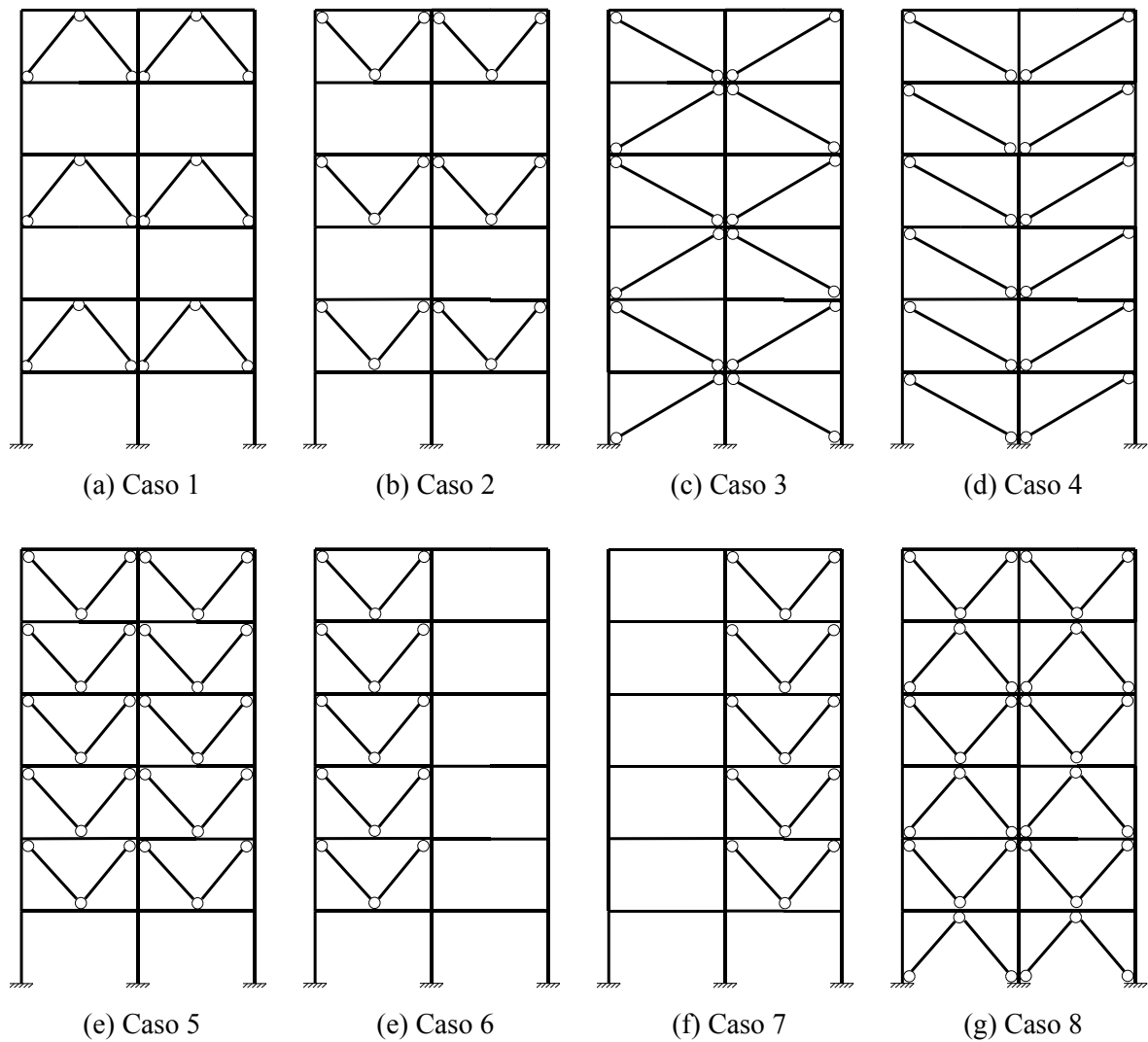
É evidente que os resultados obtidos, apresentado na Figura 4.15, estão em conformidade com as descrições encontradas na obra de Chan e Chui (2000) e Vogel (1985). Nota-se, especificamente, que ao considerar a degradação da rigidez do material, os resultados se aproximam ainda mais das referências literárias, com uma leve variação no comportamento elástico. É relevante salientar que os deslocamentos foram normalizados em relação ao comprimento das vigas. Ao comparar os resultados das duas Figuras 4.14(a) e 4.14(b), torna-se

aparente que o comportamento não linear da estrutura reduz significativamente a capacidade de carga do sistema.



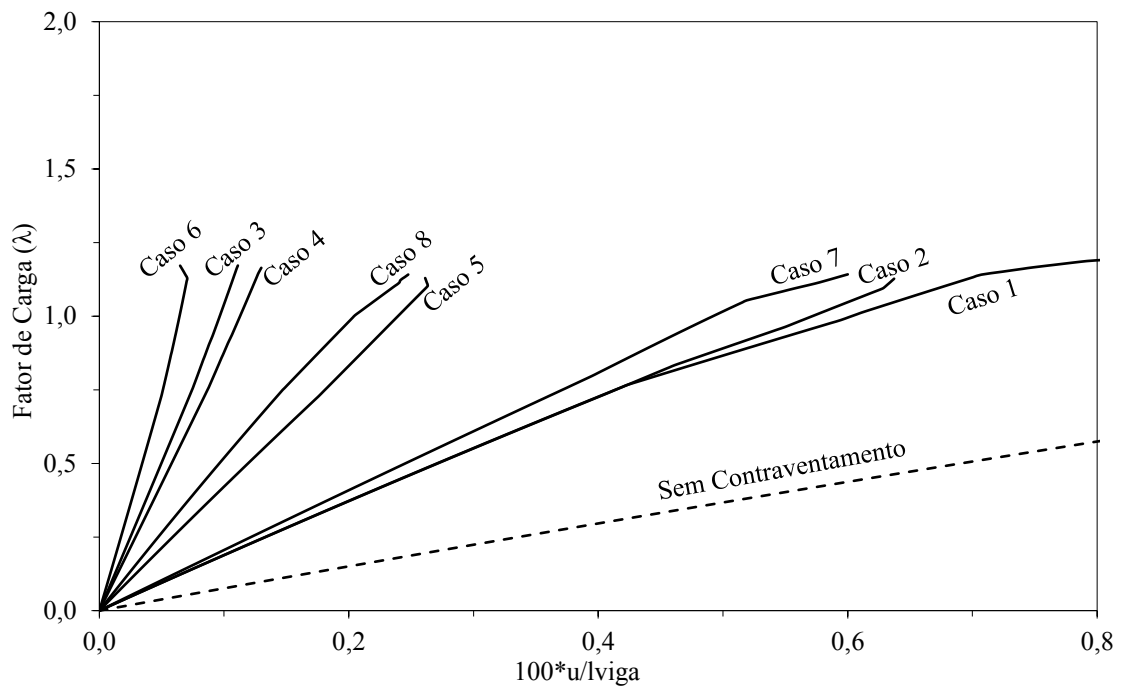
**Figura 4.15** Trajetórias de equilíbrio para pórtico de seis andares

Posteriormente, foram integradas barras de contraventamento, dispostas em configurações diversas. Foi adotado o perfil L76X76X12,5, e as extremidades dessas barras foram rotuladas. A Figura 4.16 ilustra as oito posições analisadas. A discretização por elementos finitos do sistema estrutural, que incorpora contraventamento, foi modificada com o objetivo de diminuir o custo computacional. Optou-se por empregar quatro elementos nas vigas e dois elementos nas colunas, uma vez que os resultados obtidos demonstraram uma precisão satisfatória. O propósito desse estudo é avaliar a influência das distintas posições das barras de contraventamento, tendo em mente que o comportamento não linear da estrutura reduz a capacidade de carga. Foi realizada apenas a análise inelástica, considerado o pior cenário, para avaliar essas influências.



**Figura 4.16** Sistema de contraventamento do pórtico de seis andares

A Figura 4.17 exibe a comparação das trajetórias de equilíbrio obtidas na análise inelástica dos pórticos com distintos sistemas de contraventamento. Os resultados destacados nas curvas de equilíbrio, representadas na Figura 4.17, indicam que em todos os cenários houve uma redução no deslocamento lateral da estrutura em comparação com a estrutura sem contraventamento. Isso evidencia que a incorporação de sistemas de contraventamento, independentemente da configuração adotada, resulta em uma melhoria significativa no desempenho da estrutura. Vale ressaltar que as barras dispostas como no Caso 6 impedem mais o deslocamento lateral pelo pórtico. Nos casos 1 e 2 é possível observar um comportamento bem semelhante da estrutura, tanto na capacidade de carga quanto em comparação do deslocamento lateral sofrido.



**Figura 4.17** Comparação das trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento

#### 4.6 Pórtico de Sete Andares

Na quinta e última aplicação, a estrutura composta por sete pavimentos representada na Figura 4.18 é estudada. O pórtico possui 28 metros de altura e 8 metros de vão de viga. Na literatura pode ser encontrado nos trabalhos desenvolvidos por Sekulovic e Nefovska (2004), Silva (2009) e Azevedo (2021) e seus resultados serão usados para comparação.

A estrutura é composta por vigas constituídas pelo perfil IPE400, e colunas utilizando perfis IPB450 e IPB600. Esses elementos são dispostos de forma a favorecer a flexão em torno do eixo de maior inércia. O perfil IPE400 possui propriedades: área  $84,1\text{cm}^2$ , momento de inércia  $23015\text{cm}^4$  e módulo plástico  $1301,19\text{cm}^3$  enquanto o perfil IPB450 possui: área  $218\text{cm}^2$ , momento de inércia  $91609\text{cm}^4$  e módulo plástico  $1197,66\text{cm}^3$  e por fim o IPB600 possui: área  $270\text{cm}^2$ , momento de inércia  $171040\text{cm}^4$  e módulo plástico  $6426,09\text{cm}^3$ .

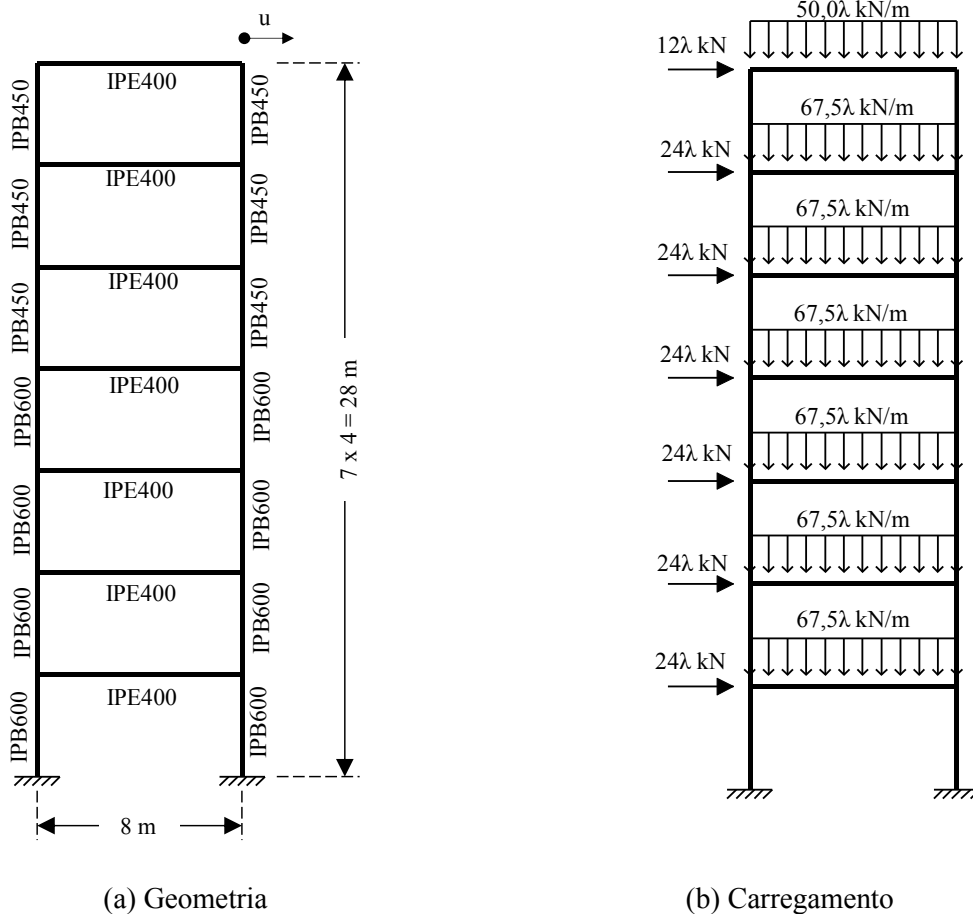
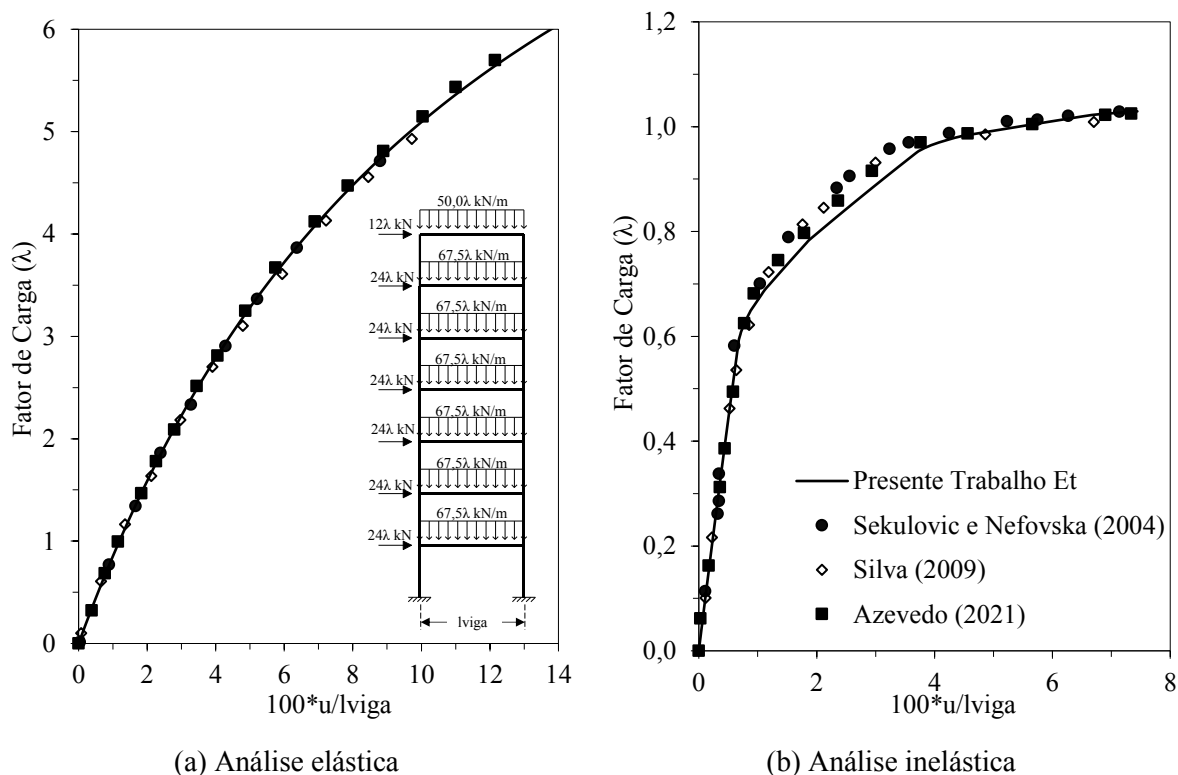


Figura 4.18 Sistema estrutural do pórtico de sete andares

São fornecidos: o módulo de elasticidade  $E = 210\text{GPa}$  e a tensão de escoamento  $\sigma_y = 235\text{MPa}$ . Nas extremidades esquerdas das vigas, são aplicadas forças concentradas horizontais na primeira viga de intensidade  $12\lambda\text{ kN}$  e nas demais  $24\lambda\text{ kN}$ . Ao longo de todo o comprimento das vigas são aplicadas cargas distribuídas verticais de intensidades  $50,0\lambda\text{ kN/m}$  (último pavimento) e  $67,5\lambda\text{ kN/m}$  (demais pavimentos). O parâmetro  $\lambda$ , como já destacado, denota o fator da carga, sendo ajustado incrementalmente durante o processo da análise.

A discretização por elementos finitos do sistema estrutural envolveu a adoção de quatro elementos nas vigas e um elemento nas colunas. Foram realizadas análises elástica e inelástica da estrutura. Os valores para a intensidade do incremento de carga, o número máximo de incrementos e a máxima taxa de carga aplicada na análise elástica foram, respectivamente: 0,1; 100000 e 10000. Já para a análise inelástica, esses parâmetros foram ajustados para 0,01; 1000 e 1000, respectivamente.

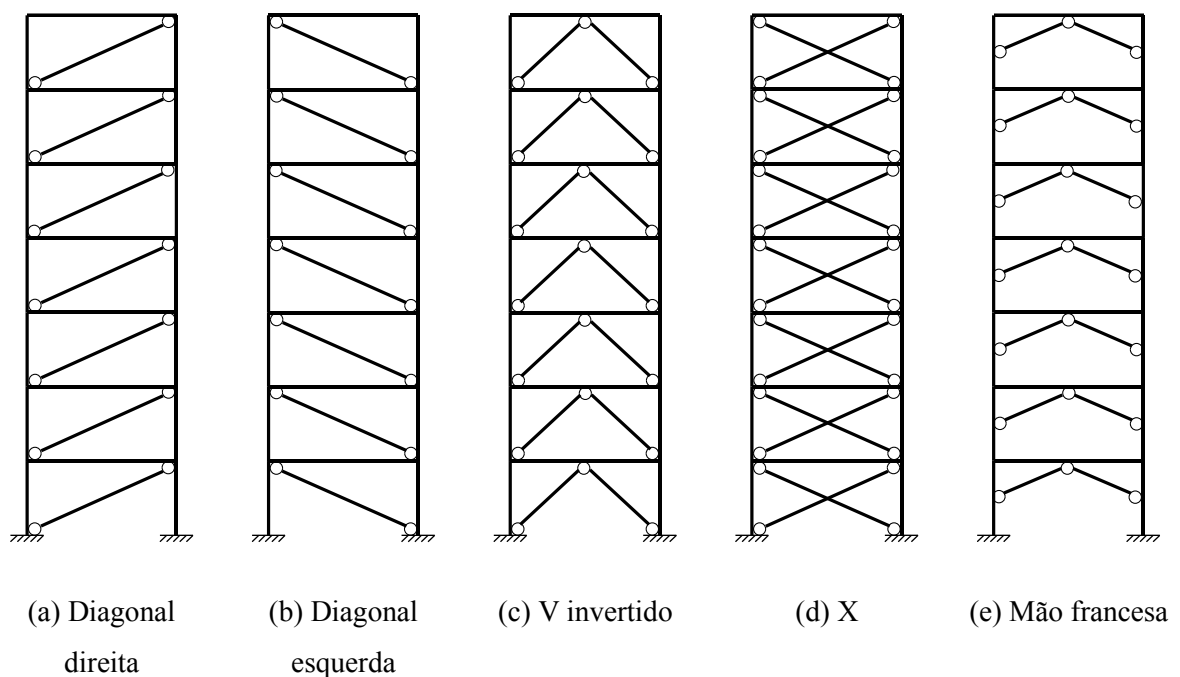
A Figura 4.19a apresenta a trajetória de equilíbrio para análise elástica do pórtico de sete andares a Figura 4.19b ilustra a trajetória para a análise inelástica. Ambas apresentam o deslocamento horizontal no topo da coluna da direita.



**Figura 4.19** Trajetórias de equilíbrio para pórtico de sete andares

É evidente que os resultados obtidos, apresentado na Figuras 4.19, estão em conformidade com as análises encontradas na literatura. Nota-se, especificamente como já foi constatado anteriormente, que ao considerar a degradação da rigidez do material reduz significativamente a capacidade de carga do sistema estrutural, que pode ser justificada pela plastificação dos membros.

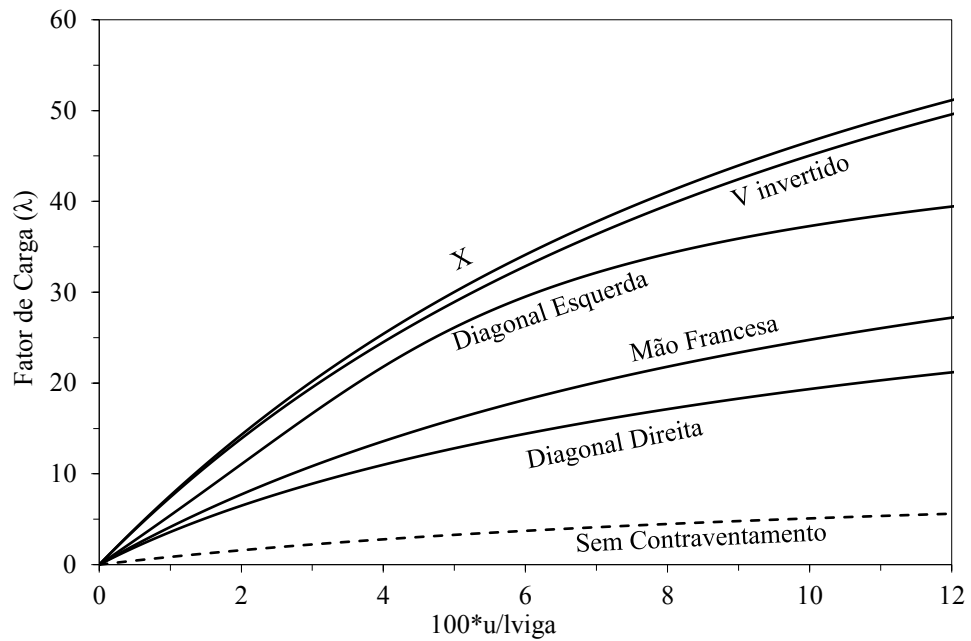
Posteriormente, foram integradas as barras de contraventamento, dispostas em cinco configurações diferentes, dispostas em diagonal para os dois lados, V invertido, em X e mão francesas conectadas no centro das barras das vigas e colunas. Foi adotado o perfil L76X76X12,5, e todas as barras de contraventamento com extremidades articuladas. A Figura 4.20 ilustra os resultados da análise inelástica para as cinco posições analisadas. O propósito deste estudo é avaliar a influência das distintas posições das barras de contraventamento na resposta.



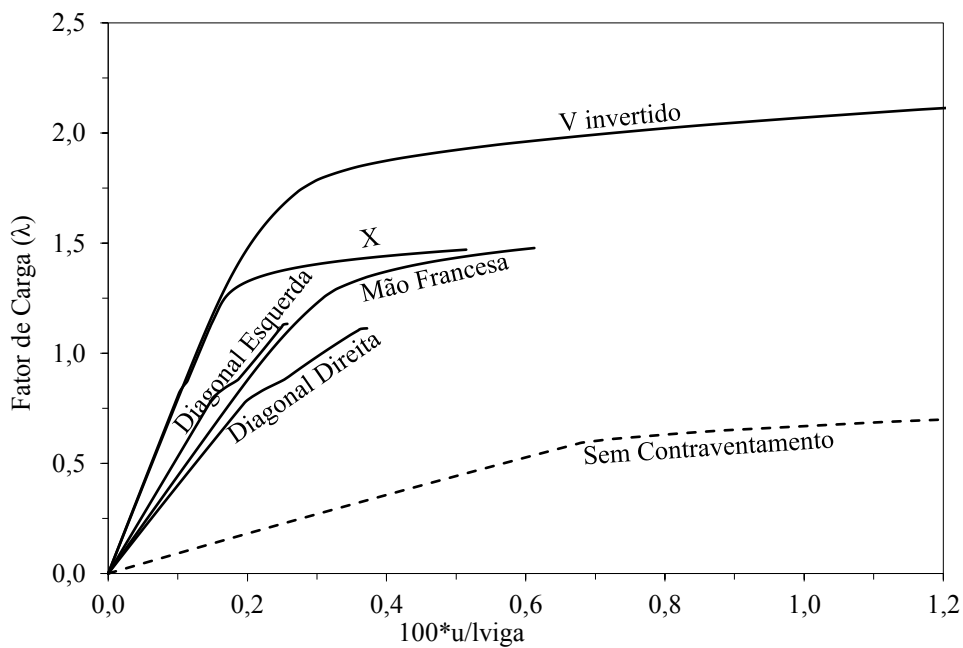
**Figura 4.20** Sistema de contraventamento do pórtico de sete andares

Os resultados destacados nas curvas de equilíbrio, representadas na Figura 4.21, indicam que na análise inelástica houve uma redução no deslocamento lateral da estrutura em comparação com a estrutura sem contraventamento. Importante ressaltar que na análise elástica,

as estruturas com padrões em "X" e "V" invertido demonstraram desempenho bastante semelhante, sendo que o padrão "X" permitiu uma ligeira vantagem em termos de capacidade de carga. Por outro lado, na análise inelástica, o padrão "V" invertido apresentou o melhor desempenho. Em ambas as análises, a configuração de barras em diagonal para o lado direito da estrutura resultou no desempenho menos eficiente.



(a) Análise elástica



(b) Análise inelástica

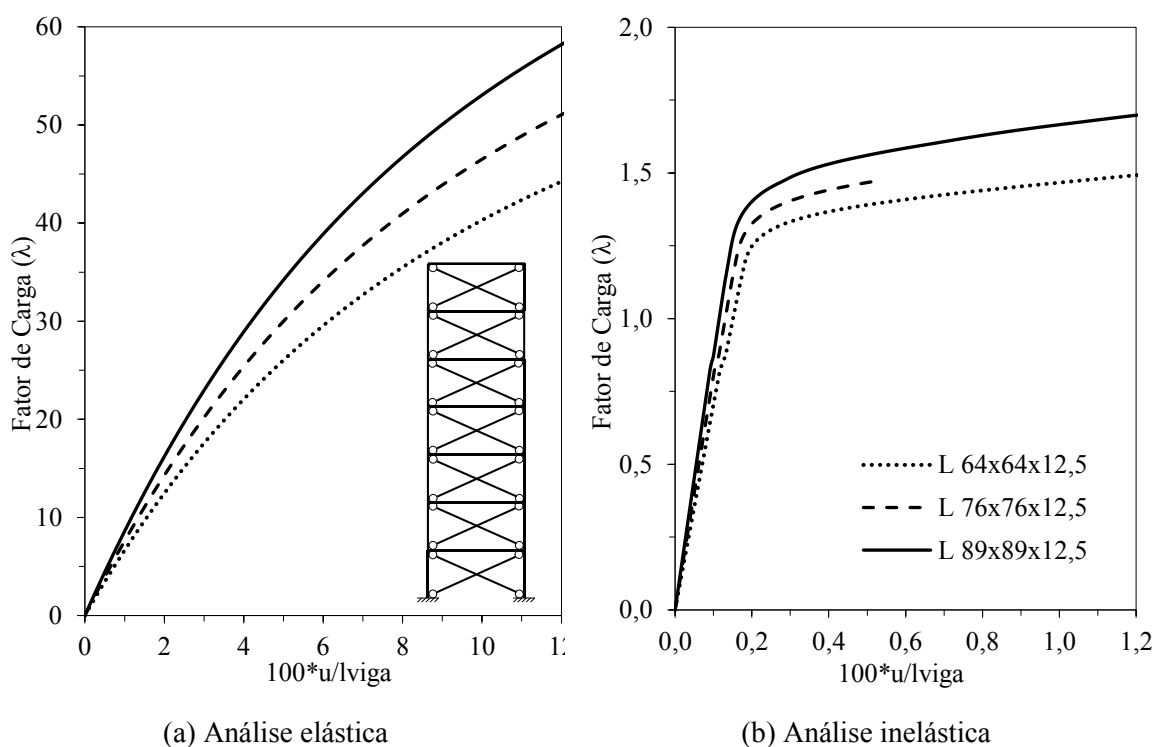
**Figura 4.21** Comparação das trajetórias de equilíbrio com barras de contraventamento



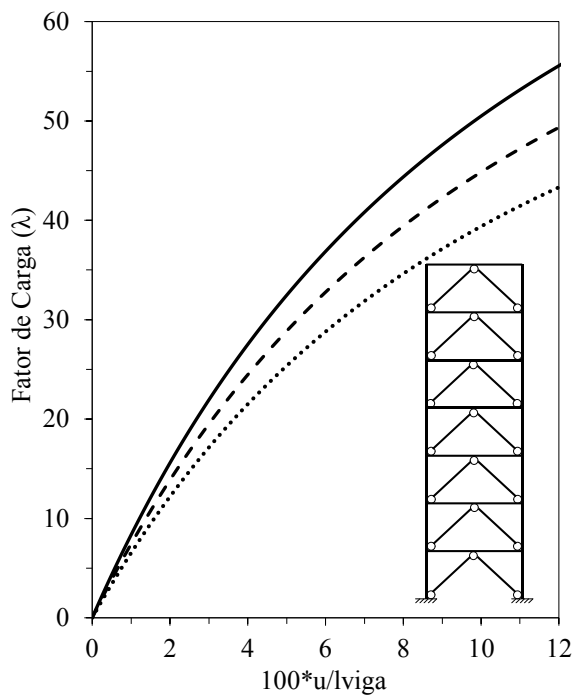
Diante dessas informações foi alterado o tipo do perfil dos contraventamentos, realizando então análises dos melhores casos X e V invertido e do pior caso (diagonal direita) com as barras de contravento com os perfis L64X64X12,5 e L89X89X12,5. O propósito deste estudo é validar novamente a influência de diferentes propriedades geométricas do perfil das barras de contravento no desempenho das estruturas analisadas.

As Figuras 4.22, 4.23 e 4.24 mostram as trajetórias de equilíbrio com as barras de contravento em X, V invertido e diagonal direita, respectivamente. Em todos os casos apresentando a comparação das trajetórias de diferentes perfis em aço.

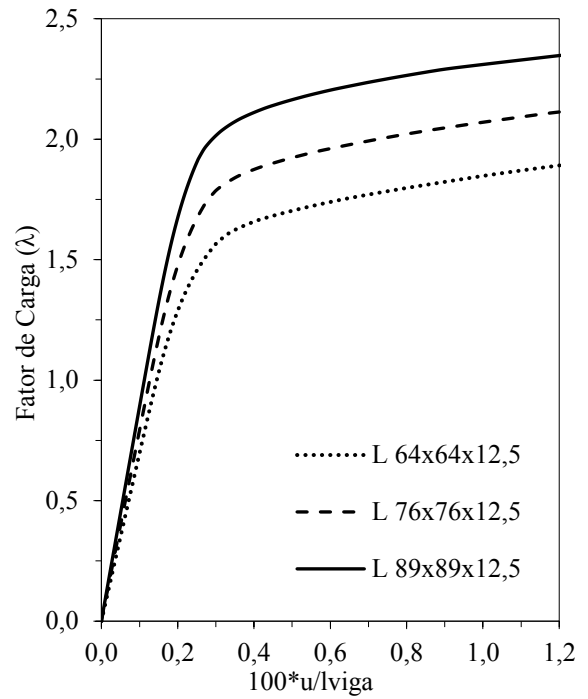
Com base nos resultados destacados nas Figuras 4.22, 4.23 e 4.24, observamos novamente que, ao empregar barras com o perfil L89X89X12,5, a estrutura evidencia uma maior rigidez, resultando, conseqüentemente, em deslocamentos menores. Por outro lado, com o perfil L64X64X12,5 apresenta uma menor rigidez na estrutura. Assim como concluído na análise do pórtico de dois pavimentos, reiteramos que a área da seção transversal das barras de contravento está diretamente associada à rigidez da estrutura.



**Figura 4.22** Comparação de diferentes perfis nas barras em X

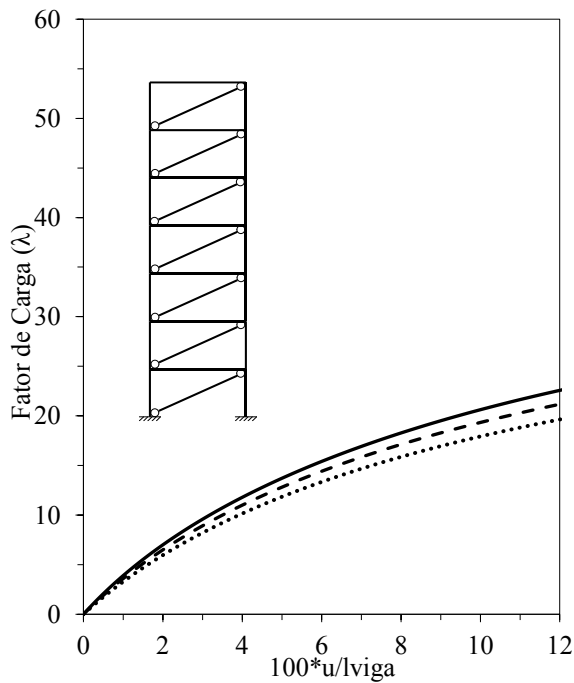


(a) Análise elástica

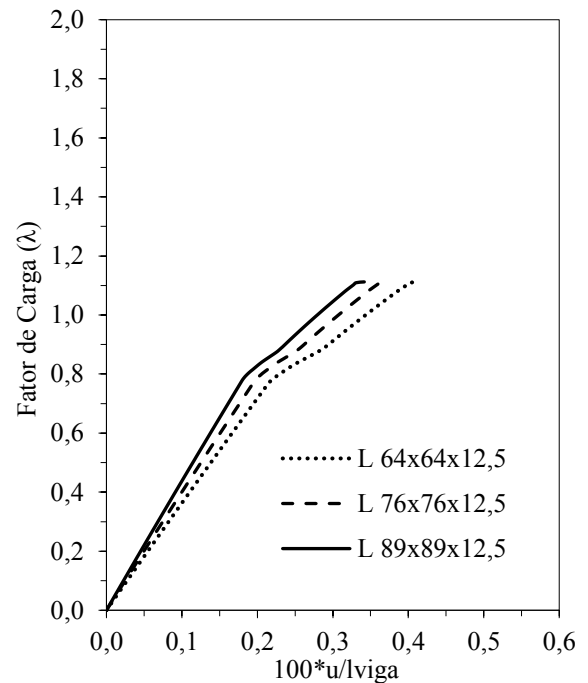


(b) Análise inelástica

**Figura 4.23** Comparação de diferentes perfis nas barras em V invertido



(a) Análise elástica



(b) Análise inelástica

**Figura 4.24** Comparação de diferentes perfis nas barras em diagonal direita

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Neste estudo, os resultados das análises não lineares realizadas em cinco sistemas estruturais, cada um com geometrias e condições de carregamento distintas, foram minuciosamente comparados com as soluções disponíveis na literatura. A consistente concordância entre todas as respostas reforça a eficiência do programa computacional utilizado na avaliação do comportamento estático de estruturas reticuladas planas.

A influência da forma de ligação da barra de contraventamento com os outros membros da estrutura foi explorada em um pórtico simples, considerando ligações perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas. As respostas obtidas revelaram que esse parâmetro não exerceu influência nas trajetórias de equilíbrio elástica e inelástica. Na segunda aplicação, ficou evidente que a rigidez de um sistema estrutural está diretamente associada à área do perfil do contraventamento. A consideração dos efeitos da não linearidade geométrica e do material resultou em uma redução significativa do deslocamento lateral da estrutura para um mesmo nível de carga.

Explorando diferentes sistemas de contraventamentos presentes no mercado, foram introduzidos contraventamentos por meio de barras dispostas de maneiras distintas. As análises inelásticas demonstraram uma redução no deslocamento lateral independente da disposição das barras. Entretanto, a carga limite da estrutura aumentou significativamente com a adoção da maioria dos arranjos. Destaca-se que a disposição mais eficiente, conforme observado no pórtico de quatro andares, foi com barras dispostas em V invertido. Isso ressalta a importância de escolher um arranjo seguro, otimizado e econômico, de acordo com as solicitações atuantes.

No contexto das análises de elementos estruturais esbeltos, conclui-se que ao avaliar o comportamento não linear das estruturas, é possível obter uma representação mais fidedigna à realidade. Além disso, observa-se uma redução significativa na capacidade de carga da estrutura em comparação com a obtida considerando o material como elástico. Esses resultados enfatizam a necessidade de desenvolver processos de análise mais refinados, proporcionando aos engenheiros e calculistas avaliações mais precisas sobre a capacidade de carga e os níveis de deslocamento das estruturas.

Por fim, ao introduzir as barras de contraventamento em todos os pórticos estudados, constatou-se uma redução na deslocabilidade lateral em comparação ao sistema sem contraventamento, tanto para análises elásticas quanto inelásticas.

## 5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Algumas propostas para investigações futuras envolvem:

- Análises de pórticos espaciais com contraventamentos.
- Análises estáticas de estruturas com contraventamentos horizontais.
- Avaliar estruturas com contraventamentos, considerando ligações semirrígidas entre vigas e pilares e/ou ligações semirrígidas entre o contraventamento e os outros membros da estrutura (THAI *et al.*, 2016).
- Análise dinâmica de estruturas com contraventamentos submetidas a cargas sísmicas. Avaliar a viabilidade de aplicar ‘*retrofit*’ nas estruturas (RAI E GOEL, 2003; JOSEPH E JAMES, 2017; QIAN, WENG E LI, 2019; KANISHKAVYA E VELUMANI, 2019).

## REFERÊNCIAS

Andrade, A., Oliveira, A., Bastos, S.A., *Análise de confiabilidade de pórticos planos via método analítico form, considerando a não linearidade geométrica*. Mecânica Computacional, Argentina, v. XXIX, p. 8869-8880, 2010.

Azevedo, I.; 2001. *Influência do contraventamento na estabilidade e resistência de estruturas em aço* Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Bathe, K.J., 1996. *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice-Hall.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1262-1267, 1979.

Bloom, Michael, "Elastic And Inelastic Stability Of Two-Panel Tiered Concentrically Braced Frames" (2013). Master's Theses (2009 -). P. 184.

Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 2000. *Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.

Chaves, J.R.F., 2009. *Análise dinâmica de pórticos metálicos contraventados*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília/DF, Brasil.

Chen, W.F., Goto, Y., e Liew, J.Y.R., 1996. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Wiley & Sons Inc., USA.

Chen, W.F., e Toma, S., 1994. *Advanced Analysis of Steel Frames*, CRC Press, Boca Raton, Flórida.

Chiorean, C.G., 2013. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3d composite steel-concrete frame structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.

Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., New York, John Wiley & Sons, Inc.

Crisfield, M.A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snapthrough. *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 52-62.

Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 1, John Wiley & Sons Inc., USA.

Fong, M., 2012. *Second-order analysis of imperfect light-weight and composite structures*. Tese de Doutorado. The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong.

Galvão, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

HEATH, M. T. *Scientific Computing an Introductory Survey*, SIAM - Sociedade de Matemática Industrial e Aplicada, 1997.

Joseph, N., e James, J., 2017. Steel frames with knee braces based on pushover analysis. *International Research Journal of Engineering and Technology*, vol. 5, pp. 1407 – 1412.

Kanishkavy, K., e Velumani, D. S. M., 2019. Analysis of Frames with and Without Knee Bracing for Lateral Loads Using Steel Structures. *International Research Journal of Multidisciplinary*, vol. 6; pp. 486-489.

Kassimali, A., 1983. *Large deformation analysis of elastic-plastic frames*. *Journal of Structural Engineering*, vol. 109(8), pp. 1869–1886.

McGuire, W., Gallagher, R.H., e Ziemian, R.D., 2014. *Matrix Structural Analysis*. 2nd Editio. Copyright by Ronald D. Ziemian.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

Qian, K.; Weng, Y-H., e Li, B., 2019. Improving Behavior of Reinforced Concrete Frames to Resist Progressive Collapse through Steel Bracings. *Journal of Structural Engineering*, vol. 145, 04018248.

Rai, D.C., e Goel, S. C., 2003. Seismic evaluation and upgrading of chevron braced frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, pp. 971–994.

Sekulovic, M., e Nefovska, M., 2004. Static inelastic analysis of steel frames with flexible connections. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 31(2), pp. 101-134.

Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.

Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.

Thai, U-T., Uy, B., Kang, W-E., e Hicks, S., 2016. System reliability evaluation of steel frames with semi-rigid connections. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 121, pp. 29-39.

Vogel, U., 1985. *Calibrating Frames*. *Stahlbau*, vol. 54, pp. 295-311.

Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.

Yoo, H., e Choi, D-H., 2008. New method of inelastic buckling analysis for steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 64, pp. 1152-1164.