



UFOP



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil
Curso de Graduação em Engenharia Civil



Marlon Borges da Cruz

**AVALIAÇÃO DA ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS
RETICULADAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

Ouro Preto

2023

Avaliação da estabilidade de estruturas reticuladas utilizando o método dos elementos finitos

Marlon Borges da Cruz

Trabalho Final de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto.

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Prof.^a. Dra. Andréa Regina Dias da Silva – UFOP

Ouro Preto

2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C957a Cruz, Marlon Borges da.
Avaliação da estabilidade de estruturas reticuladas utilizando o método dos elementos finitos. [manuscrito] / Marlon Borges da Cruz. - 2023.
62 f.: il.: , gráf., tab..

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias Silva.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Graduação em Engenharia Civil .

1. Método dos elementos finitos. 2. Estabilidade estrutural. 3. Newton Raphson, método. I. Silva, Andréa Regina Dias. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 624

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716



FOLHA DE APROVAÇÃO

Marlon Borges da Cruz

Avaliação da estabilidade de estruturas reticuladas utilizando o Método dos Elementos Finitos

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em 31 de agosto de 2023.

Membros da banca

D.Sc. - Andréa Regina Dias da Silva - Orientadora (Universidade Federal de Ouro Preto)
D.Sc. - Flávio Teixeira de Souza - (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais)
D.Sc. - Walliston dos Santos Fernandes - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Andréa Regina Dias da Silva, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 31/08/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Andrea Regina Dias da Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 31/08/2023, às 14:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0583907** e o código CRC **B6AAA5C1**.

“Só no dicionário que o trabalho vem depois do sucesso...”

Albert Einstein

Dedico este trabalho aos amigos e colegas de curso que me ajudaram tanto nessa trajetória, à minha família e à minha orientadora.

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio e valores transmitidos. Em especial minha mãe e minha irmã pelo companheirismo e incentivo.

À minha orientadora prof.^a Andréa Regina Dias Silva, pela motivação, paciência e dedicação ao me orientar.

Aos meus amigos João Pedro Carneiro e Luciano de Santana Rodrigues pela colaboração ao longo deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas pelos ensinamentos.

À Universidade Federal de Ouro Preto por me proporcionar um ensino público de qualidade.

RESUMO

O uso de materiais mais resistentes tem levado a elementos estruturais com seções transversais cada vez mais esbeltas. Elementos estruturais mais esbeltos estão sujeitos a efeitos não lineares, que podem provocar a perda de estabilidade da estrutura antes de se atingir a carga de ruptura do material. Assim, a necessidade de projetar estruturas mais leves e eficientes impulsiona a consideração de efeitos de segunda ordem resultantes de grandes deslocamentos nas análises. Nesse sentido, tem-se como objetivo estudar o comportamento não linear e avaliar a estabilidade de estruturas reticuladas esbeltas através de análises estáticas considerando o efeito da não linearidade geométrica. As análises foram realizadas com o auxílio de um programa computacional baseado no Método dos Elementos finitos. A formulação de elementos finitos, juntamente com estratégias incrementais e iterativas, usadas na metodologia de solução são mostradas. Os resultados encontrados com a avaliação da estabilidade de quatro sistemas estruturais esbeltos mostram que tais estruturas são sensíveis a imperfeição, seja relativa a parâmetros geométricos, de carregamento ou condições de contorno. Dessa forma, este estudo traz contribuições que mostram aos engenheiros a importância da não linearidade geométrica na análise e projeto de estruturas esbeltas.

Palavras-chaves: Método dos Elementos Finitos, estabilidade estrutural, não linearidade geométrica, efeitos de segunda ordem, método de Newton-Raphson, estruturas reticuladas, análise estática não linear.

ABSTRACT

The use of more durable materials has led to structural elements with increasingly slender cross sections. Slender structural elements are subject to nonlinear effects, which can cause the structure to lose stability before it is subjected to rupture loading of the material. Thus, the need to project smaller and more efficient structures takes into consideration of second-order effects resulting in large displacements in the analyses. Therefore, it is aimed to study the nonlinear behavior and evaluate the stability of slender frames through static analyzes considering the effect of geometric nonlinearity. A computational program based on the Finite Element Method is used in the analyses. The finite element formulation, together with incremental and iterative strategies, used in the solution methodology are shown. The results obtained with the stability assessment of four slender frames show that these structures are sensitive to imperfection, whether related to geometrical parameters, loading or contour conditions. Thus, this study follows contributions that show engineers the importance of geometric nonlinearity in the analysis and design of slender structures.

Keywords: Finite Element Method, structural stability, geometric nonlinearity, second order effects, Newton-Raphson method, slender frames, nonlinear static analysis

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Efeitos de segunda ordem: P- Δ e P- δ . (SILVA, 2009).....	16
Figura 2.2 – Elemento de viga-coluna	18
Figura 2.3 – Configuração da deformada do elemento finito.....	20
Figura 2.4 – Programa CS-ASA Análise e Efeitos Considerados (SILVA, 2009)	22
Figura 3.1 – Trajetórias de equilíbrio (SILVEIRA, 1995)	26
Figura 3.2 – Solução incremental-iterativa (SILVA, 2009).....	27
Figura 3.3 – Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.....	30
Figura 3.4 – Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado GSP (YANG E KUO, 1994).....	35
Figura 4.1 – Viga: geometria e carregamento	38
Figura 4.2 – Curvas carga-deslocamento para viga engastada-livre	38
Figura 4.3 – Coluna engastada-livre: geometria e trajetórias de equilíbrio	39
Figura 4.4 – Pórtico de Lee: geometria e carregamento	40
Figura 4.5 – Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee.....	41
Figura 4.6 – Pórtico em L: excentricidades de carga e condições de apoio.....	43
Figura 4.7 – Trajetórias de equilíbrio (Condição 1) para diferentes valores da relação e/L	44
Figura 4.8 – Trajetórias de equilíbrio (Condição 2) para diferentes valores da relação e/L	45
Figura 4.9 – Trajetórias de equilíbrio (Condição 3) para diferentes valores da relação e/L	45
Figura 4.10 – Trajetórias de equilíbrio (Condição 4) para diferentes valores da relação e/L	46
Figura 4.11 – Colunas com apoio lateral rígido	47
Figura 4.12 – Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso A.....	48

Figura 4.13 – Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso B	49
Figura 4.14 – Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso C	49
Figura 4.15 – Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso D.....	50
Figura 4.16 – Trajetórias de equilíbrio pós crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso A.....	51
Figura 4.17 – Trajetórias de equilíbrio pós crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso B	51
Figura 4.18 – Trajetórias de equilíbrio pós crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso C.....	52
Figura 4.19 – Trajetórias de equilíbrio pós crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso D.....	52
Figura 4.20 – Sensibilidade da coluna à imperfeição de carga e/L : Caso A.....	53
Figura 4.21 – Sensibilidade da coluna à imperfeição de carga e/L : Caso B	54
Figura 4.22 – Influência das excentricidades de carga: Caso A.....	54
Figura 4.23 – Coluna biapoiada com barra de contraventamento	55
Figura 4.24 – Trajetórias de equilíbrio para diferentes restrições da barra de contraventamento.....	56
Figura 4.25 – Sensibilidade do sistema em relação a Lb/Lc	57
Figura 4.26 – Sensibilidade do sistema em relação a Ic/Ib	57
Figura 4.27 – Sensibilidades do sistema em relação a b/L	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear	33
Tabela 4.1 – Carga e deslocamento vertical (P_{lim} , v) referentes aos pontos limites	42

SUMÁRIO

Lista de Figuras	VII
Lista de Tabelas	IX
1 INTRODUÇÃO.....	12
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos.....	12
1.2 Organização do Trabalho	14
2 FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR.....	15
2.1 Introdução	15
2.2 Não Linearidade Geométrica	15
2.3 Formulação do Elemento Finito Não Linear.....	17
2.4 O Sistema Computacional CS–ASA	21
3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR	24
3.1 Introdução	24
3.2 Metodologia de Solução	24
3.2.1 Solução Incremental Predita	27
3.2.2 Ciclo de Iterações: Método de Newton–Raphson	28
3.3 Incremento de Carga Baseado no GSP	33
3.4 Iteração Baseada no Deslocamento Generalizado.....	36
4 APLICAÇÕES	37
4.1 Introdução	37
4.2 Viga Engastada–Livre.....	37
4.3 Coluna Engastada–Livre	39
4.4 Pórtico de Lee.....	40

4.4.1	Influência da Posição do Carregamento e Condições de Apoio	42
4.5	Coluna com Contraventamento Lateral	46
4.5.1	Coluna com Apoio Lateral Rígido.....	46
4.5.2	Barra Apoiada como Contraventamento.....	55
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	59
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

Com o desenvolvimento das indústrias civil, naval, oceânica e aeronáutica, e o surgimento de materiais mais resistentes e novas técnicas construtivas, em diversos problemas da mecânica estrutural o comportamento não linear das estruturas passa a ser importante e deve ser considerado nas análises. A busca contínua por uma modelagem estrutural mais realística tem apontado para uma consideração apropriada dos efeitos relacionados às não linearidades que afetam significativamente o comportamento estrutural. O objetivo fundamental é obter para fins de projeto uma previsão segura do comportamento do sistema.

Neste contexto então, a necessidade de projetar estruturas mais leves e eficientes tem impulsionado a consideração nas análises de efeitos de segunda ordem resultantes de grandes deslocamentos, semi-rigidez das ligações, inelasticidade do material, imperfeições geométricas e tensões residuais, os quais podem influenciar significativamente o comportamento estrutural.

O comportamento não linear e o estudo da estabilidade de estruturas tem sido interesse de muitos pesquisadores. Elementos estruturais mais esbeltos estão sujeitos a efeitos não lineares, que podem provocar a perda de estabilidade da estrutura antes de se atingir a carga de ruptura do material.

A perda de estabilidade é um fenômeno não linear que deve ser investigado, portanto, através de uma análise não linear. Embora uma linearização das equações que descrevem o sistema estrutural em torno de uma configuração de equilíbrio possa ser utilizada para facilitar a análise, as informações sobre o comportamento pós-crítico são perdidas (GONÇALVES, 1983).

Nessa tendência contemporânea, uma das ferramentas mais consagradas na engenharia é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Rapidez, precisão e custo são requisitos básicos para a solução de problemas em engenharia, onde os códigos estão evoluindo em busca de soluções mais precisas e menos onerosas.

Ao avaliar o comportamento não linear de um sistema estrutural variando um parâmetro de controle, tal como o carregamento, obtêm-se trajetórias ou caminhos de equilíbrio. O estudo da estabilidade estrutural baseia-se na identificação de pontos críticos que surgem com a perda da estabilidade. Os pontos críticos são classificados em pontos limites ou pontos de bifurcação.

Pontos de bifurcação são pontos de mudança brusca na trajetória de equilíbrio, em que dois ou mais caminhos se cruzam. Já os pontos limites correspondem a valores de máximo ou mínimo relativos a carga ou deslocamento.

Este trabalho tem como objetivo avaliar a estabilidade elástica de estruturas reticuladas esbeltas através de uma análise estática não linear geométrica usando o Método dos Elementos Finitos. A previsão precisa do estado limite de estabilidade é de fundamental importância no projeto dos elementos estruturais. Para isso, torna-se necessária a utilização de uma teoria consistente que possibilite o conhecimento preciso dos esforços adicionais causados pelos efeitos de segunda ordem, notadamente no caso de elementos esbeltos. Variações nas condições de contorno, na posição de atuação do carregamento e em parâmetros geométricos serão feitas para avaliar alterações na resposta estrutural perante essas mudanças, merecendo uma investigação cuidadosa.

O programa computacional CS-ASA (SILVA,2009), desenvolvido para análise estática e dinâmica de estruturas de aço, será usado para realizar as análises. Para investigar os problemas de estabilidade na solução do problema não linear adota-se o método de Newton-Raphson acoplado a técnicas de continuação.

Estudos que focam em temas ligados ao assunto proposto podem ser encontrados na literatura. Benjamin (1982) desenvolveu duas formulações consistentes — definida pelo autor como as que abordam princípios variacionais da mecânica dos sólidos como base teórica — de elementos finitos para análise estática não linear geométrica de pórticos tridimensionais. A primeira resulta em um elemento de eixo reto e seção transversal constante em que os deslocamentos são interpolados por funções convencionais. Na segunda, um elemento curvo e seção transversal variável é obtido através da degeneração do elemento isoparamétrico tridimensional.

A pesquisa realizada por Leite (2000) apresentou uma teoria geral para estudar o comportamento não linear de treliças espaciais em aço pelo método dos elementos finitos (MEF) considerando as não linearidades física e geométrica.

Stramandinoli (2007) desenvolveu modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado

Santana (2015) propôs um sistema computacional gráfico interativo para a modelagem, análise e visualização dos resultados de sistemas estruturais reticulados planos sujeitos a

problemas de instabilidade.

Silva (2016) estudou formulações corrotacionais 2D para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas. A base computacional utilizada foi também o CS-ASA desenvolvido por Silva (2009).

1.2 Organização do Trabalho

Esta monografia está organizada em cinco capítulos, de acordo com as etapas do estudo. Apresenta-se, a seguir, de forma resumida o conteúdo cada um deles.

Inicialmente, no Capítulo 2, são discutidos os fundamentos para análise estática não linear de estruturas reticuladas planas. Mostra-se também a formulação para o elemento finito de viga-coluna usado na modelagem. Na descrição das formulações apresentam-se as relações de deformação-deslocamento, as equações de equilíbrio e, principalmente, a obtenção dos vetores de forças internas e da matriz de rigidez do elemento. Por fim, o programa computacional usado nas análises será brevemente apresentado.

O Capítulo 3 abrange em detalhes a metodologia adotada para resolver sistemas não lineares. Essa metodologia é caracterizada por um esquema incremental-iterativo de solução, onde, após cada incremento inicial de carga, iterações com o método de Newton-Raphson são executadas para estabelecer uma nova configuração de equilíbrio para a estrutura. Também neste capítulo, são descritas a estratégia de iteração e a abordagem sobre o controle automático do parâmetro de carga.

Após o desenvolvimento das formulações, verifica-se, no Capítulo 4, a estabilidade estática de quatro sistemas estruturais. Finalizando, na Seção 5, algumas observações e conclusões referentes à pesquisa serão estabelecidas

2 FUNDAMENTOS PARA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

2.1 Introdução

Os projetos estruturais, usualmente, eram elaborados levando em conta um sistema perfeito e realizando uma análise elástica linear. Em tais análises, as equações de equilíbrio são formuladas considerando a posição inicial indeformada da estrutura e é assumido que as deformações são pequenas, de modo que seus efeitos no equilíbrio e na resposta do sistema são desprezíveis.

Contudo, a maioria das estruturas apresenta comportamento não linear até atingir seu limite de resistência. Há necessidade de adotar uma análise não linear, capaz de descrever o comportamento real da estrutura sob condições anormais ou extremas de carregamento, e próximas do seu limite de resistência. Mediante a análise não linear, considera-se de forma apropriada os efeitos associados às não linearidades que influenciam o comportamento estrutural. Como resultado, tem-se um aumento da complexidade do problema e do custo computacional.

Este capítulo aborda os fundamentos teóricos utilizados na análise estática não linear, com ênfase na não linearidade geométrica de estruturas reticuladas. As alterações causadas pela mudança das configurações geométricas do sistema são apresentadas na seção 2.2. O emprego do Método dos Elementos Finitos é esclarecido na seção 2.3. Por fim, na seção 2.4, são destacadas as particularidades do sistema computacional CS-ASA, no qual foram realizadas todas as análises deste trabalho.

2.2 Não Linearidade Geométrica

O comportamento não linear de estruturas ocorre quando as relações entre ações e deslocamentos não são diretamente proporcionais. A não linearidade geométrica é uma das principais fontes de não linearidade, resultante de mudanças na geometria da estrutura. Esse tipo de comportamento causa efeitos de segunda ordem, como momentos fletores adicionais devido a deflexões laterais de membros, quando a estrutura é submetida a deslocamentos significativos. Os comportamentos citados consideram os efeitos $P-\Delta$ (global) e $P-\delta$ (local, a nível de elemento), provenientes das deformações da estrutura durante o carregamento. Os efeitos supramencionados são mostrados na Figura 2.1. A consideração adequada da não linearidade geométrica requer formulações numéricas específicas (SILVA, 2009).

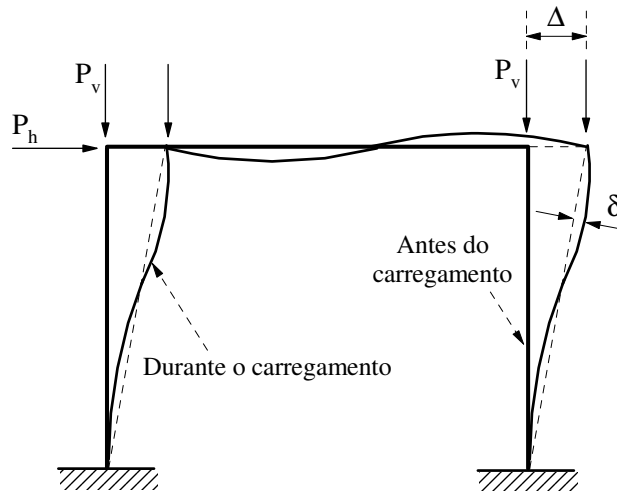


Figura 2.1 Efeitos de segunda ordem: P- Δ e P- δ (SILVA, 2009)

Na maioria dos projetos corriqueiros de construções civis, os métodos aproximados têm sido suficientes, devido aos deslocamentos serem pequenos em relação ao tamanho das peças estruturais. Contudo, à medida que as grandes cidades se tornam mais verticais e com os avanços na engenharia de materiais e técnicas construtivas, a demanda por edificações mais esbeltas tem se ampliado. A fim de acompanhar esse desenvolvimento tecnológico, torna-se importante a adoção de processos de análise mais elaborados, visando resultados mais precisos e confiáveis para engenheiros e calculistas. Avaliações seguras da capacidade de carga e dos níveis de deslocamento da estrutura dependem diretamente desses resultados.

A formulação para a análise não linear geométrica de estruturas é embasada na teoria da elasticidade não linear. A não linearidade geométrica se manifesta tanto nas equações de equilíbrio, que levam em conta as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações entre deformação e deslocamento, que incorporam termos não lineares. Essa não linearidade surge devido às modificações na geometria da estrutura durante o processo de deformação do corpo, podendo ocorrer devido a grandes deformações, grandes deslocamentos e rotações na configuração de referência, ou a ambos combinados. Neste trabalho, consideram-se grandes deslocamentos e rotações, mas admite-se que as deformações sejam relativamente pequenas.

2.3 Formulação do Elemento Finito Não Linear

No âmbito da Engenharia de Estruturas, um dos métodos usados para discretização de um problema contínuo e a partir daí a obtenção de soluções numéricas aproximadas é o Método dos Elementos Finitos, devido à sua eficiência e aplicabilidade. Com essa técnica procura-se discretizar (dividir) o meio contínuo em subdomínios, referidos como elementos, que são interligados através dos pontos nodais onde são definidos os graus de liberdade a serem determinados.

O refinamento da malha de elementos finitos possibilita uma solução mais precisa, ou seja, quanto mais o meio contínuo for discretizado, a resposta será mais aproximada da exata. Porém, aumenta o custo computacional, sendo essencial equilibrar o número de elementos para atingir uma solução satisfatória.

Em grande parte das formulações de elementos finitos para análises de segunda ordem de estruturas, é utilizada a abordagem Lagrangiana, na qual os deslocamentos em um sistema estrutural, resultantes de uma determinada carga, são medidos em relação à configuração inicial desse sistema. Nessa abordagem, o desenvolvimento de metodologias incrementais para análises não lineares começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em um número específico de configurações de equilíbrio. Tais configurações incluem a configuração inicial, $t=0$, a última configuração deformada, t , e a configuração deformada atual, $t+\Delta t$, assumindo que todas as variáveis de estado, como tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com o histórico de carregamento, sejam conhecidas na configuração t . Com base nesse conhecimento, o objetivo é formular um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração, $t+\Delta t$, considerando um pequeno acréscimo de valor no carregamento externo que atuou na configuração t . Esse passo incremental caracteriza o processo de deformação do corpo de t para $t+\Delta t$ e é comumente referido como um passo incremental.

Neste trabalho, a abordagem adotada baseia-se na formulação proposta por Pacoste e Eriksson (1997), a qual se fundamenta na teoria de Timoshenko, empregando relações cinemáticas que se estabelecem por meio de funções trigonométricas. Essa formulação foi desenvolvida considerando um referencial Lagrangiano total, onde a configuração de referência corresponde ao estado original da estrutura sem carregamentos, ou seja, os deslocamentos são medidos sempre em relação à configuração inicial na condição de $t = 0$ (CRISFIELD, 1991).

O elemento finito utilizado corresponde a um elemento reticulado plano de viga-coluna delimitado pelos pontos nodais i e j , como mostrado na Figura 2.2. Em cada um desses pontos, existem três graus de liberdade: deslocamento axial, u , deslocamento transversal, v , e rotação, θ .

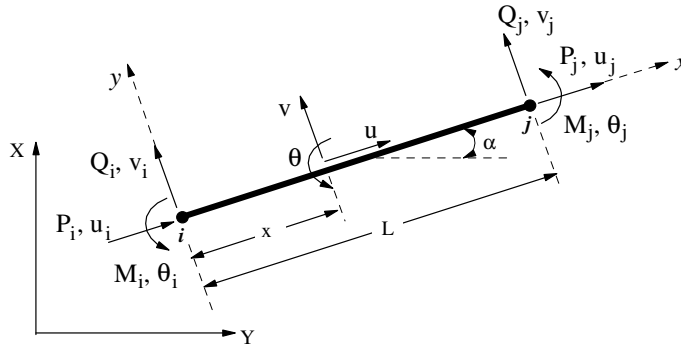


Figura 2.2 Elemento de viga-coluna

As equações de deformação deslocamento são escritas de tal forma:

$$\epsilon_{xx} = \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \cos(\theta) + \left(\frac{dv}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (2.1a)$$

$$\gamma = \left(\frac{dv}{dx}\right) \cos(\theta) - \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \sin(\theta) \quad (2.1b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} \quad (2.1c)$$

nessas relações tem-se que, ϵ_{xx} é a deformação axial, γ a deformação cisalhante, k a curvatura do elemento e θ o ângulo de rotação da seção transversal na configuração deformada.

As relações constitutivas, levando em conta deformações pequenas, são representadas como (PACOSTE e ERIKSSON, 1997):

$$P = EA\epsilon_{xx} \quad (2.2a)$$

$$Q = GA\gamma \quad (2.2b)$$

$$M = EI k \quad (2.2c)$$

sendo EA , GA e EI rigidezes axial, cisalhante e flexional, respectivamente.

Utilizando o referencial Lagrangiano total, a energia potencial total, é representada pela seguinte relação:

$$\Pi = \int_V \int_0^{\varepsilon_{ij}} \left(\tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \right) dV - \int_S f_i u_i dS \quad (2.3)$$

em que τ_{ij} o tensor de tensões, ε_{ij} a deformação axial, f_i e u_i , respectivamente, a força aplicada e o deslocamento axial.

Tendo em vista então as relações constitutivas e efetuando a integração na área da seção transversal, a equação da energia potencial total pode ser reescrita de tal forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA\varepsilon_{xx}^2 + GA\gamma^2 + EI\kappa^2 \right] dx - \int_S f_i u_i dS \quad (2.4)$$

nos quais a primeira integral representa a energia interna de deformação e a segunda integral representa a energia potencial devido às cargas aplicadas.

Os deslocamentos $u(x)$ e $v(x)$, representados na Figura 2.3, são aproximados utilizando funções de interpolação lineares, ou seja,

$$u = H_1 u_i + H_2 u_j \quad (2.5a)$$

$$v = H_1 v_i + H_2 v_j \quad (2.5b)$$

$$k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{dH_1}{dx} \theta_i + \frac{dH_2}{dx} \theta_j \quad (2.5c)$$

sendo as funções de interpolação H_1 e H_2 dadas por:

$$H_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.6a)$$

$$H_2 = \frac{x}{L} \quad (2.6b)$$

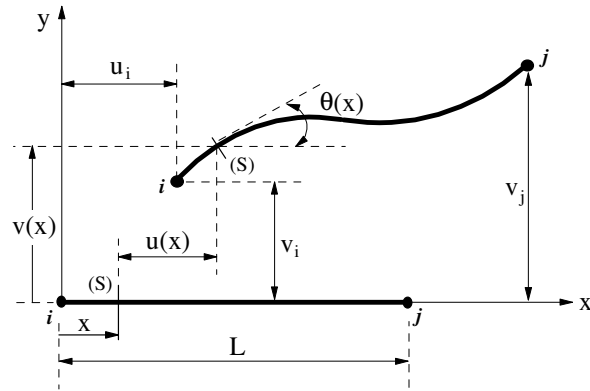


Figura 2.3 Configuração da deformada do elemento finito

Tendo em consideração a Equação (2.4), a energia interna de deformação é, como já citado, estabelecida como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \varepsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right] dx \quad (2.7)$$

Se um ponto da quadratura de Gauss for usado para realizar a integração da energia de deformação na equação anterior, a seguinte expressão é obtida para U :

$$U = \frac{L}{2} \left[EA \varepsilon_{xx}^2 + GA \gamma^2 + EI k^2 \right] \quad (2.8)$$

onde L é o comprimento do elemento finito.

Considerando elemento genérico, as componentes f_i^m do vetor de forças internas e as componentes k_{mn} da matriz de rigidez são obtidas por meio de diferenciações sucessivas da equação anterior, da seguinte maneira:

$$f_i^m = \frac{\partial U}{\partial u_m} \quad (2.9)$$

$$k_{mn} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_m \partial u_n} \quad (2.10)$$

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento são calculados no sistema local de coordenadas e é possível convertê-los para o sistema global utilizando as equações:

$$\mathbf{K}_{eg} = {}^t\mathbf{R}^T \mathbf{K}_e {}^t\mathbf{R} \quad (2.11)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_{ig} = {}^t\mathbf{R}_a^T {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_i \quad (2.12)$$

sendo \mathbf{K}_e a matriz de rigidez do elemento e \mathbf{f}_i o vetor de forças internas em coordenadas locais. ${}^t\mathbf{R}$ é a matriz de rotação entre o sistema global e o sistema local atualizado na configuração t , \mathbf{R}_a é a matriz de rotação atualizada na última iteração realizada. As matrizes de rotação são em função do ângulo α , exposto na Figura 2.2, e são definidas como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.4 O Sistema Computacional CS-ASA

Esta seção descreve o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), uma ferramenta computacional desenvolvida por Silva (2009). O programa, escrito em Fortran 95 (CHAPMAN, 2003), permite a análise estática e dinâmica de estruturas metálicas, considerando efeitos não lineares, como a não linearidade geométrica, semi-rigidez das ligações e plastificação dos membros. O CS-ASA utiliza uma programação estruturada em módulos, o que permite a melhoria da produtividade e expansão da ferramenta com o desenvolvimento de novas funcionalidades (SILVA,2009).

Conforme ilustrado na Figura 2.4, o CS-ASA segue o formato tradicional de outros *softwares* baseados no Método dos Elementos Finitos no qual o processo de simulação numérica é subdividido em três etapas, pré-processamento, análise e pós-processamento. O pré-processamento, consiste na leitura de arquivos texto em formatos específicos. Em seguida, as informações contidas nesses arquivos serão processadas e impressas no arquivo para posterior pós-processamento.

A etapa de pré-processamento (entrada de dados) compreende toda a definição do modelo que será analisado. Nessa etapa, o usuário deve definir o tipo de análise (linear/não linear, estática/dinâmica, elástica/inelástica), o modelo estrutural a ser analisado (treliça/ pórtico) e o

tipo de ligação viga-coluna (rígida ou semirrígida). Além disso, é necessário informar as características geométricas e físicas do modelo estrutural, a discretização de elementos finitos, as condições de contorno, o carregamento atuante, entre outros. Para ligações semirrígidas, os parâmetros do modelo adotado para representar o comportamento da ligação devem ser informados. Em uma análise não linear, a formulação escolhida para realizar a análise deve também ser informada.

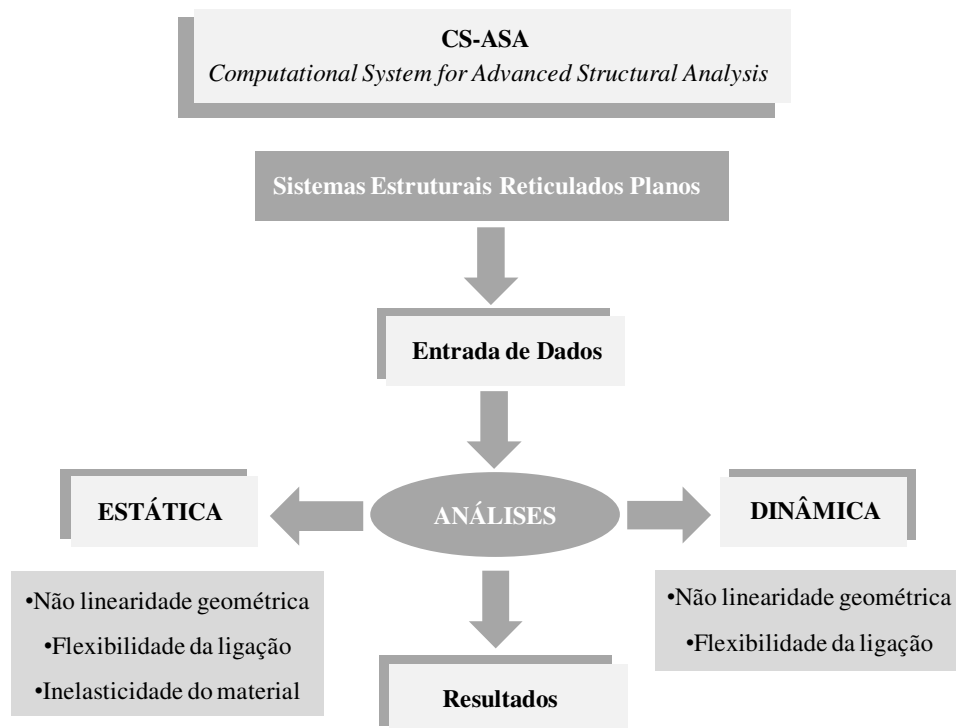


Figura 2.4 Programa CS-ASA Análise e Efeitos Considerados (SILVA, 2009)

A partir da definição de todas as informações de entrada no sistema, é gerada uma malha de elementos finitos para o modelo geométrico. Com a malha de elementos finitos, dá-se início a análise numérica propriamente dita, onde serão determinados os deslocamentos nodais e os esforços atuantes. Para uma análise estática não linear, essas grandezas são determinadas a cada incremento de carga. Já na análise dinâmica, além das grandezas citadas anteriormente, outras devem ser determinadas, tais como velocidade e aceleração, que são obtidas a cada intervalo de tempo.

A leitura dos parâmetros que gerenciam a estratégia incremental-iterativa adotada na solução não linear do problema é um dos procedimentos necessários. Dentre os parâmetros informados podem ser citados: o número de passos de carga, o número máximo de iterações, o incremento inicial do parâmetro de carga, a estratégias de incremento de carga e de iteração escolhida e a tolerância para convergência. Em seguida, é montado o vetor de carregamento nodal de referência.

Por fim, os resultados são apresentados em arquivos de saída. Um manual sobre o uso do programa CS-ASA foi escrito por Prado (2012).

3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR

3.1 Introdução

Na solução do problema estático não linear, são utilizadas metodologias que combinam procedimentos incrementais e iterativos. O método de Newton-Raphson (BATHE, 1996) é o alicerce desses esquemas numéricos, sendo utilizado na forma padrão ou modificada. Em ambos os processos, a carga mantém-se constante durante os ciclos iterativos, o que torna as formulações incapazes de ultrapassar os pontos limites que podem ser atingidos no traçado da curva da trajetória de equilíbrio, visto que os resultados convergem próximo ao primeiro ponto limite. Além disso, é possível empregar técnicas de continuação, as quais consistem em equações de restrição adicionadas ao sistema algébrico, visando superar os pontos limites (SILVA,2009).

3.2 Metodologia de Solução

Quando se aplica o Método dos Elementos Finitos (MEF), para cada região (elemento finito) se estabelece um comportamento local aproximado, de tal forma que as incógnitas do problema possam ser definidas em função das mesmas incógnitas nos pontos nodais desse elemento. Avaliando a energia potencial total, e somando as contribuições de cada elemento, chega-se a um sistema total de equações, cuja solução permite conhecer os valores das incógnitas nos pontos nodais.

No contexto do MEF, a equação que estabelece o equilíbrio estático dos sistemas estruturais estudados neste trabalho pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.1)$$

sendo \mathbf{F}_r um vetor de referência que descreve as cargas externas aplicadas, tal que somente a direção é relevante; λ um parâmetro de carga responsável por escalonar \mathbf{F}_r ; e \mathbf{F}_i o vetor de forças internas que é função dos deslocamentos, \mathbf{U} , nos pontos nodais da estrutura.

A resposta de um problema estático não linear de um sistema estrutural, geralmente é dada por uma representação gráfica, que consiste em uma curva carga-deslocamento ou rotação, onde o eixo das abscissas representa uma componente de deslocamento ou rotação de um nó escolhido, e o eixo das ordenadas corresponde ao parâmetro de carga. Essa curva é denominada trajetória de equilíbrio, e cada um dos seus pontos estabelece uma configuração de equilíbrio

estático que respeita a Equação (3.1).

Um método eficiente para solucionar sistemas de equações não lineares deve ser capaz de resolver problemas numéricos relacionados ao comportamento não linear. Deve conseguir traçar toda a trajetória de equilíbrio do sistema estrutural em análise, detectando e percorrendo todos os pontos singulares ou críticos que possam surgir. Esses pontos críticos são classificados em dois tipos: pontos limites, que incluem os fenômenos de *snap-through* (salto dinâmico controlado por carga) e *snap-back* (salto dinâmico controlado por deslocamento); e pontos de bifurcação, que resultam de duas ou mais trajetórias de equilíbrio. Os pontos comentados são mostrados na Figura 3.1.

Ainda que, em muitos casos, a resposta da análise estrutural antes de atingir os pontos críticos seja adequada para fins de projeto, é indispensável determinar a resposta no intervalo pós-crítico quando se deseja estudar o comportamento não linear da estrutura. Os valores encontrados nesse intervalo confirmam a passagem pelo ponto limite e permite determinar a carga de colapso (BELLINI, CHULYA, 1987; CRISFIELD, 1991).

O desenvolvimento do problema estrutural descrito pela Equação (3.1) é realizado por meio de um esquema que combina um procedimento incremental e iterativo, que pode ser dividido em duas fases. A primeira delas, conhecida como fase predita, compreende a solução dos deslocamentos incrementais a partir de um determinado aumento de carga. A segunda fase, chamada de fase corretiva, tem como objetivo corrigir as forças internas incrementais obtidas a partir dos acréscimos de deslocamento, aplicando um processo iterativo. Essas forças internas são então comparadas com o carregamento externo para avaliar o desequilíbrio existente entre elas. O processo corretivo é repetido até que a estrutura esteja em equilíbrio, conforme determinado por um critério de convergência.

As principais características da metodologia de análise não linear serão apresentadas a seguir. Entretanto, antes é preciso fazer algumas observações relacionadas à notação a ser adotada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga, $t+\Delta t$;
- k se refere ao contador do número de iterações em um determinado passo de carga. Para $k = 0$, tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo;

- λ e \mathbf{U} definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

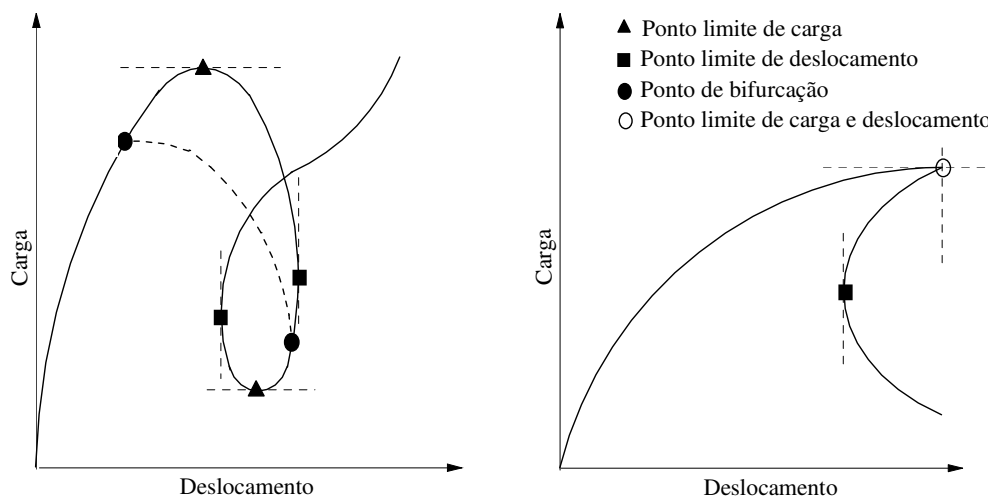


Figura 3.1 Trajetórias de equilíbrio (SILVEIRA, 1995)

A Figura 3.2 ilustra a metodologia incremental-iterativa para um acréscimo de carga único. Inicialmente, após a última configuração de equilíbrio da estrutura, identificada pelo ponto (\mathbf{U}, λ) , seleciona-se um incremento inicial de carga, $\Delta\lambda^0$, fixado como primeiro incremento do parâmetro de carga. A contar desse momento, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais, $\Delta\mathbf{U}^0$. Essas aproximações formam a solução incremental predita. No entanto, devido à não linearidade da função \mathbf{F}_i em relação aos deslocamentos, a solução do problema com pontos de coordenadas $(\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U}^0, \lambda+\Delta\lambda^0)$, não segue inicialmente a condição de equilíbrio da Equação (3.1). Na fase corretiva, a segunda etapa do processo de solução, utilizamos iterações para corrigir a solução e restaurar o equilíbrio da estrutura de forma eficiente. Se essas iterações incluírem a correção dos deslocamentos nodais, \mathbf{U} , e do parâmetro de carga, λ , uma equação adicional de restrição é necessária. As próximas subseções detalharão essas duas etapas do processo de solução não linear.

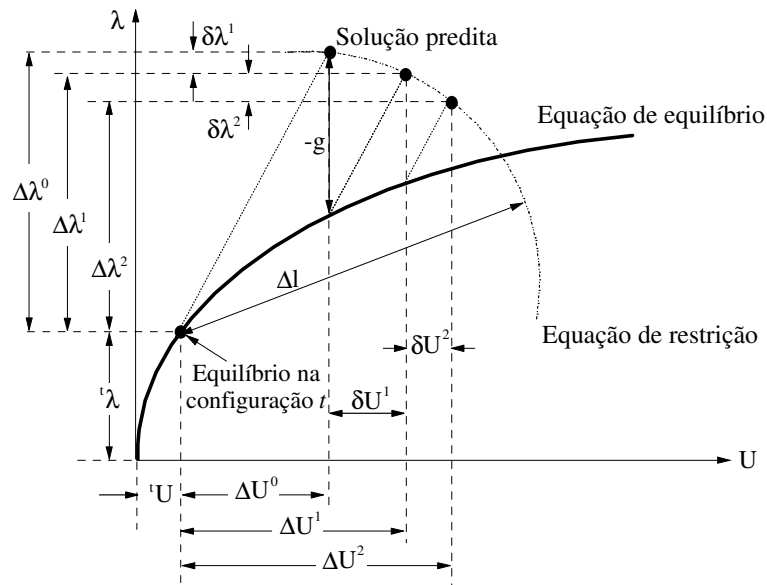


Figura 3.2 Solução incremental-iterativa (SILVA, 2009)

3.2.1 Solução Incremental Predita

Para alcançar a solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente, $\Delta\lambda^0$ e ΔU^0 , são necessárias algumas etapas. A primeira delas envolve a montagem da matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} , a partir das informações da configuração de equilíbrio mais recente da estrutura. Em seguida, utilizando a seguinte expressão, determinamos o vetor de deslocamentos nodais tangenciais, δU_r :

$$\delta U_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.2)$$

Por meio de uma abordagem de aumento gradual de carga, é possível realizar uma seleção automatizada do incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. Essa escolha pode ser sujeita a uma equação de restrição adicional aplicada ao problema, como exemplificado na Figura 3.2, por exemplo, para restringir o comprimento de arco (CRISFIELD, 1981; 1991). A seguir, serão expostas as especificações da estratégia de incremento de carga empregada neste estudo.

Após estabelecer-se o incremento inicial, $\Delta\lambda^0$, são encontrados os deslocamentos nodais incrementais tangenciais, ΔU^0 , escalonando-se δU_r , de tal forma:

$$\Delta \mathbf{U}^0 = \Delta \lambda^0 \delta \mathbf{U}_r \quad (3.3)$$

Nesse sentido, é possível atualizar os parâmetros de carga e os deslocamentos totais através do procedimento a seguir:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta \lambda^0 \quad (3.4)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^0 \quad (3.5)$$

sendo ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ representam o ponto de equilíbrio obtido no último acréscimo de carga mostrado na Figura 3.2.

As Equações (3.4) e (3.5) em alguns casos não respeitam as condições de equilíbrio do sistema estrutural. Portanto, se faz necessário iterações subsequentes para que as condições de equilíbrio possam ser reestabelecidas.

3.2.2 Ciclo de Iterações: Método de Newton-Raphson

Em uma análise numérica, o propósito do método de Newton-Raphson (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989) é encontrar as raízes ou os zeros de uma equação não linear. Esse método assume que, a partir de uma estimativa inicial para a raiz, o objetivo é determinar uma sequência de correções até que a solução seja alcançada com uma precisão satisfatória. Para isso, a equação não linear, da qual se busca as raízes, é aproximada por meio de uma série de Taylor (PRESS *et al.*, 1986; HEATH, 1997). Muitos dos procedimentos para solucionar problemas não lineares são fundamentados no método de Newton-Raphson para resolver a Equação (3.1).

A fim de começar a desenvolver o método de Newton-Raphson, a Equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = 0 \quad (3.6)$$

em que \mathbf{g} é o vetor gradiente que deve se anular durante o ciclo de iterações, retornando assim que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido.

Tratando-se do incremento de carga no instante atual, $t+\Delta t$, a cada incremento de carga, tem-se uma solução aproximada,

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^{(k-1)} = \mathbf{U}^{(k-1)} = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \quad (3.7)$$

com isso, é calculada uma correção $\delta\mathbf{U}^k$, tal que:

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k\right) = 0 \quad (3.8)$$

sendo que k se refere a iteração atual e $k-1$ representa a iteração anterior.

Expressando-se a equação anterior em uma série de Taylor em sua forma expandida em torno de $\mathbf{U}^{(k-1)}$, isto é,

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k\right) = \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}\right) + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{U}^{(k-1)}}\delta\mathbf{U}^k + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\mathbf{g}}{\partial\left(\mathbf{U}^{(k-1)}\right)^2}\left(\delta\mathbf{U}^k\right)^2 + \dots \quad (3.9)$$

Assim, utilizando apenas os dois primeiros termos da série, e substituindo-a em Equação (3.8), encontra-se:

$$\delta\mathbf{U}^k = -\frac{\mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}\right)}{\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{U}^{(k-1)}}} = \left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{U}^{(k-1)}}\right)^{-1} \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}\right) \quad (3.10)$$

sendo que a derivada representa fisicamente a matriz de rigidez tangente da estrutura, \mathbf{K} . Numericamente, corresponde a inclinação da reta tangente à curva que descreve o equilíbrio do sistema. Com isso, a equação pode ser reescrita de tal forma:

$$\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}\right) \quad (3.11)$$

Por tudo isso, considera-se a seguinte equação como a nova estimativa para a solução quando algum critério de convergência for satisfatório:

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k \quad (3.12)$$

As Equações (3.11) e (3.12) representam o método de Newton-Raphson padrão. Na Figura 3.3(a), esse método é exemplificado graficamente para sistema estrutural com um grau de liberdade. Nota-se que a cada passo de carga a inclinação da reta tangente, que indica a matriz de rigidez, sofre alterações.

A convergência desse método é quadrática, quando a solução inicial ${}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$ for satisfatoriamente próxima a solução do sistema de equações (3.1). Ademais, deve existir em todas as iterações a inversa da matriz de rigidez \mathbf{K} até que seja alcançada a convergência

necessária.

O método de Newton-Raphson modificado é uma variação da técnica padrão na qual a matriz de rigidez permanece inalterada durante o ciclo de iterações. A Figura 3.3b exibe essa diferença. É possível observar que no método de Newton-Raphson modificado a inclinação da reta tangente calculada na primeira iteração é mantida constante. Com isso, quando o método modificado é usado o número de iterações necessária para atingir a convergência procurada é maior que o do procedimento padrão.

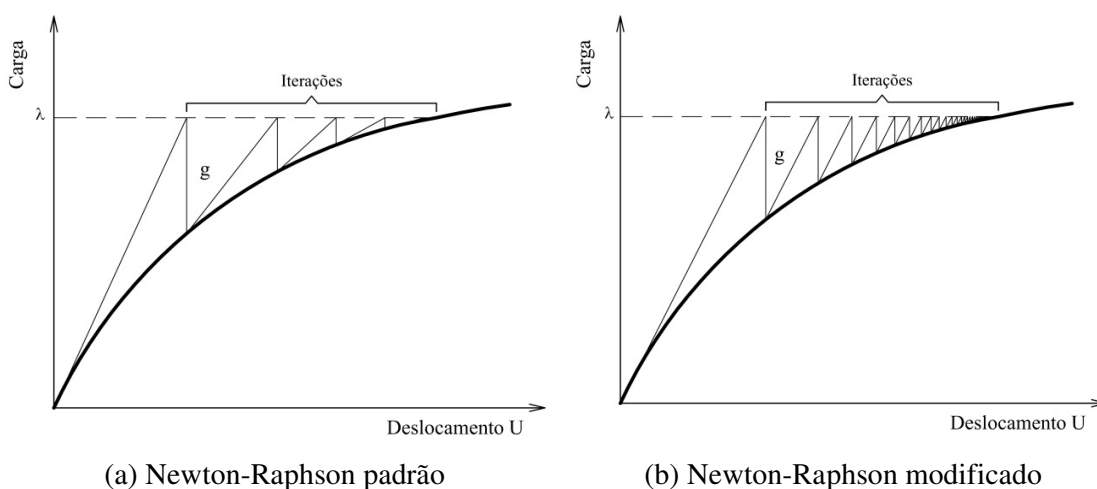


Figura 3.3 Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson não tem a capacidade de superar os pontos limites que podem surgir durante o traçado da trajetória de equilíbrio. Essas limitações surgem devido ao parâmetro de carga permanecer constante durante o processo iterativo e, conseqüentemente, pela singularidade que ocorre na matriz de rigidez tangente nos pontos limites. Para seguir adequadamente toda a trajetória de equilíbrio, incluindo possíveis passagens pelos pontos limites, é indispensável que o parâmetro de carga varie a cada iteração. Isso pode ser alcançado ao se adicionar uma equação de restrição nas iterações de Newton, através de procedimentos numéricos específicos. A natureza dessa equação de restrição é o que diferencia as diversas estratégias de iteração utilizadas para esse propósito (SILVEIRA, 1995; GALVÃO, 2000).

A variação do parâmetro de carga é permitida, seguindo a abordagem geral de solução apresentada originalmente por Batoz e Dhatt (1979). Pode-se afirmar que a alteração nos

deslocamentos nodais é regida pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k\right), k \geq 1 \quad (3.13)$$

em que \mathbf{g} é a função dos deslocamentos nodais totais, $\mathbf{U}^{(k-1)}$, obtidos na última iteração, e do valor do parâmetro de carga total, λ^k , que passa a ser uma incógnita representada por:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.14)$$

Tal que $\delta\lambda^k$ é a correção do parâmetro de carga.

Substituindo (3.14) em (3.13), obtém-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \left[\left(\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \right) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)} \right] \quad (3.15)$$

que pode ser simplificada, sendo escrita como:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.16)$$

que é a equação utilizada no decorrer do ciclo iterativo.

Por meio da Equação (3.16), é possível decompor os deslocamentos nodais iterativos em duas parcelas, sendo escritos como:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.17)$$

sendo que:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.18)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.19)$$

onde $\delta\mathbf{U}_g$ é a da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia de incremento de parâmetro de carga constante, e $\delta\mathbf{U}_r$, é o vetor dos deslocamentos iterativos derivados da aplicação de \mathbf{F}_r .

Quando o método de Newton-Raphson modificado é adotado, na iteração atual k , a correção $\delta\mathbf{U}_r$ será equivalente ao vetor de deslocamentos tangenciais $\delta\mathbf{U}_r$, obtido no desenvolvimento da Equação (3.2). É importante ressaltar que esse parâmetro permanece inalterado durante as iterações, uma vez que \mathbf{K} permanece constante. Por outro lado, a correção

do parâmetro de carga $\delta\lambda^k$, única incógnita da Equação (3.17), é determinada seguindo uma estratégia iterativa, neste trabalho, foi utilizada a estratégia baseada no resíduo ortogonal. Após encontrar o valor de $\delta\lambda^k$, retorna-se à Equação (3.17) para determinar a correção dos deslocamentos. É relevante mencionar que o uso da expressão (3.17) representa o processo convencional da metodologia de solução não linear.

Após a obtenção da solução iterativa, $\delta\lambda^k$ e $\delta\mathbf{U}^k$, é necessário atualizar as variáveis incrementais do problema, a partir das relações a seguir:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.20)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k \quad (3.21)$$

Além disso, tem-se para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (3.22)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (3.23)$$

Em todo processo iterativo, a solução obtida é uma aproximação e não exata. Por conseguinte, é necessário estabelecer limites de tolerância para determinar quando o processo deve ser interrompido. Neste estudo, optou-se por usar o critério de convergência fundamentado em relações de deslocamentos. Esse critério é sempre verificado ao término da iteração atual e é definido da seguinte maneira:

$$\zeta_I = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (3.24)$$

aqui, o numerador é a norma euclidiana dos deslocamentos iterativos; o denominador é a norma euclidiana dos deslocamentos incrementais, obtidos através da correção do processo iterativo; e ζ é um fator de tolerância informado como dado de entrada no programa. Para esse fator normalmente são considerados valores entre 10^{-3} e 10^{-6} .

A Tabela 3.1 ilustra os procedimentos descritos nesta seção.

Tabela 3.1 Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear (SILVA,2009)

1. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^t\lambda$
2. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:** $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
 - 2a. Monta-se a matriz de rigidez tangente: $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P})$
 - 2b. Resolve: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
 - 2c. Define $\Delta\lambda^0$ usando a estratégia de incremento de carga
 - 2d. Determina: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{U}_r$
 - 2e. Atualiza as variáveis na configuração $t + \Delta t$:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$$
 e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
3. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:** $k = 1, 2, 3, \dots$
 - 3a. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
 - 3b. Calcula o vetor de forças residuais:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$$
 - 3c. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}
 - 3d. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, usando a estratégia de iteração
 - 3e. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$, com:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$$
 e $\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$
 - 3f. Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :
 - a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
 - b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
 - 3g. Verifica a convergência:
SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 4*
 - 3h. Retorna ao passo 3
4. Atualiza as variáveis que forem necessárias
5. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 2**

3.3 Incremento de Carga Baseado no GSP (*Generalized stiffness parameter*)

Conforme enfatizado na seção anterior, a determinação do valor inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, é um passo essencial para alcançar a solução incremental prevista. A escolha automática do incremento desse parâmetro é de grande importância e deve refletir o grau de não linearidade presente no sistema estrutural sob análise. Para que essa seleção seja efetiva, a estratégia de incremento de carga deve atender, principalmente, aos seguintes critérios:

- gerar grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear;

- fornecer pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear;
- ser capaz de definir o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados.

Em busca de atender as condições estabelecidas anteriormente, este trabalho baseou-se no parâmetro de rigidez GSP (*Generalized stiffness parameter*). Essa estratégia foi proposta por Yang e Kuo (1994), que adotaram a seguinte equação de restrição a ser obedecida em ambas as etapas da solução não linear (etapa predita e etapa de iterações):

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_I \delta \lambda^k = H_k \quad (3.25)$$

na qual \mathbf{C} é uma matriz de elementos constantes, k_I também é constante e H é um parâmetro incremental. Em função de valores escolhidos para essas variáveis, encontram-se diferentes estratégias de incremento de carga e de iteração.

Ao unir a equação de restrição anterior com a Equação (3.16), temos um sistema de equações com $N+1$ incógnitas, sendo N a dimensão do vetor de deslocamentos e o 1 refere-se ao parâmetro de carga, λ . Essas duas equações podem se complementar de maneira a permitir manipulações algébricas e matriciais, levando à obtenção da seguinte formulação para a correção do parâmetro de carga:

$$\delta \lambda^k = \frac{I}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_r^k + k_I} \left(H_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (3.26)$$

Considera-se a proposta de Yang e Shieh (1990) para os valores de \mathbf{C} e k_I , sendo,

$$\mathbf{C} = {}^t \delta \mathbf{U}_r \Delta \lambda^0 \text{ e } k_I = 0 \quad (3.27)$$

no qual ${}^t \delta \mathbf{U}_r$ o vetor de deslocamentos nodais tangenciais resultante do incremento de carga anterior, encontra-se uma nova expressão para $\delta \lambda$:

$$\delta \lambda^k = \frac{I}{\Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} \left(H_k - \Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (3.28)$$

A solução para o parâmetro de carga inicial, $\Delta \lambda^0$, considerando na equação anterior, $k=0$, $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$, $\delta \mathbf{U}_g^0 = 0$ e $\delta \mathbf{U}_r^0 = \delta \mathbf{U}_r$. Sendo assim, escreve-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r}} \quad (3.29)$$

O valor do parâmetro incremental H_0 , que representa o deslocamento generalizado nesse contexto, pode ser determinado através da equação anterior (3.29). Além disso, supõe-se que no primeiro passo de carga, o valor de $\Delta\lambda^0$ é conhecido (sendo esse fornecido pelo analista). Como resultado, obtém-se:

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 ({}^1\delta\mathbf{U}_r^T) ({}^1\delta\mathbf{U}_r) \quad (3.30)$$

Agora substituindo-se (3.30) em (3.29), tem-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) {}^t\delta\mathbf{U}_r}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r}} \quad (3.31)$$

na qual o termo dentro da raiz representa o parâmetro de rigidez GSP.

O caminho para determinar o sinal adequado na Equação (3.31) é fundamentado no parâmetro GSP. Conforme observado por Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez atual depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta\mathbf{U}_r$ (do passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{U}_r$ (do passo de carga atual), como mostrado na Figura 3.4. Como resultado, o parâmetro de rigidez GSP assume um valor negativo nos passos de carga localizados em regiões próximas aos pontos limites. Já para os demais passos de carga, o parâmetro GSP permanecerá sempre positivo.

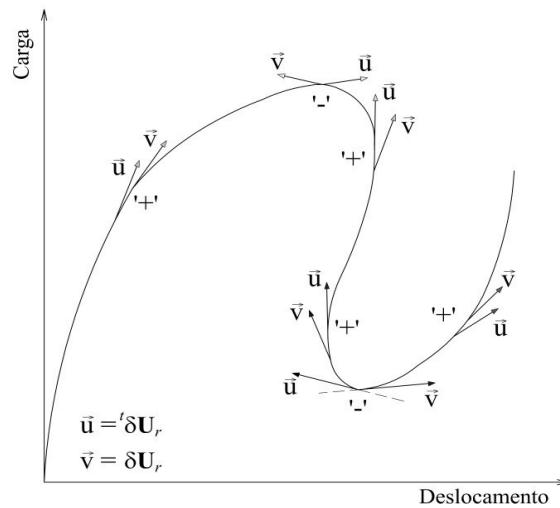


Figura 3.4 Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado GSP (YANG; KUO, 1994)

3.4 Iteração Baseada no Deslocamento Generalizado

No decorrer do processo iterativo, a determinação da correção do parâmetro de carga $\delta\lambda$ depende de uma estratégia específica de iteração ou de uma equação restritiva aplicada ao problema. A abordagem principal de uma estratégia de iteração consiste em considerar o parâmetro de carga, λ , como uma variável adicional, permitindo que ele varie para obter a trajetória completa do equilíbrio, incluindo possíveis passagens pelos pontos limites. Essa abordagem visa equilibrar o número de expressões e incógnitas, adicionando uma função restritiva às equações originais de equilíbrio.

É fundamental que uma estratégia de iteração seja computacionalmente eficiente, visando obter a configuração de equilíbrio do sistema estrutural de forma rápida para cada passo de carga. No entanto, é importante ressaltar que não se pode esperar que qualquer estratégia resolva problemas fortemente não lineares com a mesma eficiência computacional.

Com a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP foi mostrado que, de acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a seguinte expressão deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não linear:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 ({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_r^k} \left(H_k - \Delta\lambda^0 ({}^t\delta\mathbf{U}_r^T) \delta\mathbf{U}_g^k \right) \quad (3.32)$$

Na obtenção da solução incremental predita ($k = 0$), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental H_0 (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido de acordo com a Equação (3.30). Durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, ou seja, $H_k = 0$ para $k > 0$. Dessa forma, pode-se rescrever (3.32) como:

$$\delta\lambda^k = -\frac{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.33)$$

que é a expressão para a correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

4 APLICAÇÕES

4.1 Introdução

Nesta seção, a metodologia apresentada anteriormente será utilizada na análise estática não linear de quatro sistemas estruturais. Será analisada uma viga engastada e livre, um pórtico em forma de L, conhecido na literatura como pórtico de Lee, e também duas colunas com formas distintas de contraventamento. Variações nas condições de contorno, na posição de atuação do carregamento e em parâmetros geométricos serão feitas para avaliar alterações na resposta estrutural perante essas mudanças.

O material é assumido elástico em todas análises, e o módulo de elasticidade transversal foi considerado metade do módulo de elasticidade. O incremento inicial do parâmetro de carga será informado em cada exemplo, assim como a técnica de Newton-Raphson, se padrão ou modificado. Cabe lembrar que a estratégia de iteração baseada no deslocamento generalizado foi considerada no processo de solução. O critério de convergência baseado em deslocamentos e uma tolerância de 10^{-4} foram considerados.

Propõe-se neste capítulo, mostrar o comportamento dos sistemas estruturais escolhidos, por meio dos traçados das trajetórias de equilíbrio, efetuando variações em parâmetros supracitados desses modelos estruturais. Os resultados das análises aqui realizadas serão comparados, quando possível, às soluções encontradas na literatura para alcançar a validação procurada.

Por fim, cabe enfatizar que a formulação adotada é uma abordagem desenvolvida no contexto do referencial Lagrangiano total, fundamentada na teoria das vigas de Timoshenko.

4.2 Viga Engastada-Livre

Uma situação clássica envolvendo uma viga sujeita a um momento fletor na extremidade livre é exemplificada na Figura 4.1. Diversos estudiosos investigaram essa estrutura, incluindo Bathe e Bolourchi (1979), a fim de avaliar a precisão das abordagens que eles propuseram. A viga, encontra-se engastada em uma das extremidades e livre na outra, possui comprimento L e seção transversal retangular. No âmbito dessa análise, o momento fletor aplicado na extremidade foi incrementado variando o parâmetro de carga λ de 0.0 a 2.0. Para $\lambda = 2.0$, a viga se deforma com a extremidade livre rotacionando 720° .

Na discretização do sistema estrutural foram adotados nove elementos finitos. Uma verificação sobre a influência do número de elementos na modelagem da viga foi realizada, sendo evidenciada na Figura 4.2. Nessa figura, são exibidas as variações nos deslocamentos horizontal e vertical, u e v , respectivamente, na extremidade livre da viga em relação ao parâmetro de carga λ , usando dois, quatro e nove elementos. Com dois elementos, as variações dos deslocamentos em relação à carga apresentam uma discrepância relativamente grande comparada às demais análises. Para os outros casos, quatro e nove elementos, as respostas são próximas. Os resultados são comparados aos de Bathe e Bolourchi (1979).

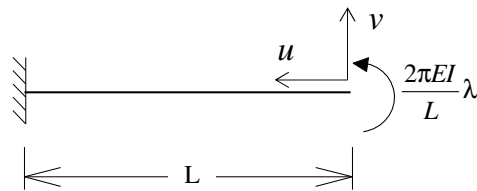


Figura 4.1 Viga: geometria e carregamento

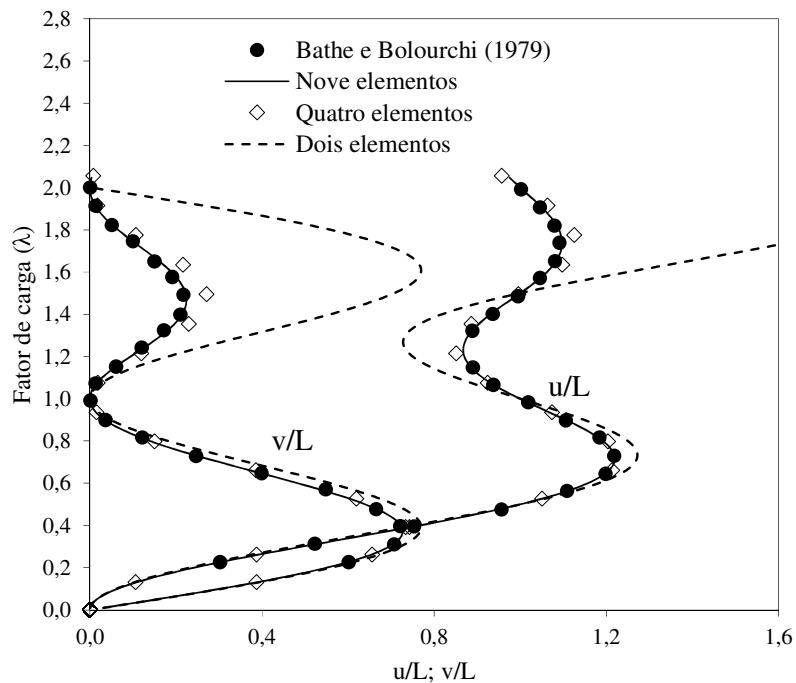


Figura 4.2 Curvas carga-deslocamento

4.3 Coluna Engastada-Livre

Realiza-se nesta subseção a análise de uma coluna na qual uma das extremidades é engastada, enquanto a outra permanece livre, conforme ilustrado na Figura 4.3(a). A referida coluna possui comprimento L , com rigidez à flexão representada por EI , sendo E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da seção transversal da coluna. Na porção superior da coluna, atua uma carga concentrada de intensidade P . Para evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação, introduz-se uma pequena imperfeição de carga através da consideração do momento M de intensidade $0,001PL$ conforme mostra a Figura 4.3.

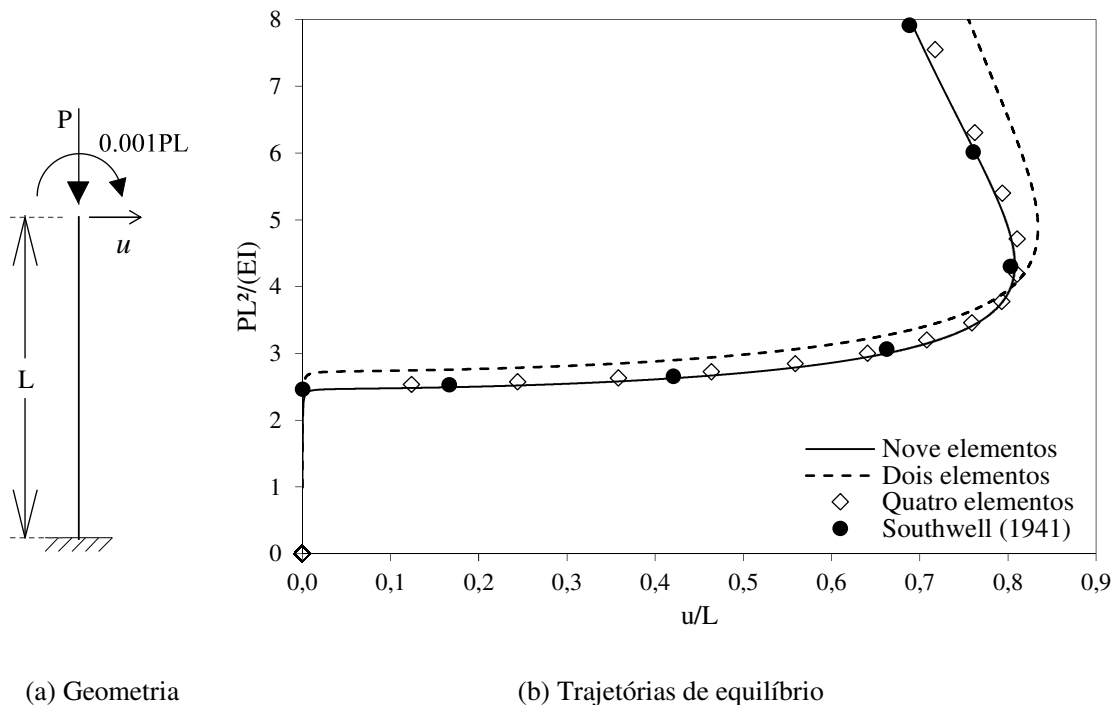


Figura 4.3 Coluna engastada-livre: geometria e trajetórias de equilíbrio

A análise de estabilidade é realizada e, inicialmente, mostra-se a importância de se usar uma malha de elementos finitos adequada na obtenção da resposta. Para esse estudo empregou-se o método modificado de Newton-Raphson, e o incremento inicial do parâmetro de carga no primeiro passo incremental foi tomado como $EI/(PL^2)$, com P sendo 1. As trajetórias de equilíbrio, obtidas com a aplicação de dois, quatro e nove elementos, são representadas na Figura 4.3(b). O carregamento e o deslocamento foram adimensionalizados

na figura.

É importante destacar novamente que a formulação de elementos finitos usada é baseada na teoria de vigas de Timoshenko. Percebe-se que, com apenas dois elementos finitos, a formulação forneceu bons resultados no trecho inicial da trajetória. Para as malhas mais refinadas, as curvas nas duas formulações são semelhantes. É evidente a manifestação de um comportamento no qual o deslocamento horizontal u assume valores significativos ao longo da trajetória de equilíbrio, acompanhado de uma carga praticamente constante. Além disso, identifica-se um ponto crítico de deslocamento ao longo do percurso.

A Figura 4.3(b) ilustra a proximidade dos resultados obtidos em relação à solução analítica proposta por Southwell (1941). Tal concordância atesta a eficácia da formulação e das técnicas de continuação empregadas neste trabalho.

4.4 Pórtico de Lee

O exemplo agora corresponde a uma estrutura amplamente empregada para a validação de formulações não lineares de elementos finitos e técnicas de continuação usadas em estratégias de solução. A análise aborda o pórtico com comportamento fortemente não linear ilustrado na Figura 4.4, conhecido na literatura por Pórtico de Lee, que foi proposto e resolvido de maneira analítica por Lee, Manuel e Rossow (1968).

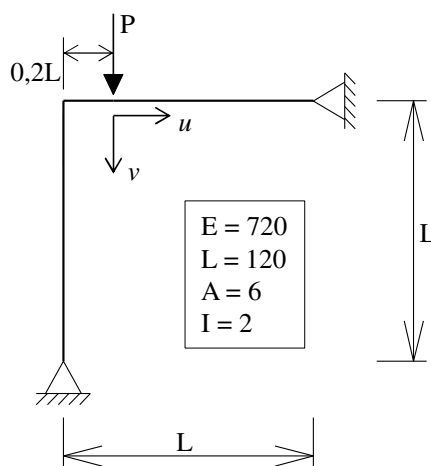


Figura 4.4 Pórtico de Lee: geometria e carregamento

O sistema estrutural em questão é uma construção composta por uma viga e uma coluna, ambas com características físicas e geométricas idênticas. Essas barras estão rigidamente interligadas e possuem apoios do segundo gênero em suas extremidades livres. A viga é submetida a uma carga vertical concentrada de magnitude P , aplicada em um ponto que dista $0,2L$ da seção que interliga a viga e a coluna, sendo L o comprimento da viga. As propriedades geométricas e físicas da estrutura estão também mostradas na Figura 4.4.

As avaliações foram conduzidas discretizando o pórtico com vinte elementos finitos, dez elementos em cada um dos membros estruturais. O método de Newton-Raphson padrão foi usado no processo de solução. Cabe destacar que a estratégia de iteração baseada no deslocamento generalizado, conforme proposto por Yang e Kuo (1994) e detalhada na Seção 3 foi usada. O parâmetro de rigidez GSP foi empregado para controlar o parâmetro de carga, que teve valor inicial igual 0,01.

A Figura 4.5 ilustra as trajetórias de equilíbrio obtidas para o Pórtico de Lee. São representadas as curvas carga-deslocamento obtidas controlando os deslocamentos horizontal (u) e vertical (v) do ponto de aplicação da carga. Na Figura 4.5 é possível observar que fenômenos de instabilidade só ocorrem após grandes deslocamentos.

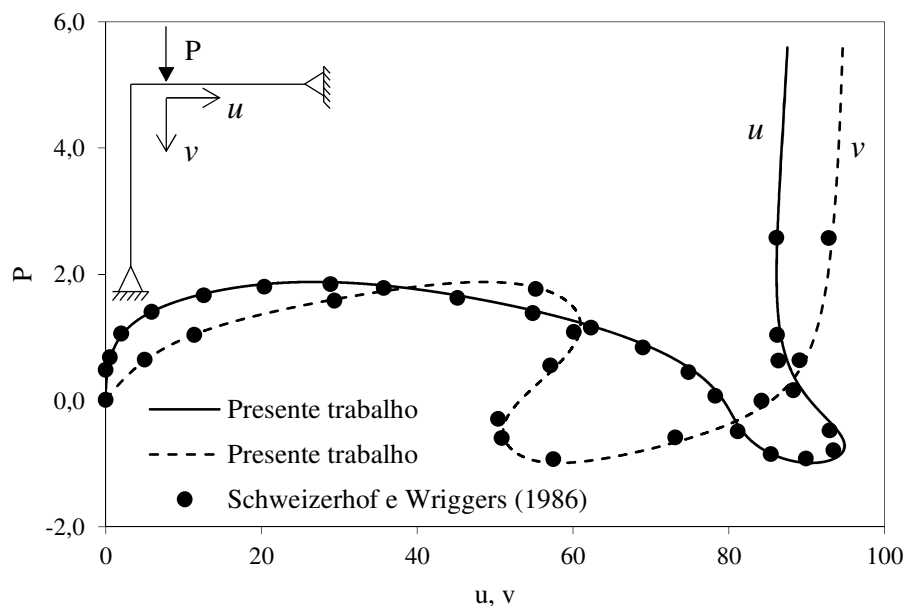


Figura 4.5 Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee.

Comparam-se os resultados encontrados com aqueles fornecidos por Schweizerhof e Wriggers (1986). Pode-se observar que os resultados deste trabalho estão em excelente acordo com aqueles encontrados na literatura.

Como pode ser visto, a estrutura exhibe um comportamento altamente não linear, com dois pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento ao longo do caminho de equilíbrio.

Com base na trajetória de equilíbrio que representa a variação do deslocamento vertical v com a carga aplicada P , a Tabela 4.1 apresenta os valores encontrados para os pontos de limite de carga (valores de carga e deslocamento nos quais a tangente à curva é horizontal) e para os pontos limites de deslocamento (valores de carga e deslocamento para os quais a tangente à trajetória é vertical). Estão indicadas as cargas de limite, P_{lim} , juntamente com os deslocamentos verticais correspondentes.

Tabela 4.1 Carga e deslocamento vertical (P_{lim} , v) referentes aos pontos limites

Pontos Limites	P_{lim}	v
<i>Carga</i>	1,8795	48,6274
	-0,9866	58,1937
<i>Deslocamento</i>	1,1991	60,9747
	-0,4807	51,0455

4.4.1 Influência da Posição do Carregamento e Condições de Apoio

Usando uma estrutura com a mesma geometria do pórtico de Lee, alterou-se a condição de apoio da extremidade direita da viga para verificar a influência das restrições de deslocamentos impostas a essa estrutura. Quatro tipos de condições de apoio foram adotados: restrição do deslocamento vertical (Condição 1), impedimento do deslocamento horizontal (Condição 2), apoio do segundo gênero (Condição 3) e engaste (Condição 4).

Além disso, com a finalidade de se obter as duas regiões da trajetória pós crítica (bifurcação assimétrica), foram inseridas excentricidades na carga. Considerou-se a carga aplicada à esquerda da seção que interliga viga e coluna gerando uma rotação positiva (sentido anti-horário) nessa seção, e a carga atuando à direita da ligação viga-coluna, provocando uma

rotação negativa (sentido horário), como mostra a Figura 4.6. A excentricidade, posição de atuação da carga, está indicada pela letra e nessa figura. Cabe destacar que, para inserir a carga à esquerda da ligação entre os dois membros, um novo elemento estrutural e, portanto, um outro elemento finito foi considerado.

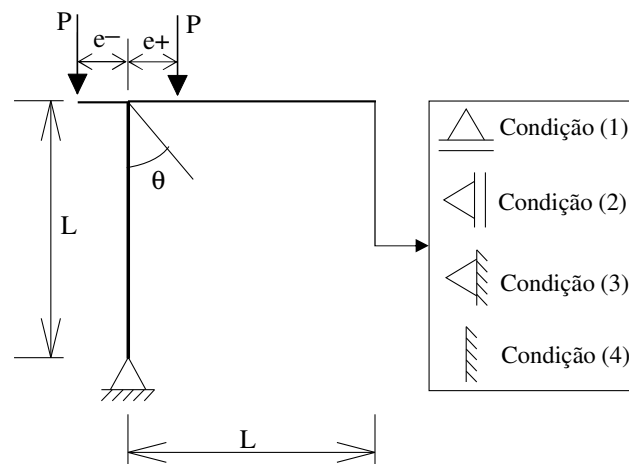


Figura 4.6 Pórtico em L: excentricidades de carga e condições de apoio

Considerando então diferentes posições do carregamento e condições de apoio da extremidade da viga, foram obtidas as várias trajetórias de equilíbrio do pórtico. As Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 ilustram, respectivamente as respostas encontradas para as Condições (1), (2), (3), e (4) descritas anteriormente e ilustradas na Figura 4.6. No traçado dos caminhos não lineares de equilíbrio a carga P foi adimensionalizada pela carga crítica de Euler ($P_e = \pi^2 EI/L^2$), e foi controlada a rotação θ da seção que interliga viga e coluna.

Observando as trajetórias de equilíbrio percebe-se a grande influência da condição de extremidade da viga no comportamento do pórtico em L. Nota-se a influência no valor da carga crítica na sua resposta pós-crítica e, portanto, a sensibilidade à imperfeição desse tipo de estrutura. Quando se permite o deslocamento horizontal da extremidade direita da viga (Figura 4.6), o valor da carga crítica é bem inferior às demais. Além disso, o pórtico exibe uma bifurcação assimétrica.

De um modo geral, observa-se que para excentricidades negativas (carga aplicada em uma posição e à esquerda da ligação viga-coluna), a resposta do sistema estrutural é estável até

atingir uma carga limite associada a grandes deslocamentos e rotações. Nesse caso, verifica-se o crescimento das curvas (lado de rotações negativas). Entretanto, à medida que a excentricidade aumenta, a redução na rigidez efetiva do pórtico acontece. Isso pode ser percebido pela redução da inclinação inicial das curvas.

Quando se considera a excentricidade positiva (carga situada a uma distância e à esquerda do ponto de ligação entre a viga e a coluna), há uma redução na capacidade de carga do pórtico.

Para a condição de apoio 4 (Figura 4.9), quando a excentricidade tende a zero, a carga crítica do pórtico se aproxima da carga crítica de Euler. Por fim, é possível verificar que quando a coluna sofre flambagem para a direita, condição na qual a rotação θ positiva, a resistência do sistema estrutural diminui com o aumento da deformação. Nesse caso, a resposta pós flambagem ou pós crítica é instável. Quando a flambagem da coluna é para a esquerda (rotação θ negativa), a configuração pós-crítica é estável. Nota-se a trajetória crescente até um ponto limite associado a grandes deslocamentos. Após esse ponto limite a trajetória também se torna instável.

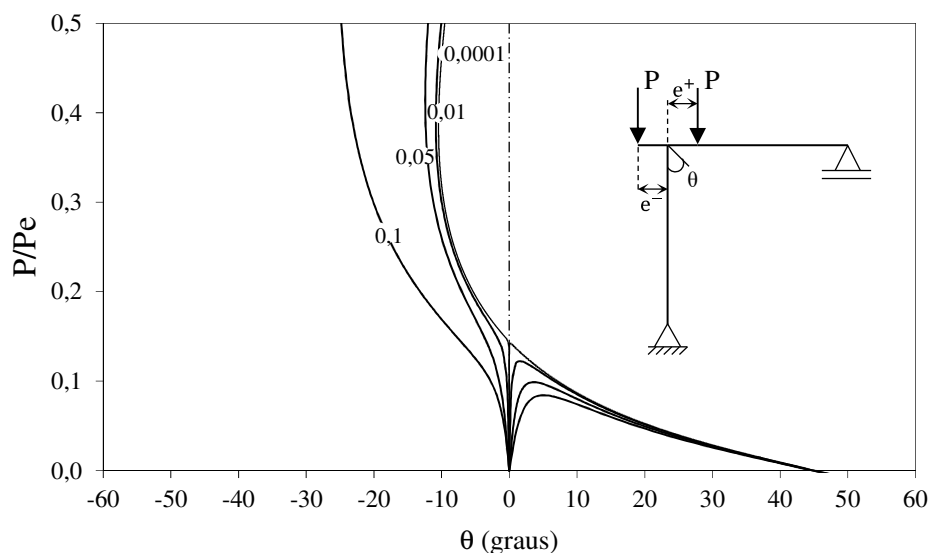


Figura 4.7 Trajetórias de equilíbrio (Condição 1) para diferentes valores da relação e/L .

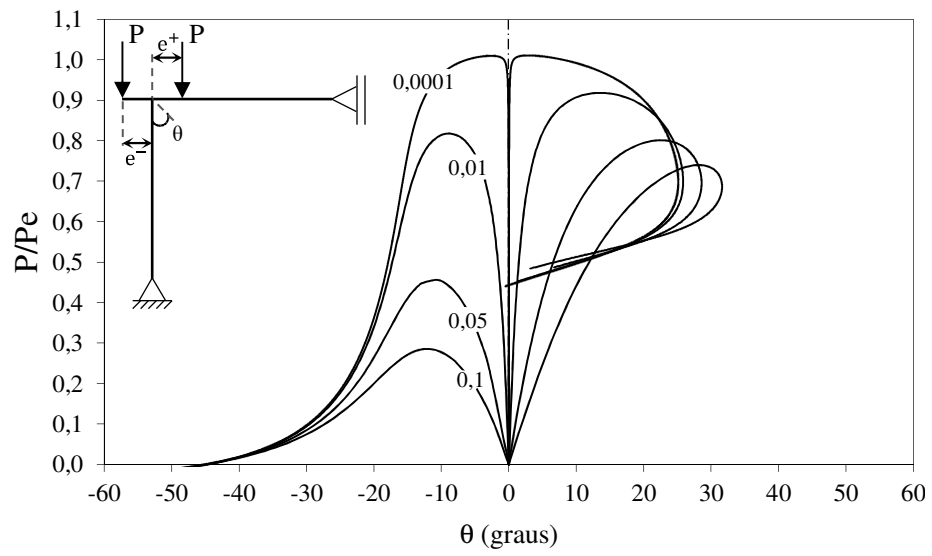


Figura 4.8 Trajetórias de equilíbrio (Condição 2) para diferentes valores da relação e/L

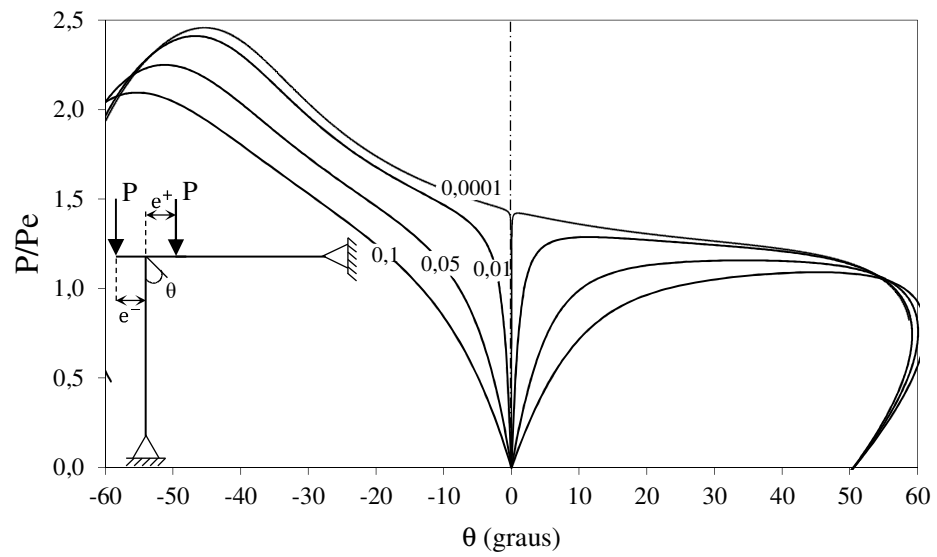


Figura 4.9 Trajetórias de equilíbrio (Condição 3) para diferentes valores da relação e/L

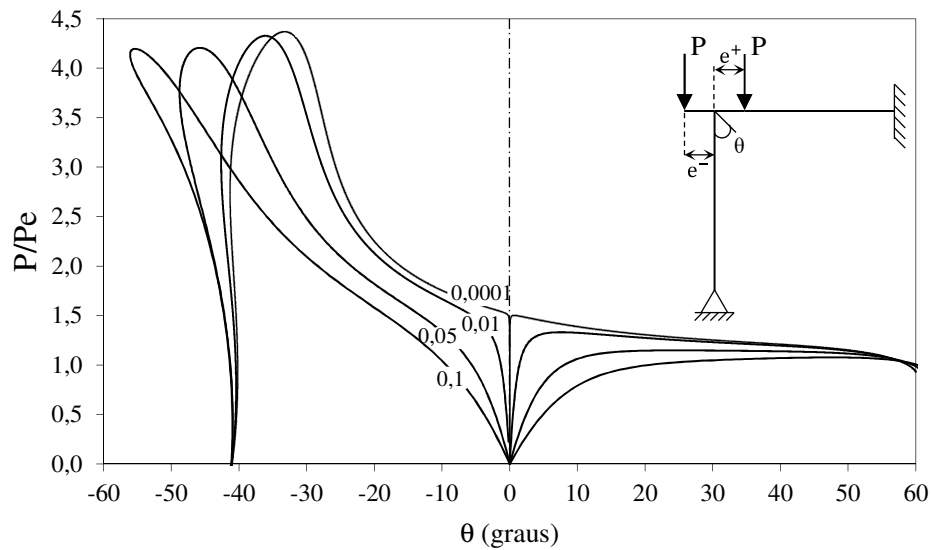


Figura 4.10 Trajetórias de equilíbrio (Condição 4) para diferentes valores da relação e/L

4.5 Coluna com Contraventamento Lateral

Nesta seção será feito um estudo sobre a influência do contraventamento lateral no comportamento de colunas com condições de apoio distintas. A análise do contraventamento lateral trata-se de um problema importante no projeto de estruturas, principalmente em colunas esbeltas. Na estabilidade de colunas, o contraventamento lateral traz melhorias tais como o aumento da sua carga crítica e a redução dos deslocamentos laterais.

Uma coluna suficientemente esbelta, submetida a uma carga axial de compressão, pode sofrer colapso devido a uma grande deflexão lateral, ao invés da perda de resistência do material. Para esse tipo de estrutura, a perda de estabilidade é o problema a ser investigado.

A modelagem do contraventamento lateral será feita de duas formas distintas: apoio rígido impedindo completamente o deslocamento lateral de uma seção interna da coluna, e através de uma barra lateral. As subseções seguintes apresentarão as análises de estabilidade de coluna, mostrando o comportamento pós-crítico e o efeito de alterações geométricas e de carregamento para diferentes posições do contraventamento.

4.5.1 Coluna com Apoio Lateral Rígido

As quatro colunas exibidas na Figura 4.11 serão estudadas nesta subseção. O que difere

cada uma delas é a condição de apoio em cada extremidade, inferior e superior. Denota-se: Caso A (Figura 4.11(a)) para coluna biapoada; Caso B (Figura 4.11(b)) para a coluna engastada-apoio do 1º gênero; Caso C (Figura 4.11(c)), para a coluna engastada e livre na extremidade superior, e Caso D (Figura 4.11(d)), para a coluna com apoio do segundo gênero na extremidade inferior e livre onde a carga está aplicada.

Para tornar possível a avaliação da resposta pós-crítica dessas colunas, é considerada uma imperfeição de carga, ou seja, considerar que a carga P apresenta uma certa excentricidade em relação a seção do topo da coluna. Para isso, um sistema estaticamente equivalente foi obtido aplicando também um momento fletor de intensidade $0,01 \text{ kNm}$ na extremidade superior onde a carga P está aplicada. A esbeltez do modelo é garantida considerando a relação $EAL^2/(EI) = 10^6$.

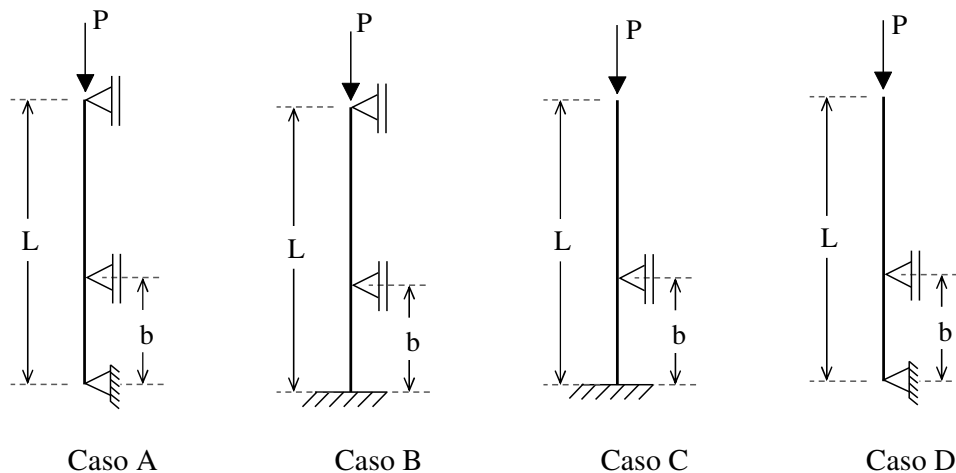


Figura 4.11 Colunas com apoio lateral rígido

Na discretização da coluna, vinte elementos finitos foram adotados. Optou-se por usar o Método de Newton-Raphson modificado, com parâmetro de carga inicial igual a 1.0 (um).

Inicialmente, um estudo sobre a intensidade da carga crítica de flambagem das colunas para diferentes posições do apoio intermediário foi feito. As curvas obtidas são mostradas nas Figuras 4.12. 4.13. 4.14 e 4.15 para os Casos A, B, C e D, respectivamente, variando b (posição do contraventamento) de 0 (zero) a L . Nas respostas apresentadas, a carga P foi

adimensionalizada pela carga crítica de Euler ($Pe = \pi^2 EI/L^2$) e a posição b , pelo comprimento da coluna.

Analisando o gráfico da Figura 4.12 percebe-se que, para o apoio intermediário próximo a uma das extremidades, a estrutura se comporta como engastada-apoiada. Para essa situação, a crítica é igual a $2,05Pe$. Para o apoio no centro do vão, $b/L = 0,5$, tem-se o valor máximo da carga crítica $4Pe$ (cada vão se comportando como biapoiado de comprimento $L/2$).

Para o caso B (Figura 4.13) com a restrição em b/L próximo a 0,65, atinge-se a máxima carga de flambagem $6,03 Pe$. Quando o apoio se aproxima do engaste a coluna tende a se comportar como engastada-apoiada (carga crítica igual a $2,046 Pe$).

Para o Caso C (Figura 4.14), quando a restrição se encontra próximo do engaste ($b/L = 0$), a coluna se comporta como engastada-livre (carga crítica igual a $0,25 Pe$). Para o apoio próximo da extremidade livre, como era de se esperar, a carga de flambagem refere-se à da coluna engastada-apoiada (carga crítica igual a $2,046 Pe$).

Por fim, no Caso D (Figura 4.15), a estrutura se comporta como uma coluna engastada-livre quando o apoio intermediário está próximo da extremidade inferior. Para a restrição próxima da extremidade livre, tem-se o caso da coluna biapoiada cuja carga de flambagem é Pe .

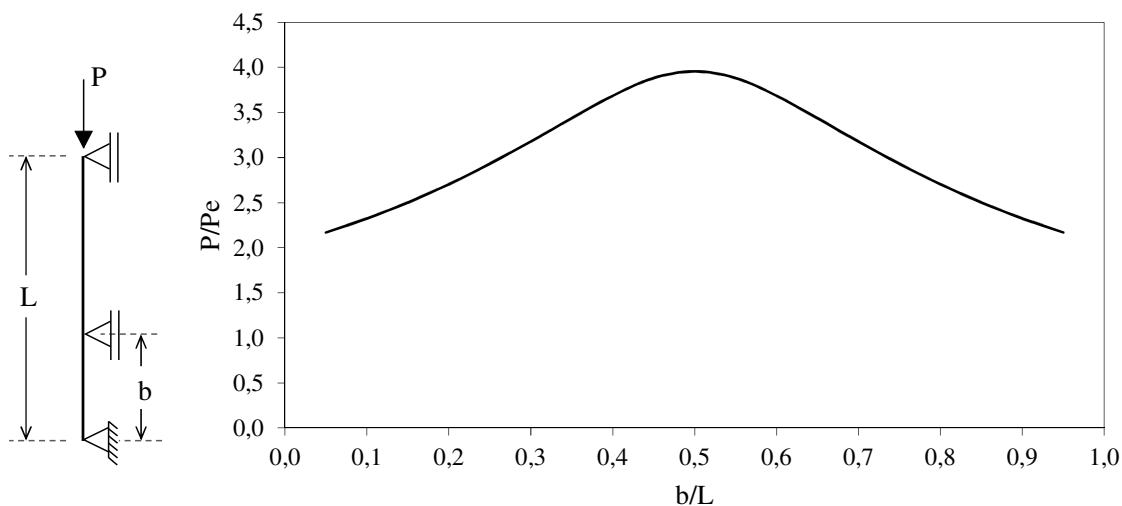


Figura 4.12 Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso A

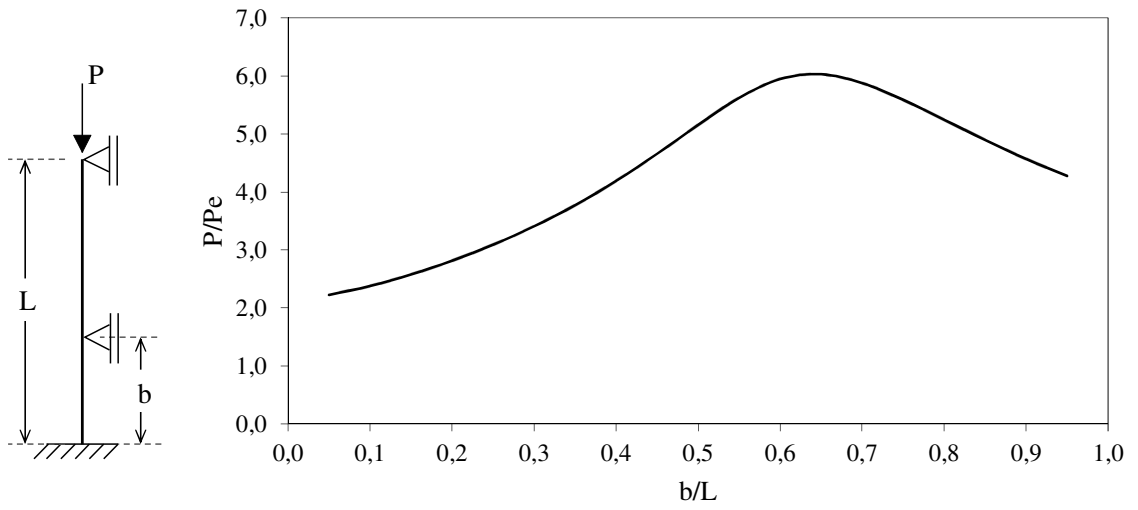


Figura 4.13 Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso B

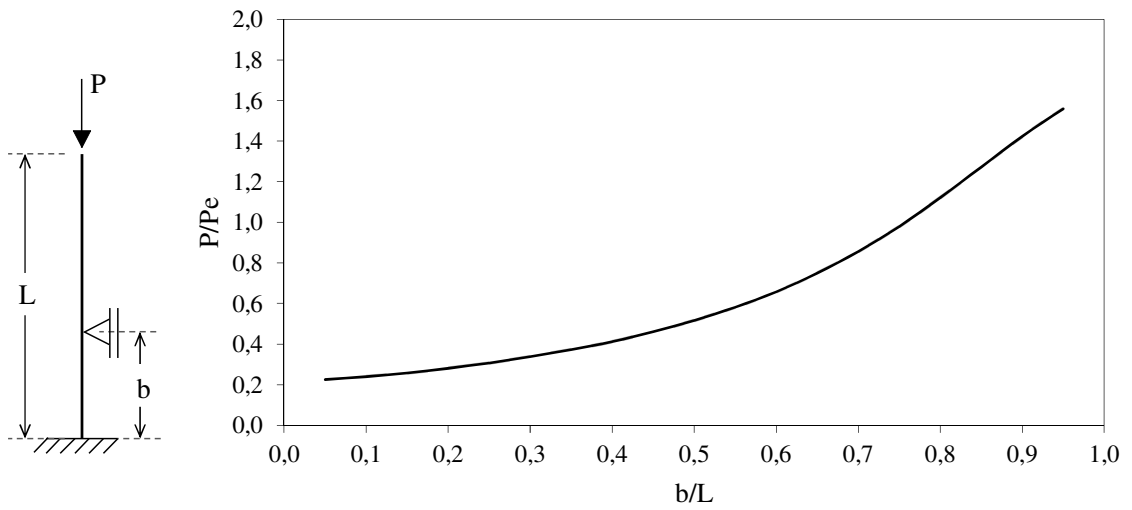


Figura 4.14 Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso C

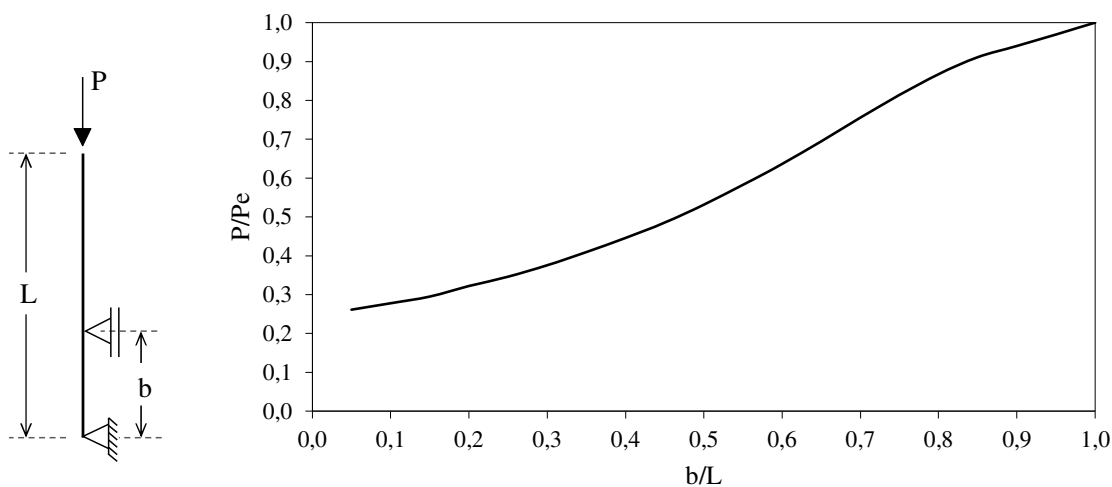


Figura 4.15 Carga crítica para variações na posição do contraventamento: Caso D

As Figuras 4.16 a 4.19 mostram as trajetórias de equilíbrio pós-crítica da coluna representada pela variação da relação P/Pe com a rotação θ no topo da coluna, para os casos A, B, C e D, respectivamente, para diferentes posições do contraventamento (razão b/L variando de 0,1 a 0,9). Todas as curvas mostram que a carga de flambagem é bastante sensível à posição do contraventamento. Na Figura 4.16, que exhibe a resposta para o Caso A, percebe-se que relações b/L menores 0,5 os caminhos são praticamente paralelos. Entretanto, para relações maiores que essa, nota-se no trecho inicial um ganho de rigidez à rotação até um ponto limite de carga e deslocamento. A partir daí a rigidez estrutural cai rapidamente para zero.

Para o Caso B, vê-se como no caso anterior que as trajetórias pós-flambagem são praticamente paralelas para razões b/L menores 0,6 (valor próximo àquele que fornece a máxima carga crítica como exhibe a Figura 4.17. Para relações maiores, nota-se também um caminho inicial com aumento de rigidez à rotação até um ponto limite de carga e deslocamento. A partir daí a rigidez estrutural cai de forma brusca para zero.

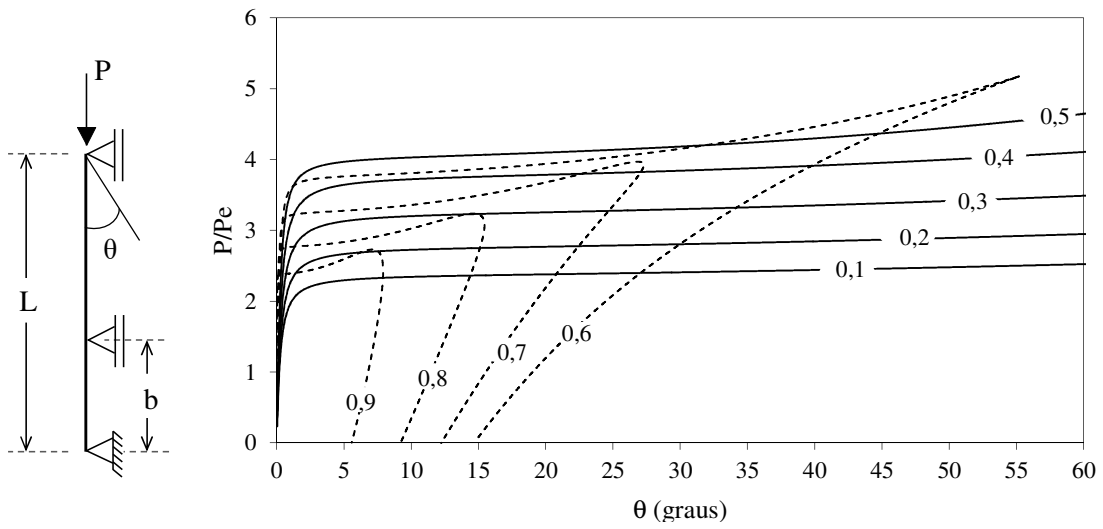


Figura 4.16 Trajetórias de equilíbrio pós-crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso A

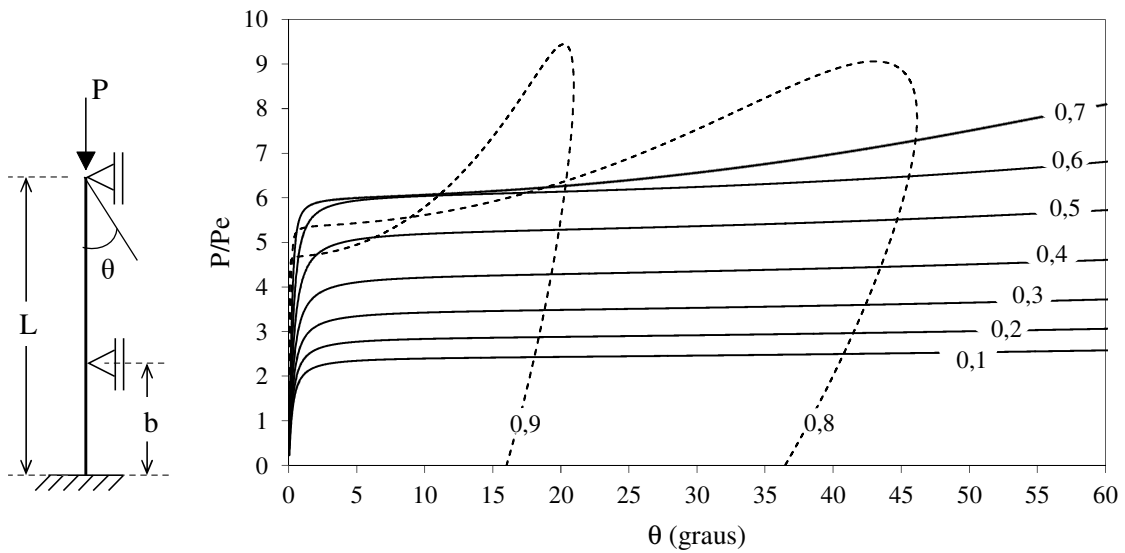


Figura 4.17 Trajetórias de equilíbrio pós-crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso B

As trajetórias pós-crítica da coluna para o Caso C, ilustradas na Figura 4.18, são praticamente paralelas exibindo um pequeno ganho de rigidez para todas as posições do contraventamento. Nessa situação, a maior carga crítica é obtida quando a restrição se encontra próxima da extremidade livre.

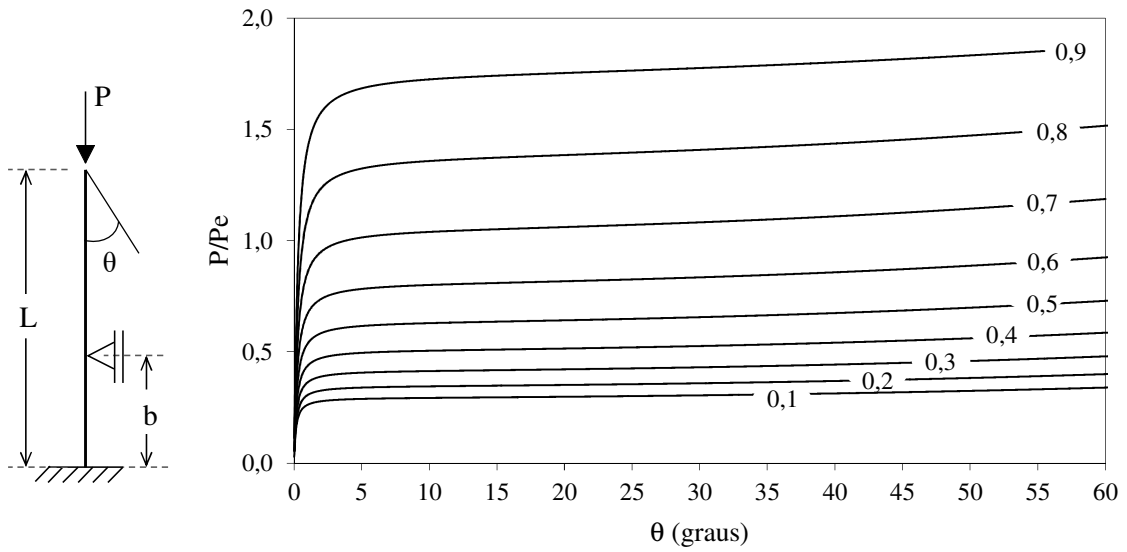


Figura 4.18 Trajetórias de equilíbrio pós-crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso C

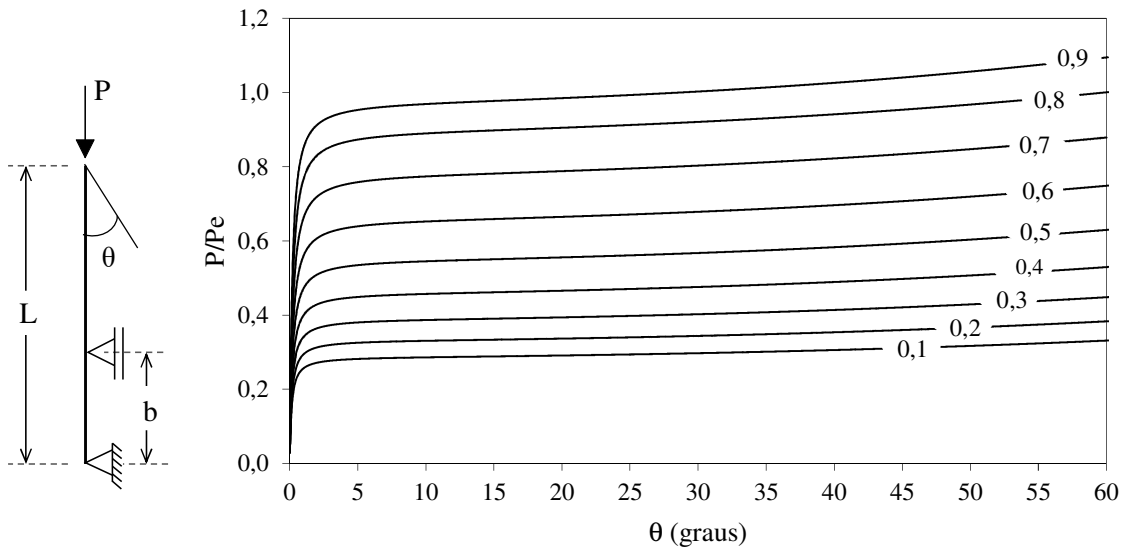


Figura 4.19 Trajetórias de equilíbrio pós-crítico para diferentes valores da relação b/L : Caso D

Para o Caso D, Figura 4.19, nota-se uma resposta que se assemelha à do Caso C. Valores maiores da relação b/L permitem alcançar cargas críticas maiores. Cabe esclarecer que o sentido do momento fletor considerado para representar a imperfeição de carga foi adotado no sentido anti-horário (positivo), o que gerou rotações positivas. Caso se altere o sentido do momento, as trajetórias permanecerão com o mesmo comportamento, porém, com rotações negativas.

Através das análises anteriores realizadas com as quatro colunas, pode-se verificar a sensibilidade das estruturas às posições do contraventamento e uma mesma excentricidade de carregamento. Notou-se a variação na carga de flambagem e também no comportamento pós-crítico.

Para finalizar os estudos com tais colunas, uma análise de sensibilidade à imperfeição de carga será executada para as colunas dos Casos A e B apenas. Os resultados estão ilustrados nas Figuras 4.20 e 4.21. Nesses estudos, a restrição intermediária de apoio refere-se à que fornece a maior carga crítica para as colunas. Observa-se nessas figuras a perda de rigidez inicial na presença de imperfeições.

Ainda baseado no estudo sobre a sensibilidade à imperfeição de carga, e considerando a coluna do Caso A, mostra-se que para uma excentricidade bem pequena, o modelo apresenta “anti-simetria”. Nessa situação a rotação da seção superior para $b/L = 0,3$ é igual à rotação da seção inferior para $b/L = 0,7$ para um mesmo nível de carga. Isso pode ser observado na Figura 4.22(a). Isso não é verificado se a excentricidade de carga não for pequena como se vê na Figura 4.22(b). Para a restrição mais próxima do topo da coluna, $b/L = 0,7$, a perda da estabilidade ocorre para uma carga menor. Conclui-se que a melhor posição do contraventamento também é função da excentricidade de carga.

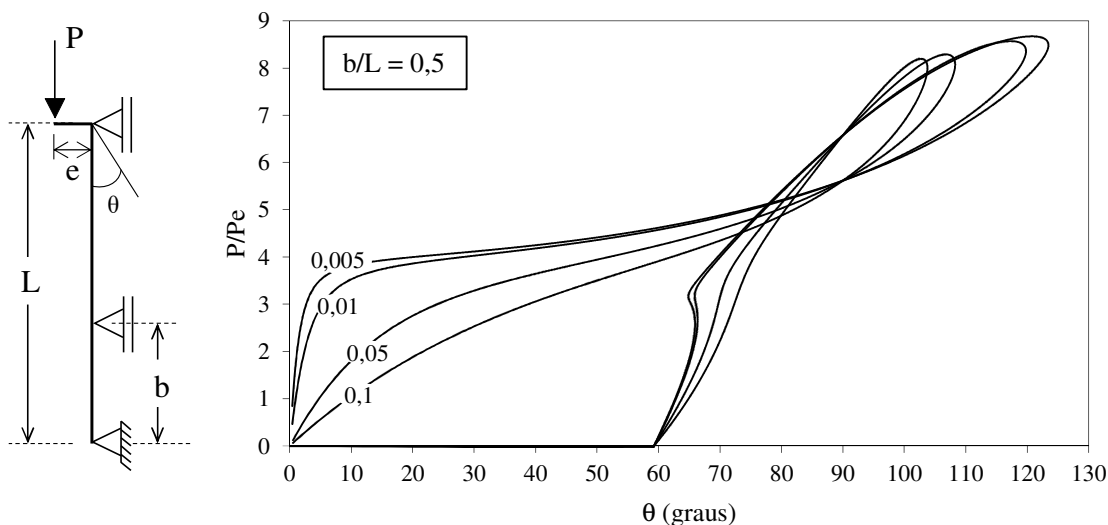


Figura 4.20 Sensibilidade da coluna à imperfeição de carga e/L : Caso A

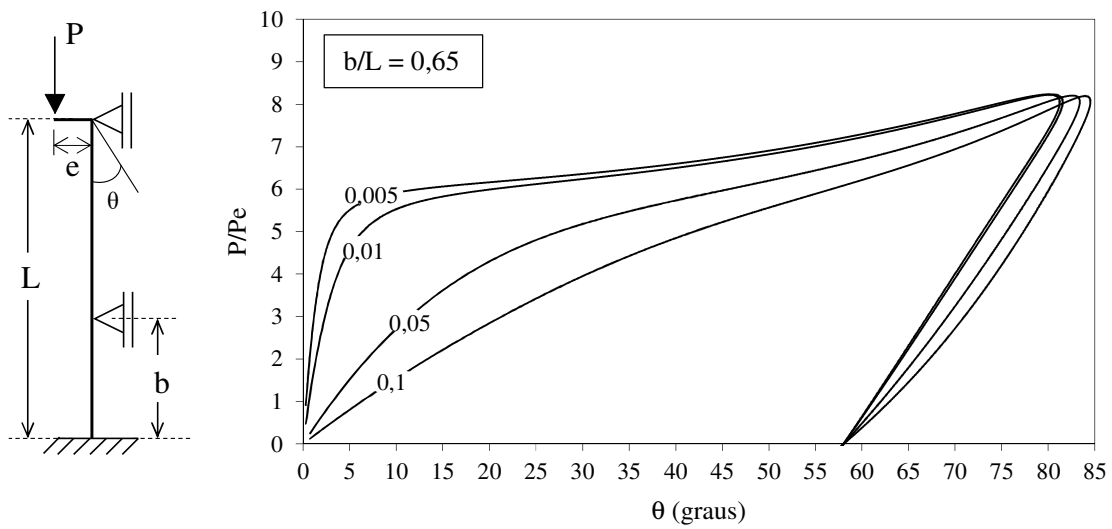


Figura 4.21 Sensibilidade da coluna à imperfeição de carga e/L : Caso B

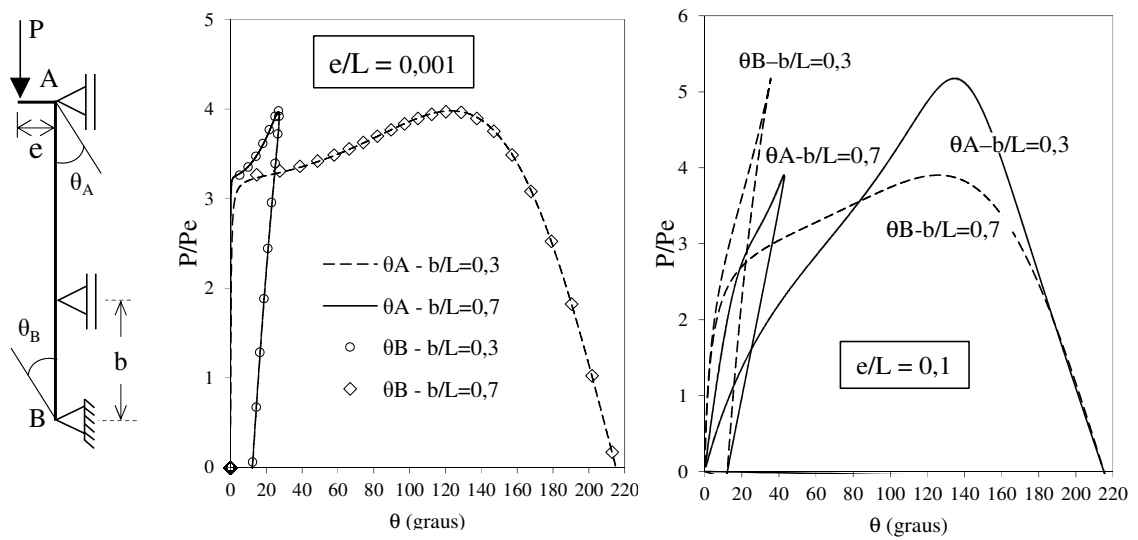


Figura 4.22 Influência das excentricidades de carga: Caso A

4.5.2 Barra Apoiada como Contraventamento

Nesta subseção, a coluna biapoiada apresentada no Caso A (Figura 4.11) será estudada com o contraventamento lateral representado por uma barra horizontal com vão L_b e rigidez à flexão EI_b como ilustra a Figura 4.23. Diferentes condições de extremidade para a barra de contraventamento foram consideradas como indicado nessa mesma figura. Na modelagem, dez e cinco elementos finitos foram usados para discretizar a coluna e a barra de contraventamento, respectivamente. O parâmetro de carga inicial foi considerado igual a 10, e o Método de Newton-Raphson padrão foi usado.

Na Figura 4.24 mostram-se as trajetórias de equilíbrio do sistema estrutural obtidas controlando a rotação no topo da coluna para as quatro condições de apoio. A principal diferença entre esse estudo e aquele feito na subseção anterior é que o sistema estrutural atual apresenta bifurcação assimétrica. Para rotações negativas no topo da coluna, a rigidez do sistema decresce e o equilíbrio se torna instável (lado das curvas para θ menor que zero). Se a rotação for positiva, ocorre um aumento da rigidez estrutural à medida em que sofre deformação. Nesse caso, o equilíbrio é estável.

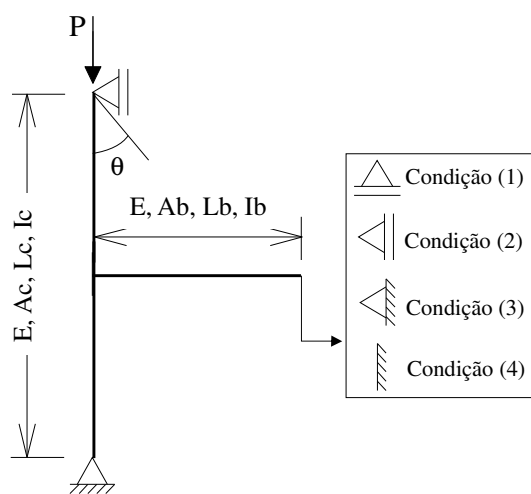


Figura 4.23 Coluna biapoiada com barra de contraventamento

Fixando a condição de restrição das translações horizontal e vertical (Condição 3) e mantendo os momentos de inércia iguais para a coluna e para a barra de contraventamento,

$I_b = I_c$, alterou-se a relação entre o comprimento da coluna e o da viga, L_b/L_c . A variação da carga crítica do sistema com a relação L_b/L_c é mostrada na Figura 4.25(a). Observe que a medida que L_b aumenta, a sensibilidade diminui. As trajetórias de equilíbrio obtidas para diferentes relações L_b/L_c são exibidas na Figura 4.25(b).

Estudo semelhante permitindo a variação da relação entre os momentos de inércia I_c e I_b são ilustrados na Figura 4.26. Comparando as Figuras 4.25(a) com 4.26(a), e 4.25(b) com 4.26(b) percebe-se diferenças no comportamento pós-crítico do sistema. Cabe destacar que, em função da grande esbeltez do sistema estrutural, a variação nas áreas A_b e A_c não causam alterações nas respostas e, por esse motivo, estudo semelhante não foi feito.

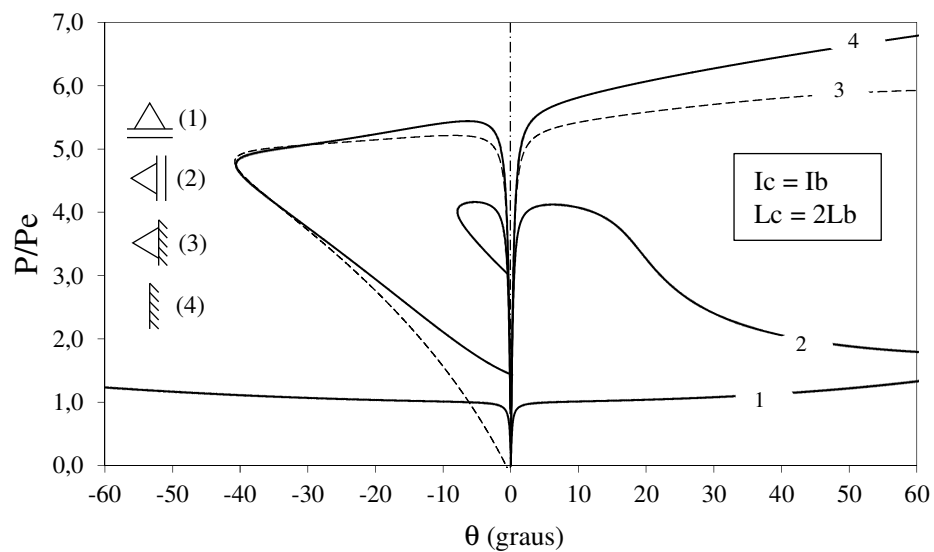
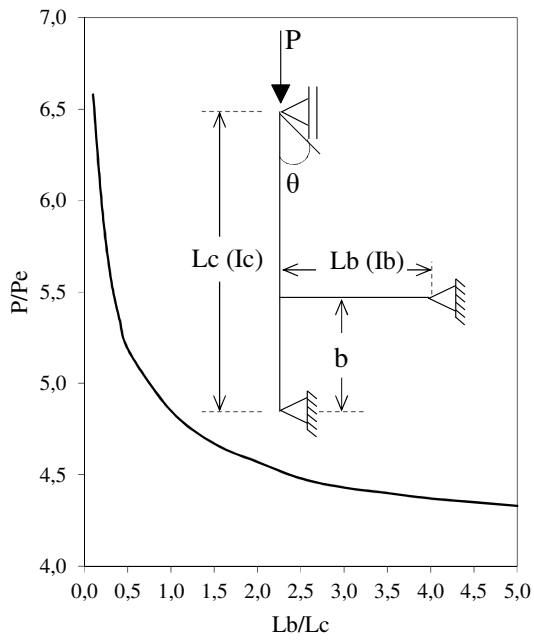
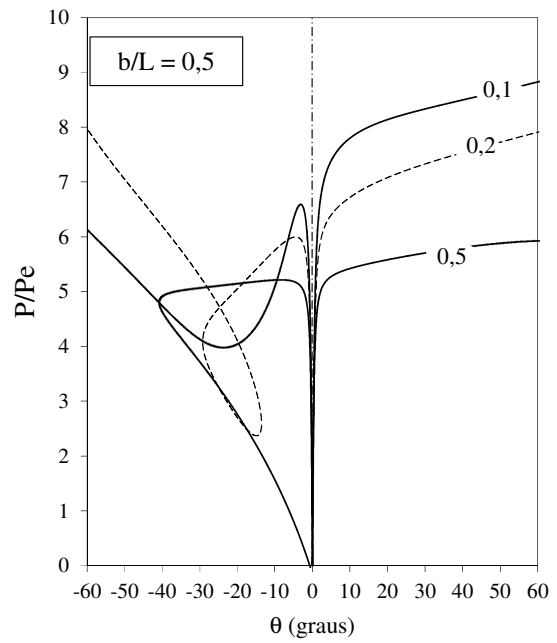


Figura 4.24 Trajetórias de equilíbrio para diferentes restrições da barra de contraventamento

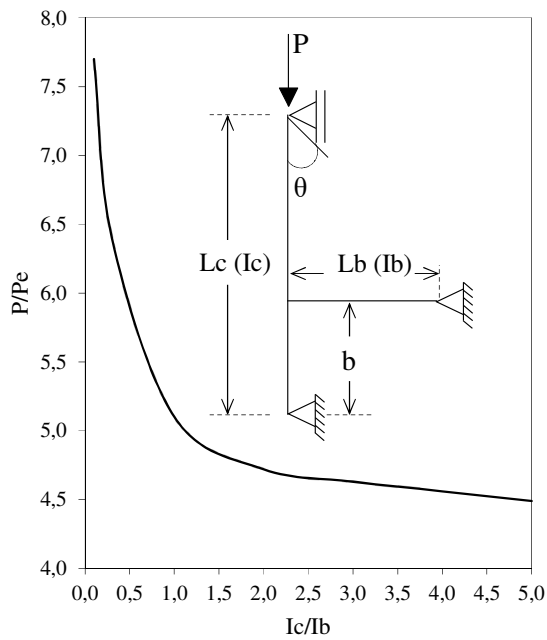


(a) Carga crítica x Lb/Lc

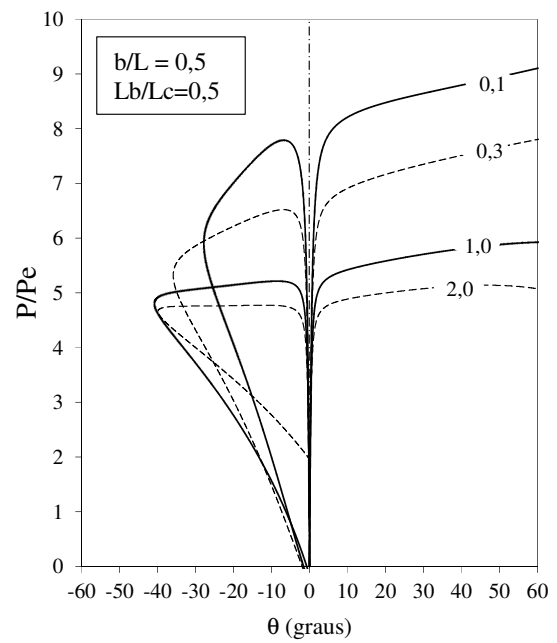


(b) Trajetórias de equilíbrio

Figura 4.25 Sensibilidade do sistema em relação a Lb/Lc



(a) Carga crítica x Ic/Ib



(b) Trajetórias de equilíbrio

Figura 4.26 Sensibilidade do sistema em relação a Ic/Ib

Para finalizar as análises, avalia-se o comportamento do sistema estrutural ao variar o posicionamento da barra de contraventamento lateral (dimensão b). A variação da carga crítica é exibida na Figura 4.27(a), e as trajetórias de equilíbrio são mostradas na Figura 4.27(b).

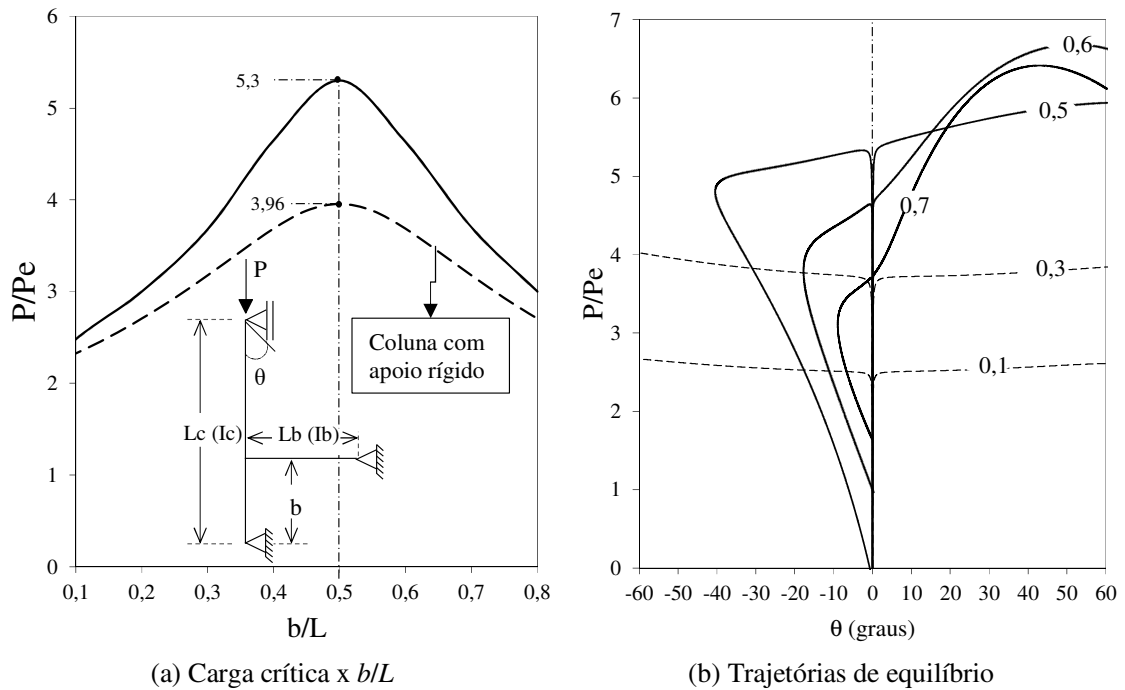


Figura 4.27 Sensibilidade do sistema em relação a b/L

Através dessas duas figuras é possível notar que o valor máximo da carga crítica é alcançado com a barra de contraventamento situada no meio do vão da coluna. Para relações b/L maiores que 0,5, o caminho de equilíbrio pós-crítico apresenta bifurcação assimétrica. Na Figura 4.27(a) é feita uma comparação entre a carga crítica obtida com as duas maneiras adotadas para o contraventamento lateral: apoio rígido (Caso A da Figura 4.11) em linha tracejada, e barra com extremidade apoiada (Figura 4.23 com a Condição 3), representada em traço contínuo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Neste trabalho, análises de estabilidade estática considerando efeitos de segunda ordem foram feitas em quatro sistemas estruturais esbeltos com o objetivo de avaliar a influência de parâmetros geométricos, condições de contorno, bem como imperfeições iniciais e de carregamento no comportamento estrutural. Importante destacar que o efeito da não linearidade geométrica se torna significativa nos membros sujeitos a esforços axiais de compressão e contribui para a diminuição da rigidez estrutural aumentando a deformação do sistema.

A metodologia usada mostrou-se eficiente ao comparar os resultados obtidos com soluções disponíveis na literatura. Um bom acordo entre os resultados pode ser observado. A estratégia numérica adotada permitiu a obtenção de caminhos de equilíbrio altamente não lineares sob certas condições de carregamento, com a identificação de pontos de bifurcação e pontos limite ao longo das trajetórias.

Analisando a influência dos parâmetros geométricos, condições de contorno, bem como imperfeições iniciais e de carregamento nas respostas não lineares de estruturas estudadas, foi possível avaliar a sensibilidade de tais estruturas a imperfeições, com alterações na capacidade de carga e no comportamento pós-crítico.

Por fim, após a análise dos elementos estruturais esbeltos, pode-se concluir que através da avaliação do comportamento não linear das estruturas, é possível obter um comportamento mais próximo do real, o que permite pensar em processos de análise mais bem elaborados a fim de proporcionar aos engenheiros e calculistas avaliações mais seguras quanto à capacidade de carga da estrutura e níveis de deslocabilidade.

REFERÊNCIAS

- BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BATHE, K. J.; BOLOURCHI, S. Large displacement analysis of three dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 961-986, 1979.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1262-1267, 1979.
- BELLINI, P. X.; CHULYA, A. An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations, *Computers and Structures*, v. 26 (1-2), p. 99-110, 1987.
- BENJAMIN, A. C. *Análise Não Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais Pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Rio de Janeiro-RJ: UFRJ, 1982.
- CHAPMAN, S. J. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. 2nd ed. McGraw-Hill, 2003.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, v. 13, p. 52-62, 1981.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons Inc., 1991.
- GALVÃO, A. S. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2000.
- GONÇALVES, P. B. *Instabilidade e Sensibilidade de Cascas Cilíndricas Circunferencialmente Enrijecidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Rio de Janeiro-RJ: UFRJ, 1983.
- HEATH, M. T. *Scientific Computing an Introductory Survey*, SIAM - Sociedade de Matemática Industrial e Aplicada, 1997.
- LEE, S.; MANUEL, F. S.; ROSSOW, E. C. Large deflections and stability of elastic frames. *Journal of the Engineering Mechanics-asce*, p. 521-547, 1968.
- LEITE, F. M. *Uma Formulação Teórica Consistente para Análise Não Linear de Estruturas Trelaçadas Espaciais*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas. Belo Horizonte, MG: UFMG, 2000.

PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 144, p. 163-197, 1997.

PRADO, I. M. *CS-ASA Preprocessor: Programa Gráfico Interativo de Préprocessamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2012.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

SANTANA, M. V. B. *Sistema computacional gráfico Interativo para problemas de instabilidade em treliças e pórticos planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2015.

SCHWEIZERHOF, K. H.; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, p. 269-279, 1986.

SILVA, A. R. D. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2009.

SILVA, J. L. *Formulações Corrotacionais 2D para Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas Reticuladas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Ouro Preto, MG: UFOP, 2016.

SILVEIRA, R. A. M. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Rio de Janeiro, RJ: PUC-Rio, 1995.

SOUTHWELL, R. V. *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. 2nd Ed., Oxford: Oxford University Press, 1941.

STRAMANDINOLI, R. S. B. *Modelos de Elementos Finitos para Análise Não Linear Física e Geométrica de Vigas e Pórticos Planos de Concreto Armado*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, SC: UFSC, 2007.

YANG, Y. B.; KUO, S. B. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall, 1994.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v. 28(12), p. 2110-2116, 1990.