



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil  
Curso de Graduação em Engenharia Civil

---



**Alexsandro da Silva Assis**

**PROCESSO COMPUTACIONAL DE DIMENSIONAMENTO  
DE ESTRUTURAS APORTICADAS PLANAS EM CONCRETO  
ARMADO COM ELEMENTOS SOB FLEXÃO SIMPLES  
(VIGAS) E COMPOSTA NORMAL (PILARES)**

Ouro Preto

2023

Alexsandro da Silva Assis

Processo computacional de dimensionamento de estruturas aporricadas planas em concreto armado com elementos sob flexão simples (vigas) e composta normal (pilares)

Trabalho Final de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto.

Data da aprovação: 08/08/2023

Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Francisco Célio de Araújo, Dr.-Ing – UFOP

Ouro Preto

2023



## FOLHA DE APROVAÇÃO

Alexsandro da Silva Assis

### Processo computacional de dimensionamento de estruturas aperticadas planas em concreto armado com elementos sob flexão simples (vigas) e composta normal (pilares)

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil

Aprovada em 08 de agosto de 2023

#### Membros da banca

Dr.-Ing - Francisco Célio de Araújo - Orientador(a) (Universidade Federal de Ouro Preto)  
D.Sc. - Marcílio Sousa da Rocha Freitas - (Universidade Federal de Ouro Preto)  
M.Sc. - Protáze Mageveske Netto - (externo sem vínculo institucional)

Francisco Célio de Araújo, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 08/08/2023



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Celio de Araujo, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/08/2023, às 11:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0569602** e o código CRC **8AE9BED3**.

## RESUMO

A utilização de processos computacionais permite a resolução de sistemas estruturais, pois possibilitam a representação desses sistemas via modelos numéricos capazes de aproximar com grande precisão as condições físicas reais das estruturas. O trabalho visa estudar as implementações computacionais do método da Rigidez Direta (M.R.D.) em pórtico planos. É estudada também a implementação dos carregamentos externos atuantes em um sistema estrutural tais como vento, peso próprio da estrutura, alvenaria e temperatura. No projeto, foram incluídas as combinações de ações nos estados limites últimos (E.L.U.) e de serviço (E.L.S.) a fim de encontrar a situação mais desfavorável de trabalho da estrutura. O dimensionamento em concreto armado foi realizado considerando equilíbrio da seção transversal, resultando na quantidade de armadura necessária para se igualar os esforços solicitantes e resistentes. A equação de equilíbrio das seções dos elementos estruturais é resolvida de forma iterativa, pois muitas variáveis dependem da posição da linha neutra. As dimensões da seção, as propriedades do concreto e do aço e a disposição das camadas de aço, são dados de entrada o respectivo dimensionamento. Os programas computacionais FTOOL e TQS, bem como modelos presentes na literatura, foram utilizados na etapa de validação dos resultados obtidos. Para validar os resultados esforços internos obtidos no trabalho foram comparados aos obtidos nos programas FTOOL e TQS. Os resultados das armaduras de aço obtidos no trabalho foram comparados com diversos exemplos presentes divulgados na literatura técnica e obtidos com o TQS, validando de forma fidedigna as análises realizadas no âmbito da pesquisa. De maneira geral, os resultados da análise estrutural no programa desenvolvido apresentou os mesmo resultados que o FTOOL e os resultados de armadura apresentaram pequena variação nas comparações realizadas.

Palavras-chave: Método da Rigidez Direta, Dimensionamento de pilares e vigas, Análise estrutural de edifícios em concreto armado, Combinações de carregamentos.

## **ABSTRACT**

The use of computational processes allows the analysis of structural systems by representing them through numerical models capable of closely approximating the real physical conditions of the structures. The work aims at studying the computational implementation of the Direct Stiffness Method (D.S.M.) to solve plane frames. It also investigates the implementation of external loads acting on a structural system, such as wind, self-weight of the structure, masonry weight, and temperature changes. In this research, combinations of actions in the ultimate limit state (U.L.S.) and serviceability limit state (S.L.S.) were considered to find the most unfavorable working conditions of the structure. The design of reinforced concrete was performed by considering the equilibrium of the cross-section, resulting in the amount of reinforcement required to balance the applied and resisting forces. The equilibrium equation of the structural elements' sections is solved iteratively as many sizing variables depend on the position of the neutral axis. Sections dimensions, concrete and steel properties, and the arrangement of steel layers are input data for the respective design. To validate the internal forces obtained in the study, they were compared with results from the software FTOOL and TQS. The steel reinforcement results obtained with present code were compared with various examples presented in technical literature and obtained with TQS, validating the analyses conducted in the scope of this research.

**Keywords:** Direct Stiffness Method, Design of columns and beams, Structural analysis of reinforced concrete buildings, Load combinations.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas do funcionamento de um programa básico de análise estrutural. ....	17
Figura 2 – Elemento de pórtico plano .....	21
Figura 3 – Nó inicial engastado .....	23
Figura 4 – Nó final engastado.....	24
Figura 5 – Gráfico das equações de interpolação para polinômio de 1ºGrau (FIGUEIREDO, 2018).....	31
Figura 6 – Coeficiente de Segurança (KIMURA, 2018) .....	35
Figura 7 – Carga do vento atuando sobre uma estrutura (PEREIRA, 2013). .	41
Figura 8 – Elemento sob ação do peso próprio em referência global (PEREIRA, 2013). ....	41
Figura 9 – Componentes do peso próprio em referência local (PEREIRA, 2013). .....	42
Figura 10 – Elemento submetido a variação de temperatura (PEREIRA, 2013). .....	44
Figura 11 – Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão. ....	47
Figura 12 – Diagrama tensão-deformação do aço (NBR6118:2003).....	48
Figura 13 – Domínios de deformação (FIGUEIREDO, 2018). ....	50
Figura 14 – Seção qualquer sujeita a flexão composta normal e sua deformada (FIGUEIREDO, 2018).....	52
Figura 15 – (a) Malha de contorno da seção transversal dividida em faixas (b) detalhe de uma das faixas com seus pontos de integração (FIGUEIREDO, 2018). .	54
Figura 16 – Seção transversal submetida a flexo-tração (ARAÚJO, 2010). ...	59

Figura 17 – Seção transversal com quatro camadas de armadura submetida a flexo-compressão normal (ARAÚJO, 2010). .....	62
Figura 18 – Seção T submetida a flexão simples (ARAÚJO, 2010). .....	63
Figura 19 – Modelo 3D do edifício no software TQS. ....	66
Figura 20 – Vista frontal do modelo do edifício.....	67
Figura 21 – Dimensões da vista frontal do edifício em metros .....	67
Figura 22 – Vista frontal do edifício modelada no FTOOL.....	68
Figura 23 – Diagrama de esforço normal obtido no FTOOL.....	69
Figura 24 – Diagrama de esforço cortante obtido no Ftool.....	70
Figura 25 – Diagrama de momento fletor obtido no FTOOL.....	71
Figura 26 – Diagrama de esforço normal calculado no trabalho.....	69
Figura 27 – Diagrama de esforço cortante calculado no trabalho.....	70
Figura 28 – Diagrama de momento fletor calculado no programa. ....	71
Figura 29 – Vista lateral do modelo do edifício. ....	72
Figura 30 – Pórtico espacial dimensionado no TQS.....	73
Figura 31 – Pórtico da parte frontal do edifício no TQS.....	74
Figura 32 – Pórtico da parte lateral do edifício no TQS .....	75
Figura 33 – Pórtico frontal no FTOOL.....	76
Figura 34 – Diagrama de esforço normal.....	77
Figura 35 – Cargas aplicadas nos pilares P2 e P6 e diagrama de esforço normal. ....	78
Figura 36 – Diagrama de esforço normal viga V2.....	79
Figura 37 - Diagrama de momento fletor viga V2. ....	79
Figura 38 – Diagrama de esforço normal do lance 1 pilar P6.....	80
Figura 39 – Diagrama de momento fletor do lance 1 do pilar P6.....	80

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo de entrada de coordenadas da estrutura.....	18
Tabela 2 – Exemplo de conectividade entre nós.....	18
Tabela 3 – Exemplo de condições de contorno.....	19
Tabela 4 – Exemplo de carregamentos.....	20
Tabela 5 - Posições e pontos de Gauss (FIGUEIREDO, 2018).....	34
Tabela 7 – valores do coeficiente $\gamma_f$ (NBR6118:2014).....	37
Tabela 8 – Incógnitas das equações de tensão segundo a classe do concreto.....	48
Tabela 9 – Relações de deformações no concreto.....	51
Tabela 10 – Comparação entre os resultados do livro e do programa.....	60
Tabela 11 – Resultados para seção submetida a flexão simples (armadura simples) .....	60
Tabela 12 - Resultados para seção submetida a flexão simples (armadura dupla) ..	61
Tabela 13 – Resultados para seção submetida a flexo-compressão normal .....	62
Tabela 14 – Resultados para a seção T.....	63
Tabela 15 – Matriz de combinações 1.....	64
Tabela 16 – Matriz de combinações 2.....	65
Tabela 17 – Matriz de combinações 3.....	65
Tabela 18 – Esforços normais dos pilares centrais.....	77
Tabela 19 – Cargas nos pilares centrais.....	78
Tabela 20 – Armadura longitudinal em elementos de viga.....	81
Tabela 21 – Armadura longitudinal em elementos de pilares.....	81



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	OBJETIVOS.....	12
3	REVISÃO DE LITERATURA.....	13
4	METODOLOGIA .....	16
4.1	GERAÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL.....	17
4.2	MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTE .....	20
4.3	MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DA ESTRUTURA .....	27
4.4	RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	30
4.5	INTERPOLAÇÃO NUMÉRICA .....	31
4.6	PROCESSO DE INTEGRAÇÃO DE GAUSS LEGENDRE .....	33
4.7	AÇÕES E COMBINAÇÃO .....	35
4.8	IMPLEMENTAÇÕES REFERENTES AS CARGAS EXTERNAS.....	39
4.9	DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS EM CONCRETO ARMADO 47	
4.10	IMPLEMENTAÇÃO DA ESTRATÉGIA DE DIMENSIONAMENTO .	52
4.11	ÁBACOS ADIMENSIONAIS DE CONCRETO ARMADO.....	58
5	RESULTADOS.....	59
5.1	Seção retangular submetida a Flexo-tração normal.....	59
5.2	Seção retangular submetida a flexão simples (armadura simples) ....	60
5.3	Seção retangular submetida a flexão simples (armadura dupla).....	61
5.4	Seção retangular submetida a flexo-compressão normal.....	62
5.5	Seção T submetida a flexão simples .....	63

5.6	Combinação de ações.....	64
5.7	Esforços internos em pórticos planos.....	66
5.8	Dimensionamento de pilares e vigas.....	72
6	CONCLUSÕES.....	82
7	BIBLIOGRAFIA.....	83
8	ANEXOS.....	85

# 1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural consiste na aplicação de princípios e métodos da Mecânica dos Sólidos com vistas à descrição do comportamento de uma estrutura. Neste contexto, os modelos matemáticos que descrevem a resposta de uma estrutura podem ser resolvidos através de métodos numéricos. Assim é possível calcular grandezas físicas de interesse como os esforços simples, tensões, reações de apoio, deslocamentos. Tais grandezas são fundamentais no dimensionamento bem como no projeto estrutural.

O presente trabalho de conclusão de curso visa dar continuidade a outros projetos de pesquisa desenvolvidos anteriormente por (FIGUEIREDO, 2018) e (PEREIRA, 2013). Para tanto este projeto foca na análise e dimensionamento de sistemas estruturais reticulados em concreto armado. Sistemas reticulados são constituídos por elementos unidimensionais – portanto, cuja dimensão ao longo do comprimento é relativamente maior do que as dimensões das seções transversais – cujas respostas são convenientemente descritas por teorias de vigas. Particularmente, as análises são restritas a pórticos planos, e considera-se a teoria de viga segundo Timoshenko que se caracteriza pela inclusão dos efeitos de cisalhamento na representação cinemática do modelo.

Na implementação computacional do processo de resolução da estrutura, adota-se o Método da Rigidez Direta, que consiste em uma formulação especial do Método dos Elementos Finitos (MEF) na qual a construção das matrizes de propriedades estruturais e o vetor de cargas nodais equivalentes é realizada a partir dos valores conhecidos (diretos) dessas grandezas em nível de elemento (DE ARAÚJO, RIBEIRO e MACHADO, 2022). Os elementos finitos de pórtico são desenvolvidos utilizando-se uma formulação baseada no Princípio das Forças Virtuais (PFV) que permite a determinação exata das matrizes de propriedades estruturais, tal formulação permite o cálculo de rigidezes variáveis, a partir da interpolação das propriedades geométricas e físicas em determinadas posições do elemento.

Assim, uma vez determinados os esforços atuantes é possível dimensionar os pilares e vigas que constituem a estrutura. Em geral, as estruturas são dimensionadas para resistir as cargas de ruptura. Portanto, a partir do dimensionamento são definidas

as dimensões necessárias para a seção transversal de concreto, bem como a quantidade e disposição das armaduras de aço. Desse modo os esforços calculados sejam absorvidos com a segurança exigida pelas normas de dimensionamento.

Neste trabalho, utilizou-se um programa desenvolvidos por (FIGUEIREDO, 2018) e (PEREIRA, 2013) em projetos anteriores em que são calculados os esforços internos para determinados carregamentos, é realizada a combinação das ações para os estados-limite últimos (E.L.U.) e estados limite de serviço (E.L.S.), conforme previsto na NBR 6118 (ABNT, 2014), e então é realizado o cálculo da armadura necessário para resistir aos esforços solicitantes. Por fim, implementou-se o dimensionamento para elementos em concreto armado submetido simultaneamente a ação combinada de solicitações axiais e flexionais.

## 2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem o objetivo de estudar as estratégias computacionais para a análise e dimensionamento de pórticos planos em concreto armado implementadas no programa “Naesy-frames” desenvolvido em projetos anteriores por (FIGUEIREDO, 2018) e (PEREIRA, 2013).

Os principais objetivos deste trabalho são:

- Estudar as principais etapas de um programa de análise estrutural e dimensionamento;
- Estudar a formulação do Método da Rigidez Direta para pórticos planos formados por elementos de dois nós;
- Estudar as estratégias de cálculo das cargas de vento, alvenaria, peso próprio, temperatura e o processo de automatização da combinação desses carregamentos;
- Implementar um processo de dimensionamento de pilares e vigas, envolvendo o cálculo das armaduras longitudinais de seções de um pórtico plano submetidas a solicitações axiais e flexionais;
- Validar e comparar os resultados obtidos por meio da utilização de programas computacionais comerciais.

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Um dos principais objetivos da análise estrutural é relacionar, através de simplificações das estruturas reais, as solicitações as quais a estrutura está submetida, tais como vento, peso próprio, carga da alvenaria, aos deslocamentos. A fim de prever o comportamento mecânico dos materiais utilizados em construções, são feitas deduções lógicas para obter fórmulas e equações.

Ao longo da história foram feitas pesquisas para determinar a Resistência dos Materiais, pesquisadores como Leonardo da Vinci (1452 – 1519), Galileu Galilei (1564 – 1642) e Leonhard Euler (1707-1783) fizeram experiências que possibilitaram o desenvolvimento dos métodos de análise estrutural atuais (KASSIMALI, 2015).

Neste contexto, a teoria de vigas (TIMONSHENKO, 1983) desempenha um papel fundamental ao determinar as deformações em barras submetidas a ações axiais. Essa teoria é essencial para o desenvolvimento de métodos que simplificam os métodos de análise estrutural com a utilização de elementos reticulados.

As estruturas reticuladas são aquelas que as dimensões do comprimento são maiores do que as dimensões da seção transversal. Segundo (GERE e WEAVER, 1980), as estruturas reticuladas podem ser divididas em seis categorias: treliças planas, treliças espaciais, grelhas, vigas, pórticos planos e pórticos espaciais.

No geral, na resolução de problemas de análise estrutural utilizam-se os seguintes métodos: método das Forças, ou método da Flexibilidade, e o método dos deslocamentos, ou método da Rigidez Direta.

O método da Flexibilidade foi introduzido por James C. Maxwell, em 1864 a formulação em remover as restrições de uma estrutura estaticamente indeterminada de forma que se torne estaticamente determinada (KASSIMALI, 2015). Uma estrutura estaticamente determinada é aquela cujas reações de apoio e forças internas podem ser encontradas a partir das equações de equilíbrio. Por outro lado, uma estrutura estaticamente indeterminada é aquela cujas equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações e esforços internos.

O MRD é utilizado na análise matricial de estruturas. Ao contrário do método da Flexibilidade, esse método baseia-se na existência de apenas um sistema principal (SORIANO e DE SOUZA LIMA, 2004). Essa característica do método torna a análise

estrutural utilizando computadores possível, uma vez que definido o modelo de análise o sistema principal de resolução é único.

O MRD tem como resultado os deslocamentos da estrutura, e a partir desses deslocamentos, são obtidos os esforços internos e as reações de apoio. Os esforços em cada elemento são cruciais para realizar o dimensionamento das seções transversais da estrutura, que, no caso deste trabalho em questão, são compostas de concreto armado.

O concreto é uma composição de materiais formada por agregados, aglomerantes e água. Entre os aglomerantes mais comuns na atualidade, destaca-se o cimento Portland, que reage com a água e adquire resistência com o passar do tempo. Para aprimorar as características do concreto, como a resistência e a economia de custos, são empregados os agregados, normalmente brita e areia.

O concreto armado é uma mistura composta pelo uso conjunto de concreto e barras de aço. O concreto possui baixa resistência à tração, por isso, as barras de aço são incorporadas para absorver os esforços de tração que não são suportados pelo concreto. Essa combinação de materiais também aumenta a capacidade de resistência à compressão da estrutura.

Conforme a NBR6118 (ABNT,2014), o objetivo do dimensionamento é assegurar a segurança em relação aos estados limites últimos e de serviço. Os estados limites últimos são relacionados ao colapso total ou parcial de uma estrutura. Os estados limites de serviço correspondem ao estado em que a utilização da estrutura é prejudicada.

Para cumprir e respeitar aos estados limites, basicamente é necessário garantir que as resistências de cálculo para todos os estados limites sejam maiores do que as solicitações de cálculo. As ações externas são responsáveis pelas solicitações existentes na estrutura e de acordo com a sua variabilidade ao longo do tempo elas podem ser classificadas em permanentes, variáveis ou excepcionais.

É necessário considerar os esforços mais desfavoráveis, entretanto tem-se que as ações podem atuar simultaneamente na estrutura. A fim de prever essa variabilidade da atuação das ações a NBR 6118 (ANBT, 2014) prevê a combinação

das ações considerando os seus valores característicos e valores reduzidos por coeficientes de segurança definidos conforme a norma.



## 4 METODOLOGIA

O funcionamento do programa de análise estrutural ocorre segundo as seguintes etapas:

- **Geração dos modelos de análise e das ações atuantes na estrutura**

O programa inicialmente lê os dados relevantes para a análise estrutural, como as propriedades dos materiais, propriedades geométricas, condições de contorno e os carregamentos atuantes na estrutura.

- **Montagem das matrizes de rigidez dos elementos**

Com base nos dados de entrada, o programa constrói as matrizes de rigidez para cada elemento.

- **Montagem dos vetores de cargas nodais equivalentes**

Considerando os carregamentos aplicados na estrutura (nos nós e nos elementos), o programa determina os vetores de cargas nodais equivalentes.

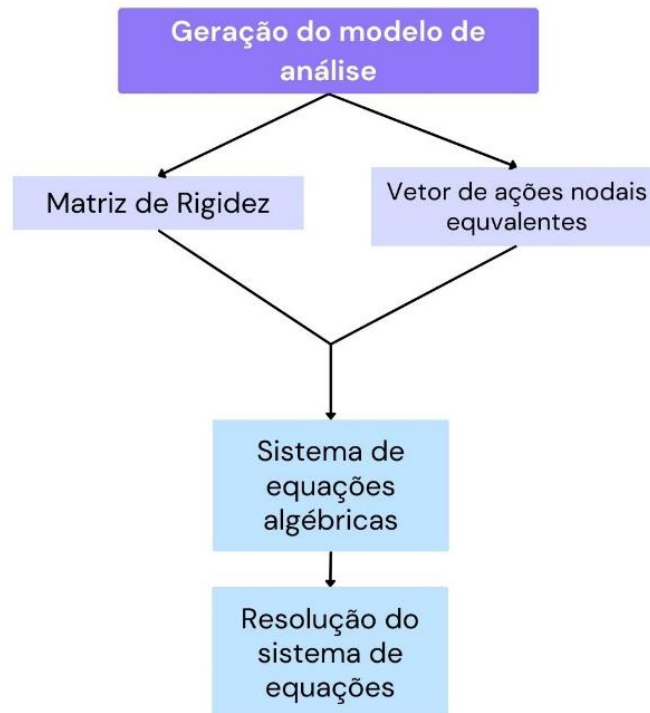
- **Montagem do sistema de equações algébricas da estrutura**

Utilizando as matrizes de rigidez e as ações nodais equivalentes o programa monta o sistema global de equações algébricas, o qual relaciona os deslocamentos às cargas nodais equivalentes.

- **Resolução do sistema de equações**

Por fim, o programa resolve o sistema global de equações algébricas para obter os deslocamentos desconhecidos nos nós da estrutura. Nesta tarefa, emprega-se um *solver* do tipo Cholesky para a resolução do sistema de equações algébricas que descrevem as respostas na estrutura. Essas respostas, em termos de deslocamentos nodais, permitem calcular os esforços internos em cada elemento, bem como as reações nos apoios.

Essas etapas ocorrem conforme ilustrado na Figura 1.



**Figura 1 – Etapas do funcionamento de um programa básico de análise estrutural.**

#### **4.1 GERAÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL**

Nessa etapa, o programa de análise estrutural realiza a leitura dos principais dados necessários para a análise da estrutura. Esses dados incluem:

Coordenadas dos nós da estrutura: são as informações que especificam as posições de cada nó na estrutura. Essas coordenadas são essenciais para determinar a geometria da estrutura. Em pórticos planos as coordenadas são descritas em função de dois eixos.

Conectividade entre os nós: a conectividade descreve quais nós compõem cada elemento estrutural. Essa informação é fundamental para definir a relação entre os nós e a formação dos elementos estruturais. No trabalho em questão, considerou-se que cada elemento é composto por dois nós.

Propriedades físicas e geométricas dos elementos: esses dados englobam informações sobre as características mecânicas dos materiais utilizados na estrutura, como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, densidade e outras

propriedades relevantes para o comportamento estrutural. Além disso, incluem as propriedades geométricas dos elementos, como área e momento de inércia.

Condições de contorno: descrevem as restrições impostas à estrutura em seus nós. Essas condições incluem apoios fixos, articulados, engastados e outras restrições que afetam o comportamento dos deslocamentos nos nós da estrutura.

Carregamentos: são as informações referentes às ações externas aplicadas à estrutura, como ações concentradas, distribuídas, peso próprio, temperatura, ações do vento.

Na Tabela 1 é mostrado um exemplo de como são informados os dados sobre as coordenadas dos nós.

**Tabela 1 – Exemplo de entrada de coordenadas da estrutura**

Nó	Posição X	Posição Y
1	0,000	0,000
2	0,000	2,000
3	2,000	2,000
4	2,000	0,000

De posse as coordenadas dos nós, os próximos dados são as conectividades entre os nós, nessa etapa, para pórticos planos formados por elementos finitos de dois nós, são informados os nós iniciais e finais de cada elemento. Na Tabela 2 é mostrado um exemplo de conectividade entre nós, considerando os nós apresentados na Tabela 1.

**Tabela 2 – Exemplo de conectividade entre nós**

Elemento	Nó inicial	Nó final
1	1	2
2	2	3
3	3	4

As informações sobre as propriedades físicas mais relevantes para a aplicação do Método da Rigidez são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, necessárias para o cálculo do módulo de elasticidade transversal caso sejam considerados os efeitos do cisalhamento. As propriedades geométricas essenciais ao

método são a área da seção transversal e o momento de inércia. Entretanto, o programa pode precisar de mais informações geométricas e físicas de acordo com as funções adicionais presentes no programa, por exemplo, se o peso próprio dos elementos for considerado será necessário a densidade dos materiais.

As condições de contorno informam os deslocamentos possíveis de cada nó, no caso de um pórtico plano, cada nó possui duas translações e uma rotação. Nessa etapa, são informados os nós e os deslocamentos associados a ele que estão restringidos. Na Tabela 3 é mostrado um exemplo de como podem ser informadas as condições de contorno. Foram considerados os nós da Tabela 1. Aqui adotou-se o número “1” indicando que tal deslocamento ou rotação está restringida.

**Tabela 3 – Exemplo de condições de contorno**

Nó	Direção 1	Direção 2	Rotação
1	1	1	1
4	1	1	1

As últimas informações essenciais para a aplicação do Método da Rigidez Direta são os carregamentos atuantes na estrutura. As ações também estão relacionadas ao tipo de estrutura. Em um pórtico plano existem: uma força na direção 1, uma força na direção 2 e um momento fletor. Os carregamentos podem ser distribuídos ou concentrados. Na Tabela 4, considerando os nós definidos na Tabela 1 e os elementos definidos na Tabela 2, apresenta-se um exemplo de como podem ser informadas duas cargas concentradas e uma distribuída. De acordo com as funções disponíveis no programa outros tipos de carregamento podem ser informados, tais como peso de alvenaria, empuxo, vento, temperatura e peso próprio.

**Tabela 4 – Exemplo de carregamentos**

<b>Nó</b>	<b>Força dir. 1 (kN)</b>	<b>Força dir. 2 (kN)</b>	<b>Momento (kNm)</b>
2	0,000	10,000	0,000
3	0,000	10,000	0,000
<b>Elemento</b>	<b>Força dir.1 (kN/m)</b>	<b>Força dir.2 (kN/m)</b>	<b>Momento (kNm/m)</b>
2	0,000	1,000	0,000

#### **4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTE**

De posse dos dados referentes ao modelo estrutural, o MRD pode ser aplicado. Esse método consiste em desenvolver um conjunto de equações de equilíbrio relacionando as solicitações externas, como o peso próprio da estrutura, a ação do vento, o peso de alvenaria, aos esforços internos, que surgem como resultado das deformações da estrutura.

Para a aplicação desse método, o sistema estrutural é idealizado em termos de um conjunto de nós e elementos, onde as forças internas e os deslocamentos são desconhecidos e serão determinados através do processo de resolução das equações de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos.

As equações de equilíbrio são baseadas nas leis da física que governam o comportamento estrutural. Elas relacionam as forças aplicadas externamente com as forças internas que ocorrem nas seções transversais dos elementos estruturais devido às deformações. Essas forças internas são resultantes das deformações dos elementos causadas pelos deslocamentos dos nós.

O MRD utiliza as rigidezes dos elementos e a relação entre as forças internas e os deslocamentos para construir as matrizes de rigidez e os vetores de ações nodais equivalentes (DE ARAÚJO e RIBEIRO, 2020). A partir disso, um sistema de equações algébricas é formulado, representando o equilíbrio global da estrutura. Matricialmente, essa relação de equilíbrio é descrita segundo a equação (1):

$$K \cdot u = f \quad (1)$$

Na equação (1), tem-se que:

- $K$  é a matriz de rigidez da estrutura;
- $u$  é o vetor de deslocamentos;
- $f$  é o vetor de ações nodais equivalentes da estrutura.

As equações de equilíbrio e as condições de compatibilidade são essenciais para garantir que o sistema estrutural esteja adequadamente equilibrado e que as deformações e deslocamentos sejam compatíveis entre os elementos.

A partir dessas informações, é possível estabelecer as relações entre as forças internas e os deslocamentos nos nós da estrutura, permitindo a formulação equações que governam o comportamento global do sistema. Na Figura 2 é ilustrado um elemento genérico de pórtico plano.

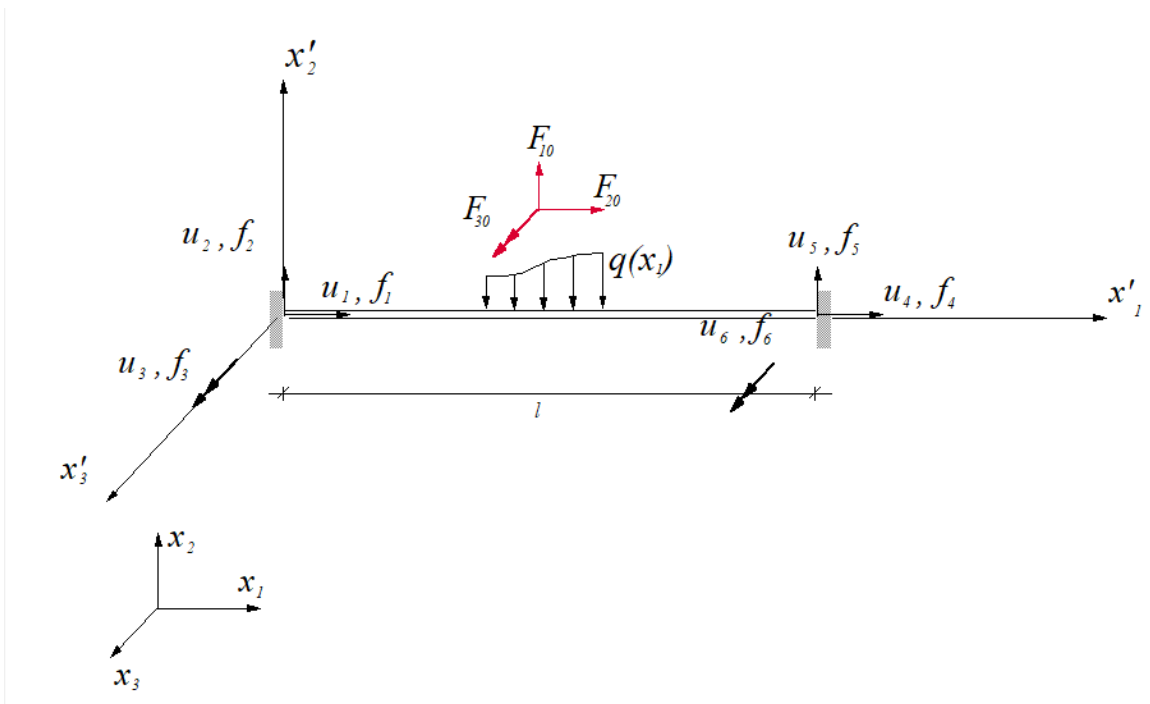


Figura 2 – Elemento de pórtico plano

No elemento de pórtico representado na Figura 2, tem-se que

- $f_i$  são as cargas nodais equivalentes:  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ ;
- $u_i$  são os deslocamentos nodais  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ ;
- $l$  é o comprimento do elemento;
- $q(x_i)$  representa as ações externas;
- $F_{i0}$  representa a ação resultante na direção  $i$  originada pela carga  $q(x_i)$  com variação  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Os eixos de referência global são indicados por  $x_1, x_2, x_3$  e os eixos de referencia local são indicados por  $x'_1, x'_2, x'_3$ .

Utilizando este elemento, é possível expressar as equações de equilíbrio conforme descrito pelas equações (2), (3) e (4):

$$\sum F_{x'_1} = f_1 + f_4 + F_{10} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{x'_2} = f_2 + f_5 + F_{20} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_{x'_3} = f_3 + f_6 + F_{30} - lf_2 = 0 \quad (4)$$

O elemento conta com seis incógnitas e três equações, tornando essencial a adoção do método das forças (Princípio das Forças Virtuais - PFV), demonstrado na equação (5), para a resolução do problema:

$$\bar{f}_i u_i = \int_0^l \bar{M}_i d\theta + \int_0^l \bar{N}_i d\delta + \int_0^l \bar{Q}_i d\lambda, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (5)$$

$$\bar{M}_i = M_i(\bar{f}_i), \bar{N}_i = N_i(\bar{f}_i), \bar{Q}_i = Q_i(\bar{f}_i) \quad (6)$$

Na equação (6), são representados tem-se os esforços internos:

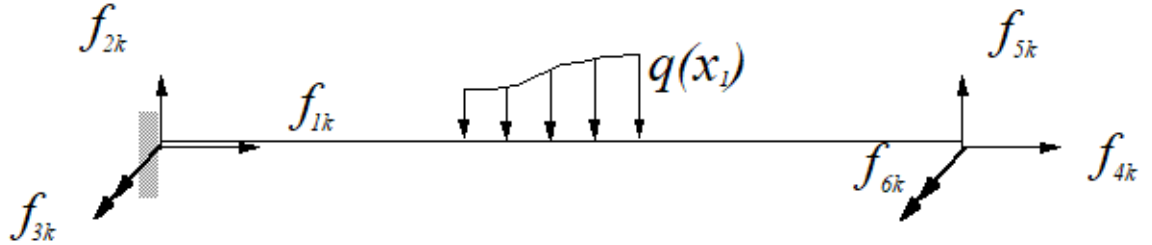
- Momento fletor  $M_i$ ;
- Esforço normal  $N_i$ ;
- Esforço cortante  $Q_i$ .

Esses esforços são resultantes do carregamento virtual  $\bar{f}_i$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ . Além disso,  $d\theta, d\delta$  e  $d\lambda$ , referem-se à rotação flexional, deslocamento axial e deslocamento transversal na posição inicial ou final do elemento.

Assim, por meio das equações de equilíbrio e do PFV, torna-se possível obter expressões genéricas em termos da rigidez do elemento e as ações de engastamento

perfeito do elemento, com base em dois casos específicos: um com o nó inicial engastado e outro com o nó final engastado.

Caso o nó inicial seja engastado Figura 3:  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$



**Figura 3 – Nó inicial engastado**

As equações de equilíbrio e o PFV podem ser escritas matricialmente de acordo com a equação (7):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ 0 & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ik} \\ \mathbf{f}_{Fk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_F - \mathbf{u}_{F0} \end{bmatrix}, k = 4,5,6 \quad (7)$$

$$\text{Onde, } \mathbf{E}_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{IF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{Ik} = \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{Fk} = \begin{bmatrix} f_{4k} \\ f_{5k} \\ f_{6k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{Fk} = \begin{bmatrix} u_{4k} \\ u_{5k} \\ u_{6k} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{F0} = \int_0^l M_i \frac{M'_0}{EI} ds + \int_0^l N_i \frac{N'_0}{EA} ds + \int_0^l Q_i \chi \frac{Q'_0}{GA} ds, i = 4,5,6$$

$$M'_0 = M_0(q), N'_0 = N_0(q), Q'_0 = Q_0(q)$$

A matriz de flexibilidade  $\mathbf{A}_{FF}$  é obtida a partir da determinação dos esforços internos causados pelas ações  $f_{ki}$ , e está representada pelos coeficientes de flexibilidade na expressão:

$$\mathbf{A}_{FF} = \begin{bmatrix} \int_0^l \frac{1}{EA} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^l \left( \frac{(l-x_1)^2}{EI} + \frac{\chi}{GA} \right) dx_1 & \int_0^l \frac{(l-x_1)}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_0^l \frac{(l-x_1)}{EI} dx_1 & \int_0^l \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix}$$



Caso o nó final seja engastado Figura 4:  $u_4 = u_5 = u_6 = 0$

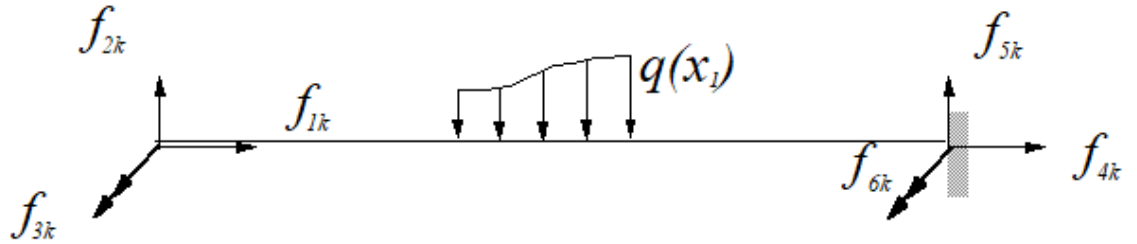


Figura 4 – Nó final engastado

De maneira semelhante à quando o nó inicial é engastado, pode-se escrever a equação (8):

$$\begin{bmatrix} E_{II} & E_{IF} \\ A_{II} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{Ik} \\ f_{Fk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \\ \mathbf{u}_I - \mathbf{u}_{I0} \end{bmatrix}, k = 1,2,3 \quad (8)$$

$$\text{Onde, } \mathbf{f}_{Ik} = \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{Fk} = \begin{bmatrix} f_{4k} \\ f_{5k} \\ f_{6k} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{Ik} = \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{I0} = \int_0^l M_i \frac{M''_0}{EI} ds + \int_0^l N_i \frac{N''_0}{EA} ds + \int_0^l Q_i \chi \frac{Q''_0}{GA} ds, i = 4,5,6$$

$$M''_0 = M_0(q), N''_0 = N_0(q), Q''_0 = Q_0(q)$$

A matriz de flexibilidade  $A_{II}$  é obtida de maneira semelhante a matriz  $A_{FF}$  e pode ser representada em função de seus coeficientes de flexibilidade:

$$A_{II} = \begin{bmatrix} \int_0^l \frac{1}{EA} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^l \left( \frac{(x_1)^2}{EI} + \frac{\chi}{GA} \right) dx_1 & \int_0^l \frac{(-x_1)}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_0^l \frac{(-x_1)}{EI} dx_1 & \int_0^l \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix}$$

O cálculo das integrais que formam as expressões das matrizes  $A_{II}$  e  $A_{FF}$  podem ser obtidas através de integração numérica, pois os valores das rigidezes EA, EI,  $\chi/GA$  podem ser variáveis no caso de elementos não uniformes.

Através das equações (7) e (8) é possível obter os coeficientes da matriz de rigidez impondo-se a condição de  $u_{I0} = u_{F0} = F_0 = 0$ . São prescritos deslocamentos

nodais nos vetores  $\mathbf{u}_I$  e  $\mathbf{u}_F$ , também a fim de obter os coeficientes de rigidez. Dessa forma, tem-se as equações (9) e (10):

$$\mathbf{f}_{Ii} = \mathbf{A}_{II}^{-1} \mathbf{u}_{Ik}, \mathbf{f}_{Fk} = -\mathbf{E}_{II} \mathbf{f}_{Ik} \quad k = 1,2,3 \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_{Ff} = \mathbf{A}_{FF}^{-1} \mathbf{u}_{Fk}, \mathbf{f}_{Ik} = -\mathbf{E}_{II}^{-1} \mathbf{f}_{Fk} \quad k = 4,5,6 \quad (10)$$

Portanto, a matriz de rigidez de elemento de um pórtico plano é dada pela equação (11):

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Ii} & \mathbf{f}_{If} \\ \mathbf{f}_{Fi} & \mathbf{f}_{Ff} \end{bmatrix} \text{ com } i = 1,2,3, f = 4,5,6 \quad (11)$$

Para elementos lineares de seção transversal constante, através das equações (9) e (10), a matriz de rigidez de um elemento pode ser determinada, conforme descrita na equação (12). Isso ocorre, pois as integrais presentes nos componentes da matriz  $\mathbf{A}_{II}$  e  $\mathbf{A}_{FF}$  têm resolução analítica viável devido à uniformidade das rigidezes ao longo do comprimento do elemento.

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} & \frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GA}} & 0 & -\frac{12EI}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} & \frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GA}} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GA}} & \frac{4EIL^2 + 3EI \frac{\chi}{GA}}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} & 0 & -\frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GS}} & \frac{2EIL^2 - 6EI \frac{\chi}{GA}}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} & -\frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GA}} & 0 & \frac{12EI}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} & -\frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GA}} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GA}} & \frac{2EIL^2 - 6EI \frac{\chi}{GA}}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} & 0 & -\frac{6EI}{L^2 + 12EI \frac{\chi}{GA}} & \frac{4EIL^2 + 3EI \frac{\chi}{GA}}{L^3 + 12EIL \frac{\chi}{GA}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Se os efeitos do cisalhamento não forem considerados, a equação (12) é simplificada resultando na equação (13). Quando os efeitos do cisalhamento são desconsiderados, a matriz de rigidez do elemento é reduzida a considerar apenas os efeitos de flexão e normais.

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Considerando um carregamento genérico, que pode ser decomposto em uma componente normal, uma tangencial e outra de momento, atuando em um elemento com deslocamentos nodais restritos  $u_I = u_F = 0$ , conforme na Figura 2, as ações de engastamento de um elemento podem ser determinadas a partir das equações (7) e (8). Nesse contexto, quando os nós inicial e final do elemento são restringidos, obtém-se a equação (14):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{II} & \mathbf{E}_{IF} \\ \mathbf{A}_{II} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{I0} \\ \mathbf{f}_{F0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{u}_{I0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Onde  $\mathbf{f}_{I0}$  e  $\mathbf{f}_{F0}$  são as ações de extremidade de elemento devidas à carga de elemento.

Para aproximar as ações dos elementos foram utilizadas funções de interpolação cúbica. São determinados três pontos de cargas conhecida ao longo do elemento ( $x_1 = 0, x_1 = \frac{l}{2}$  e  $x_1 = l$ ), assim as expressões para as funções de cargas e esforços internos podem ser determinadas pelas equações (15), (16) e (17) que são as componentes no vetor  $\mathbf{u}_{I0}$  :

$$u_{10} = - \int_0^l \frac{N'_0}{EA} dx_1 \quad (15)$$

$$u_{20} = \int_0^l x_i \frac{M'_0}{EI} + \chi \frac{Q'_0}{GA} dx_1 \quad (16)$$

$$u_{30} = - \int_0^l \frac{M'_0}{EI} dx_1 \quad (17)$$

Onde:

$$N'_0(x_1) = - \int_0^{x_1} q_1(\varphi) d\varphi = -a_1 \frac{x_1^3}{3} - b_1 \frac{x_1^2}{2} - c_1 x_1$$

$$Q'_0(x_1) = \int_0^{x_1} q_2(\varphi) d\varphi = -a_2 \frac{x_1^3}{3} + b_2 \frac{x_1^2}{2} + c_2 x_1$$

$$M'_0(x_1) = \int_0^{x_1} (x_1 - \varphi) q_2(\varphi) - q_3(\varphi) d\varphi = a_2 \frac{x_1^4}{12} + b_2 \frac{x_1^3}{6} + c_2 \frac{x_1^2}{2} - a_3 \frac{x_1^3}{3} - b_3 \frac{x_1^2}{2} - c_3 x_1$$

$$a_k = -\frac{2}{l^2} (2q_{k2} - q_{k1} - q_{k3}), k = 1, 2, 3$$

$$b_k = -\frac{2}{l} (4q_{k2} - 3q_{k1} - q_{k3}), k = 1, 2, 3$$

$$c_k = q_{k1}, k = 1, 2, 3$$

Portanto, o vetor de ações nodais equivalentes para um pórtico plano pode ser obtido ao calcular o valor do vetor  $f_{Ik}$  usando a equação (18), em seguida determinar o valor do vetor  $f_{Fk}$  através da equação (19):

$$f_{Ik} = A_{II}^{-1} u_{I0} \quad (18)$$

$$f_{Fk} = (-F_0 - E_{II} f_{Ik}) E_{IF}^{-1} \quad (19)$$

A partir das equações mostradas é possível obter as tabelas de engastamento perfeito usualmente utilizadas em simplificações do MRD. Para maiores detalhes sobre o desenvolvimento da formulação do método da rigidez, deve-se consultar os trabalhos por (DE ARAÚJO e RIBEIRO, 2020) e (DE ARAUJO e MAGEVESKE, 2023).

### 4.3 MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DA ESTRUTURA

Inicialmente, as matrizes de rigidez e os vetores de cargas nodais equivalentes dos elementos são calculados em relação a um sistema de coordenadas local. Entretanto, para a montagem do sistema de equações da estrutura, é necessário considerar as rigidezes e cargas nodais equivalentes em um sistema comum de coordenadas globais. Portanto, torna-se necessário realizar operações matriciais que efetuem a rotação das matrizes de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes ao referencial global.

Dessa forma, as equações (20) e (21) são utilizadas para calcular os esforços internos de um elemento tanto em relação ao sistema de coordenadas local como em relação ao sistema de coordenadas globais, respectivamente:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{K}'^{(e)} \cdot \mathbf{u}' \quad (20)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{u} \quad (21)$$

Onde:

- $\mathbf{a}'$  é o vetor de cargas nodais equivalentes dos elementos em referência local (esforços internos)
- $\mathbf{K}'^{(e)}$  é a matriz de rigidez do elemento em referência local;
- $\mathbf{u}'$  é o vetor de deslocamentos do elemento em referência local
- $\mathbf{a}$  é o vetor de cargas nodais equivalentes dos elementos em referência global;
- $\mathbf{K}^{(e)}$  é a matriz de rigidez do elemento em referência global;
- $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos do elemento em referência global.

Através das equações (20) e (21), é possível transformar os esforços internos do elemento do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas globais. Essa transformação é crucial para garantir que os esforços internos em todos os elementos sejam referenciados no mesmo sistema global, permitindo a montagem correta do sistema de equações e a obtenção da resposta estrutural global.

Essa abordagem é fundamental para análises estruturais precisas, especialmente em estruturas complexas onde diferentes elementos podem estar orientados em direções distintas.

Para fazer essa transição entre os sistemas de coordenadas, utiliza-se a mudança de base e a rotação de eixos. A mudança de base envolve converter as quantidades (vetores ou matrizes) de um sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global, por meio de matrizes de transformação. Essas matrizes levam em consideração a relação entre os sistemas de coordenadas e possibilitam expressar as quantidades no novo sistema de referência.

A rotação de eixos, por sua vez, é uma forma específica de mudança de base. No contexto da análise estrutural, a rotação de eixos é útil quando as direções dos eixos locais dos elementos não coincidem com os eixos globais da estrutura. A rotação

dos eixos é realizada para alinhar os sistemas de coordenadas locais aos sistemas de coordenadas globais, facilitando o cálculo dos esforços e deslocamentos nos elementos em relação à estrutura como um todo.

Ao aplicar a mudança de base e a rotação de eixos, os esforços internos dos elementos podem ser calculados em relação ao sistema de coordenadas global, como demonstrado nas equações (20) e (21). Com isso essa relação de rotação para os vetores de ações de extremidade e de deslocamento podem ser descritas de acordo com as equações (22) e (23), respectivamente:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{a} \quad (22)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} \quad (23)$$

Para pórticos planos a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na matriz de rotação  $\theta$  é o ângulo formado pelo eixo do elemento e o eixo global. Com base nas equações a seguir, é possível calcular a matriz de rigidez de um elemento em referência global:

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{(e)} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{K}'^{(e)} \cdot \mathbf{u}'$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{K}'^{(e)} \cdot \mathbf{R}$$

Com base nas matrizes de rigidez dos elementos e dos vetores de cargas nodais equivalentes dos elementos em um sistema de coordenadas comum a todos os elementos, é possível realizar a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e do vetor de ações nodais equivalentes da estrutura.

As dimensões da matriz de rigidez global da estrutura e do vetor de cargas nodais equivalentes dependem da quantidade de nós da estrutura.

Em um pórtico plano, cada nó possui três graus de liberdade associados: duas translações (nas direções 1 e 2) e uma rotação (em relação ao plano do pórtico). Portanto, se a estrutura tiver "nno" nós, a matriz de rigidez global terá dimensões "3nno x 3nno" e o vetor de cargas nodais equivalentes globais terá dimensão "3nno x 1":

#### 4.4 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A resolução do sistema envolve a montagem de três componentes essenciais: a matriz de rigidez, o vetor de cargas nodais equivalentes e o vetor de deslocamentos reduzidos. Durante esse processo, as linhas e colunas relacionadas aos nós que possuem deslocamentos restringidos são eliminadas, permitindo uma análise focada nos deslocamentos desconhecidos dos nós livres da estrutura.

Na resolução do sistema de equações reduzido, são determinados os deslocamentos dos nós livres da estrutura. Esses deslocamentos representam as incógnitas que foram calculadas para os nós que não possuem restrições. Após obter os deslocamentos desconhecidos, o próximo passo é a montagem do vetor de deslocamento de cada elemento da estrutura.

O vetor de deslocamento de cada elemento é formado a partir dos deslocamentos dos nós associados a esse elemento, que foram obtidos durante a resolução do sistema de equações. Com o vetor de deslocamento do elemento, é possível calcular os esforços internos, como os esforços normais, cortantes e momentos fletores.

A equação (21) é utilizada para calcular os esforços internos de cada elemento. Essa equação leva em consideração as propriedades geométricas e mecânicas do elemento, além dos deslocamentos nodais obtidos anteriormente. Ao calcular os esforços internos, é possível analisar a distribuição das forças e momentos ao longo do elemento e entender como a estrutura responde aos carregamentos aplicados.

$$\mathbf{a}' = \mathbf{K}'^{(e)} \cdot \mathbf{u}' \quad (21)$$

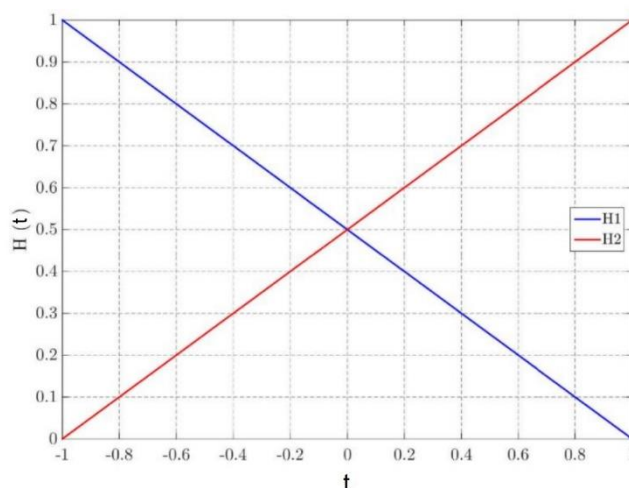
## 4.5 INTERPOLAÇÃO NUMÉRICA

Segundo BATHE, 1982 a integração numérica desempenha um papel crucial na análise por elementos finitos. A precisão dessa integração está diretamente relacionada com o número de pontos de integração requeridos na formulação do elemento.

A interpolação numérica é utilizada para aproximar os valores de propriedades geométricas e físicas em determinadas posições de um elemento. Essa técnica permite estimar de forma precisa as características relevantes para a análise estrutural ou dimensionamento.

No processo de interpolação numérica, é comum mapear os dados do elemento ao longo de um intervalo padronizado, geralmente de -1 a 1. Essa estratégia é adotada para simplificar a formulação matemática e facilitar os cálculos.

Ao utilizar a interpolação para criar um polinômio de grau  $n$ , são necessários  $n+1$  pontos para determinar univocamente o polinômio. Para um elemento de barra, considera-se uma função linear, o que significa que apenas dois pontos são necessários para realizar a interpolação. Esses dois pontos são geralmente os valores da função nos extremos do intervalo, ou seja, nos pontos -1 e 1, como pode ser visto na Figura 5.



**Figura 5 – Gráfico das equações de interpolação para polinômio de 1ºGrau (FIGUEIREDO, 2018).**



$$x_1 = x_1(t) = \sum_{i=1}^{npg} h_i(t)x_{1t}$$

$$x_2 = x_2(t) = \sum_{i=1}^{npg} h_i(t)x_{2t}$$

$n = 2$ (função linear)

As incógnitas  $x_{1t}$  e  $x_{2t}$  referem-se aos valores das abscissas e ordenadas, respectivamente, no sistema de coordenadas cartesianas;  $x_1$  e  $x_2$  são os valores das abscissas e ordenadas, respectivamente em coordenadas paramétricas; o parâmetro  $t$ :  $-1 \leq t \leq +1$ ;

$$h_i(t): \left\{ h_1(t) = \frac{1}{2}(1-t), h_2(t) = \frac{1}{2}(1+t), \text{ se } n = 2 \right.$$

#### 4.6 PROCESSO DE INTEGRAÇÃO DE GAUSS LEGENDRE

Algumas integrais que fazem parte da análise estrutural apresentam dificuldades para serem resolvidas de forma analítica. Portanto, torna-se necessário recorrer a métodos de integração numérica. No âmbito deste trabalho, optou-se pelo processo de integração de Gauss-Legendre, que está implementado no programa utilizado.

O processo de Gauss-Legendre é uma técnica utilizada para aproximar o valor da integral de uma função por meio de um somatório ponderado dos valores assumidos pela função em pontos específicos dentro do domínio de integração (BATHE, 1982). Esses valores em pontos específicos são entrados através da interpolação. O processo de aproximação é conduzido com base as equações (24), (25) e (26):

$$\int_a^b f(x) dx \quad (24)$$

$$\int_a^b f(x) dx = J(\eta) \int_{-1}^1 f(x(\eta)) d\eta = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(\eta)) d\eta \quad (25)$$

$$\frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{npg} \omega_i f(x(\eta)) \quad (26)$$

Na equação (25),  $J(\eta)$  representa o jacobiano do elemento, que para o caso de elementos de barra pode ser reduzido para  $\frac{b-a}{2}$ . O jacobiano fornece informações sobre como pequenas mudanças em uma variável afetam as demais, permitindo quantificar a taxa de deformação local em uma transformação. As posições  $\eta$  e os pesos  $\omega_i$  são determinadas com base no número de pontos de integração ( $npg$ ). A Tabela 5 mostra alguns valores de pesos e posições correspondentes para diferentes números de pontos de integração.

**Tabela 5 - Posições e pontos de Gauss (FIGUEIREDO, 2018)**

Número de pontos de Gauss ( $n_{pg}$ )	Posições ( $\eta$ )	Pesos ( $\omega_i$ )
1	0,000000	2,000000
2	-0,577350	1,000000
	0,577350	1,000000
3	-0,774597	0,555556
	0,000000	0,888889
	0,774597	0,555556
4	-0,861136	0,347855
	-0,339981	0,652145
	0,339981	0,652145
	0,861136	0,347855

## 4.7 AÇÕES E COMBINAÇÃO

Segundo a NBR6118 (ABNT,2014), na análise estrutural devem ser considerados todas as ações que possam produzir esforços solicitantes significativos para a segurança da estrutura. As ações podem ser classificadas em dois grupos principais: ações permanentes e ações variáveis.

As ações permanentes são aquelas que atuam na estrutura ao longo de toda a utilização da estrutura, alguns exemplos de ação permanentes são: peso próprio da estrutura, peso de alvenaria e revestimentos, empuxo de terra e recalque de apoio.

As ações variáveis são aquelas que atuam na estrutura em algum momento de sua utilização, alguns exemplos de ação variáveis são cargas acidentais de uso, vento e variações de temperatura.

As ações, sejam elas permanentes ou variáveis, possuem um valor característico  $F_k$ , que é transformado em um valor de cálculo  $F_d$ , essa transformação a partir do coeficiente de segurança  $\gamma_f$ . Como é observado na Figura 6, o coeficiente de segurança, comumente definido como 1,4, é resultado da multiplicação de três fatores.

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3} = 1,4$$

Considera as aproximações de projeto

Considera a simultaneidade das ações

Considera a variabilidade das ações

**Figura 6 – Coeficiente de Segurança (KIMURA, 2018)**

O coeficiente  $\gamma_{f1}$  visa prever a variação das ações, ou seja, considera que o valor das cargas pode ser maior ou menor do que o estabelecido no projeto. Proporcionando uma margem de segurança para garantir que a estrutura seja capaz de suportar potenciais cargas superiores às inicialmente previstas (KIMURA, 2018).

O coeficiente  $\gamma_{f2}$ , por sua vez, é empregado para estimar a probabilidade de ocorrência simultânea de diferentes tipos de ações na estrutura. Ele leva em conta a possibilidade de combinações de cargas atuando ao mesmo tempo (KIMURA, 2018).

Por fim, o coeficiente  $\gamma_{f3}$  considera as aproximações e simplificações realizadas no projeto estrutural em relação à realidade da estrutura. Reconhece-se que o projeto é uma simulação da estrutura real, e certas simplificações matemáticas e fatores de segurança são utilizados para garantir a estabilidade e segurança da construção (KIMURA, 2018).

A NBR6118 (ABNT,2014) define os valores dos coeficientes para algumas situações, tem-se os valores nas Tabelas 6 e 7:

**Tabela 6 - Valores do coeficiente  $\gamma_{f1}$  e  $\gamma_{f3}$ (ABNT,2014).**

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
<b>Normais</b>	1,4 <sup>a</sup>	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
<b>Especiais ou de construção</b>	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
<b>Excepcionais</b>	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

onde  
*D* é desfavorável, *F* é favorável, *G* representa as cargas variáveis em geral e *T* é a temperatura.

<sup>a</sup> Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

**Tabela 6 – valores do coeficiente  $\gamma_{f2}$  (ABNT,2014).**

Ações		$\gamma_{f2}$		
		$\psi_0$	$\psi_1^a$	$\psi_2$
<b>Cargas acidentais de edifícios</b>	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas <sup>b</sup>	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas <sup>c</sup>	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
<b>Vento</b>	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
<b>Temperatura</b>	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

<sup>a</sup> Para os valores de  $\psi_1$  relativos às pontes e principalmente para os problemas de fadiga, ver Seção 23.  
<sup>b</sup> Edifícios residenciais.  
<sup>c</sup> Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.

Na prática, uma estrutura enfrenta simultaneamente múltiplas ações em seu funcionamento. Assim, durante o processo de projeto estrutural, é essencial combinar essas ações de maneira adequada, garantindo que a estrutura seja capaz de suportar as solicitações mais desfavoráveis possíveis.

Conforme estabelecido pela NBR 6118:2014, as combinações de ações em projetos estruturais são classificadas em duas categorias distintas: combinações últimas e combinações de serviço. As combinações últimas são aquelas que visam verificar a segurança da estrutura em relação aos estados limites últimos. Já as combinações de serviço estão relacionadas à durabilidade, aparência e conforto do usuário da estrutura. As combinações de serviço levam em consideração fatores como deformações, fissuração, vibrações, entre outros, que podem afetar a qualidade e a experiência do usuário ao longo do tempo.

No programa utilizado no trabalho em questão, estão implementadas estratégias para a cálculo das combinações últimas e para as combinações frequentes de serviço.

As combinações últimas são expressas pela equação (27), as combinações são feitas admitindo uma das ações variáveis como principal, admitindo seu valor

característico e as outras ações variáveis tem seus valores reduzidos (PEREIRA, 2013).

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{\varepsilon g} F_{\varepsilon gk} + \gamma_q \left( F_{q1,k} + \sum \psi_{0j} F_{qjk} \right) + \gamma_{\varepsilon q} \psi_{0\varepsilon} F_{\varepsilon qk} \quad (27)$$

Na equação (27), tem-se que:

$F_d$ - é o valor de cálculo das ações para a combinação última;

$F_{gk}$ - representa as ações permanentes diretas;

$F_{\varepsilon k}$  – representa as ações indiretas;

$F_{q1,k}$  – é a ação variável principal e  $F_{\varepsilon qk}$  são as demais ações variáveis;

$\gamma_g, \gamma_{\varepsilon g}, \gamma_q, \gamma_{\varepsilon q}$ - são coeficientes expressos em na NBR6118:2014;

$\psi_{0j}, \psi_{0\varepsilon}$ - são coeficientes de redução expressos na NBR6118:2014;

Nas combinações frequentes de serviço, a ação variável principal é usado com seu valor frequente  $\psi_1 F_{q1,k}$  e as outras ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanente  $\psi_{2j} F_{qj,k}$  (PEREIRA, 2013). As combinações frequentes de serviço são expressas pela equação (28):

$$F_{d,ser} = \sum F_{gi,k} + \psi_1 F_{q1,k} + \sum \psi_{2j} F_{qj,k} \quad (28)$$

Na implementação das combinações presentes no atual trabalho foram utilizados os coeficientes obtidos das tabelas 5 e 6, e em outras tabelas presentes na NBR 6118 (ABNT,2014).

## 4.8 IMPLEMENTAÇÕES REFERENTES AS AÇÕES EXTERNAS

A implementação das cargas externas consiste na em transformar os tipos de carregamento em funções de cargas que possam ser utilizadas nas equações (15), (16) e (17). Obtendo assim, as componentes dos vetores de ações nodais equivalentes de cada elemento.

$$u_{10} = - \int_0^l \frac{N'_0}{EA} dx_1 \quad (29)$$

$$u_{20} = \int_0^l x_i \frac{M'_0}{EI} + \chi \frac{Q'_0}{GA} dx_1 \quad (30)$$

$$u_{30} = - \int_0^l \frac{M'_0}{EI} dx_1 \quad (31)$$

### 4.8.1 Vento

As ações do vento do foram implementadas no “Naesy-frames” em trabalhos anteriores (PEREIRA, 2013). Para o cálculo do vento são consideradas as recomendações da NBR 6123 (ABNT, 2013).

A intensidade da ação do vento depende de fatores meteorológicos e das dimensões da estrutura. A ação pode atuar em diferentes direções, entretanto, no trabalho, por ser considerados apenas pórticos planos, o vento atua somente em duas direções.

Os parâmetros necessários para o cálculo da carga do vento são:

Velocidade característica do vento ( $v_0$ ): De acordo com a NBR 6123 (ABNT, 2013), esse fator é a velocidade de uma rajada de vento de 3s, com tempo de recorrência de 50 anos, a 10 metros acima do terreno, em campo aberto e plano.

Fator topográfico ( $s_1$ ): Segundo a NBR 6123 (ABNT, 2013), o fator considera as variações do relevo do terreno, avaliando três casos básicos: terreno plano ou pouco ondulado, talude e morros.

Fator de rugosidade do terreno, dimensões da edificação e altura sobre o terreno ( $s_2$ ): O fator considera o efeito combinado da rugosidade do terreno, da variação do vento com a altura acima do terreno e das dimensões da estrutura. Esse fator é determinado segundo a equação a seguir



$$s_2 = b \cdot Fr \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^p$$

Em que:

$z$  – é a altura acima do terreno;

$Fr$  – é o fator de rajada

$b$  – é um parâmetro meteorológico;

$p$  – é o expoente de lei potencial de variação de  $s_2$

Fator estatístico  $s_3$ : Segundo a NBR 6123 (ABNT, 2013), esse fator considera conceitos estatísticos, o grau de segurança necessário a estrutura e a vida útil da edificação.

A partir desses fatores determina-se a velocidade básica do vento  $V_k$  em m/s.

$$V_k = v_0 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$$

E a partir da velocidade básica determina-se a pressão de obstrução do vento  $q_v$ , em  $N/m^2$ , que será o carregamento externo aplicado nas formulações do vetor de ações nodais equivalentes.

$$q_v = 0,613 V_k^2$$

Observa-se que a unidade pressão de obstrução do vento é obtida em  $N/m^2$ , o que indica uma carga distribuída ao longo de uma superfície. O trabalho em questão utiliza pórticos planos, assim faz-se necessário transformar a pressão de obstrução do vento em uma carga distribuída ao longo do elemento reticulado. Para isso multiplica-se a carga de obstrução do vento pela largura efetiva, o local onde o vento está atuando. Realizando mais simplificações, como pode ser observado na Figura 7, é possível transformar essa carga distribuída em cargas concentradas atuando em nós da estrutura.

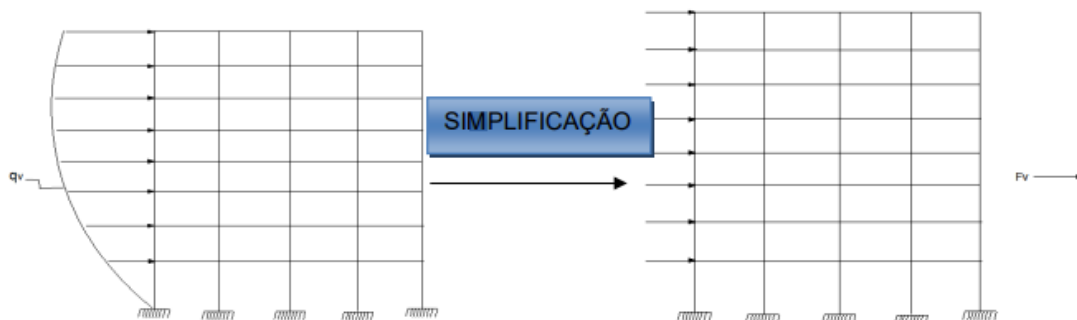


Figura 7 – Carga do vento atuando sobre uma estrutura (PEREIRA, 2013).

#### 4.8.2 Peso próprio e alvenaria

A determinação do peso próprio da estrutura ocorre inicialmente em nível global e depende do tipo de material, da seção transversal dos elementos, do valor da aceleração da gravidade assim como a definição de sua direção. Considerando um pórtico plano, a carga distribuída resultante do carregamento possui duas componentes.

Após a determinação da carga distribuída em nível global, vide Figura 8, realiza-se a rotação das componentes, uma vez que o vetor de ações nodais equivalentes é calculado inicialmente em nível local.

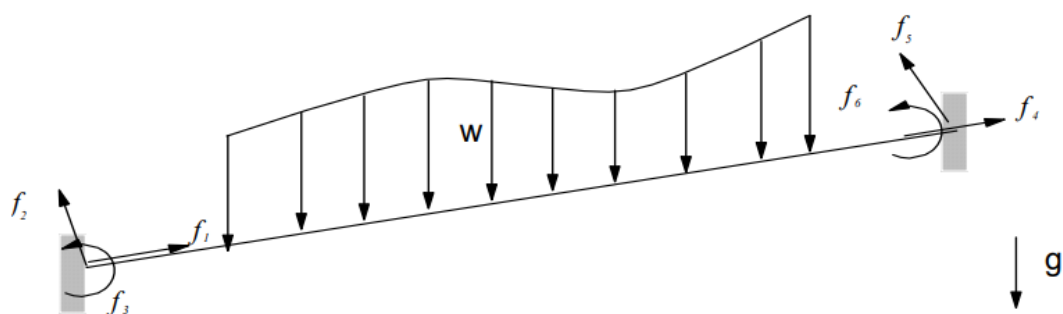


Figura 8 – Elemento sob ação do peso próprio em referência global (PEREIRA, 2013).

Sendo a carga distribuída linearmente  $w(x)$  determinada com base nas seguintes equações:

$$W = \int_0^l \rho(x)A(x)g \, dx$$

$$w(x) = \rho(x)A(x)g$$

Onde:

$W$  – é o peso total do elemento;

$w(x)$  – é a função de carga distribuída;

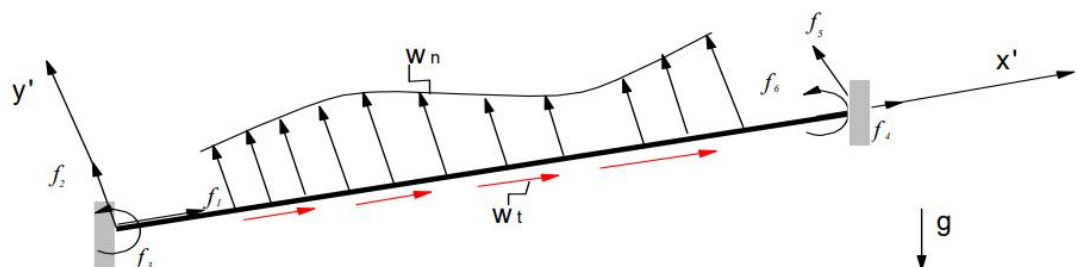
$\rho(x)$  – é a função da massa específica do elemento;

$A(x)$  – é a função da seção transversal do elemento;

$g$  – é a aceleração da gravidade.

Nota-se que no caso de um elemento com seção transversal com propriedades físicas e geométricas constantes as funções de seção transversal e massa específica se tornam a área da seção transversal e massa específica do elemento.

Com a rotação da carga  $w(x)$ , são definidas as suas componentes nas direções dos eixos de referência local do elemento, como é observado na Figura 9.



**Figura 9 – Componentes do peso próprio em referência local (PEREIRA, 2013).**

A formulação da carga de alvenaria ocorre de maneira semelhante a do peso próprio. A mudança da formulação da alvenaria é dada pelo fato de que  $\rho(x)$  será função do material utilizado para execução da alvenaria e  $A(x)$  será função da área transversal da alvenaria ( pé direito x espessura).

### 4.8.3 Temperatura

Quando um elemento estrutural é submetido a uma variação de temperatura, ele sofre uma alteração de seu volume. No caso dos elementos de pórtico considerados no trabalho, as barras reticuladas, ocorre o encurtamento ou aumento longitudinal do elemento.

Neste caso, observa-se que a mudança de temperatura gera uma deformação na estrutura, ou seja, a temperatura é o agente externo atuante na estrutura que gera os esforços solicitantes.

Com isso, determinando as equações que geram os esforços na estrutura podem ser calculados as componentes do vetor de ações nodais de extremidade para um elemento submetido a uma variação de temperatura.

Aplicando o PFV em um elemento reticulado submetido variação de temperatura, visto na Figura 10, tem-se as seguintes alterações nas equações (15),(16) e (17):

$$u_{1t} = -\alpha \int_0^l \left[ \frac{h_s(x_1)}{h(x_1)} (t_1 - t_2) + t_2 \right] dx_1$$

$$u_{2t} = \alpha \int_0^l \frac{x_1}{h(x_1)} (t_1 - t_2) dx_1$$

$$u_{3t} = -\alpha \int_0^l \left[ \frac{(t_1 - t_2)}{h(x_1)} \right] dx_1$$

Onde:

$\alpha$  – é o coeficiente de dilatação linear;

$h(x_1)$  e  $h_s(x_1)$  – são funções da altura da seção transversal do elemento;

$t_1$  e  $t_2$  – são as variações de temperatura na parte inferior e superior do elemento, respectivamente.

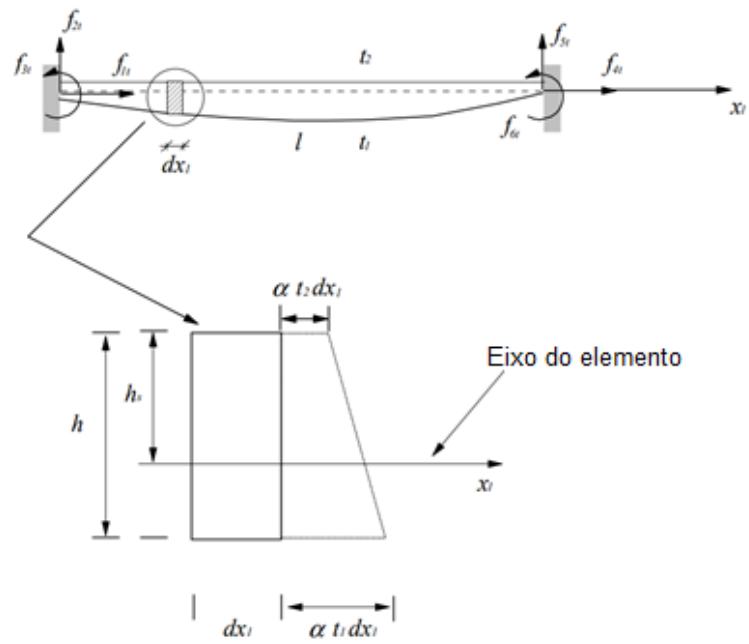


Figura 10 – Elemento submetido a variação de temperatura (PEREIRA, 2013).

#### 4.8.4 Automatização da combinação

Inicialmente são fornecidos os carregamentos atuantes na estrutura. Com a obtenção das cargas são definidas as dimensões da matriz de combinação. A quantidade de colunas da matriz é determinada pela quantidade de carregamentos que foram informadas pelo usuário. A quantidade de linhas indica o número de combinações existentes para os carregamentos informados e é obtido de acordo com as seguintes condições:

Sendo:

$nc_{per}$  – o número de casos de cargas permanentes;

$nc_{empu}$  – o número de casos de cargas empuxo;

$nc_{wind}$  – o número de casos de cargas de vento;

$nc_{adcper}$  – o número de casos de cargas adicionais permanentes;

$nc_{adcvar}$  – o número de casos de cargas adicionais variáveis;

$nc_{tipvar}$  - o número de tipos de cargas acidentais;

$nc_{temp}$  – o número de casos de variação de temperatura (podendo assumir no máximo 1 caso.

$ncomb_{ELU}$  – o número de linhas da matriz no caso de combinações ELU.

$ncomb_{ELSFQ}$  – o número de linhas da matriz no caso de combinações frequentes de serviço.

No caso das combinações último tem-se o seguinte algoritmo para determinação do valor de  $ncomb_{ELU}$ :

- Condição 1: Se  $(nc_{wind} e nc_{empu}) = 0$  e  $nc_{adcvar} \neq 0$ ;

$$ncomb_{ELU} = nc_{adcvar}$$

- Condição 2: Se  $nc_{wind}, nc_{empu}, nc_{adcvar} = 0$

$$ncomb_{ELU} = 1$$

- Condição 3: Se  $nc_{empu} = 0$  e  $nc_{wind} \neq 0$

$$ncomb_{ELU} = nc_{tipvar} \cdot nc_{wind} + nc_{adcvar}$$

- Condição 4: Se  $nc_{wind}, nc_{empu} \neq 0$

$$ncomb_{ELU} = (nc_{tipvar} \cdot nc_{wind} + nc_{adcvar}) \cdot nc_{empu}$$

No caso das combinações frequentes de serviço tem-se o seguinte algoritmo para determinação do valor de  $ncomb_{ELSFQ}$ :

$$ncomb_{ELS} = nc_{wind} + 2 \cdot nc_{adcvar}$$

- Condição 1: Se  $(nc_{wind} e nc_{empu} e nc_{adcvar}) = 0$  ;

$$ncomb_{ELS} = 1$$

- Condição 2: Se  $nc_{empu} \neq 0$

$$ncomb_{ELSFQ} = (nc_{wind} + nc_{adcvar}) \cdot nc_{empu}$$

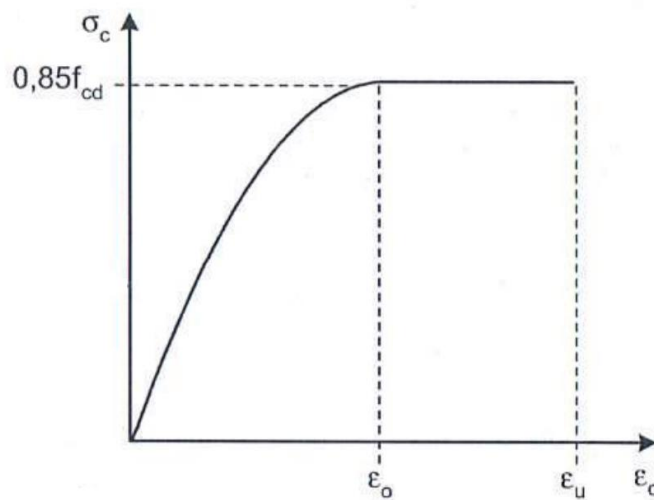
- Condição 3: Se  $nc_{temp} = 1$

$$ncomb_{ELSFQ} = nc_{temp} + nc_{wind} + 2 \cdot nc_{adcvar}$$

#### 4.9 DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS EM CONCRETO ARMADO

O dimensionamento de seções em concreto armado admite algumas hipóteses básicas: a seção transversal se mantém plana após a deformação, a deformação das barras de aço em tração ou compressão deve ser a mesma do concreto em seu entorno, as tensões de tração no concreto podem ser desprezadas, aderência perfeita entre o aço e o concreto, a tensão nas armaduras deve ser obtida a partir dos diagramas tensão-deformação (ABNT, 2014).

O diagrama tensão-deformação do concreto é mostrado na Figura 11.



**Figura 11 – Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão (ARAÚJO, 2010).**

O diagrama é descrito pelas equações (32), (33) e (34):

$$\sigma_c = \alpha_c f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_u} \right)^n \right) \right] \text{ se } \epsilon_c \leq \epsilon_0 \quad (32)$$

$$\sigma_c = \alpha_c f_{cd} \text{ se } \epsilon_0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_u \quad (33)$$

$$\sigma_c = 0 \text{ se } \epsilon_c > \epsilon_u \quad (34)$$

Nas equações (32), (33) e (34), tem-se que  $\sigma_c$  é a tensão de compressão no concreto e  $f_{cd}$  é a resistência a compressão de cálculo do concreto, que é resultante da minoração da resistência característica  $f_{ck}$  pelo coeficiente de ponderação  $\gamma_c$ , conforme a equação (35):



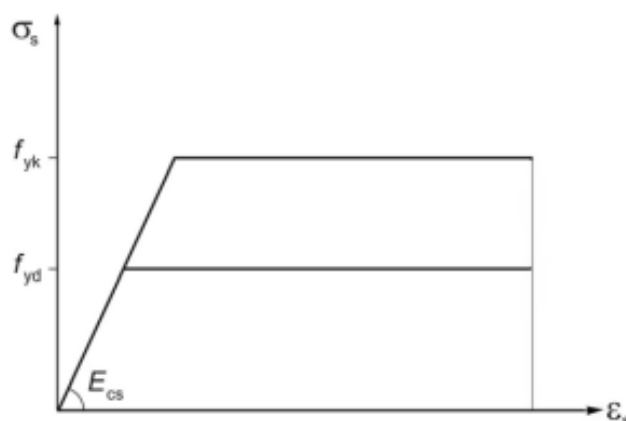
$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}, \quad \gamma_c = 1,4 \quad (35)$$

Os valores  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_o$  e  $\varepsilon_u$  são as deformações no concreto. Os valores de  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_o$ ,  $\alpha_c$  e  $n$  variam conforme a classe do concreto e são apresentados na Tabela 7 :

**Tabela 7 – Incógnitas das equações de tensão segundo a classe do concreto.**

Concreto	$\varepsilon_o$	$\varepsilon_u$
Concreto Classe até C50	2‰	3,5‰
Concreto Classe C55 até C90	$2‰ + 0,085‰(f_{ck} - 50)^{0,53}$	$2,6‰ + 35‰ \left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4$
	$\alpha_c$	$n$
Concreto Classe até C50	0,85	2
Concreto Classe C55 até C90	$0,85 \left(1 - \frac{f_{ck} - 50}{200}\right)$	$1,4 + 22,4 \left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4$

Segundo a NBR6118 (ABNT, 2014), para cálculos nos estados-limite último e de serviço pode-se utilizar o diagrama simplificado ilustrado na Figura 12. No aço admite-se que o material se comporta de maneira idêntica na tração e compressão.



**Figura 12 – Diagrama tensão-deformação do aço (NBR6118:2003)**

As relações tensão-deformação para o aço são descritas segundo as equações (36) e (37):

$$\sigma_s = E_{cs} \varepsilon_s \text{ se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \quad (36)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \text{ se } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad (37)$$

Nas equações tem-se que  $\varepsilon_s$  é o valor em módulo da deformação no aço e  $\sigma_s$  é a tensão correspondente. A deformação de escoamento de cálculo,  $\varepsilon_{yd}$ , é calculada segundo a equação (38):

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_{cs}} \quad (38)$$

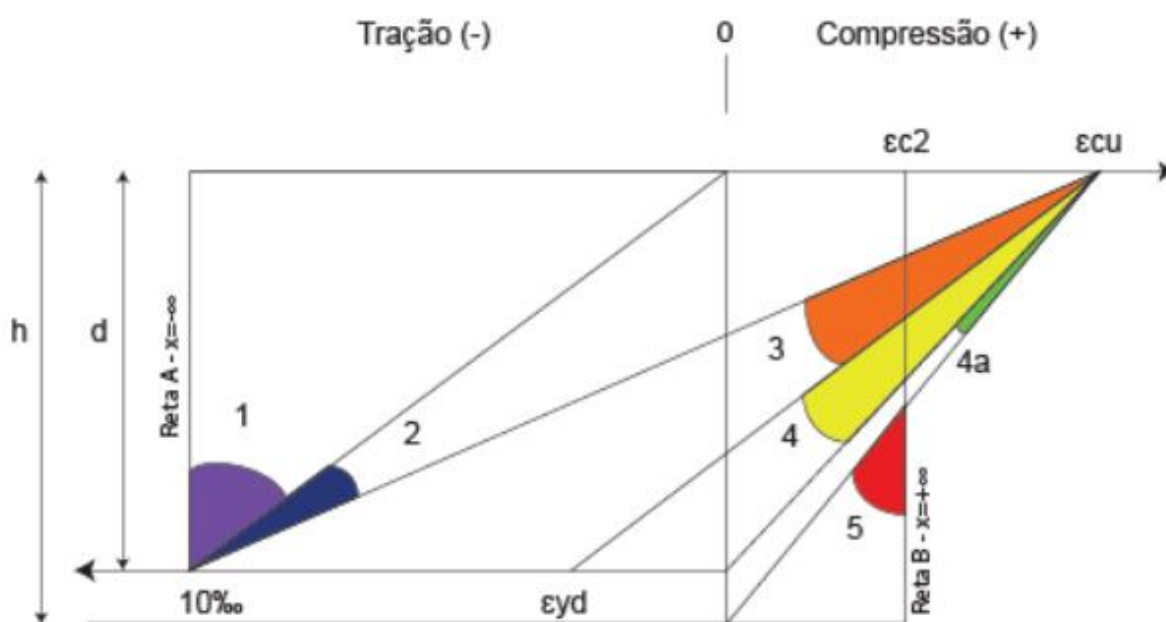
Sendo  $f_{yd}$  a tensão de escoamento de cálculo do aço e  $E_{cs}$  o módulo de elasticidade.

De acordo com ARAÚJO, 2010, o estado limite último corresponde a ruína da seção transversal, podendo ocorrer por ruptura do concreto ou por uma deformação excessiva da armadura. A ruína ocorre quando a distribuição das deformações ao longo da altura da seção transversal se enquadra em um dos domínios de deformação do concreto. Em outras palavras, quando as deformações alcançam valores que se encontram dentro de limites estabelecidos, a falha estrutural é desencadeada.

Cada domínio de deformação apresenta condições diferentes de ruína da seção transversal, assim:

- Domínios 1 e 2: nestes domínios, ocorre deformação excessiva na armadura, e a ruína se dá quando a armadura mais tracionada atinge o valor de 10‰;
- Domínios 3,4, e 4a: nesse caso, ocorre o esmagamento do concreto em seções com alguma parcela de compressão, ou seja, ocorre quando a deformação da fibra mais comprimida atinge o valor da deformação última do concreto. No domínio 4 e 4a a seção rompe sem que a armadura atinja sua deformação de escoamento, resultando na ruptura sem aviso e no mal aproveitamento do aço;
- Domínio 5: aqui, a ruína ocorre quando o esmagamento do concreto acontece em seções totalmente comprimidas, alcançando a deformação limite do concreto.

O limite entre cada domínio de deformação é representado na Figura 13.



**Figura 13 – Domínios de deformação (FIGUEIREDO, 2018).**

Segundo FIGUEIREDO, 2018, para determinar a quantidade de armadura necessária em uma seção de concreto armado, é crucial conhecer sua capacidade resistente. Para tal, é essencial ter conhecimento do valor da linha neutra, uma vez que ele determina em qual domínio a deformação da peça está situada.

Com o conhecimento do valor da linha neutra, é possível identificar as deformações na fibra mais comprimida do concreto, bem como as deformações do aço e em qualquer posição da seção. Na Tabela 8, serão descritas as relações de deformações no concreto e no aço:

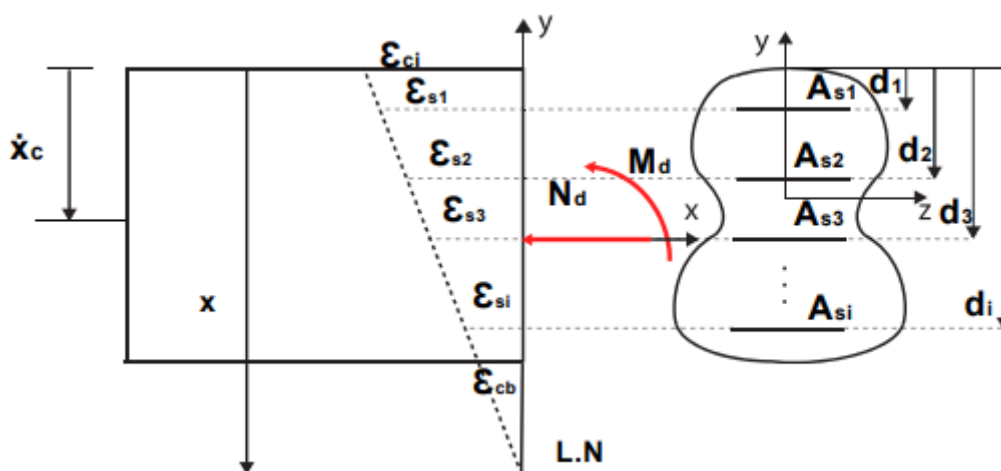
**Tabela 8 – Relações de deformações no concreto**

		Início	Término
Domínio 1	$\varepsilon_c$	10‰	0
	$\varepsilon_s$	10‰	10‰
Domínio 2	$\varepsilon_c$	0	$\varepsilon_u$
	$\varepsilon_s$	10‰	10‰
Domínio 3	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_u$	$\varepsilon_u$
	$\varepsilon_s$	10‰	$\varepsilon_{yd}$
Domínio 4	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_u$	$\varepsilon_u$
	$\varepsilon_s$	$\varepsilon_{yd}$	0
Domínio 4a	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_u$	$\varepsilon_u$
	$\varepsilon_s$	0	$\varepsilon_u \left(1 - \frac{d}{h}\right)$
Domínio 5	$\varepsilon_c$	$\varepsilon_u$	$\varepsilon_o$
	$\varepsilon_s$	$\varepsilon_u \left(1 - \frac{d}{h}\right)$	$\varepsilon_o$

A partir dos domínios de deformação e das equações de equilíbrio, é possível realizar o dimensionamento adequado de uma seção de acordo com o tipo de solicitação.

#### 4.10 IMPLEMENTAÇÃO DA ESTRATÉGIA DE DIMENSIONAMENTO

Em trabalhos anteriores, foram desenvolvidas e implementadas estratégias para o dimensionamento de seções transversais de vigas e para o dimensionamento de pilares. Entretanto foram desenvolvidas estratégias diferentes para o dimensionamento de vigas e pilares. Neste trabalho, buscou-se utilizar uma estratégia que englobe simultaneamente o dimensionamento de vigas e pilares. A Figura 14 ilustra uma seção genérica sujeita a flexão composta normal.



**Figura 14 – Seção qualquer sujeita a flexão composta normal e sua deformada (FIGUEIREDO, 2018).**

O programa calcula a armadura necessária nos elementos da estrutura com os valores dos esforços solicitantes, resultantes da análise estrutural. Dados um momento fletor solicitante de cálculo  $M_d$  e um esforço normal solicitante de cálculo  $N_d$  atuando em uma seção com geometria e armaduras com quantidade e disposição definidas, é possível encontrar a posição da linha neutra  $\dot{x}_c$  e área de aço  $A_s$  que correspondem ao equilíbrio da seção no estado-limite último em determinado domínio de dimensionamento (FIGUEIREDO, 2018).

As equações (39) e (40) demonstram o equilíbrio da seção genérica ilustrada na Figura 14:

$$\sum F_x = 0: N_d - \sum_i^{ncs} r_{si} = 0 \quad (39)$$

$$\sum M_{topo} = 0: M_d - N_d x_c + \sum_i^{ncs} r_{si} d_i + r_{cc} d_c = 0 \quad (40)$$

A força normal resistente na barra de aço da camada  $i$   $r_{si}$  é expressa pela equação (41). E a força normal resistente do concreto à compressão  $r_{cc}$  é calculada como o somatório das tensões de compressão ao longo da área bruta do concreto. Sendo assim expressa pela equação (42):

$$r_{si} = \sigma_{sdi} A_{si} \quad (41)$$

$$r_{cc} = \oint_{AC} \sigma_c(y) dA \quad (42)$$

A partir do número de camadas de aço  $ncs$  e do número de barras de aço em cada camada  $n_i$  pode-se calcular o valor do número total de barras de aço  $n$  na seção genérica e a partir disso se obtém uma relação entre a área de aço da camada  $i$   $A_{si}$  e a área de aço total  $A_s$ . A relação é importante pois o programa calcula somente a área total de aço, a partir dessa relação é possível determinar o valor da área de aço em cada camada. Essa relação é expressa pela equação (43).

$$A_{si} = \frac{n_i}{n} A_s \quad (43)$$

O valor da área da seção de concreto sujeita à compressão  $A_c$  e da área da seção bruta de concreto são dadas pelas equações (44) e (45), respectivamente:

$$A_c(x) = \int_0^{\min(x,h)} dA \quad (44)$$

$$A = \int_0^h dA \quad (45)$$

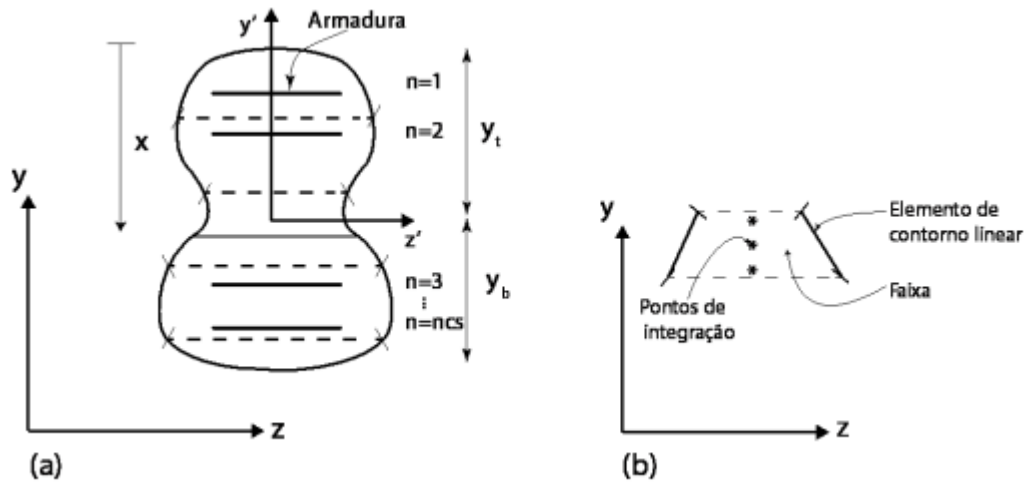
Os valores da tensão de cálculo do aço na camada  $i$   $\sigma_{sdi}$ , da tensão no concreto  $\sigma_c$  e da distância do ponto de aplicação da força de concreto até o topo da seção  $d_c$  dependem do valor da linha neutra  $\dot{x}_c$ .

O espaçamento entre as barras de aço é considerado uniforme e dependem da altura da seção transversal  $h$  e da distância do centro de massa da primeira e da última camada de aço até as bordas da seção. As equações (46) e (47) descrevem a distância da camada de aço  $i$  até o topo da seção.

$$s = \frac{h - 2d'}{ncs - 1} \quad (46)$$

$$d_i = d' + (i - 1)s \quad (47)$$

A função de tensões no concreto  $\sigma_c(y)$ , como observado na Figura 11, apresenta descontinuidades, ou seja, a função de tensões do concreto é diferente em cada faixa de altura  $y$ , e para determinar os valores exatos da força normal resistente do concreto à compressão  $r_{cc}$  é necessário dividir a geometria da seção segundo faixas de contorno. A seção é dividida segundo o valor  $nstrip$  e em cada faixa de contorno é calculado uma força normal a partir de interpolação numérica e do método de integração de Gauss-Legendre, apresentado no tópico 4.5 e 4.6. A Figura 15 representa a malha de contorno da seção transversal.



**Figura 15 – (a) Malha de contorno da seção transversal dividida em faixas (b) detalhe de uma das faixas com seus pontos de integração (FIGUEIREDO, 2018).**

A partir desse processo é possível definir as equações para o cálculo da força resistente do concreto e do momento resistente do concreto segundo as equações (48) e (49), respectivamente:

$$r_{cc} = \sum_{i=1}^{nstrip} \int_0^{y_t} \sigma_c(y)b(y)dy \quad (48)$$

$$r_{cc} = \sum_{i=1}^{nstrip} \frac{\Delta strip}{2} \int_{-1}^1 \sigma_c(y(\eta))b(y(\eta))d\eta$$

$$r_{cc} = \frac{\Delta strip}{2} \sum_{i=1}^{nstrip} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_c(y(\eta))b(y(\eta))\omega_j$$

$$\begin{aligned}
M_c &= \sum_{i=1}^{nstrip} \int_0^{yt} \sigma_c(y) \cdot y \cdot b(y) dy & (49) \\
M_c &= \sum_{i=1}^{nstrip} \frac{\Delta strip}{2} \int_{-1}^1 \sigma_c(y(\eta)) \cdot y(\eta) \cdot b(y(\eta)) d\eta \\
M_c &= \frac{\Delta strip}{2} \sum_{i=1}^{nstrip} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_c(y(\eta)) \cdot y(\eta) \cdot b(y(\eta)) \cdot \omega_j
\end{aligned}$$

Observa-se que estão presentes os parâmetros  $\omega_j$  e  $\eta$ , necessários no processo de integração de Gauss-Legendre.

A partir dos valores do momento e força resistente, obtém-se  $d_c$ , a partir da equação (50). Caso o momento fletor  $M_d$  seja nulo,  $d_c$  é calculado segundo a equação (21).

$$d_c = \frac{M_c}{r_{cc}} \quad (50)$$

$$d_c = \frac{h}{2} \quad (51)$$

A partir das equações (41), (42) e (43) é possível reescrever o equilíbrio de forças normais e de momentos no topo da seção segundo as equações (52) e (53), respectivamente:

$$N_d - \int_{Ac(x)} \sigma_c(y) dA - \sum_{i=1}^{ncs} r_{si} A_{si} = 0 \quad (52)$$

$$M_d - N_d x_c + \int_{Ac(x)} \sigma_c(y) \cdot y dA + \sum_{i=1}^{ncs} r_{si} A_{si} d_i = 0$$

$$N_d - \int_{Ac(x)} \sigma_c(y) dA - \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \right) \left( \frac{A_s}{n} \right) = 0 \quad (53)$$

$$M_d - N_d x_c + \int_{Ac(x)} \sigma_c(y) \cdot y dA + \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i d_i \right) \left( \frac{A_s}{n} \right) = 0$$

A fim de obter os adimensionais  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $r_c$  e a taxa de armadura  $\omega$  define-se  $a_c$  e  $a_c h$  segundo as equações (54) e (55):

$$a_c = \sigma_c A \quad (54)$$



$$a_c \cdot h = \sigma_c A \cdot h \quad (55)$$

Ao dividir a equação (52) pela equação (54) e a equação (53) pela equação (55), obtém-se as equações (56) e (57)

$$\frac{N_d}{a_c} - \frac{r_{cc}}{a_c} - \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \right) \left( \frac{A_s f_{yd}}{n \cdot a_c f_{yd}} \right) = 0 \quad (56)$$

$$\frac{M_d}{a_c \cdot h} - \frac{N_d x_c}{a_c \cdot h} + \frac{r_{cc} \cdot d_c}{a_c \cdot h} + \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i d_i \right) \left( \frac{A_s f_{yd}}{n \cdot a_c \cdot h f_{yd}} \right) = 0 \quad (57)$$

$$v = \frac{N_d}{a_c}$$

$$\mu = \frac{M_d}{a_c \cdot h}$$

$$r_c = \frac{r_{cc}}{a_c}$$

$$\beta_i = \frac{d_i}{h}$$

$$\beta_c = \frac{d_c}{h}$$

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{a_c}$$

$$v - r_c - \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \right) \left( \frac{\omega}{n \cdot f_{yd}} \right) = 0 \quad (58)$$

$$\mu - v \frac{x_c}{h} + r_c \beta_c + \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \beta_i \right) \left( \frac{\omega}{n \cdot f_{yd}} \right) = 0$$

A solução das equações em (58) é definida em função da posição da linha neutra e da taxa mecânica de armadura. Ao isolar a taxa mecânica de armadura obtém-se as equações (59) e (60):

$$\omega = \frac{\left( -\mu + v \frac{x_c}{h} - r_c \beta_c \right) \cdot n \cdot f_{yd}}{\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i} \quad (59)$$

$$\omega = \frac{(v - r_c) \cdot n \cdot f_{yd}}{\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \beta_i} \quad (60)$$

A partir das equações de taxa mecânica de armadura são definidas as equações (61) e (62):

$$\frac{(v - r_c) \cdot n \cdot f_{yd}}{\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \beta_i} = \frac{\left(-\mu + v \frac{x_c}{h} - r_c \beta_c\right) \cdot n \cdot f_{yd}}{\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i} \quad (61)$$

$$F(x) = \left[\mu - v \frac{x_c}{h} + r_c \beta_c\right] \left(\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i\right) + (v - r_c) \left(\sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \beta_i\right) \quad (62)$$

E com isso, a seção atinge o equilíbrio para o valor de  $x$  no qual a equação (57) é igual a zero, resultando no equilíbrio entre as forças solicitantes e forças resistentes. A equação em (57) tem solução de forma iterativa e o valor da determinação do intervalo de solução,  $x_0 \leq x \leq x_u$ , ocorre de acordo com o tipo de solicitação.

Calculados os valores de  $F(x_0)$  e  $F(x_u)$  o processo de cálculo é seguido por um processo de bisseção, de acordo com as seguintes condições:

- Se  $F(x_0) \cdot F(x_u) \leq 0$ , a solução está no intervalo  $[x_0, x_u]$ ;
- Se  $F(x_0) \cdot F(x_u) > 0$ , o intervalo de busca é redefinido de acordo com o tipo de solicitação. O processo é realizado até que  $F(x_0) \cdot F(x_u) \leq 0$ .

Com o intervalo de busca definido, a nova posição da linha neutra  $x_i$  é definida utilizando uma interpolação linear, como ser observada na equação (58).

$$\frac{F(x_u) - 0}{x_u - x_i} = \frac{F(x_u) - F(x_0)}{x_u - x_0} \quad (63)$$

$$x_i = \frac{x_0 \cdot F(x_u) - x_u \cdot F(x_0)}{F(x_u) - F(x_0)}$$

Com o valor da linha neutra determinam-se as funções de deformação no aço e na fibra mais tracionada a tensão correspondente. Assim, é calculado novamente o valor da função  $F(x_i)$  com base em uma tolerância pré-estabelecida  $tol$ . Caso a convergência de acordo com a tolerância  $tol$  não seja obtida, o processo de bisseção é repetido novamente até que a convergência seja atingida respeitando a tolerância desejada.

De posse da linha neutra que resulta no equilíbrio da seção, a taxa mecânica de armadura pode ser determinada. O valor da área total de aço é calculado a partir da equação:

$$A_s = \frac{\omega \cdot a_c}{f_{yd}}$$

#### 4.11 ÁBACOS ADIMENSIONAIS DE CONCRETO ARMADO

As equações apresentadas podem ser utilizadas para a construção dos ábacos adimensionais de concreto, que são alternativas utilizadas para o dimensionamento de vigas e pilares em concreto armado. Os ábacos são diagramas de interação representados em um sistema de eixos cartesianos e demonstram a interação entre  $\mu$ ,  $\nu$  e  $\omega$ .

Os diagramas de interação são construídos inicialmente fixando o valor de taxa de armadura em  $\omega = 0$ . Para essa taxa de armadura é definido um valor de  $\nu$ . É definido também um valor de incremento  $\Delta\omega$  e  $\Delta\nu$ . Um intervalo de busca de linha neutra é realizado até que a equação (64) seja igual a zero.

$$G(x) = \nu - r_c - \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \right) \left( \frac{\omega}{n \cdot f_{yd}} \right) = 0 \quad (64)$$

Com a convergência da equação (64), tem-se o valor da linha neutra e, a partir da equação (65), é definido o valor de  $\mu$ :

$$\mu = \nu \frac{x_c}{h} - r_c \beta_c - \left( \sum_{i=1}^{ncs} \sigma_{sdi} n_i \beta_i \right) \left( \frac{\omega}{n \cdot f_{yd}} \right) \quad (65)$$

Com isso, o primeiro par de pontos para a taxa de armadura  $\omega$  é definido. O ponto seguinte é calculado ao realizar o incremento  $\nu = \nu + \Delta\nu$ . Quando não é encontrada a convergência para tal  $(\mu; \nu; \omega)$  o valor de  $\omega$  é atualizado realizando o incremento  $\omega = \omega + \Delta\omega$  e a estratégia se repete até que se tenha o número de curvas definidos anteriormente. Através desse processo, encontram-se a quantidade de pares  $(\mu; \nu)$  desejados que equilibram a seção.

## 5 RESULTADOS

A fim de validar as formulações implementadas comparou-se os resultados obtidos pelo programa “Naesy-frames” com problemas resolvidos na literatura e com resultados obtidos em programas comerciais, neste trabalho utilizou-se os programas TQS e FTOOL a fim de verificar os resultados de esforços internos e de dimensionamento obtidos ao longo do trabalho em questão.

Os resultados obtidos através das implementações para áreas de aço foram comparados com exemplos encontrados em ARAÚJO, 2010 com o objetivo de realizar os ajustes necessários nas formulações do programa “Naesy-frames”.

### 5.1 Seção retangular submetida a Flexo-tração normal

O exemplo foi retirado do livro Curso de Concreto Armado volume 4 (ARAÚJO, 2010). A seção está submetida a um normal de cálculo  $N_d = 300 \text{ kN}$  e um momento fletor de cálculo  $M_d = 40 \text{ kNm}$ . O concreto possui resistência característica a compressão  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  e o aço considerado foi o aço CA-50.

A seção transversal é mostrada na Figura 16.

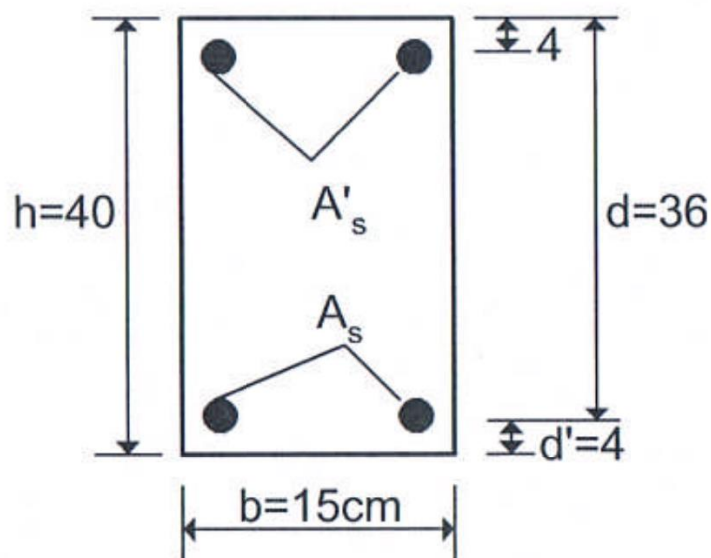


Figura 16 – Seção transversal submetida a flexo-tração (ARAÚJO, 2010).

Os resultados encontrados no programa e os resultados apresentados no livro ARAÚJO, 2010 são ilustrados na Tabela 9.

**Tabela 9 – Comparação entre os resultados do livro e do programa.**

	Livro (ARAÚJO, 2010)	Trabalho	Erro relativo
$\nu$	0,46	0,41	12,20%
$\mu$	0,17	0,14	21,43%
$A_s$	6,27 cm <sup>2</sup>	6,33 cm <sup>2</sup>	0,95%
$A'_s$	0,58 cm <sup>2</sup>	0,60 cm <sup>2</sup>	3,45%

## 5.2 Seção retangular submetida a flexão simples (armadura simples)

A seção utilizada nesse exemplo e as propriedades do aço e do concreto são as mesmas do tópico 5.1. Entretanto a solicitação é um momento de cálculo  $M_d = 42 \text{ kNm}$ . O exemplo foi retirado do livro Curso de concreto armado volume 1 (ARAÚJO, 2010). Neste exemplo o livro resolve considerando armadura simples  $A'_s = 0$ , assim no programa foi considerado somente uma camada de armadura. Os resultados obtidos no programa e apresentados no livro estão na Tabela 10.

**Tabela 10 – Resultados para seção submetida a flexão simples (armadura simples)**

	Livro (ARAÚJO, 2010)	Trabalho	Erro relativo
$\nu$	0,00	0,00	0,00
$\mu$	0,18	0,14	28,57%
$A_s$	2,98 cm <sup>2</sup>	2,99 cm <sup>2</sup>	0,34%
$A'_s$	0,00 cm <sup>2</sup>	0,00 cm <sup>2</sup>	0,00

### 5.3 Seção retangular submetida a flexão simples (armadura dupla)

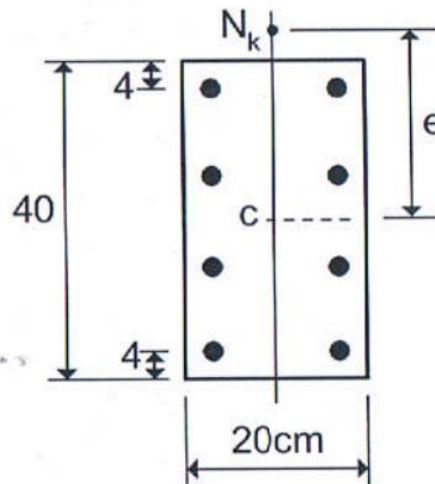
A seção utilizada nesse exemplo e as propriedades do aço e do concreto são as mesmas da seção 5.1. Entretanto a solicitação é um momento de cálculo  $M_d = 98 \text{ kNm}$ . Neste exemplo ARAÚJO, 2010 resolve considerando armadura dupla, assim serão consideradas duas camadas de armadura.

Neste exemplo, foram consideradas diferentes quantidades de barras em cada camada, a fim do resultado obtido no programa se aproximar o máximo possível dos valores de área de aço obtidos no livro. Os resultados são apresentados na Tabela 11. Inicialmente foi considerado uma armadura simétrica ( $n_1 = 2, n_2 = 2$ ), depois foram consideradas armaduras assimétricas ( $n_1 = 2, n_2 = 4$ ), ( $n_1 = 2, n_2 = 8$ ) e ( $n_1 = 2, n_2 = 16$ ).

**Tabela 11 - Resultados para seção submetida a flexão simples (armadura dupla)**

	Livro (ARAÚJO, 2010)	Trabalho (2-2)	Trabalho (2-4)	Trabalho (2-8)	Trabalho (2-16)
$A_s$	$7,46 \text{ cm}^2$	$6,98 \text{ cm}^2$	$7,09 \text{ cm}^2$	$7,57 \text{ cm}^2$	$8,07 \text{ cm}^2$
$A'_s$	$2,09 \text{ cm}^2$	$6,98 \text{ cm}^2$	$3,54 \text{ cm}^2$	$1,90 \text{ cm}^2$	$1,01 \text{ cm}^2$

#### 5.4 Seção retangular submetida a flexo-compressão normal



**Figura 17 – Seção transversal com quatro camadas de armadura submetida a flexo-compressão normal (ARAÚJO, 2010).**

A seção está submetida a um normal  $N_k = 410 \text{ kN}$  e uma excentricidade de 25cm, resultando em um momento  $M_k = 410 \cdot 0,25 \text{ kNm} = 102,5 \text{ kNm}$ . Com isso os valores das sollicitações de cálculo serão  $N_d = 574 \text{ kN}$  e  $M_d = 143,5 \text{ kNm}$ . O concreto possui  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  e o aço considerado foi o aço CA-50. Os resultados são apresentados na Tabela 12. Neste exemplo encontrou-se a área de aço total, que deve ser dividida pela quantidade de barras de aço presente na seção transversal.

**Tabela 12 – Resultados para seção submetida a flexo-compressão normal**

	Livro (ARAÚJO, 2010)	Trabalho	Erro relativo
$\nu$	0,60	0,59	1,70%
$\mu$	0,37	0,37	0,00
$A_s$	$24,95 \text{ cm}^2$	$25,35 \text{ cm}^2$	1,60%

## 5.5 Seção T submetida a flexão simples

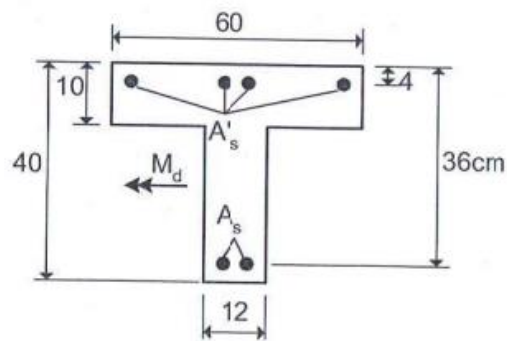


Figura 18 – Seção T submetida a flexão simples (ARAÚJO, 2010).

Neste exemplo, calculou-se a armadura inferior de uma seção T (Figura 18). Tem-se que o concreto possui  $f_{ck} = 20\text{MPa}$  e o aço considerado foi o aço CA-50. A seção está submetida a um momento de cálculo  $M_d = 150\text{ kNm}$ . As dimensões da seção transversal considerada estão na Figura 18 e os resultados são apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Resultados para a seção T

	Livro (ARAÚJO, 2010)	Trabalho	Erro relativo
$A_s$	$10,43\text{ cm}^2$	$10,41\text{ cm}^2$	0,19%

Assim percebe-se que a partir da utilização do programa desenvolvido, é possível obter a armadura necessária para seções de formato qualquer e com diferentes disposições de armadura.



## 5.6 Combinação de ações

Os resultados para combinações foram obtidos a partir da implementação feita no trabalho e no TQS.

### 5.6.1 Combinação 1 - Estado limite último

As cargas consideradas foram:

PP – Peso próprio (Carga Permanente)

PERM – Cargas Permanentes

ACID – Cargas acidentais

VENT – Vento

As combinações obtidas são representadas na Tabela 14.

**Tabela 14 – Matriz de combinações 1**

PP	PERM	ACID	VENT
1,40	1,40	1,40	0,84
1,40	1,40	0,70	1,40
1,40	1,40	1,40	0,00

### 5.6.2 Combinação 2 - Estado limite último

As ações consideradas foram:

PP – Peso próprio (Carga Permanente)

PERM – Cargas Permanentes

ACID – Cargas acidentais

VENT1 – Vento 1

VENT2 – Vento 2

As combinações obtidas são representadas na Tabela 15.

**Tabela 15 – Matriz de combinações 2**

PP	PERM	ACID	VENT1	VENTO2
1,40	1,40	1,40	0,84	0,00
1,40	1,40	1,40	0,00	0,84
1,40	1,40	0,70	1,40	0,00
1,40	1,40	0,70	0,00	1,40
1,40	1,40	1,40	0,00	0,00

### 5.6.3 Combinação 3 – Frequente de serviço

As cargas consideradas foram:

PP – Peso próprio (Carga Permanente)

PERM – Cargas Permanentes

ACID – Cargas acidentais

VENT1 – Vento 1

VENT2 – Vento 2

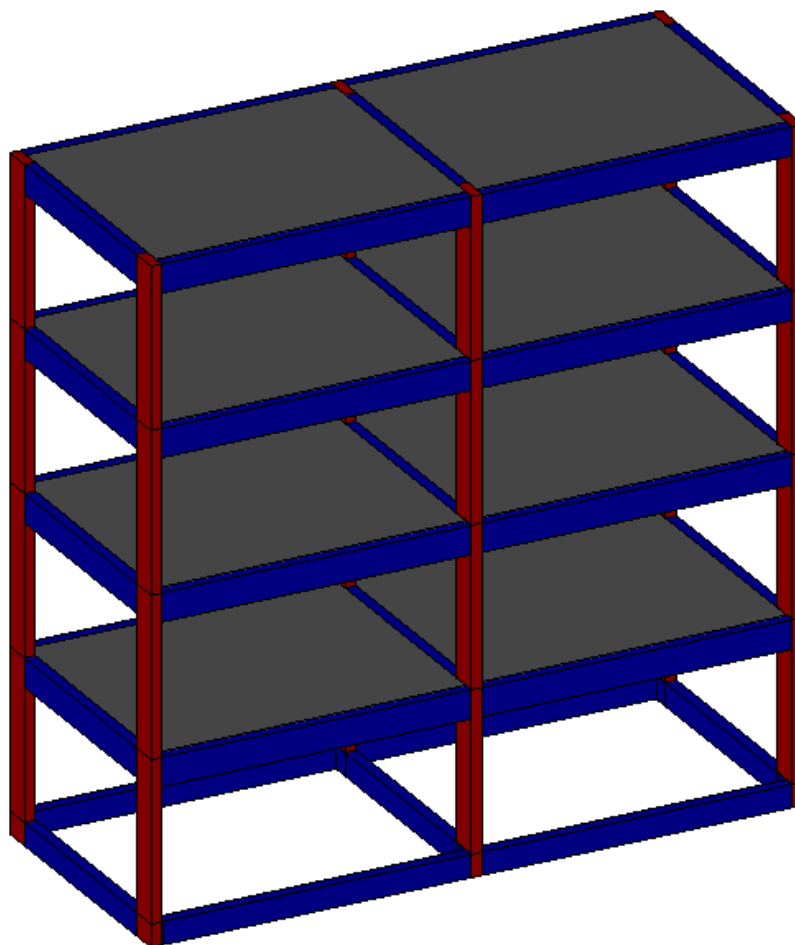
As combinações obtidas são representadas na Tabela 16.

**Tabela 16 – Matriz de combinações 3**

PP	PERM	ACID	VENT1	VENTO2
1,00	1,00	0,42	0,00	0,00
1,00	1,00	0,30	0,30	0,00
1,00	1,00	0,30	0,00	0,30
1,00	1,00	0,30	0,00	0,00

## 5.7 Esforços internos em pórticos planos

A fim de comparar os resultados de esforços internos obtidos no trabalho em questão, foi feita a modelagem de um edifício em concreto armado. Os resultados obtidos no trabalho foram comparados aos resultados obtidos utilizando o software TQS. A Figura 19 mostra o modelo 3D do edifício utilizado nas comparações.



**Figura 19 – Modelo 3D do edifício no software TQS.**

O programa TQS calcula os esforços através de formulações de pórticos espaciais, para vigas e pilares, e modelos de grelha, para as lajes. Logo não será possível obter todos as respostas fornecidos pelo TQS no presente trabalho uma vez que estratégias para o dimensionamento das armaduras para a torção e flexão oblíqua não estão implementadas.

Sabendo disso, optou-se por modelar a vista frontal do modelo no programa Naesy-frames. A Figura 20 mostram as vistas obtidas no programa TQS e a Figura 21 mostra as dimensões do pórtico.

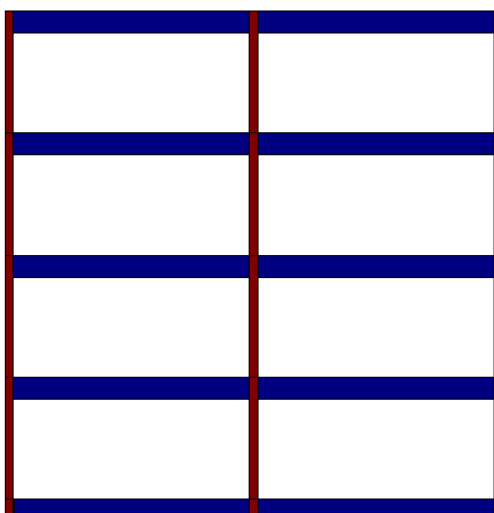


Figura 20 – Vista frontal do modelo do edifício.

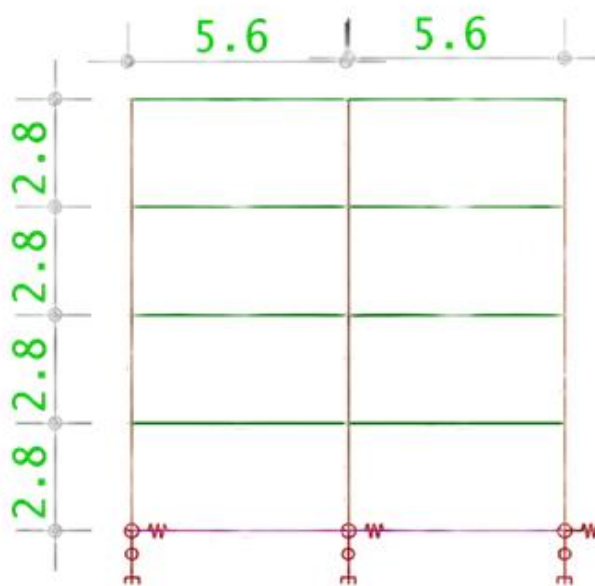
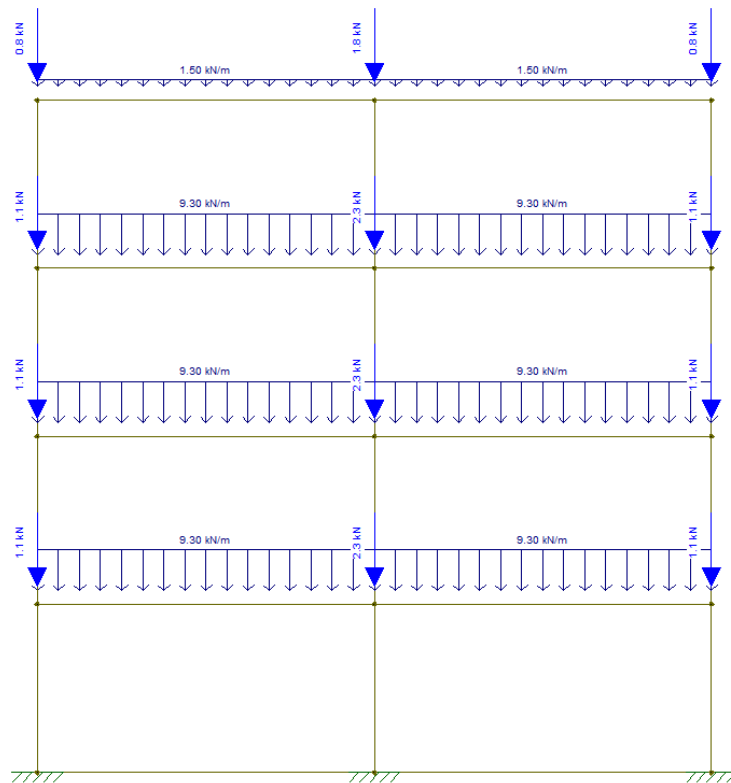


Figura 21 – Dimensões da vista frontal do edifício em metros

Como os resultados de diagramas se apresentam diferentes no TQS devido as diferenças das formulações de pórticos espaciais, optou-se por modelar o mesmo pórtico no FTOOL a fim de comparar os resultados obtidos no trabalho. Nas Figura 22, Figura 23, Figura 25 e Figura 27 são apresentadas imagens do pórtico e dos diagramas obtidas no FTOOL, e nas Figura 24, Figura 26 e Figura 28 são apresentados os diagramas de esforços calculados no trabalho utilizando o programa POS3D para a exibição dos desenhos dos diagramas. Os diagramas ilustrados nas figuras são de cunho qualitativo, entretanto os resultados dos valores de esforços internos obtidos no trabalho foram os mesmo do FTOOL.



**Figura 22 – Vista frontal do edifício modelada no FTOOL.**

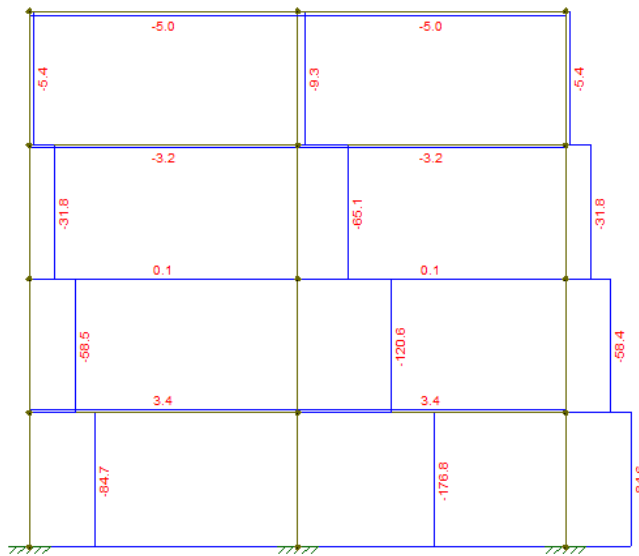


Figura 23 – Diagrama de esforço normal obtido no FTOOL.

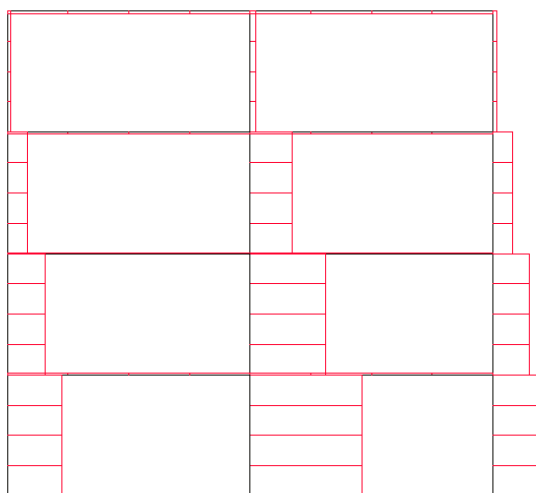


Figura 24 – Diagrama de esforço normal calculado no presente trabalho.

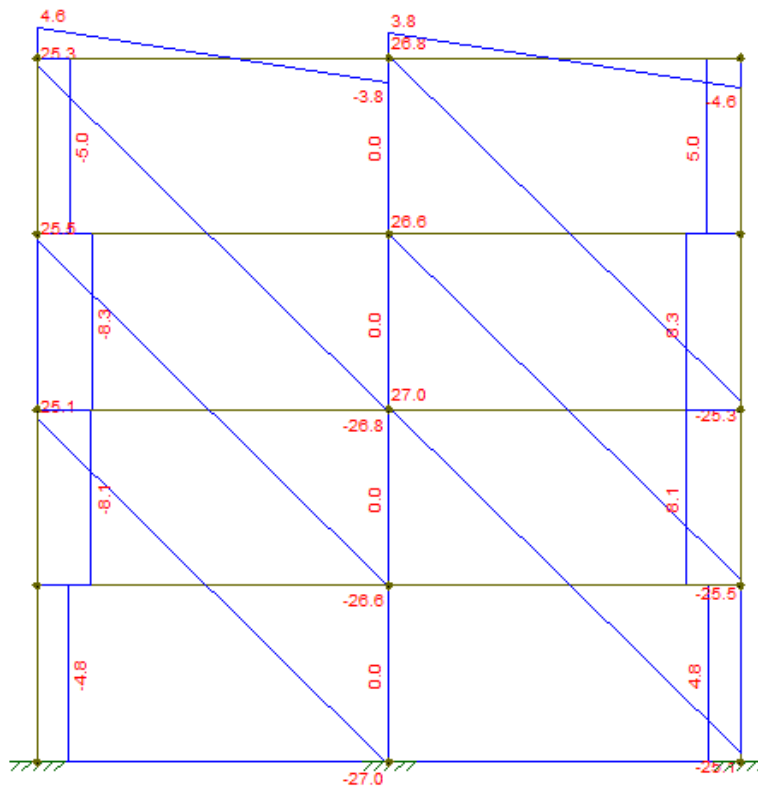


Figura 25 – Diagrama de esforço cortante obtido no Ftool.

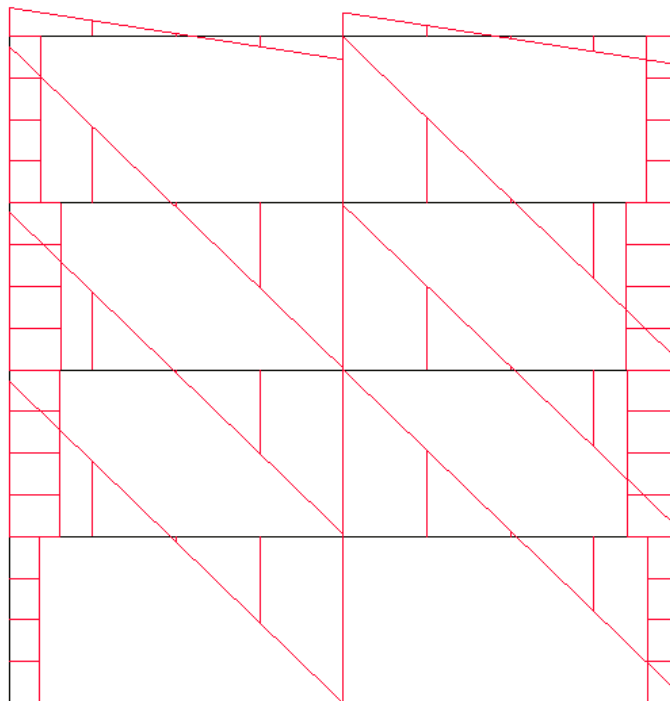
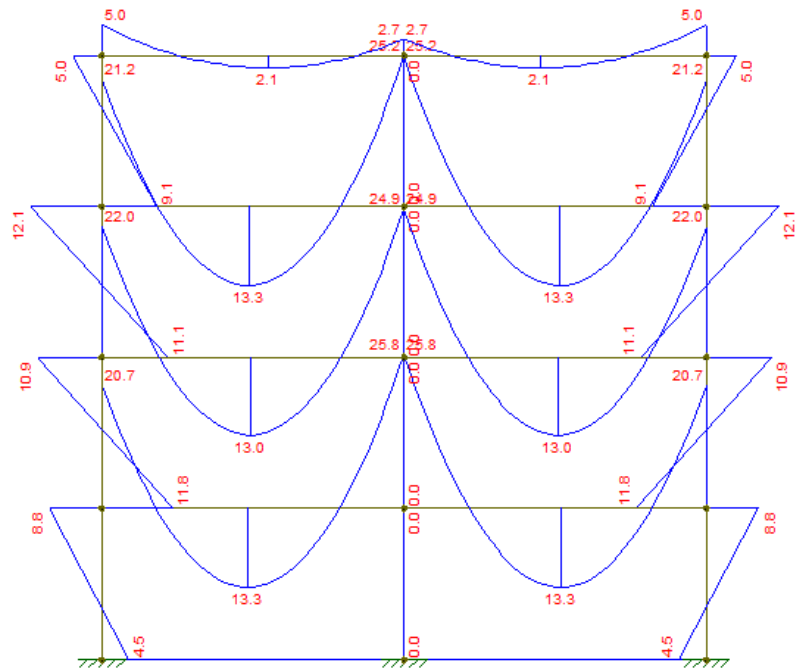
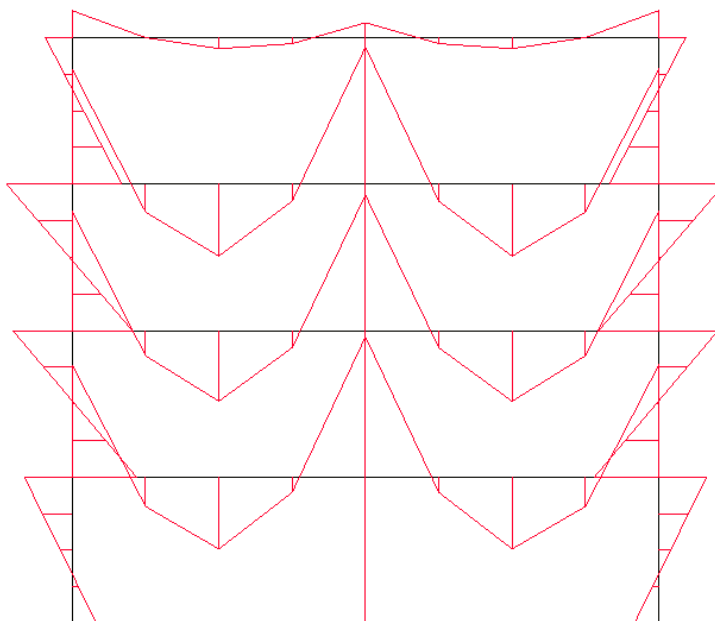


Figura 26 – Diagrama de esforço cortante calculado no presente trabalho.



**Figura 27 – Diagrama de momento fletor obtido no FTOOL.**



**Figura 28 – Diagrama de momento fletor calculado no presente programa.**



## 5.8 Dimensionamento de pilares e vigas

O pórtico selecionado para o dimensionamento das armaduras longitudinais foi o pórtico central (Figura 29), pois este não apresenta flexão oblíqua como pode-se observar pela geometria do pórtico espacial (Figura 30). No entanto, as vigas e lajes do pórtico frontal (Figura 31) geram esforços normais nos pilares centrais. A fim de representar esses esforços, analisou-se pórtico frontal. Com os resultados obtidos dessa análise, determinaram-se as cargas nos pilares P2 e P4 do pórtico central (Figura 32).

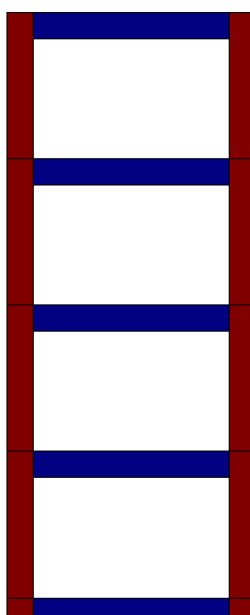


Figura 29 – Vista lateral do modelo do edifício.

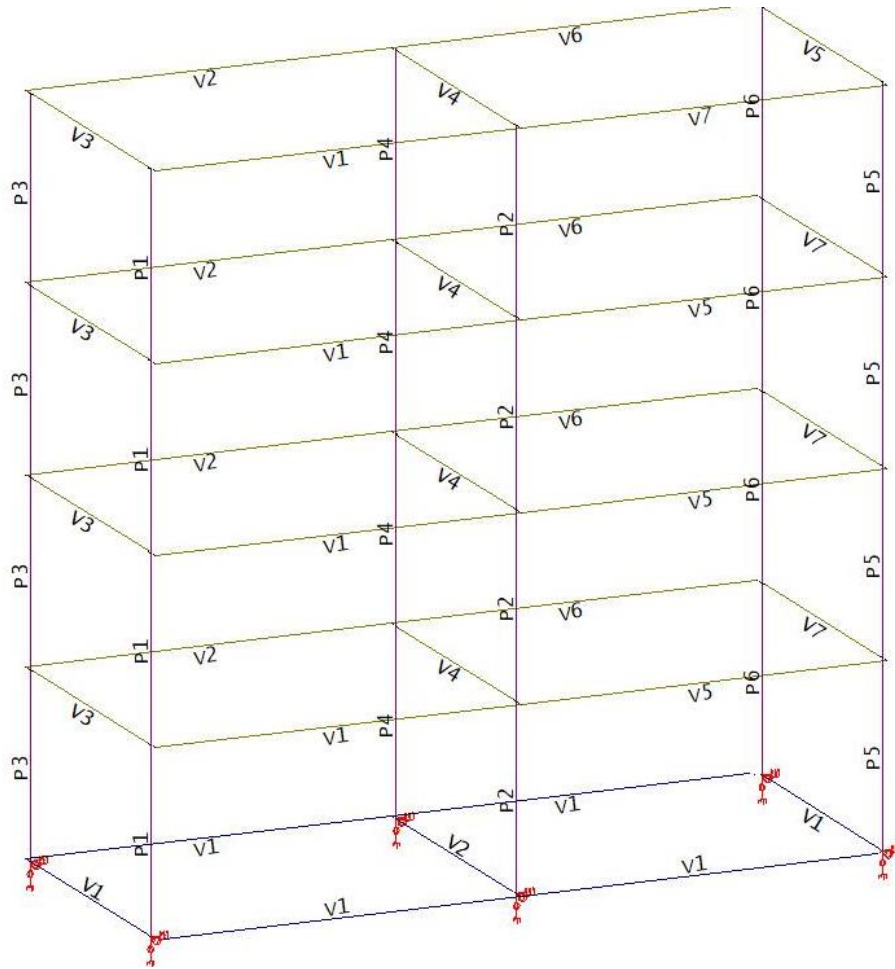


Figura 30 – Pórtico espacial dimensionado no TQS.

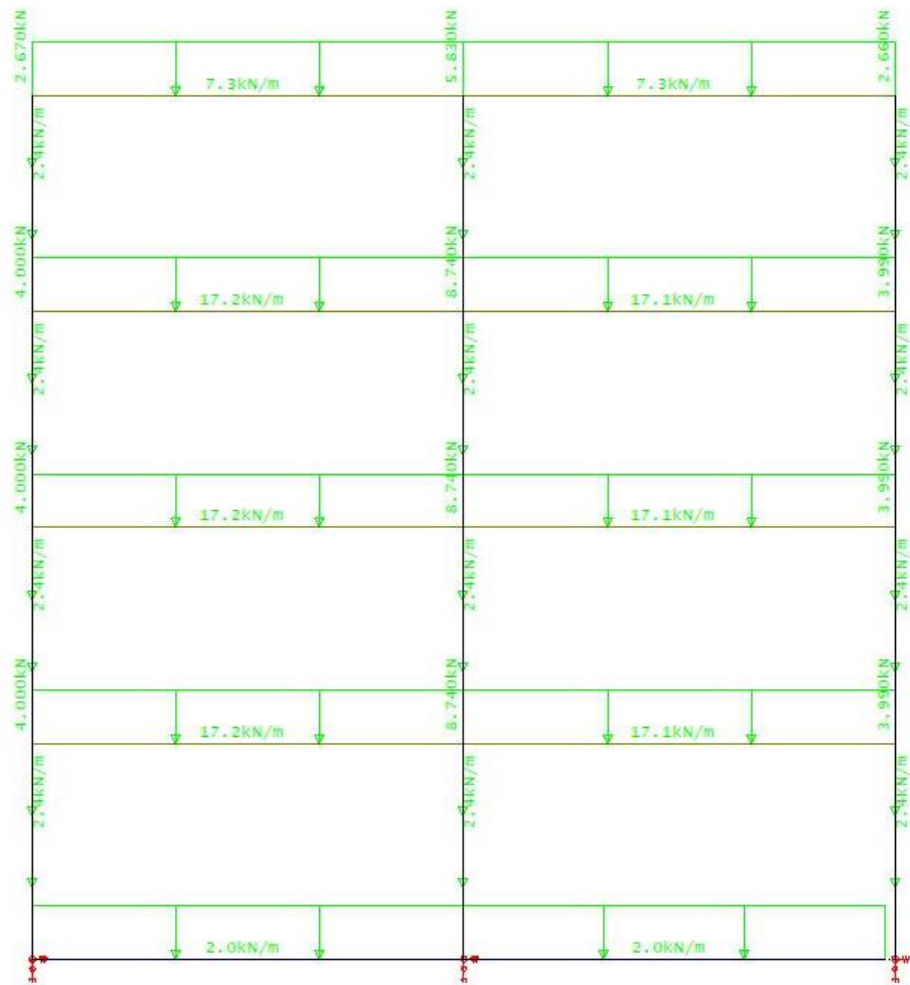


Figura 31 – Pórtico da parte frontal do edifício no TQS.

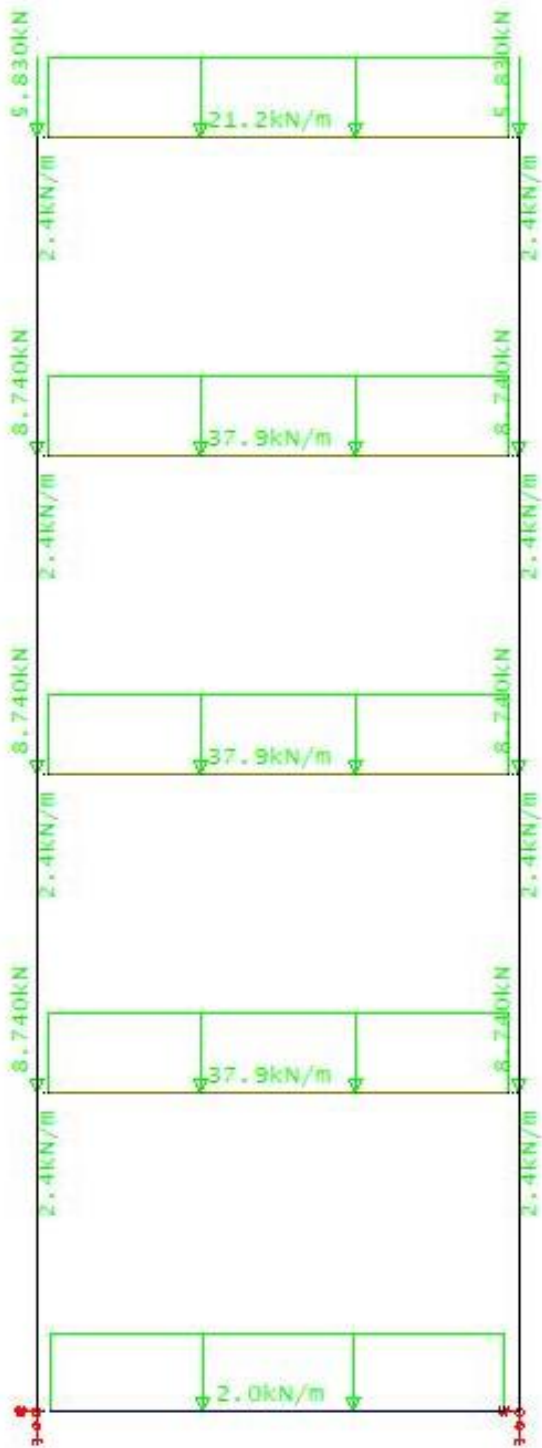
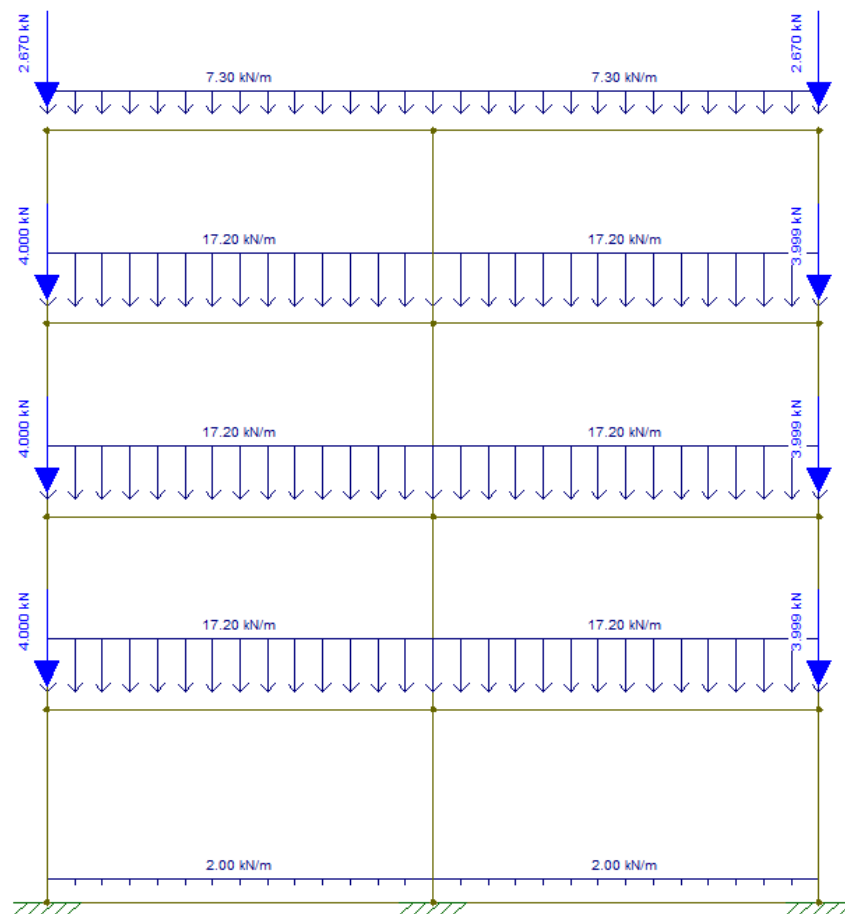
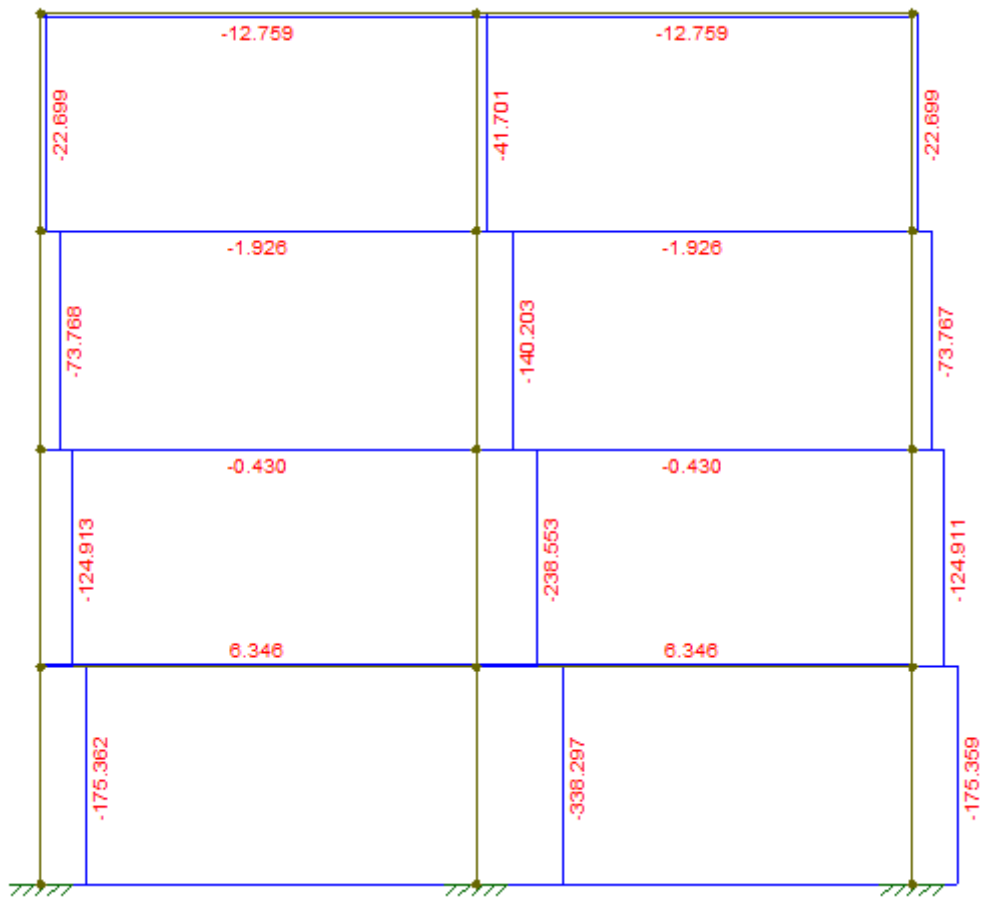


Figura 32 – Pórtico da parte lateral do edifício no TQS



**Figura 33 – Pórtico frontal no FTOOL**

Foi realizada a modelagem no pórtico frontal no programa desenvolvido no trabalho e no FTOOL (Figura 33), a fim de obter o diagrama de esforço normal (Figura 34) nos pilares P2 e P4 e transformar o esforço normal em cargas aplicadas nos pilares (Figura 35). Observa-se que as cargas concentradas nos pilares P2 e P4 foram omitidas na Figura 33 pois elas já aparecem no pórtico central.



**Figura 34 – Diagrama de esforço normal**

Ao executar a análise estrutural do pórtico da Figura 31 obteve-se os nos pilares P2 e P4 os esforços normais, mostrados na Tabela 17.

**Tabela 17 – Esforços normais dos pilares centrais**

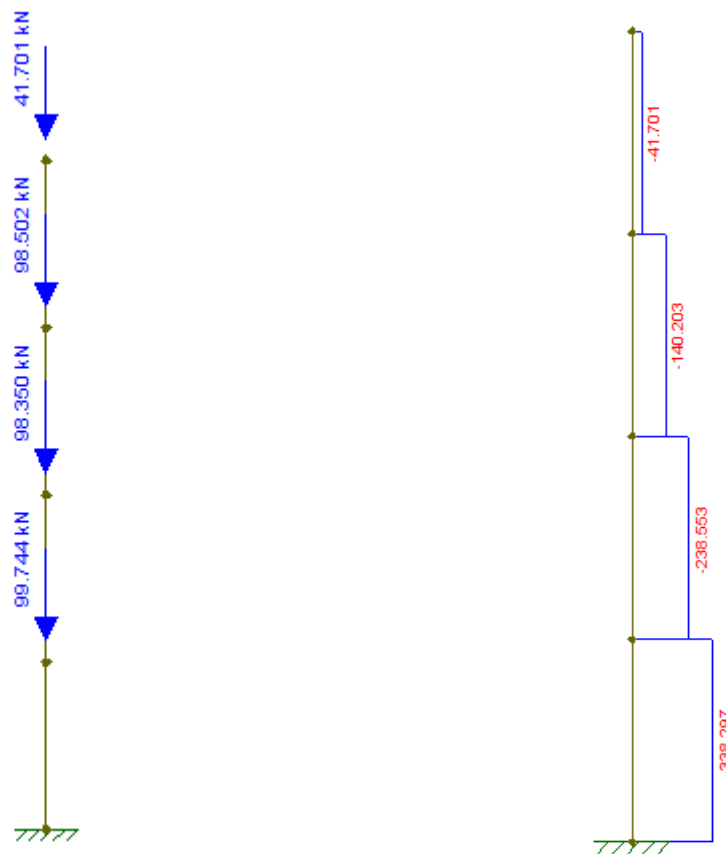
	Esforço Normal nos pilares 2 e 4
Pavimento 1	-338,297 kN
Pavimento 2	-238,553 kN
Pavimento 3	-140,203 kN
Pavimento 4	-41,701 kN

Considerando as cargas Tabela 18 forem lançadas no topo dos lances dos pilares obtém-se os mesmos esforços normais. Realizando essa operação é possível representar os esforços resultantes do pórtico espacial em um pórtico plano.

**Tabela 18 – Cargas nos pilares centrais**

	Cargas nos pilares 2 e 4
Pavimento 1	-99,744 kN
Pavimento 2	-98,350 kN
Pavimento 3	-98,502 kN
Pavimento 4	-41,701 kN

Na Figura 35 é observado que ao aplicar nos pilares o diagrama de esforços normais resultantes é o mesmo apresentado na Figura 34.

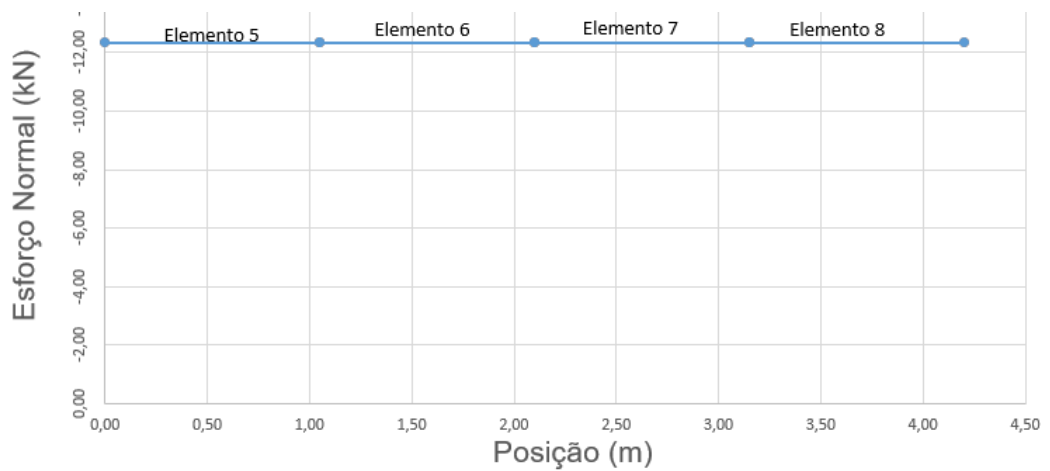


**Figura 35 – Cargas aplicadas nos pilares P2 e P4 e diagrama de esforço normal.**

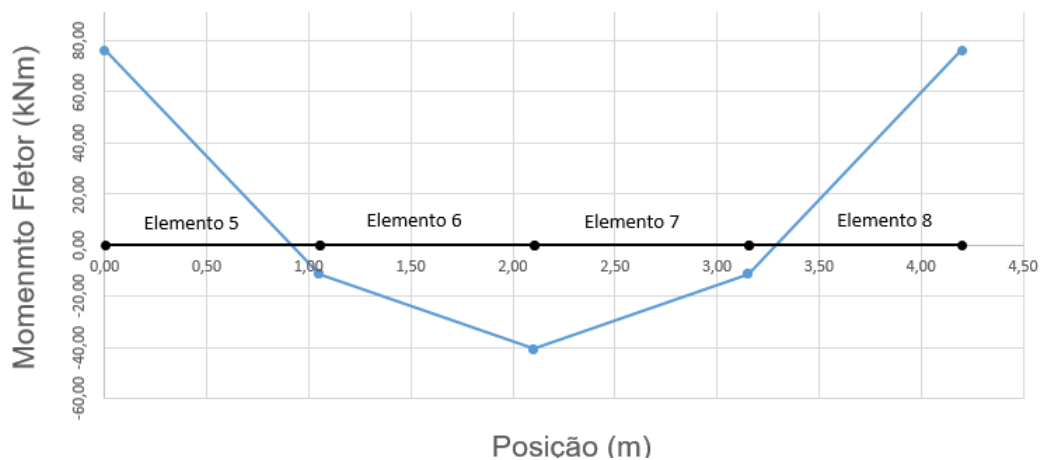
Ao realizar a modelagem do pórtico da Figura 32 e obter os esforços solicitantes nos pilares e vigas é possível dimensionar o pórtico central do edifício. Optou-se por

selecionar a viga V4 e o lance 1 do pilar P2 para realizar o dimensionamento da armadura longitudinal.

Nas Figura 36, Figura 37, Figura 38 e Figura 39 é observado os esforços solicitantes considerados nos dimensionamentos. Comparou-se os resultados das armaduras de aço necessária nos elementos da viga V4 (Tabela 19) e do lance 1 do pilar P2 (Tabela 21) obtidas através do TQS e no programa desenvolvido.

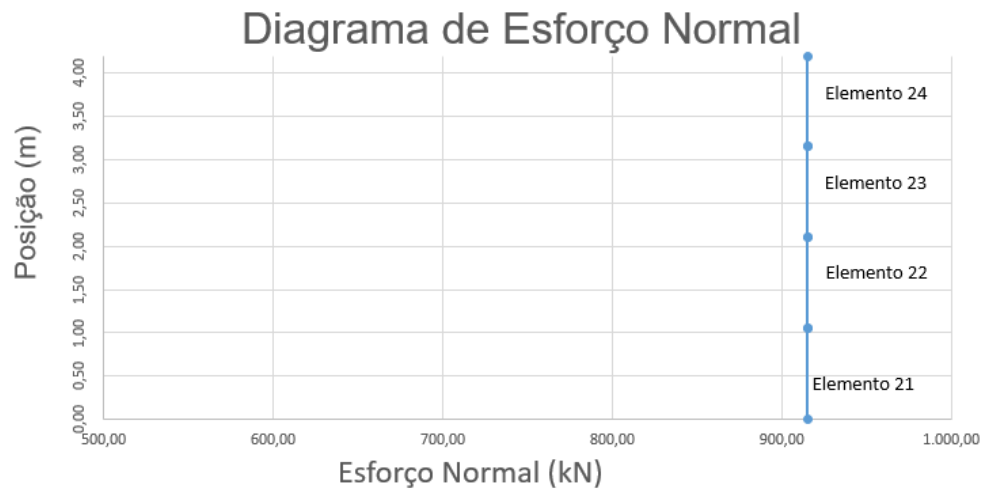


**Figura 36 – Diagrama de esforço normal viga V4.**

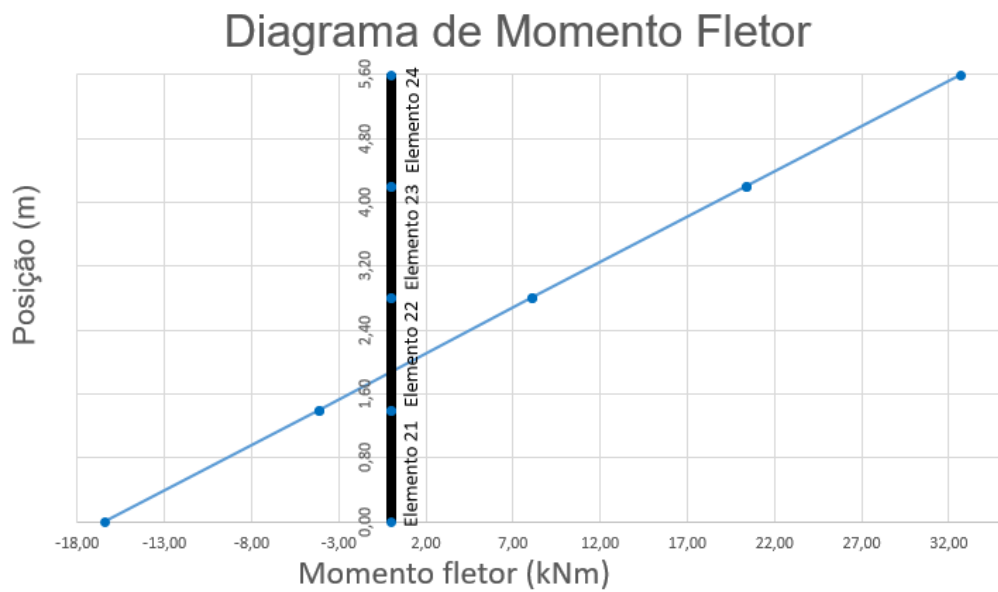


**Figura 37 - Diagrama de momento fletor viga V4.**





**Figura 38 – Diagrama de esforço normal do lance 1 pilar P4**



**Figura 39 – Diagrama de momento fletor do lance 1 do pilar P4.**

**Tabela 19 – Armadura longitudinal ao longo da viga V4**

	Elemento 5	Elemento 6	Elemento 7	Elemento 8
Momento Fletor (kN)	-76,44	11,31	40,56	11,31
Normal (kN)	-12,33	-12,33	-12,33	-12,33
$A_s$ - TQS	8,09 $cm^2$	1,43 $cm^2$	4,39 $cm^2$	1,43 $cm^2$
$A_s$ - Naesy	8,22 $cm^2$	1,43 $cm^2$	4,45 $cm^2$	1,43 $cm^2$

**Tabela 20 – Armadura longitudinal ao longo do pilar p4**

	Elemento 21	Elemento 22	Elemento 23	Elemento 24
Momento Fletor (kN)	16,45	4,79	-8,09	-20,37
Normal (kN)	915,09	915,09	915,09	915,09
$A_s$ - TQS	0,00	0,00	0,00	0,00
$A_s$ - Naesy	0,1479 $cm^2$	0,00	0,0	1,65 $cm^2$

Observa-se as áreas de aço obtidas são menores que as recomendações da norma NBR 6118 (ABNT, 2014). A área mínima para a seção transversal dos pilares, logo faz necessário a utilização da armadura mínima segundo recomendações das normas de dimensionamento em concreto armado.

## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo estudar as etapas de um programa computacional para análise e dimensionamento de sistemas estruturais reticulados em concreto armado. A implementação computacional baseou-se no método da Rigidez Direta que possibilita obter as grandezas físicas relevantes no cálculo estrutural, tais como os esforços internos, reações de apoio e deslocamentos da estrutura.

Após a análise estrutural, o dimensionamento das seções transversais dos elementos reticulados foi realizado a partir da consideração de equilíbrio dos esforços solicitantes e resistentes em seções dos elementos em concreto armado. Foram implementadas estratégias de dimensionamento generalizadas para pilares e vigas.

A partir dos resultados obtidos validou-se as implementações feitas no programa uma vez que os valores obtidos para os esforços internos foram os mesmos para esforços internos no FTOOL. E para o dimensionamento os resultados para as áreas de aço obtidas possuem pequena diferença em relação a literatura e ao TQS.

Atualmente o dimensionamento de um edifício em concreto armado é mais comumente realizado a partir da análise estrutural de pórticos espaciais, que possibilitam a modelagem conjunta das vigas, pilares e lajes (normalmente simuladas com modelos de grelhas). Entretanto, a partir dos resultados obtidos no trabalho, verifica-se que a estratégia de utilizar modelos de pórticos planos para obter os esforços solicitantes também é válida para obter um dimensionamento que atenda às recomendações das normas pertinentes ao dimensionamento em concreto armado. Ressalta-se que este aspecto pôde ser efetivamente comprovado pela presente pesquisa na qual desenvolveu-se um programa para o dimensionamento de sistemas apertados reticulados planos em concreto armado.

Para trabalhos futuros recomenda-se a consideração de esforços torcionais no cálculo estrutural, que possibilitarão por sua vez a modelagem de sistemas reticulados espaciais, melhorando consideravelmente a aproximação de respostas de estruturas reais.

## 7 BIBLIOGRAFIA

ABNT. **NBR - 6118 - Projeto de estruturas de concreto - Procedimentos**. Associação Brasileira de Norma Técnicas. [S.l.]. 2014.

ABNT. **NBR 6123 - Forças devidas ao vento em edificações**. ABNT. Rio de Janeiro.

ARAÚJO, J. M. D. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, v. 1,2,3 e 4, 2010.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. [S.l.]: Prentice Hall Inc, 1982.

DE ARAUJO, F. C.; MAGEVESKE, P. Exact structural-property matrices and Timoshenko's shape functions for nonprismatic frame elements defined by noncentroidal axes. **Thin-Walled Structures**, 2023.

DE ARAÚJO, F. C.; RIBEIRO, I. A novel strategy to construct exact structural-property matrices for nonprismatic Timoshenko's frame elements. **Computers and Structures**, 2020.

DE ARAÚJO, F. C.; RIBEIRO, I.; MACHADO, R. Nonlinear analysis of semirigid steel frames having nonprismatic shear- deformable members. **Engineering Structures**, 2022.

FIGUEIREDO, Á. F. **Processo para dimensionamento de elementos lineares em concreto armado com seções de forma geométrica qualquer sob flexão composta normal - Implementação em programa computacional para a análise e dimensionamento de estruturas planas**. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. 2018.

KASSIMALI, A. **Análise Estrutural**. São Paulo: Novelis do Brasil, 2015.

KIMURA, A. **Informática aplicada a estruturas de concreto armado**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2018.

LEONHARDT, F.; MONNING, E. **Construções de Concreto**: Princípios Básicos do Dimensionamento de estruturas de concreto armado. 1. ed. [S.l.]: Interciência, v. 1, 1977.

PEREIRA, R. A. T. **Estratégias para Automatização do Dimensionamento de Sistemas Estruturais em Concreto Armado (vigas)**. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. 2013.

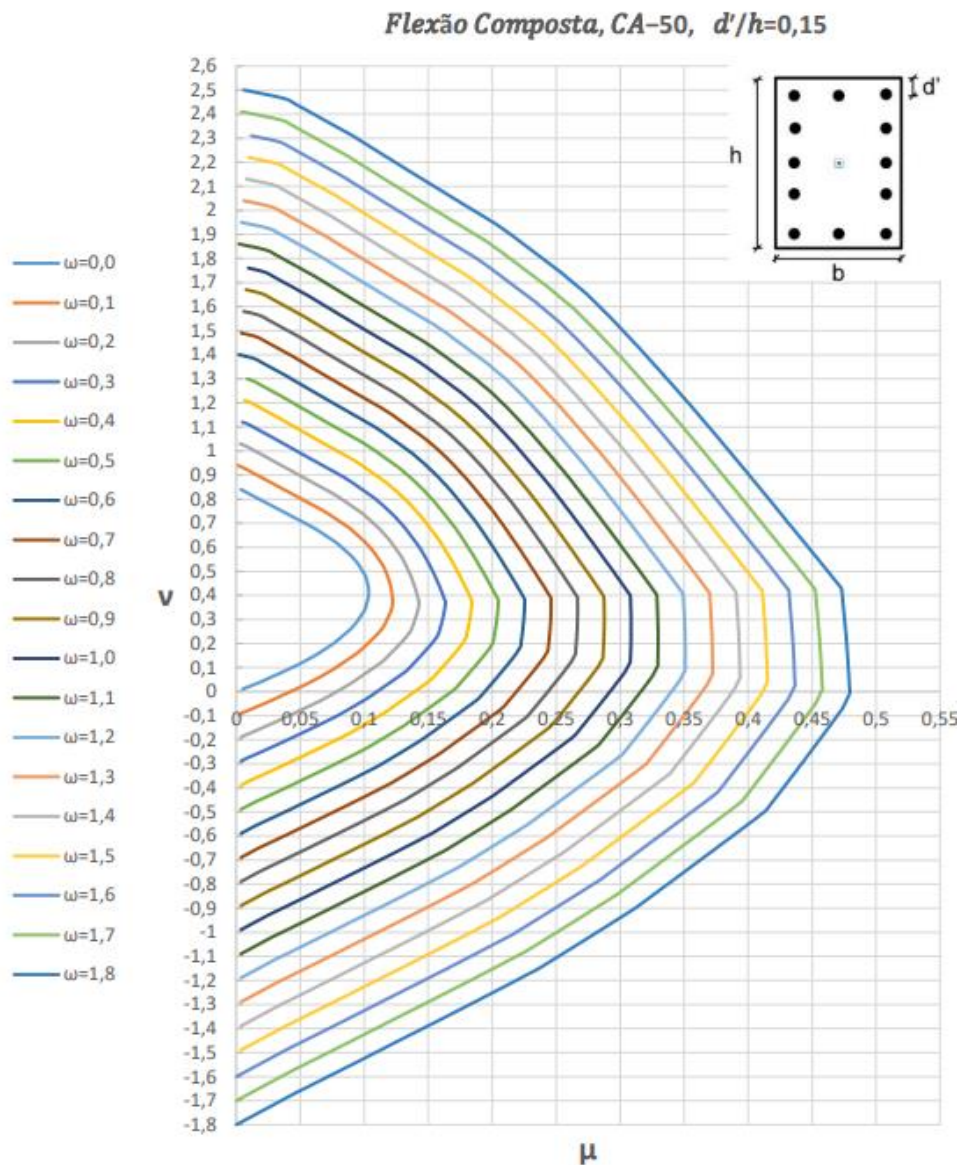
SORIANO, H. L.; DE SOUZA LIMA, S. **Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, v. 1, 2004.

TIMONSHENKO, S. P. **Mecânica dos Sólidos**. [S.l.]: [s.n.], v. 1, 1983.

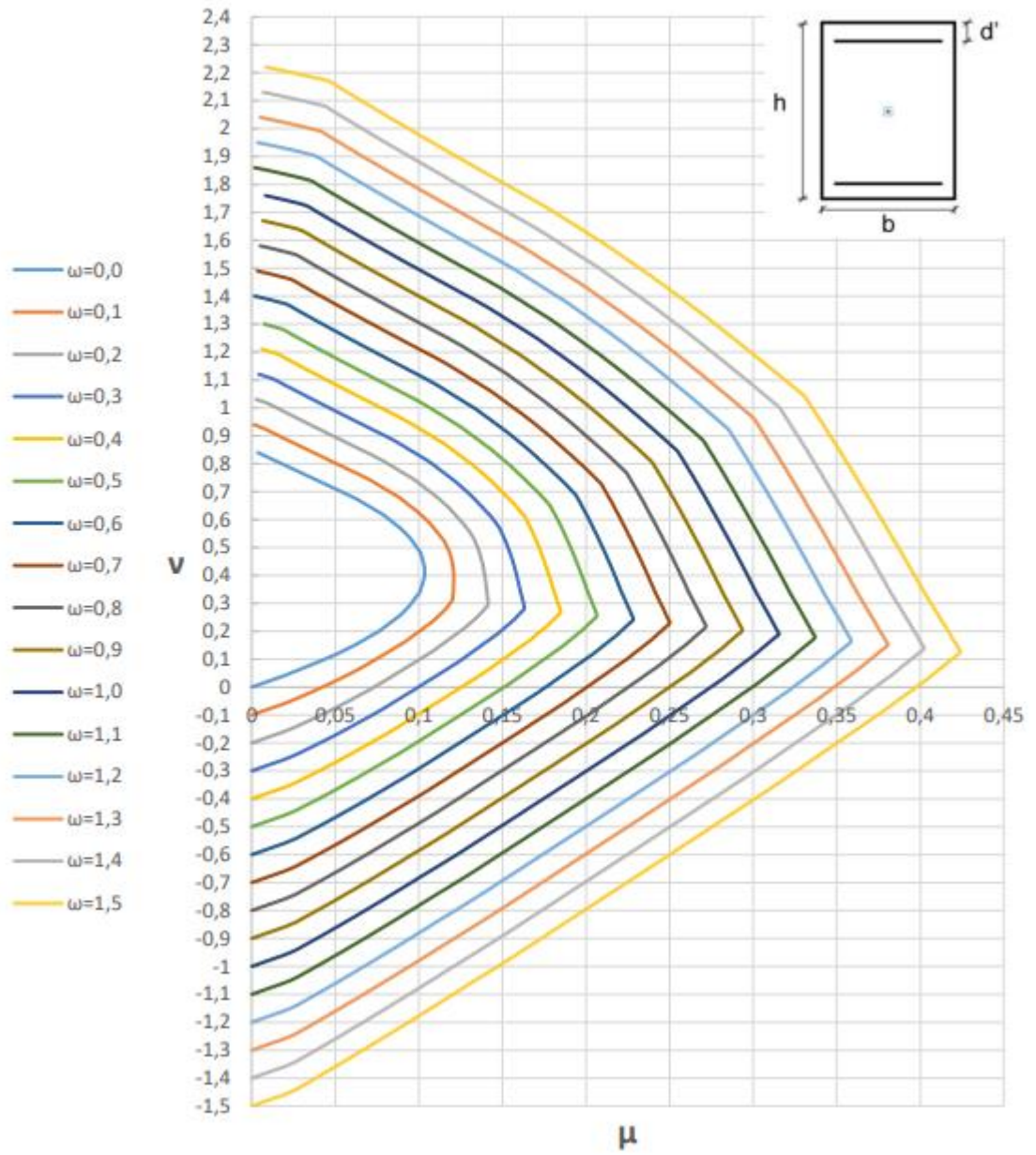
WILLIAM WEAVER, J.; M. GERE, J. **Matrix Analysis of framed structures**. 2. ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc, 1980.

## 8 ANEXOS

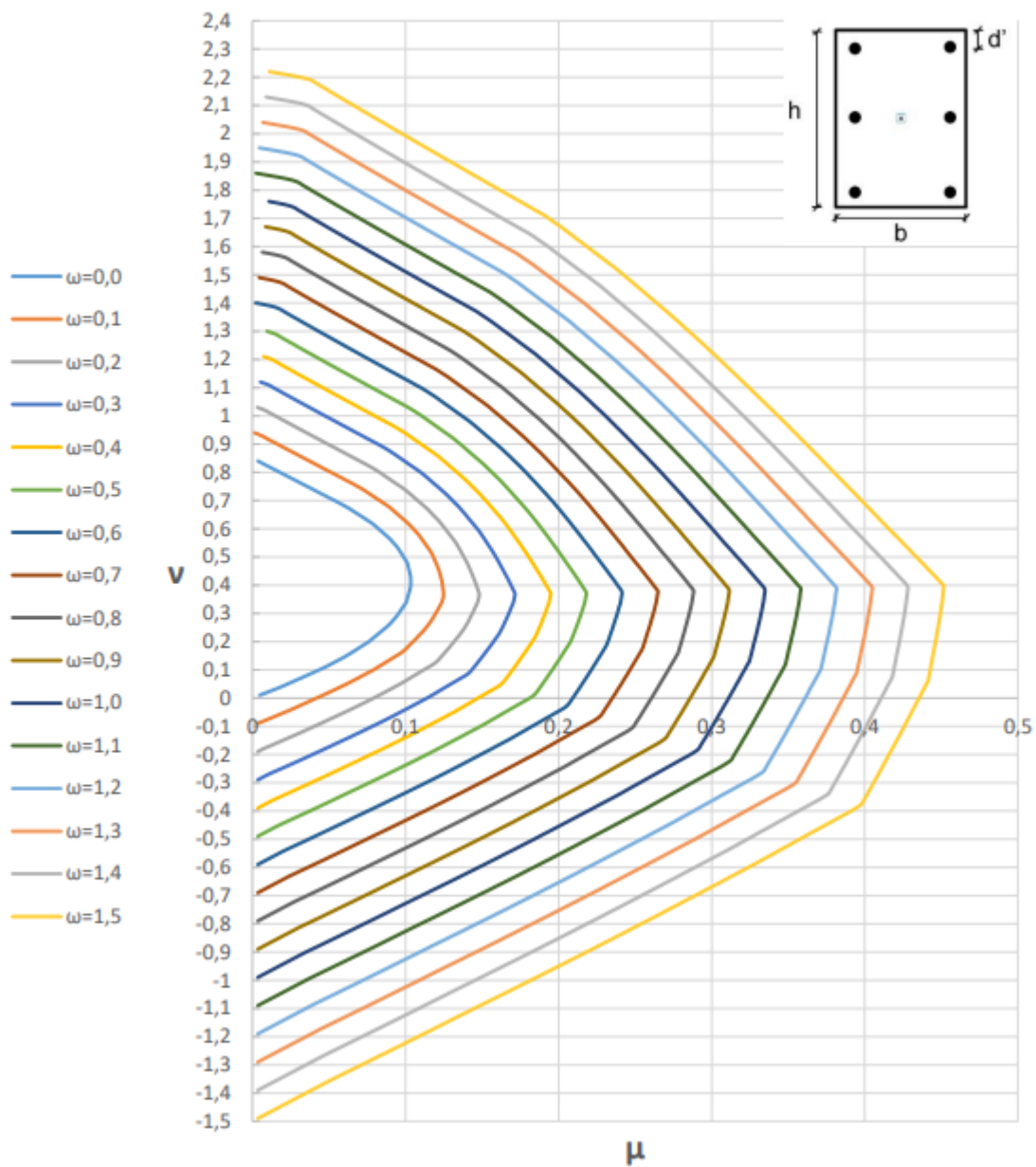
Como subproduto do processo de dimensionamento de elementos sob flexão composta reta, ábacos de dimensionamento também podem ser determinados. Como mostrado ao longo deste trabalho, o processo se aplica a seções de forma geométrica qualquer. A seguir, apresentam-se alguns ábacos adimensionais obtidos utilizando-se a formulação apresentada no capítulo 4.11 que se aplica a seções quaisquer em concreto armado.



*Flexão Composta, CA-50,  $d'/h=0,25$*

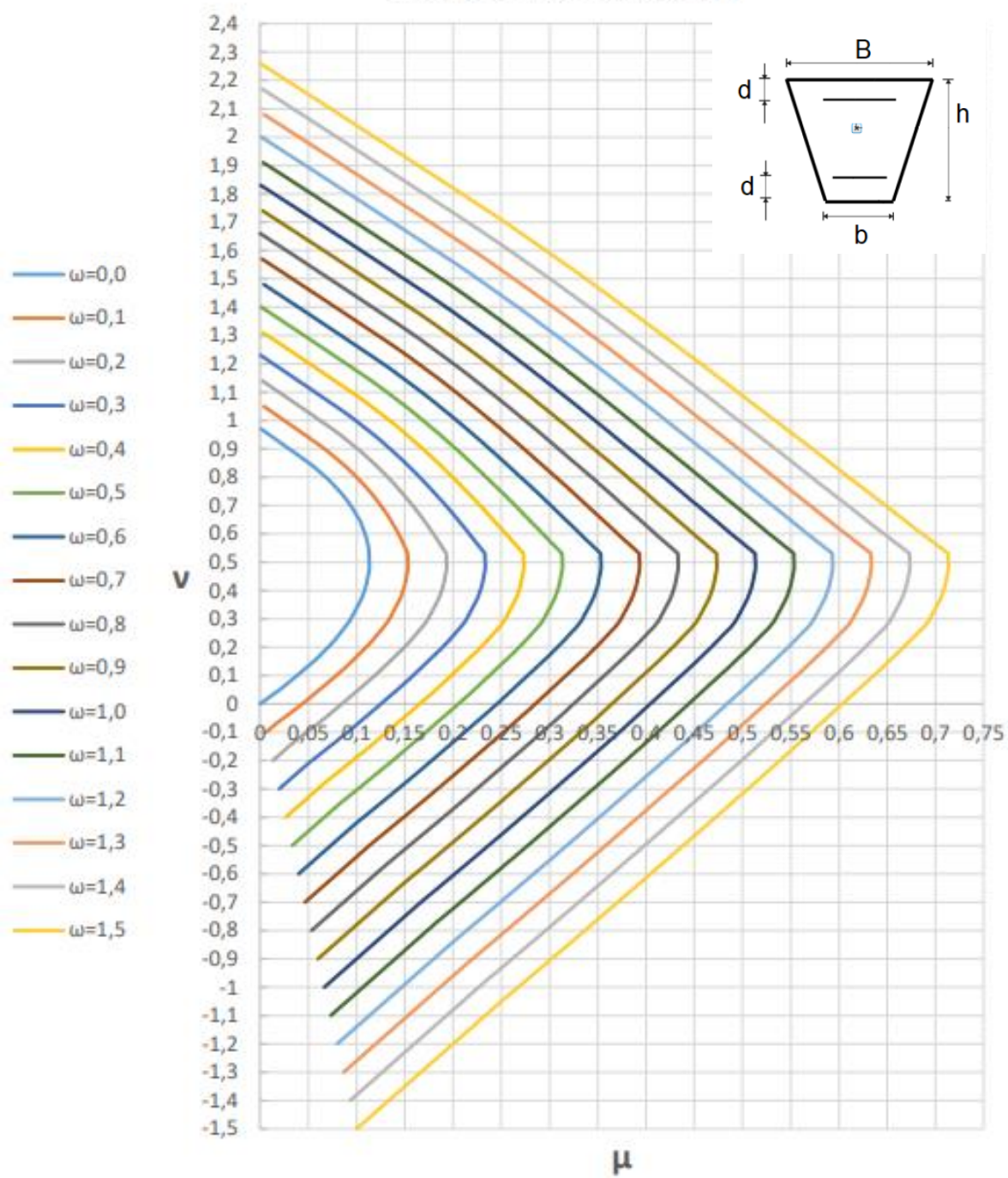


**Flexão Composta, CA-50,  $d'/h=0,15$**

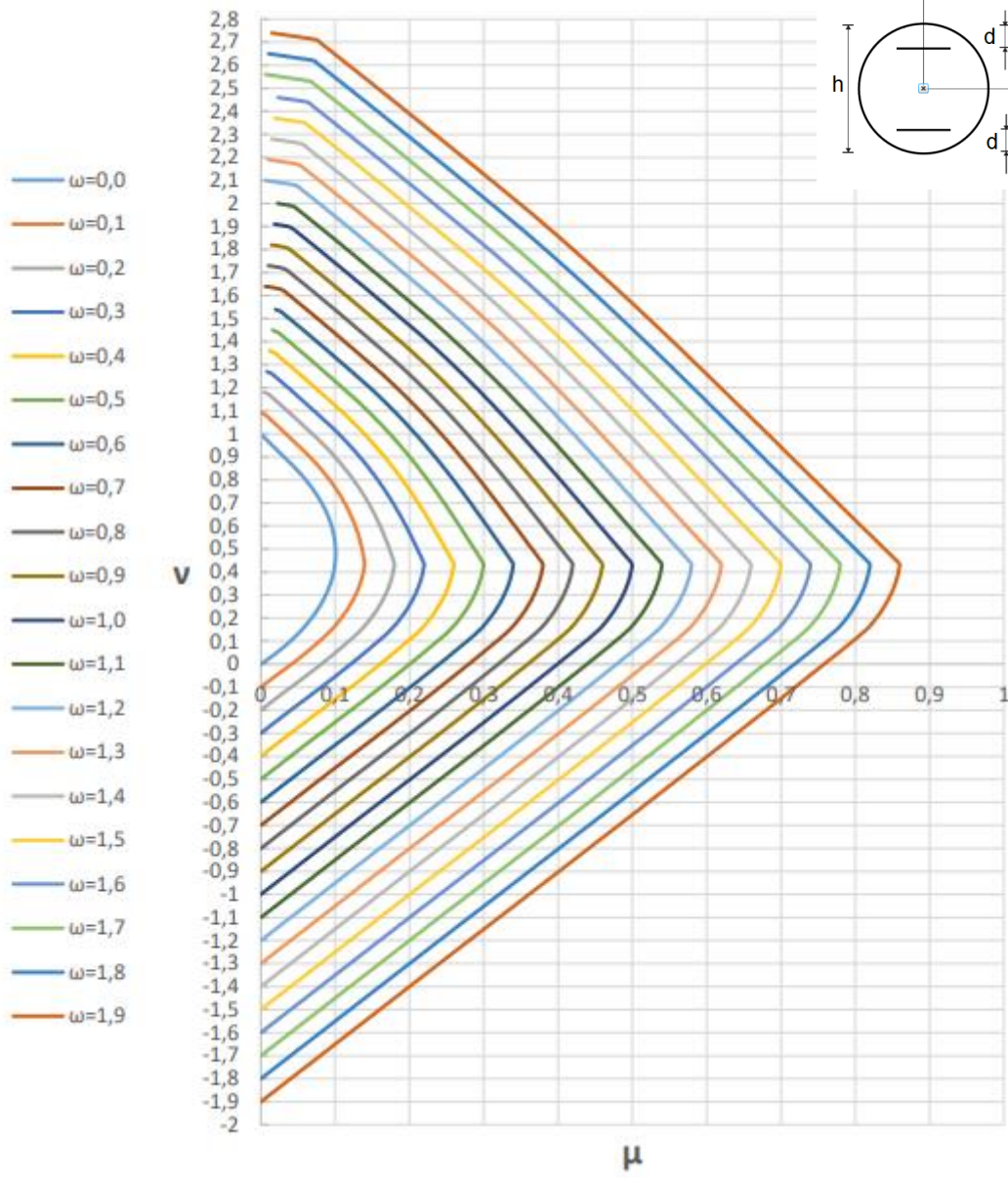




### Flexão Composta, CA-50



### Flexão Composta, CA-50



*Flexão Composta, CA-50,  $d'/h=0,05$*

