

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS – ICSA
BACHARELADO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

**O Modelo de Cobweb: uma aplicação do método de
aprendizagem Sondar e Ajustar**

GRAZIELE SILVEIRA DIAS



Mariana

2023

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS – ICSA
BACHARELADO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

GRAZIELE SILVEIRA DIAS

**O Modelo de Cobweb: uma aplicação do método de
aprendizagem Sondar e Ajustar**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito para o título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea

Mariana

2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

D541m Dias, Grazielle Silveira.

O Modelo de Cobweb [manuscrito]: uma aplicação do método de aprendizagem Sondar e Ajustar. / Grazielle Silveira Dias. - 2023.
50 f.: il.: color., tab.. + Descrição do modelo computacional.

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas. Graduação em Ciências
Econômicas .

1. Economia. 2. Modelos econométricos. 3. Preços. I. Barrenechea,
Martin Harry Vargas. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 338

Bibliotecário(a) Responsável: Essevalter De Sousa - Bibliotecário Coordenador
CBICSA/SISBIN/UFOP-CRB6a1407



FOLHA DE APROVAÇÃO

Graziele Silveira Dias

O modelo de Cobweb: Uma aplicação do método de aprendizagem sondar e ajustar.

Monografia apresentada ao Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovada em 30 de maio de 2023

Membros da banca

Prof. Dr. - Martin Harry Vargas Barrenechea (Orientador) - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Carlos Eduardo da Gama Torres - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Alan André Borges da Costa - Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. - Martin Harry Vargas Barrenechea, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 05/06/2023



Documento assinado eletronicamente por **Martin Harry Vargas Barrenechea, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/06/2023, às 14:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0536516** e o código CRC **70D0C3B1**.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente e principalmente a Deus por ter me concedido a oportunidade de entrar em uma universidade e agora a graça de me formar. Por todas as bênçãos, força, esperança e paciência concedidas durante toda esta trajetória.

Aos meus familiares e amigos por todo apoio e incentivo. Em especial aos meus pais, Carlos e Márcia, e irmãos, Gabriel e Juliana, que sempre me motivaram a estudar e a desejar grandes realizações. Aos meus tios, José Silvano e Marcilena, e primos, Igor e Isadora, que me acolheram e contribuíram para a concretização deste momento.

Agradeço aos professores da UFOP pelos ensinamentos acadêmicos, profissionais e pessoais. Em especial ao professor Martin Barrenechea por toda paciência, dedicação e lições dadas durante a orientação desta monografia. Também sou grata aos professores Alan Costa e Carlos Eduardo Torres por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho e pelas críticas e contribuições.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo implementar um método de aprendizagem denominado *Probe and Adjust* no modelo baseado em agentes, teia de aranha (cobweb), e investigar se com ele as empresas são capazes de formar expectativas de preço que converjam para os valores de equilíbrio defendidos pelas expectativas racionais ou se divergem, gerando instabilidade. O modelo é detalhado pelo Protocolo ODD e as simulações são realizadas pela plataforma NetLogo. Os resultados das simulações indicam a divergência do modelo para o equilíbrio de expectativas racionais, mas evidenciam a convergência para um outro tipo de equilíbrio.

Palavras-chave: Modelo de cobweb; Sondar e Ajustar; expectativas de preço; caso estável e instável.

Abstract

This work aims to implement a learning method called *Probe and Adjust* in the agent-based model, cobweb, and investigate whether with it companies are able to form price expectations that converge to the values of balance defended by rational expectations or if they diverge, generating instability. The model is detailed by the ODD Protocol and the simulations are performed by the NetLogo platform. The simulation results indicate the divergence of the model for the rational expectations equilibrium, but show the convergence for another type of equilibrium.

Keywords: Cobweb Model; Probe and Adjust; price expectations; stable and unstable case

Lista de ilustrações

Figura 1 – Casos divergente, constante e convergente do Modelo Teia de Aranha	20
Figura 2 – Estabilidade das expectativas ingênua e adaptativa	22
Figura 3 – Interface do Modelo - NetLogo	38

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valor inicial dos parâmetros	35
Tabela 2 – Regressão linear: diferença entre os preços	40
Tabela 3 – Regressão linear da média dos últimos cem preços	40
Tabela 4 – Regressão linear do desvio-padrão dos últimos cem preços	41

Sumário

1	Introdução	11
2	Modelo de Cobweb	14
2.1	O Modelo de Cobweb	14
2.2	Modelo Original	18
2.2.1	Estabilidade	18
2.3	O Modelo de Cobweb com Expectativas Adaptativas	20
2.3.1	Estabilidade	21
2.4	O Modelo de Cobweb para Várias Empresas Tomadoras de Preços	23
2.4.1	Equilíbrio com Expectativas Recursivas de Primeira Ordem	24
3	Aprendizagem	25
3.1	Aprendizado Bayesiano	26
3.2	Aprendizado por Mínimos Quadrados	27
3.3	Aprendizado por Reforço	27
3.4	Aprendizado por Programação Genética	28
3.5	Sondar e Ajustar	28
3.6	Conclusão	29
4	Modelo Computacional	31
4.1	Finalidade e Padrões	32
4.2	Entidades, Variáveis de Estado e Escalas	33
4.3	Visão Geral do Processo e Escalonamento	33
4.3.0.1	Escolha do preço esperado	33
4.3.0.2	Determinação do preço de mercado	33
4.3.0.3	Determinação do lucro das empresas	34
4.3.0.4	Registro dos valores de lucros e preços	34
4.3.0.5	Ajuste do preço	34
4.4	Conceitos de Projeto	34
4.5	Inicialização e Dados de Entrada	35
4.6	Submodelos	36
5	Análise do Modelo Computacional	39
5.1	Protocolo das Simulações	39
5.2	Análise de Regressão	39
6	Conclusões	42

Referências	44
Apêndices	47
APÊNDICE A Código completo do programa em NetLogo	48

1

Introdução

Cobweb é um modelo matemático dinâmico com aplicações no comportamento econômico. Ele descreve como a tomada de decisão das firmas — digamos, firmas produtoras de mercadorias agrícolas — em relação ao volume de quantidade a ser produzida é formada. O modelo considera uma defasagem de tempo significativa entre a fabricação e a venda, assim, entre a decisão de produção e a observação do preço de mercado, e entre uma mudança no preço e a mudança na produção.

Para isso, o modelo assume um mercado competitivo, produtor de um único bem, cuja produção é completamente determinada pela resposta das firmas ao preço. De forma que as firmas assumem expectativas ingênuas e homogêneas ao definir o volume de produção do período t com base nas suposições de que o preço anterior (do período $t - 1$) permanecerá o mesmo e que seus planos de produção não afetarão o mercado (EZEKIEL, 1938)¹. Com o preço de mercado, necessariamente flexível, se formando e ajustando pela demanda.

Destarte, a finalidade do modelo é analisar se essas decisões de produção das firmas podem ou não tender para um equilíbrio, levando em conta os ciclos de resposta formados em reação aos vários fatores externos e limitantes da produção — como as variações naturais —, que tendem a provocar em altas ou indevidamente baixas produções. Assim, estes ciclos podem resultar em três casos: *i*) Convergente, quando o equilíbrio entre a quantidade ofertada e demandada é alcançado; *ii*) Contínuo, quando as flutuações de preço e quantidade seguem um padrão indefinidamente imutável, sem que um equilíbrio seja aproximado ou alcançado; e *iii*) Divergente, quando o preço se afasta progressivamente do ponto de equilíbrio.

A forma como as empresas vão definir as suas expectativas de preço, se usando expectativas ingênuas, adaptativas ou racionais e/ou se implementadas, conjuntamente, a um método de aprendizagem, impactam no resultado a ser alcançado. Desde o surgimento do modelo, vários

¹ Ezekiel, M., The cobweb theorem, The quarterly journal of economics, 52 (2), 255–280, 1938.

autores como [NERLOVE \(1958\)](#)², [FERGUSON \(1960\)](#)³, [MUTH \(1961\)](#)⁴, [BRAY; SAVIN \(1986\)](#)⁵ e [HOMMES; SORGER \(1998\)](#)⁶, testam estas diferentes possibilidades. Um ponto de descoberta e maior concordância que estes estudos permitem chegar é que, os agentes formam suas expectativas baseados em heurísticas de previsão simples e com apoio de observações passadas, sendo estes capazes de aprender ao longo do tempo com os erros passados, o que conduz os seus comportamentos para algo próximo do racional (possibilidade de atingir o equilíbrio de mercado) ([EVANS; HONKAPOHJA, 2001](#))⁷. Entretanto, o método de aprendizagem a ser empregado que melhor representa a realidade analisada — permitindo esta aproximação a racionalidade — ainda não é consenso entre os estudiosos do modelo.

Por isso, tornou-se interesse deste trabalho contribuir para a Teoria Teia de Aranha, empregando o procedimento heurístico de aprendizagem *Probe and Adjust* exercido por [KIM-BROUGH; MURPHY \(2008\)](#)⁸, com o objetivo de analisar se este pode ser considerado um bom representante da realidade apresentada no modelo de cobweb. Classificado como um método simples de aprendizado, é considerado um algoritmo de linha de busca que visa encontrar a direção da melhoria, adentrá-la e investigá-la, avaliando o benefício deste movimento.

Para realização da investigação, usou-se como base a versão do modelo teia de aranha empregada por [ARIFOVIC \(1994\)](#)⁹ em seu artigo “Genetic algorithm learning and the cobweb model”, que considera empresas com função de custo e maximizadoras de lucro. O modelo foi implementado e simulado no *software* livre NetLogo, tendo suas informações e processos detalhadas pelo Protocolo ODD.

Além desta introdução, a monografia é constituída por cinco capítulos. No primeiro deles (Capítulo 2), é apresentada informações sobre o modelo de cobweb, detalhando o seu surgimento, complementos ocorridos ao longo do tempo, a sua estrutura original e algumas derivações. No Capítulo 3, são abordados os modelos de aprendizagem, exibindo brevemente alguns exemplos e o utilizado no estudo. Seguido da descrição do modelo computacional pelo protocolo ODD e a implementação na plataforma NetLogo. No quinto capítulo são realizadas simulações e análise estatística dos dados como forma de verificar a estabilidade do modelo, analisando o caso estável

² Nerlove, M., Adaptive expectations and cobweb phenomena, *The Quarterly Journal of Economics*, 72 (2), 227–240, 1958

³ Ferguson, C., Learning, expectations, and the cobweb model, *Zeitschrift für National ökonomie*, 20 (3-4), 297–315, 1960.

⁴ Muth, J. F., Rational expectations and the theory of price movements, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 315–335, 1961.

⁵ BRAY, Margaret M.; SAVIN, Nathan E. Rational expectations equilibria, learning, and model specification. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 1129-1160, 1986.

⁶ HOMMES, C.; SORGER, G. Consistent expectations equilibria. *Macroeconomic Dynamics*, Cambridge University Press, v. 2, n. 3, p. 287–321, 1998

⁷ Evans, G. W., and S. Honkapohja, *Learning and expectations in macroeconomics*, 1-44 pp., Princeton University Press, 2001

⁸ Kimbrough, S. O., and F. H. Murphy, Learning to collude tacitly on production levels by oligopolistic agents, *Computational Economics*, 33 (1), 47–78, doi:10.1007/s10614-008-9150-6, 2008.

⁹ Arifovic, J., Genetic algorithm learning and the cobweb model, *Journal of Economic dynamics and Control*, 18 (1), 3–28, 1994.

e instável, alterando os valores dos parâmetros. Por fim, são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2

Modelo de Cobweb

2.1 O Modelo de Cobweb

O modelo de cobweb ou modelo da teia de aranha, é considerado um dos mais antigos modelos matemáticos dinâmicos de comportamento econômico (FERGUSON, 1960). Embora a descrição do mecanismo do ciclo recorrente na produção e preços de mercadorias específicas anteceda o surgimento do modelo, com várias explicações parciais, uma explicação teórica definitiva foi estabelecida com a criação do teorema da teia de aranha, a partir do incômodo de três economistas com a aparente incoerência entre esse persistente ciclo observado e a tendência de equilíbrio entre as curvas de oferta e demanda proposta pela teoria econômica clássica.

SCHULTZ (1930)¹, RICCI (1930)² e TINBERGEN (1930)³ descobriram este mecanismo de forma independente, seguindo o mesmo princípio básico de realizar ajustes entre preços e produção, conforme a quantidade ofertada e demandada. A demonstração mais simples foi a de SCHULTZ (1930), apresentando um exemplo do tipo convergente, plotando a série temporal resultante de preços e quantidades, visando ilustrar a diferença entre o ajuste simultâneo e o reajuste atrasado da oferta e demanda. TINBERGEN (1930) exibiu uma análise mais completa, demonstrando tanto o tipo convergente quanto o divergente, buscando explicar que, ao invés do equilíbrio ser alcançado, um movimento contínuo de preços e produção é possível se a resposta da produção fica atrás da mudança de preço. A análise de RICCI (1930) apresentou todos os três tipos básicos: convergente, divergente e contínuo; objetivando destacar a importância dos valores das elasticidades da oferta e demanda, uma vez que, diferentes consequências econômicas podem decorrer de pequenas mudanças em seus valores numéricos.

Posteriormente às publicações destes estudos, a teoria teia de aranha foi explorada e

¹ Schultz, H., Der sinn der statistischen nachfragen, 1930

² Ricci, U., Die "synthetische ökonomie" von henry ludwell moore, Zeitschrift für National ökonomie, 1 (5), 1930

³ Tinbergen, J., Bestimmung und deutung von angebotskurven ein beispiel, Zeitschrift für National ökonomie, 1 (5), 669–679, 1930

implementada pelos economistas: LEONTIEF (1934)⁴, que mostrou como uma série convergente ou divergente pode ser produzida através de um conjunto de curvas de oferta ou demanda que possuem formas erráticas; KALDOR (1934)⁵ que além de ser o autor responsável pelo nome Cobweb dado ao modelo ⁶, relacionou a teoria teia de aranha com a determinação do equilíbrio nos casos onde os ajustes são completamente descontínuos; e COASE; FOWLER (1935)⁷ que a usou como explicação teórica para o ciclo do porco na Inglaterra.

As primeiras afirmações de análise do modelo foram introduzidas apenas inicialmente, de tal modo que, nenhum dos autores considerou o significado mais amplo da teoria de cobweb nem realizou maiores esclarecimentos da sua relação com a teoria econômica neoclássica e com a análise estatística de preços, sendo este realizado posteriormente no famoso artigo expositivo “The cobweb theorem” de Mordecai Ezekiel (1938). Ele foi o primeiro a analisar explicitamente as expectativas e sua influência na estabilidade do equilíbrio⁸, propondo-se a mostrar que enquanto a teoria clássica se baseia na suposição de que preço e produção se perturbados de seus equilíbrios tendem a gravitar de volta para aquele normal, na teoria de cobweb, mesmo em condições estáticas, por assumir expectativas de preços, esses resultados podem não ocorrer, tendendo na verdade a flutuar indefinidamente ou a divergir cada vez mais do equilíbrio.

Também estabeleceu limitações para a aplicação da teoria de cobweb, de modo que ela só poderia ocorrer se três condições fossem satisfeitas: a) a produção é determinada pela reação dos produtores ao preço sob as condições de concorrência pura, com os produtores possuindo como base para a tomada de decisão a ideia de que os preços atuais continuarão e que seus planos de produção não afetarão o mercado; b) é preciso um tempo mínimo de um período completo para produção, antes desta ser alterada e; c) o preço é definido pela oferta disponível.

O trabalho de EZEKIEL (1938) permitiu que o modelo de cobweb fosse amplamente conhecido e investigado no mundo de língua inglesa. Durante esse período, a forma matemática utilizada foi associada a diferenças lineares e equações diferenciais. Segundo FERGUSON (1960), isso ocorreu não por os economistas acreditarem que todas as equações de demanda e oferta

⁴ LEONTIEF, Wassily W. Verzögerte angebotsanpassung und partielles gleichgewicht. Zeitschrift für Nationalökonomie/Journal of Economics, p. 670-676, 1934.

⁵ Kaldor, N., A classificatory note on the determinateness of equilibrium, The review of economic studies, 1 (2), 122-136, 1934.

⁶ Aparentemente o nome Cobweb foi sugerido pela primeira vez por Kaldor em seu artigo “A Classificatory Note on the Determinateness of Equilibrium”, Rev. of Econ. Studies, vol. 1, p. 122, feb 1934.

⁷ COASE, Ronald H.; FOWLER, Ronald F. Bacon production and the pig-cycle in Great Britain. Economica, v. 2, n. 6, p. 142-167, 1935.

⁸ De acordo com EVANS; HONKAPOHJA (2001), as primeiras referências a expectativas ou previsões econômicas é antiga, datada dos antigos filósofos gregos. As teorias e análises econômicas sistemáticas nas quais as expectativas possuem maior importância começam no tratamento de crédito em Henry Thornton (1802) e na formulação de Émile Cheysson (1887) de uma estrutura com características do ciclo da “teia de aranha”. Os economistas clássicos também apresentaram algumas discussões sobre, mas enquanto estavam interessados em teorias de acumulação de capital e crescimento econômico, defendendo que a economia permanecia em um estado estacionário, as expectativas tiveram sua importância minimizada por eles. Alfred Marshall deu maior relevância para o assunto, introduzindo noção de curto e longo prazo e de expectativas estáticas de preços na abordagem clássica, mas não tinha uma teoria dinâmica completa como a apresentada por Ezekiel.

fossem lineares mas, por a linearidade permitir estabelecer um modelo matemático solúvel. Ao atribuir esta característica ao modelo, defende-se que a solução da teia de aranha (original) deve resultar no equilíbrio ou explodir. Porém, por não haver choques aleatórios na literatura inicial, surgiu o questionamento entre os economistas, se a série gerada por tal modelo seria capaz de convergir para o estado estacionário ao longo do tempo.

Na tentativa de obter resultados mais próximos à realidade observada, três autores se destacam: [GOODWIN \(1947\)](#)⁹ mostrando como as oscilações se mantêm através da introdução de choques exógenos resultantes do acoplamento unilateral de um determinado mercado com o resto da economia; [HOOTON \(1950\)](#)¹⁰ com ferramentas geométricas exibe uma oscilação perpétua ao invés de explosiva, decorrente de mudanças no risco e da possibilidade de especulação; e [ÅKERMAN \(1957\)](#)¹¹ que também defendeu oscilações não explosivas, porém, através das diferentes elasticidades do mercado, principalmente da oferta de curto e longo prazo.

Em conjunto com a linearidade, a expectativa — considerada como expectativa ingênua — assumida no modelo de [EZEKIEL \(1938\)](#) foi motivo de crítica por muitos autores. Sua suposição do produtor manter permanentemente a mesma expectativa de preço mesmo quando essa não corresponde ao comportamento dos preços de mercado, demonstrou ser algo não aplicável na realidade, uma vez que, os empresários (ao menos os bem-sucedidos) aprenderiam com os resultados do mercado criando sua própria interpretação dos movimentos de preços, modificando assim as suas expectativas ([FERGUSON, 1960](#)). Partindo disso, outros tipos de expectativas foram incorporadas no modelo original.

A expectativa adaptativa teve sua origem dada por [FISHER \(1930\)](#)¹², sendo formalmente introduzida no modelo na década de 1950 por [CAGAN \(1956\)](#)¹³; [FRIEDMAN \(1957\)](#)¹⁴ e [NERLOVE \(1958\)](#). Neste tipo de modelagem os agentes consideram os preços passados na formação das expectativas dos preços esperados de equilíbrio, porém não dão total peso a um determinado preço. Acreditam em uma certa variação, de forma que, ao perceber erros cometidos ajustam suas expectativas para o próximo período utilizando os erros de previsão,

$$\lambda(p_{t-1} - p_{t-1}^e) \tag{2.1}$$

seja λ uma constante de proporcionalidade denominada coeficiente de expectativas.

Essa expectativa também foi criticada por parte de alguns autores. Eles observaram que ela, em determinados contextos, pode fornecer previsões precárias e que pode haver melhores regras

⁹ GOODWIN, Richard M. Dynamical coupling with especial reference to markets having production lags. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, p. 181-204, 1947.

¹⁰ HOOTON, F. G. Risk and the cobweb theorem. *The Economic Journal*, v. 60, n. 237, p. 69-80, 1950.

¹¹ ÅKERMAN, Gustav. The cobweb theorem: A reconsideration. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 71, n. 1, p. 151-160, 1957.

¹² FISHER, I. *The theory of interest*. Macmillan, New York, 1930.

¹³ CAGAN, P. *The monetary dynamics of hyperinflation*. Studies in the Quantity Theory of Money, University of Chicago Press, 1956.

¹⁴ FRIEDMAN, M. *Theory of the consumption function*. Princeton University Press.

de previsão prontamente disponíveis. Diante disso, as expectativas racionais foram implementadas no modelo, sendo esta de fato um conceito de equilíbrio (EVANS; HONKAPOHJA, 2001). Os trabalhos pioneiros dessa expectativa são de MUTH (1961) e LUCAS (1972)¹⁵. Uma das contribuições de MUTH (1961) foi especificar os pontos base principais da expectativa racional, que são: *i*) a informação é escassa e geralmente o sistema econômico não a desperdiça; e *ii*) o modo como as expectativas são formadas depende, especificamente, da estrutura do sistema relevante que descreve a economia. LUCAS (1972) parte do modelo de MUTH (1961), concordando com a crítica ao sistema de expectativas adaptativas, confirma que os agentes usam seus conhecimentos econômicos e as informações disponíveis para formar suas expectativas.

O método ótimo de previsão passa a depender do processo estocástico, seguido pela variável que está sendo prevista, e isso implica em uma interdependência entre o método de previsão e o modelo econômico que deve ser resolvido explicitamente através de

$$p_t^e = E_{t-1}p_t \quad (2.2)$$

em que $E_{t-1}p_t$ é a esperança matemática de p_t condicionada às variáveis observadas no período $t - 1$, incluindo dados passados.

Assim, o processo estocástico real seguido pelos preços depende das regras de previsão empregadas pelos agentes, de modo que a escolha ótima da regra de previsão por qualquer agente esteja condicionada às escolhas dos outros. Isso ocorre devido ao fato do equilíbrio de expectativas racionais impor a condição consistente de que a escolha de cada agente é a melhor resposta às escolhas dos demais (EVANS; HONKAPOHJA, 2001).

O sistema de expectativas admite algumas hipóteses fortes, como a de que os agentes estimam modelos corretos, de forma que os erros de previsão são limitados a erros aleatórios; e que as expectativas são formadas homogeneamente, pois todos os agentes utilizam da mesma capacidade tecnológica e possuem um contexto informacional semelhante. Mas, na realidade, o conhecimento econômico dos tomadores de decisão é limitado, eles cometem erros sistemáticos de previsão, usam informações fragmentadas acreditando que lhes permitirão obter o melhor resultado ao menor custo (MIKOŁAJEK-GOCEJNA, 2014)¹⁶. Por isso, foi incorporado na década de 1990 o comportamento de aprendizagem na formação de expectativas e este vem sendo cada vez mais estudado. A aprendizagem e a heterogeneidade das expectativas são pontos relevantes e não devem ser ignorados pelas teorias expectacionais.

¹⁵ LUCAS JR, Robert E. Econometric Testing of the Natural Rate Hypothesis, in O. Eckstein, ed., *The Econometrics of Price Determination*, Washington: Board of Governors of the Federal Reserve System, pages 50–59, 1972.

¹⁶ Mikolajek-Gocejna, M., *Expectations in the theory of economics, Investor Expectations in Value Based Management: Translated by Klementyna Dec and Weronika Mincert*, pp. 35–46, 2014.

2.2 Modelo Original

O modelo simples de cobweb é um modelo de mercado que representa n firmas produtoras de um único bem e tomadoras de preços. Elas necessitam decidir a produção deste bem, em cada período de tempo, antes de conhecerem o preço de mercado, baseando-se em expectativas ingênuas (EZEKIEL, 1938), ou seja, o preço esperado para um período de tempo t é igual ao preço do período $t - 1$.

A partir do exposto acima, a base do modelo é dado pelas três equações (FERGUSON, 1960):

$$Q_{d,t} = a + bP_t \quad (2.3)$$

$$Q_{s,t} = \alpha + \beta P_{t-1} \quad (2.4)$$

$$Q_{d,t} = Q_{s,t} \quad (2.5)$$

onde $Q_{d,t}$ e $Q_{s,t}$ são as quantidades demandada e ofertada, respectivamente, do período de tempo t . P é o preço, variando sua representação para cada período de tempo P_t e P_{t-1} . O a , α e β são constantes positivas e b é uma constante presumivelmente negativa, considerando que um aumento nos preços tende a diminuir a demanda.

Substituindo as equações 2.3 e 2.4 na equação 2.5, produz a equação diferencial de primeira ordem

$$P_t = \frac{\beta}{b} P_{t-1} + \frac{\alpha - a}{b} \quad (2.6)$$

O preço de equilíbrio \bar{P} é estabelecido quando $P_t = P_{t-1}$, assim:

$$\bar{P} = \frac{\alpha - a}{b - \beta} \quad (2.7)$$

A solução para a equação de diferença de primeira ordem (2.4) é

$$P_t = \frac{\alpha - a}{b - \beta} + \left(\frac{\beta}{b}\right)^t \left[P - \frac{\alpha - a}{b - \beta} \right] \quad (2.8)$$

2.2.1 Estabilidade

O comportamento da sequência de preços descrita na equação 2.8 é determinado pela relação entre as inclinações das curvas de oferta e demanda. Por $b < 0$ e $\beta > 0$, $(\beta/b) < 0$, os valores do preços e da quantidade vão reduzir e aumentar de forma alternada, atingindo o

equilíbrio apenas quando $|\beta/b| < 1$. Os outros três cenários possíveis assumidos pelo modelo são:

i **Divergente** - $\beta/b < -1$:

Também denominado de Instável ou Explosivo, ocorre quando a curva de oferta possui maior inclinação que a curva de demanda, em relação ao eixo dos preços. Representado na Figura 1, painel (a), observa-se que o preço inicial P_0 leva os produtores a colocarem uma quantidade moderadamente grande no mercado Q_1 . Olhando para a curva de demanda, em resposta, o preço tende a subir para P_1 visando racionalizar essa quantidade. O preço elevado estimula a produção de mais quantidades Q_2 para o próximo período. O ajuste entre a oferta e demanda faz com que o preço caia para P_2 e assim, posteriormente, que a quantidade ofertada também caia para Q_3 no período 3. Assim segue o ciclo, com a sequência para P_t aumentando indefinidamente em valor absoluto, oscilando explosivamente, fazendo com que cada ajuste consecutivo afaste o mercado do equilíbrio, tornando-o cada vez mais instável.

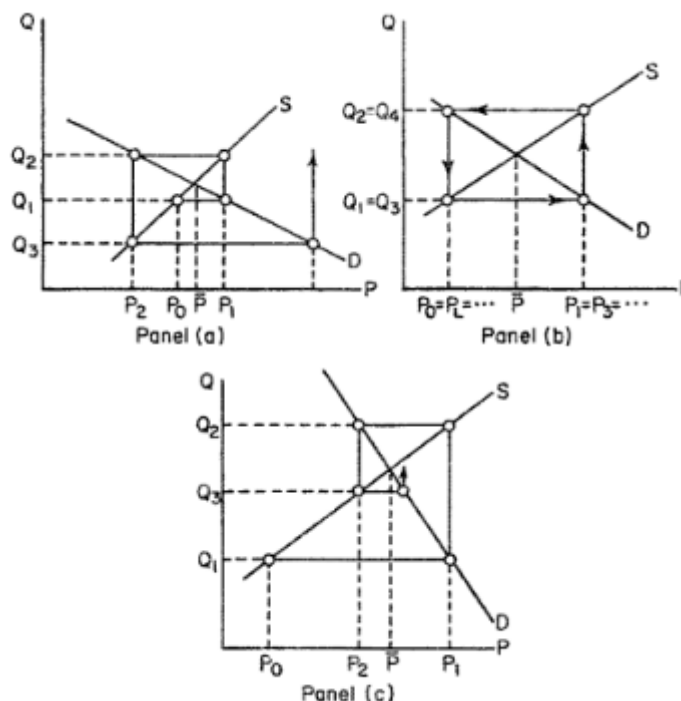
ii **Contínuo** - $\beta/b = -1$:

Decorre quando a curva de oferta e demanda têm a mesma inclinação. Diferente do caso anterior, não há divergência ou mesmo convergência para o equilíbrio de mercado, as flutuações no preço e produção seguem um padrão imutável indefinidamente. As quantidades e os preços alternam entre valores relativamente baixos e altos, como indicados na Figura 1, painel (b) por Q_1 e Q_2 e por P_0 e P_1 , respectivamente. Segundo [EZEKIEL \(1938\)](#), por a curva de demanda ser exatamente o inverso da curva de oferta, este cenário imutável permanecerá enquanto o preço for completamente definido pela oferta atual e a oferta for completamente definida pelo preço anterior.

iii **Convergente** - $-1 < \beta/b < 0$:

Ou caso Estável, representa a situação em que a curva de demanda apresenta maior inclinação do que a curva de oferta, fazendo com que os valores dos preços e das quantidades subam e desçam alternadamente, mas agora indo no sentido do preço de equilíbrio de mercado. O painel (c) da Figura 1, inicia com um P_0 baixo acompanhado de Q_1 baixa, que resulta num preço no período 2 mais elevado P_1 seguido de uma quantidade maior em resposta $Q_2 \dots$, continuando este fluxo até atingir \bar{P} . Quanto mais íngreme for a curva de demanda em relação a de oferta, menor é a oscilação e mais rápida a tendência de P_t atingir \bar{P} . Tendo a perturbação inicial, similarmente o mesmo efeito sobre a amplitude da oscilação, apresentando maiores alternâncias e levando mais tempo para desaparecer, quanto mais longe estiver P_0 de \bar{P} ([ALLEN, 1959](#)).

Figura 1 – Casos divergente, constante e convergente do Modelo Teia de Aranha



Fonte: FERGUSON (1960, P. 301)

2.3 O Modelo de Cobweb com Expectativas Adaptativas

A expectativa possui um papel importante no estudo econômico, principalmente nos modelos econômicos dinâmicos. Entretanto, são poucas as evidências de que as relações presumidas tenham alguma semelhança com o funcionamento da economia (MUTH, 1961, p.315). Não sendo diferente, o modelo teia de aranha não tem um consenso entre os autores sobre a forma de definir o preço, possuindo numerosas versões com diferentes expectativas de preços e, em complemento, com divergentes métodos de aprendizagem que são empregados para descrever a maneira como os agentes tomam decisões sobre seu comportamento econômico.

Em seu artigo expositivo, “Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena”, NERLOVE (1958) traz uma versão de expectativas adaptativas para o modelo de cobweb. As expectativas de preços futuros adota por EZEKIEL (1938) são resultados de movimentos dos preços passados — expectativas induzidas — nas de NERLOVE (1958) os agentes também os consideram para a formação de preços, porém não dão total peso a eles, deduzindo uma parte do aumento por não acreditarem na permanência de toda a mudança. Isso permite supor que a oferta dos produtores depende de muitos preços passados, sendo o efeito de uma mudança de preço distribuída por muitos períodos.

Por conseguinte, os produtores vão revisar suas expectativas anteriores de preços em

cada período embasados na proporção da diferença entre o preço real e o normal ¹⁷. Como apresentado abaixo, com P_t^* sendo o preço “normal” esperado no período t e β uma constante de proporcionalidade, nomeada como coeficiente de expectativas

$$P_t^* - P_{t-1}^* = \beta[P_{t-1} - P_{t-1}^*], 0 < \beta \leq 1 \quad (2.9)$$

Ao aplicar esta expectativa no problema de instabilidade de um único mercado, a curva de demanda se mantém e a curva de oferta se modifica

$$q_t^D = a + bP_t \quad (2.10)$$

$$q_t^S = c + dP_t^* \quad (2.11)$$

Atrasando a equação de oferta um período, substituindo por q_{t-1}^S em 2.9, resolvendo e substituindo o resultado na função de oferta tem-se

$$q_t^S = c\beta + d\beta P_t^* + (1 - \beta)q_{t-1}^S \quad (2.12)$$

Assumindo que o mercado está sempre em equilíbrio no curto prazo; ao defasar a curva de demanda um período e substituir tudo na equação 2.12, tem-se

$$\begin{aligned} q_t &= c\beta + d\beta p_{t-1} + (1 - \beta)[a + bP_{t-1}] \\ &= (c - a)\beta + a + [(d - b)\beta + b]P_{t-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Chegando na equação diferencial de primeira ordem em P_t

$$P_t - \left[\left(\frac{d}{b} - 1 \right) \beta + 1 \right] P_{t-1} = \frac{(c - a)\beta}{b} \quad (2.14)$$

2.3.1 Estabilidade

A equação diferencial de primeira ordem do preço 2.14 pode ser resolvida em termos das condições iniciais e dos parâmetros constantes a , b , c , d e β . Com P_0 sendo o preço de equilíbrio e $P \neq P_0$ o preço inicial resultante de um deslocamento da curva de demanda.

$$P_t = P_0 + (P_0 - P) \left[\left(\frac{d}{b} - 1 \right) \beta + 1 \right]^t \quad (2.15)$$

O último termo a direita tenderá a zero à medida que t se eleva — se em módulo for menor que 1 — sendo essa uma condição necessária e suficiente para alcançar o retorno ao equilíbrio.

$$\left| \left(\frac{d}{b} - 1 \right) \beta + 1 \right| < 1 \quad (2.16)$$

¹⁷ Segundo EZEKIEL (1938), o preço normal é aquele ao qual o preço de mercado tenderia a se estabelecer durante um período de tempo grande o suficiente para trazer equilíbrio entre as quantidades demandadas e as ofertadas.

Reescrevendo

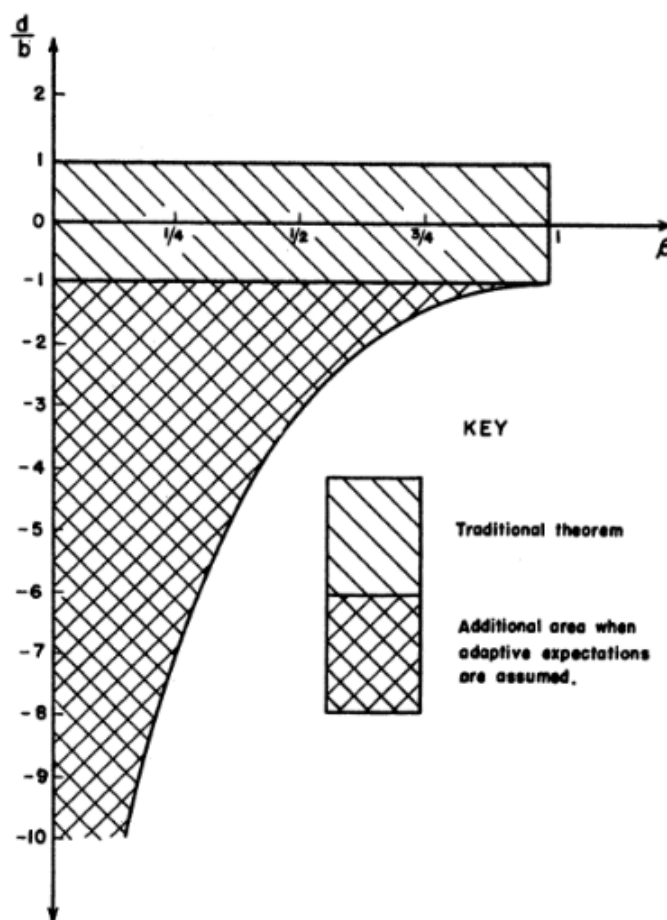
$$1 - \frac{2}{\beta} < \frac{d}{b} < 1 \tag{2.17}$$

Supondo $\beta > 0$. Chega-se ao resultado tradicional da teia de aranha

$$-1 < \frac{d}{b} < 1 \tag{2.18}$$

Quando $\beta = 1$, a equação 2.9 também se reduz a $P_t^* = P_{t-1}$, acarretando na redução do modelo aqui apresentado ao modelo teia de aranha original ¹⁸.

Figura 2 – Estabilidade das expectativas ingênua e adaptativa



Fonte: NERLOVE (1958, P. 234).

Quando β não é um, a faixa compatível com a estabilidade do modelo se amplia, incluindo a área duplamente hachurada, em relação a faixa de estabilidade do modelo original — área

¹⁸ O mesmo resultado foi encontrado pelo autor em um modelo alternativo baseado na tradicional distinção Marshalliana entre corridas longas e curtas. Esta distinção entre as elasticidades de oferta de longo e curto prazo geralmente é baseada nas elasticidades de oferta de certos fatores para a empresa. A discussão é que no curtíssimo prazo a maioria ou todos os fatores de produção são fixos, sendo estas restrições removidas sucessivamente com o passar do tempo.

hachurada entre 1 e -1 —, como pode ser visto na Figura 2. Isso ocorre porque a maior parte da elasticidade positiva da oferta e a negativa da demanda são compatíveis com a estabilidade quando β é baixo.

NERLOVE (1958) observa que embora a possibilidade de estabilidade seja maior quando as expectativas adaptativas são empregadas, não há certeza de que a estabilidade sempre ocorrerá, sendo isso dependente da relação entre as inclinações da curva de demanda e das curvas de oferta “normais de longo prazo” e do coeficiente de expectativas.

2.4 O Modelo de Cobweb para Várias Empresas Tomadoras de Preços

O modelo apresentado por ARIFOVIC (1994) em seu artigo “Genetic algorithm learning and the cobweb model”, considera um mercado com características embasadas nas teorias de EZEKIEL (1938), onde os agentes supõem que a sua própria produção não afetarà o mercado. Nele contém um número n de empresas que produzem uma mesma mercadoria e competem no mesmo mercado. A única decisão de cada empresa i é escolher a quantidade q_i a ser produzida no tempo t , com base em um preço esperado P_t^e . As expectativas são escolhidas usando algoritmos genéticos e o *fitness* (valor do lucro) delas são calculados usando o preço do período anterior.

A estrutura de custo ($C_{i,t}$) de cada empresa é dada por,

$$C_{i,t} = xq_{i,t} + yn\frac{q_{i,t}^2}{2} \quad (2.19)$$

Assim o lucro ($\Pi_{i,t}^e$) da empresa tomadora de preços será

$$\Pi_{i,t}^e = P_{i,t}^e q_{i,t} - C_{i,t} \quad (2.20)$$

O lucro é maximizado com a escolha da quantidade ($q_{i,t}^*$) que faz com que o custo marginal se iguale ao preço esperado, assim

$$q_{i,t}^* = \frac{P_{i,t}^e - x}{ny} \quad (2.21)$$

Após a produção simultânea de todas as empresas, as mercadorias são postas no mercado.

$$\sum_{i=1}^n q_{i,t} = Q^S \quad (2.22)$$

O preço (P_t) é dado pela função de demanda inversa.

$$P_t = A - BQ^D \quad (2.23)$$

O sistema, neste caso, se ajusta igualando a demanda e oferta ($Q^* = Q^D = Q^S$) e dessa maneira é obtido o preço

$$P_t^* = A - BQ^* \quad (2.24)$$

A forma como as empresas determinam suas expectativas determinará a solução deste sistema.

2.4.1 Equilíbrio com Expectativas Recursivas de Primeira Ordem

Se todas empresas tem a mesma expectativa de que o preço esperado $P_{i,t}^e$ se iguala ao preço do período anterior P_{t-1} , a quantidade escolhida que maximiza o lucro $q_{i,t}^*$ e a curva de oferta Q^S serão dadas por

$$q_{i,t}^* = \frac{P_{t-1} - x}{ny} \quad (2.25)$$

$$Q^S = \frac{P_{t-1} - x}{y} \quad (2.26)$$

e a demanda se mantém como

$$Q^D = \frac{A}{B} - \frac{1}{B}P_t \quad (2.27)$$

Igualando oferta e demanda,

$$\frac{P_{t-1} - x}{y} = \frac{A}{B} - \frac{1}{B}P_t \quad (2.28)$$

o preço de mercado P_t passa a ser definido por uma equação de diferenças de primeira ordem

$$P_t = \left(A + \frac{xB}{y}\right) - \frac{B}{y}P_{t-1} \quad (2.29)$$

Assumindo que existe uma divergência entre o preço atual de mercado e o preço do período anterior, torna-se uma condição necessária para retornar ao equilíbrio estável que $0 < \frac{B}{y} < 1$.

Encontra-se a função do preço de equilíbrio quando $P_t = P_{t-1}$

$$P^* = \frac{yA + xB}{y + B} \quad (2.30)$$

Desta forma, o modelo pressupõe dois possíveis resultados para as expectativas de preço: convergir (caso estável) e divergir (caso instável), sendo estes iguais aos resultados tradicionais de cobweb.

3

Aprendizagem

As expectativas racionais pressupõem que os agentes econômicos possuem um grande conhecimento da economia. No entanto, de acordo com [EVANS; HONKAPOHJA \(2001\)](#), os valores dos parâmetros da economia não são conhecidos nem pelos economistas, que são os agentes responsáveis por realizar trabalhos empíricos que postulam expectativas racionais, sendo preciso estimá-los econometricamente. Portanto, é mais natural considerar que os agentes enfrentam as mesmas limitações de conhecimento sobre a economia, tornando uma visão mais plausível da racionalidade supor que os agentes agem como estatísticos ou econometristas ao realizar suas previsões de variáveis econômicas, admitindo a possibilidade de aprendizado ao longo do tempo e a realização de pequenos ajustes que podem ocorrer pela experiência com a previsão. Esta visão é o ponto de partida da abordagem de aprendizagem adaptativa na formação de expectativas.

O processo de aprendizagem agrega dinâmicas que não estão presentes sob a racionalidade estrita e podem ter importância empírica [...] existem várias situações em que se pode esperar que a dinâmica de aprendizagem permaneça importante ao longo do tempo. Por exemplo, se a economia sofre mudanças estruturais de tempos em tempos, então os agentes precisarão reaprender periodicamente os processos estocásticos relevantes”. ([EVANS; HONKAPOHJA, 2001](#), p. 15, tradução nossa) ¹

A abordagem da aprendizagem adaptativa supõe que, a cada momento, os agentes produzem previsões iniciais dos parâmetros formuladas com base nos dados disponíveis e revisam suas estimativas ao longo do tempo à medida que novos pontos de dados são gerados, seguindo procedimentos econométricos convencionais — como mínimos quadrados. As expectativas racionais tornam-se um equilíbrio ou ponto fixo para a dinâmica de aprendizagem, sendo

¹ “ The process of learning adds dynamics which are not present under strict rationality and they may be of empirical importance [...] there are various situations in which one can expect learning dynamics to remain important over time. As an example, if the economy undergoes structural shifts from time to time, then agents will need periodically to relearn the relevant stochastic processes.”([EVANS; HONKAPOHJA, 2001](#), p. 15)

justificada informalmente como resultado de um processo de tentativa e erro. Além de fornecer uma justificativa para as expectativas racionais, a aprendizagem adaptativa propicia verificar a robustez dos equilíbrios em relação aos erros esperados e permite a seleção entre múltiplos equilíbrios — o que é um enigma para muitos dos modelos de expectativas racionais. (EVANS; HONKAPOHJA, 2001)

A dinâmica de aprendizagem também viabiliza novas possibilidades para modelar fenômenos macroeconômicos dinâmicos e pode ter uso computacional, visto que os equilíbrios podem ser calculados numericamente com o método fornecido pelos algoritmos recursivos. Existem diversos métodos de aprendizagem que podem ser empregados em estudos computacionais baseados em agentes. Suas aplicações variam de acordo com o objetivo do estudo e da sua proximidade em representar a realidade estudada. Alguns exemplos destes modelos que se tornaram proeminentes nos estudos de economia, segundo BRENNER (2006)², são: Aprendizado Bayesiano, Aprendizado dos Mínimos Quadrados, Aprendizagem por Reforço e Programação Genética.

3.1 Aprendizado Bayesiano

O modelo assume que os agentes aprendem de forma otimizada, contendo um conjunto de hipóteses sobre a situação enfrentada, com cada hipótese indicando a probabilidade de ocorrência do evento e de um conjunto de eventos, com apenas uma hipótese representando todo estado possível de realidade. As decisões dos agentes são tomadas através do cálculo de utilidade média de cada ação, para isso, é atribuída uma utilidade a cada evento e ação e, posteriormente, o agente decide de forma a maximizar sua utilidade esperada. No fim de cada evento, as probabilidades presumidas são atualizadas: as que predizem a ocorrência do evento observado com maior chance aumentam, em contrapartida, as probabilidades presumidas das demais hipóteses diminuem.

Este é o mais antigo e proeminente modelo de aprendizagem ótima³. Apesar de com o passar dos anos poucos economistas afirmarem esta convergência ótima da aprendizagem⁴, este foi o objetivo central, por algum período de tempo, da maioria dos economistas e a maior parte da literatura econômica sobre aprendizagem contém a otimização.

² Brenner, T., Agent learning representation: advice on modelling economic learning, Handbook of computational economics, 2, 895–947, 2006.

³ Quando o comportamento do agente converge para o comportamento ótimo de equilíbrio.

⁴ Ver, por exemplo, Chiarella, C. The cobweb model: Its instability and the onset of chaos. Economic Modelling 5, 377–384, 1988; Herrnstein, R.J., Prelec, D. “Melioration: a theory of distributed choice”. Journal of Economic Perspectives 5, 137–156, 1991; Hommes, C.H. Dynamics of the cobweb model with adaptive expectations and nonlinear supply and demand. Journal of Economic Behavior and Organization 24, 315–335, 1994; Grandmont, J.M. Expectations formation and stability in large socio-economic systems. Econometrica 66, 741–781, 1998; Brenner, T., Vriend, N. “On the behavior of proposers in ultimatum games”, Journal of Economic Behavior and Organisation, in preparation, 2005.

3.2 Aprendizado por Mínimos Quadrados

Este modelo também supõe a otimização do comportamento pelos agentes porém, assume que estas suposições são sobre as dependências funcionais na realidade. Essas dependências contém vários parâmetros e os indivíduos visam aprender sobre seus valores, procedendo estatisticamente. Os indivíduos vão se ajustar aos parâmetros até o ponto da soma dos quadrados das diferenças entre os valores previstos e observados ser mínima. Quando o indivíduo assume uma relação linear entre $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$, o parâmetro de inclinação β pode ser calculado por

$$\hat{\beta}(t+1) = \frac{\sum_{t'=1}^t y(t')\tilde{y}(t')}{\sum_{t'=1}^t y^2(t')} \quad (3.1)$$

onde $\hat{\beta}(t+1)$ é a previsão de β no tempo $(t+1)$. A regressão linear é dada por

$$\hat{\beta}(t+1) = \hat{\beta}(t) + g(t) \left(\frac{\tilde{y}(t)}{y(t)} - \hat{\beta}(t) \right) \quad (3.2)$$

e

$$g(t) = \left(\frac{y^2(t)}{y^2(t-1)g(t-1) + 1} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

sendo $g(t)$ usado apenas por razões matemáticas, sem significado econômico.

A decisão é tomada com base no valor estimado da regressão e o algoritmo vai convergir para o valor real de β no longo prazo se este valor for constante (MARCET; SARGENT, 1989)⁵.

3.3 Aprendizado por Reforço

Com o uso voltado para modelar processos de aprendizado não cognitivo em humanos, na aprendizagem por reforço, as ações são escolhidas aleatoriamente de acordo com a distribuição de frequência inicial entre várias ações possíveis. Quando uma determinada ação do agente leva a uma recompensa, ou seja, um resultado positivo, a frequência dessa é aumentada no comportamento futuro, em casos contrários, se a ação leva a uma punição (resultado negativo), a frequência dessa diminui.

Um exemplo da formulação matemática deste modelo é realizado por BUSH; MOSTELLER (1955)⁶, sendo este um modelo estocástico que prevê probabilidades para a ocorrência de padrões de comportamento. O modelo representa o comportamento por uma distribuição de frequência de padrões de comportamento definida por um vetor de probabilidade

$$p(t) = (p(a, t))_{a \in A} \quad (3.4)$$

⁵ MARCET, Albert; SARGENT, Thomas J. Convergence of least squares learning mechanisms in self-referential linear stochastic models. *Journal of Economic theory*, v. 48, n. 2, p. 337-368, 1989.

⁶ BUSH, Robert R.; MOSTELLER, Frederick. *Stochastic models for learning*. 1955.

que atribui uma probabilidade

$$p(a, t) (0 \leq p(a, t) \leq 1, \sum_{a \in A} p(a, t) = 1) \quad (3.5)$$

para cada alternativa de comportamento a em cada período de tempo t , com o vetor de probabilidade alterando durante o processo de aprendizagem. É importante destacar que o modelo assume que o resultado impacta a distribuição de frequência $p(t)$ apenas no momento da ocorrência, ou seja, os agentes não se lembram das ações e resultados anteriores, o passado está contido implicitamente em $p(t)$.

3.4 Aprendizado por Programação Genética

A programação genética surge do conceito de algoritmos genéticos, de modo que são usados os mesmos mecanismos básicos: seleção, reprodução, cruzamento e mutação⁷; com a diferença na unidade que é selecionada e modificada. Nos algoritmos genéticos as estratégias são codificadas, normalmente na forma binária, e otimizadas pelo algoritmo, enquanto na programação genética uma fórmula semelhante a um programa que é codificada e otimizada. A estrutura do tipo fórmula/programa pode ser interpretada como uma crença sobre o funcionamento do mundo, sendo essa não restringida no início pela estrutura da fórmula.

Para cada ponto no tempo existe um número de fórmulas/programas codificados, sendo alguns deles selecionados de acordo com a correspondência entre a sua previsão e as observações do mundo real. Após a seleção, estas fórmulas/programas são reproduzidas e cruzadas — duas fórmulas/programas são cruzadas em um nó determinado aleatoriamente e as duas partes conectadas pelo nó são trocadas —; em seguida, por fim, os resultados são modificados.

3.5 Sondar e Ajustar

O aprendizado por Sondar e Ajustar (*Probe and Adjust*), baseado no trabalho de [KIMBROUGH; MURPHY \(2008\)](#), é considerado um algoritmo de linha de busca que visa encontrar a direção da melhoria, adentrá-la e investigá-la, avaliando o benefício deste movimento.

Neste método, o agente utiliza como forma de atingir seu objeto de interesse um valor constante denominado valor âncora, que é usado como ponto médio de um intervalo do qual o agente, a cada determinado período de tempo (episódio), retira uniformemente lances visando sondar os valores e analisar qual mais se aproxima dos seu objetivo de busca, usando para

⁷ De acordo com [ARIFOVIC \(1994\)](#), esses mecanismos são usados para atualizar as regras de decisão dos agentes, sendo: a seleção referente a alguma regra de seleção adotada pelo agente como a seleção natural em genética de população; reprodução a realização de cópias da unidade selecionada, usando como critério o valor da função de aptidão; o cruzamento a troca das partes de pares das unidades selecionadas aleatoriamente após a reprodução e; a mutação é o processo que muda aleatoriamente o valor de uma posição dentro de uma unidade.

isso uma medida de sucesso ⁸. Assim, a cada lance o agente observa e registra seus retornos, classificando-os em dois grupos como resultantes do aumento ou diminuição do valor âncora.

Cada agente mantém seu valor âncora por um determinado número de episódios, sendo esse conjunto denominado por período de aprendizagem. No fim deste período, é feita uma média dos valores dos dois grupos separadamente como forma de analisar qual proporcionou um maior resultado. A partir disso, o valor âncora é reavaliado e ajustando através de um parâmetro de exploração (ϵ): para cima se, no geral, obteve melhores resultados ao oferecer valores do objeto de interesse maiores do que o valor âncora; ou para baixo caso contrário. Após o ajuste o ciclo é novamente iniciado, gerando um novo período de aprendizagem. Este processo é reproduzido até atingir um ponto de estabilidade no padrão de comportamento.

3.6 Conclusão

Como exposto, não existe ainda — e a previsão é que não venha a existir (BRENNER, 2006) — o “melhor modelo”, que descreva todos os processos de aprendizagem e se adapte em todas as condições, o que existe na verdade são diversos tipos de modelos com cada um deles se adequando em determinadas condições. Por isso, quando procura-se correspondências entre modelos de aprendizagem adequados e características situacionais, o maior interesse é saber se o modelo descreve os processos relevantes da realidade ao invés de se ele possui atributos estruturais que facilitem o seu uso em algumas situações.

A aprendizagem por reforço não poderia ser usada por assumir que os agentes nem sempre estão conscientes de que estão aprendendo, sendo esta uma questão fundamental para aplicação do modelo de cobweb, que necessita que os indivíduos sejam capazes de refletir sobre suas ações e consequências, o que não é defendido pelo reforço, mas sim, pelo grupo de aprendizagem cognitiva que possui um efeito mais forte no comportamento dos agentes.⁹

Os outros modelos são baseados em aprendizagem de crenças, são modelos complexos e realistas. Enquanto, segundo BRENNER (2006), o aprendizado baseado em rotina — caso do método defendido por KIMBROUGH; MURPHY (2008) — é simples e se aproxima do aprendizado de crença. Porém, em relação a validade dos modelos, na “esfera dos modelos baseados em rotina, há bastante evidência de apoio disponível, enquanto na esfera da aprendizagem de crenças, nenhum modelo foi desenvolvido ainda que pareça completamente convincente” (BRENNER, 2006, p. 932, tradução nossa)¹⁰, havendo assim uma tendência maior em usar modelos baseados em rotina.

⁸ Como a lucratividade da empresa, por exemplo, no caso do objeto de interesse ser um fator de produção.

⁹ “[...] argue that the effect of cognitive learning on behaviour is stronger than the effect of reinforcement learning.” (BRENNER, 2006, p.903)

¹⁰ “In the sphere of routine-based models there is quite an amount of supporting evidence available while in the sphere of belief learning, no model has yet been developed that seems completely convincing. Hence, there is a temptation to use routine-based learning models”. (BRENNER, 2006, p. 932)

Além disso, a aprendizagem bayesiana e de mínimos quadrados não são suportadas pelo conhecimento psicológico pois, os indivíduos, na maioria das situações reais, são incapazes de fazer adequadamente ou não estão dispostas a fazer cálculos exigentes como os assumidos nestes dois métodos. Outra falha da aprendizagem bayesiana, em conjunto com a programação genética, é assumir um grande número de expectativas/hipóteses correntes ao mesmo tempo, quando geralmente os agentes possuem apenas uma expectativa específica sobre a realidade.

[. . .] alguns modelos de aprendizagem podem levar, sob inúmeras circunstâncias, a previsões bastante semelhantes. Além disso, evidências empíricas e experimentais sobre sua adequação são muitas vezes raras, dificultando a escolha. Assim, o primeiro passo seria excluir todos os modelos que podem ser rejeitados com base no conhecimento psicológico ou evidência experimental, então a complexidade poderia ser usada para selecionar entre os modelos restantes. Por exemplo, Rapoport et al. (2000) afirma “que o modelo mais simples deve ser tentado primeiro, e que os modelos que postulam níveis mais elevados de sofisticação cognitiva só devem ser empregados quando o primeiro falhar”. (BRENNER, 2006, p. 934, tradução nossa)¹¹

Diante disso, Sondar e Ajustar foi escolhido entre os modelos de aprendizagem por apresentar maior consistência com a realidade estudada. Por ser um método baseado em rotina, corresponde com a presunção de que a população aprende através de mecanismos fixos ou rotinas, permitindo descrever, mesmo que de forma aproximada e simplificada, os processos reais de aprendizagem. O método também contempla a limitação do agente defendida pelos psicólogos de não conseguir considerar um grande número de expectativas ou hipóteses concorrentes ao mesmo tempo, ao empregar uma expectativa por período.

¹¹ “[. . .] some learning models can lead, under numerous circumstances, to quite similar predictions. Furthermore, empirical and experimental evidence on their suitability is often rare, making it difficult to choose. Thus, the first step would be to exclude all models that can be rejected on the basis of psychological knowledge or experimental evidence, then complexity could be used to select among the remaining models. For example, Rapoport et al. (2000) states “that the simplest model should be tried first, and that models postulating higher levels of cognitive sophistication should only be employed as the first one fails”.”(BRENNER, 2006, p.934)

4

Modelo Computacional

O modelo foi implementado pela linguagem NetLogo versão 6.1.1 e a sua descrição pelo protocolo *Overview, Design Concepts and Details* (ODD). O NetLogo é uma plataforma gratuita que fornece uma linguagem de programação simples e poderosa para modelos baseados em agentes (MBA) (RAILSBACK; GRIMM, 2019)¹.

O protocolo ODD torna mais fácil a escrita e a leitura das descrições dos MBA. Ele foi desenvolvido por um grande grupo de modeladores (GRIMM et al., 2005; GRIMM et al., 2006)² com o intuito de padronizar a descrição dos modelos MBA, objetivando torná-la mais eficaz, com simples compreensão, mas, completa. Eles usaram para isso uma divisão básica em três blocos: Visão Geral, Conceitos de Projeto e Detalhes.

O bloco Visão Geral fornece uma visão geral do objetivo e da estrutura do modelo. Ele é composto por três elementos: Propósito, que descreve a finalidade do modelo; Variáveis de Estado e Escala, define as entidades, o estado das variáveis e as escalas de espaço-temporal que compõem o modelo; e Visão de Processo e Escalonamento que descreve todas as etapas presentes no modelo.

O bloco Conceitos de Projeto é responsável pela descrição das abordagens de implementação escolhidas para o modelo. É composto por um elemento, mas que possui diversos itens com distribuição dos conteúdos, são eles: Princípios básicos, Emergência, Adaptação, Objetivos, Aprendizagem, Previsão, Detecção, Interação, Estocasticidade, Coletivos e Observação. Este conjunto de itens é considerado um *checklist* de forma que, quando algum item não se aplica ao modelo, deve ser ignorado.

¹ RAILSBACK, Steven F.; GRIMM, Volker. Agent-based and individual-based modeling: a practical introduction. Princeton university press, 2019.

² GRIMM, Volker et al. A standard protocol for describing individual-based and agent-based models. *Ecological modelling*, v. 198, n. 1-2, p. 115-126, 2006.
GRIMM, Volker et al. Pattern-oriented modeling of agent-based complex systems: lessons from ecology. *science*, v. 310, n. 5750, p. 987-991, 2005.

Por fim, o bloco Detalhes contém as informações fundamentais para que os experimentos possam ser reproduzidos, obtendo todos os detalhes que foram omitidos nas sessões anteriores. Ele é subdividido em três elementos: Inicialização, que define as configurações iniciais do modelo, os valores do sistema e do ambiente; a Entrada, que apresenta todos os dados e relações de entrada e saída do modelo e; o Sub-modelos, que detalha e especifica matematicamente todos os principais processos contidos no funcionamento do modelo.

4.1 Finalidade e Padrões

O modelo de cobweb é um modelo dinâmico amplamente estudado que se fundamenta na impossibilidade do produtor deter todas as informações necessárias sobre a produção antes de conhecer a real demanda de mercado. A defasagem de tempo entre a produção e venda faz com que o produtor produza embasado em suas previsões sobre o funcionamento do mercado, geradas por meio de um sistema de previsão (aprendizagem), e venda pelo preço estabelecido pelo mercado.

Diversos métodos são estudados como algoritmo de aprendizagem, por exemplo: Algoritmos Genéticos (ARIFOVIC, 1994), Mínimos Quadrados Ordinários (BRAY; SAVIN, 1986), Média Amostral e Autocorrelação Amostral (HOMMES; SORGER, 1998), Aprendizagem Evolutiva (BROCK; HOMMES, 1997)³ e Aprendizagem Educativa (GUESNERIE, 1992; GUESNERIE, 2002)⁴. Esses estudos têm sido dirigidos para vários tipos de modelos de cobweb, em especial para aqueles que convergem ou não para o equilíbrio.

O presente trabalho segue as mesmas linhas dos trabalhos anteriores porém implementando o algoritmo de KIMBROUGH; MURPHY (2008), Sondar e Ajustar. Destarte, o modelo explora o uso do método de aprendizagem como forma de definir as expectativas do preço esperado de mercado e, partindo disso, a quantidade a ser produzida por n empresas, em um determinado período de tempo t , sendo estas participantes de um mercado concorrencial, produtoras de um único bem e tomadoras de preços. O objetivo é verificar se, de acordo com a teoria proposta pelo modelo teia de aranha, as expectativas de preços e as decisões de produção das empresas permitem a conversão para as soluções de equilíbrio (estáveis) ou se divergem deste (instáveis). E averiguar se o método Sondar e Ajustar é capaz de gerar alguns dos resultados das economias experimentais, diferente das previsões de outros esquemas adaptativos.

³ WILLIAM A, Brock; CH, Hommes. A Rational Route of Randomness. *Econometrica*, v. 65, p. 1059-1095, 1997.

⁴ GUESNERIE, R. An exploration of the eductive justifications of the rational-expectations hypothesis. *The American Economic Review*, JSTOR, p. 1254–1278, 1992.

GUESNERIE, R. Anchoring economic predictions in common knowledge. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 70, n. 2, p. 439–480, 2002.

4.2 Entidades, Variáveis de Estado e Escalas

A entidade do modelo são as empresas, que competem no mesmo mercado e possuem três características: uma medida de sucesso, um fluxo de dados para medir o seu sucesso, e a capacidade de fazer experimentos ou aprender como suas ações afetam seu sucesso (KIMBROUGH; MURPHY, 2008). A medida de sucesso usada é a lucratividade da empresa. Cada firma, no período de tempo $t - 1$, escolhe uma quantidade (quantidade) para maximizar seu lucro esperado, baseando-se em suas expectativas sobre o preço (preco-lance) que prevalecerá no período t .

Com base no modelo utilizado por ARIFOVIC (1994), cada empresa possui uma função de custo (custo) dada por,

$$\text{set custo } \text{par-x} * \text{quantidade} + 0.5 * \text{par-y} * \text{par-n} * \text{quantidade} ^ 2$$

e a sua medida de sucesso (lucro).

$$\text{set lucro } \text{preco} * \text{quantidade} - \text{custo}$$

É interesse das firmas saber se a cada fim de período devem expandir ou reduzir a produção, registrando, separadamente, para isto seus retornos de cada aumento e diminuição das expectativas de preço e os avaliando posteriormente a partir da medida de sucesso.

4.3 Visão Geral do Processo e Escalonamento

4.3.0.1 Escolha do preço esperado

No modelo estudado cada empresa estabelece uma expectativa de preço, mas quem define o preço que realmente será empregado é o mercado. Como a produção demanda mais tempo, as quantidades produzidas e vendidas devem ser definidas antes que o preço de mercado seja observado.

Inicialmente cada empresa tem um preço que serve como um valor âncora na exploração (preco-corrente). A partir dele, em cada episódio, as firmas escolhem um preço aleatório (preco-lance), visando encontrar aquele que com a quantidade permitirá maximizar o lucro.

4.3.0.2 Determinação do preço de mercado

O preço (preco) que compensa o mercado no período t é determinado pela curva de demanda inversa.

$$\text{set preco } \text{par-A} - \text{par-B} * (\text{quantidade-total})$$

Embasado na teoria de expectativas racionais, o preço de equilíbrio (precoER) é determinado quando o $\text{preco-lance} = \text{preco}$ (MUTH, 1961). Com o preço de mercado convergindo para o valor de equilíbrio apenas quando a razão entre as inclinações de demanda e oferta é menor do que 1 (NERLOVE, 1958).

4.3.0.3 Determinação do lucro das empresas

Após todas as empresas escolherem os lances e, conseqüentemente, as quantidades, o preço de mercado é definido. Com o objetivo de descobrir o resultado da escolha da quantidade, o lucro de cada firma é calculado usando o preço.

```
set lucro preco * quantidade-lance - custo
```

4.3.0.4 Registro dos valores de lucros e preços

Durante o período de aprendizagem os lucros da firma são salvos em duas listas: lucro do preço superior e lucro do preço inferior; com estas relacionando-se ao preço âncora como forma de analisar eles e compará-los no fim do período (par-m).

4.3.0.5 Ajuste do preço

No fim de cada período de aprendizagem, as firmas avaliam seus retornos a partir dos dois grupos de divisão do lucro, fazendo uma média de cada grupo. Se o lucro médio for maior no grupo lucro-p-sup, o preco-corrente é aumentado, caso contrário, é reduzido. Após isso, inicia-se um novo período de aprendizagem, sendo este processo repetido até que ocorra estabilidade no padrão de comportamento.

4.4 Conceitos de Projeto

Por ser um algoritmo de aprendizagem adequado para ajustar um parâmetro contínuo, o método Sondar e Ajustar pode assumir diversas formas. A utilizada neste estudo é o preço esperado de mercado que o agente define e usa para estabelecer uma quantidade a ser oferecida no mercado, durante um único período de tempo (episódio). O mercado referente a esta aplicação ocorre em episódios discretos, nos quais as empresas oferecem estas quantidades e recebem um preço determinado pela função de demanda. Assim, o único acesso delas a curva de demanda ocorre através da observação dos preços resultantes da colocação de determinadas quantidades no mercado.

Com isso, visando encontrar a direção da melhoria que permitirá a maximização da produção, a empresa sonda o mercado a cada período, oferecendo um preço lance que é retirado aleatoriamente de um intervalo com distribuição uniforme, contendo como ponto médio um

preço âncora (*preco-corrente*) e é delimitado por um parâmetro de exploração *par-delta* (normalmente pequeno em relação ao *preco-corrente*).

Após a sonda, a empresa observa e registra seu retorno (o lucro), classificando-o como resultante do aumento ou diminuição do *preco-corrente*. Esta ação se repete por um determinado número de episódios (período de aprendizagem), definido pelo parâmetro do modelo *par-m*.

No fim do período de aprendizagem, a empresa avalia se, no geral, obteve melhores resultados ao oferecer preços lances maiores ou menores do que o preço âncora; reajustando a partir disso, o *preco-corrente* através de um parâmetro de exploração (*par-epsilon*) na direção indicada, ou seja, para cima se, no geral, obteve melhores resultados ao oferecer valores maiores do que o valor âncora; ou para baixo caso contrário. Após o ajuste o ciclo é novamente iniciado, com um novo período de aprendizagem.

4.5 Inicialização e Dados de Entrada

Na configuração inicial do modelo são estabelecidos os valores dos parâmetros A , B , x , y , δ , ϵ , m , n e S . Os parâmetros: *i*) B é alterado de acordo com o caso a ser analisado, se estável ($B/y < 1$) ou instável ($B/y > 1$), com B variando de 0.5 a 3, aumentando em 0.5; *ii*) os períodos de aprendizagem m podem variar de 10 a 40 indo de 10 em 10 período; *iii*) o número de empresas n de 2 a 10, indo de 2 em 2; e *iv*) considerando no total 1000 períodos de simulação (S). Os valores dos parâmetros foram definidos a partir de testes e simulações realizadas, visando o que mais se enquadra dentro dos objetivos de estudo, tendo como base comparativa os utilizados por [ARIFOVIC \(1994\)](#). Os dados de entrada utilizados no modelo são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valor inicial dos parâmetros

Termo	Parâmetros	Valores
Parâmetro da demanda	A	100
Parâmetro da demanda	B	0.5 - 3
Parâmetro da oferta	x	3
Parâmetro da oferta	y	1
Parâmetro de aprendizagem	ϵ	0.125
Parâmetro de aprendizagem	δ	4
Número de períodos de aprendizagem	<i>par - m</i>	10 - 40
Número de empresas	<i>par-n</i>	2 - 10
Número de períodos de simulação	S	1000

Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, cria-se n empresas, as listas em que serão salvos os preços e os lucros, e a quantidade e preço de equilíbrio. É gerado o preço corrente (âncora) inicial para cada firma, extraído de uma distribuição aleatória uniforme com limites baseados no *precoER*, sendo $\text{precoER} \leq \text{preco-corrente} < 1.1 * \text{precoER}$.

4.6 Submodelos

Como exposto, o objetivo do modelo é que as firmas criem expectativas de preços e que estas sejam próximas ou iguais ao valor do preço de equilíbrio. Visto isso, usa-se um método de aprendizagem Provar e Ajustar como forma de criá-las. No método, cada empresa possui um preço que serve como um valor âncora de exploração (`preco-corrente`), ou seja, um ponto médio de um intervalo com distribuição uniforme e limites `preco-corrente - par-delta` e `preco-corrente + par-delta`, sendo `par-delta` um parâmetro de exploração normalmente pequeno em relação ao `preco-corrente`. Este permanece fixo por um determinado número de episódios (`par-m`), nomeado como período de aprendizagem. Assim, em cada episódio, as empresas vão selecionar aleatoriamente lances de preços (`preco-lance`) deste intervalo, visando encontrar aquele que com a quantidade permitirá maximizar o lucro.

O lance é calculado inicialmente definindo o `preco-lance` entre os limites do intervalo e estabelecendo um valor entre 0 e 1 (`random-float 1`) representando a variação aleatória da função de preço esperado. Após estabelecer o preço, a quantidade e o custo são definidos.

```
to calcular-lance
  set preco-lance (random-float 1) * 2 * par-delta +
  preco-corrente - par-delta
  if preco-lance < 0 [set preco-lance 0.01]
    set quantidade (preco-lance - par-x) / (par-y * par-n)
    set custo par-x * quantidade + 0.5 * par-y * par-n * quantidade
    ^ 2
end
```

Depois de ter conhecimento de todos estes valores, as quantidades são postas no mercado e o preço é estabelecido em função da demanda. Cada empresa calcula seu lucro com base no preço de mercado e os guardam em duas listas: lucro do preço superior (`lucro-p-sup`) quando o `preco-lance` é maior que o `preco-corrente` e lucro do preço inferior (`lucro-p-inf`) quando o `preco-lance` é menor que o `preco-corrente`; como forma de analisá-los e compará-los no fim do período `par-m`.

```
to calcular-lucros
  set lucro preco * quantidade - custo
  ifelse preco-lance > preco-corrente
    [set lucro-p-sup lput lucro lucro-p-sup]
    [set lucro-p-inf lput lucro lucro-p-inf ]
end
```

No fim do período de aprendizagem, o preço-corrente é ajustado a partir dos grupos de divisão do lucro. É feito a média de cada grupo e analisado os valores. Se o lucro médio for maior no grupo lucro-p-sup, o preço-corrente é aumentado, somando-se a ele um parâmetro de aprendizagem par-epsilon que o altera permanentemente, caso ocorra o contrário, o lucro-p-inf for maior, o par-epsilon é subtraído.

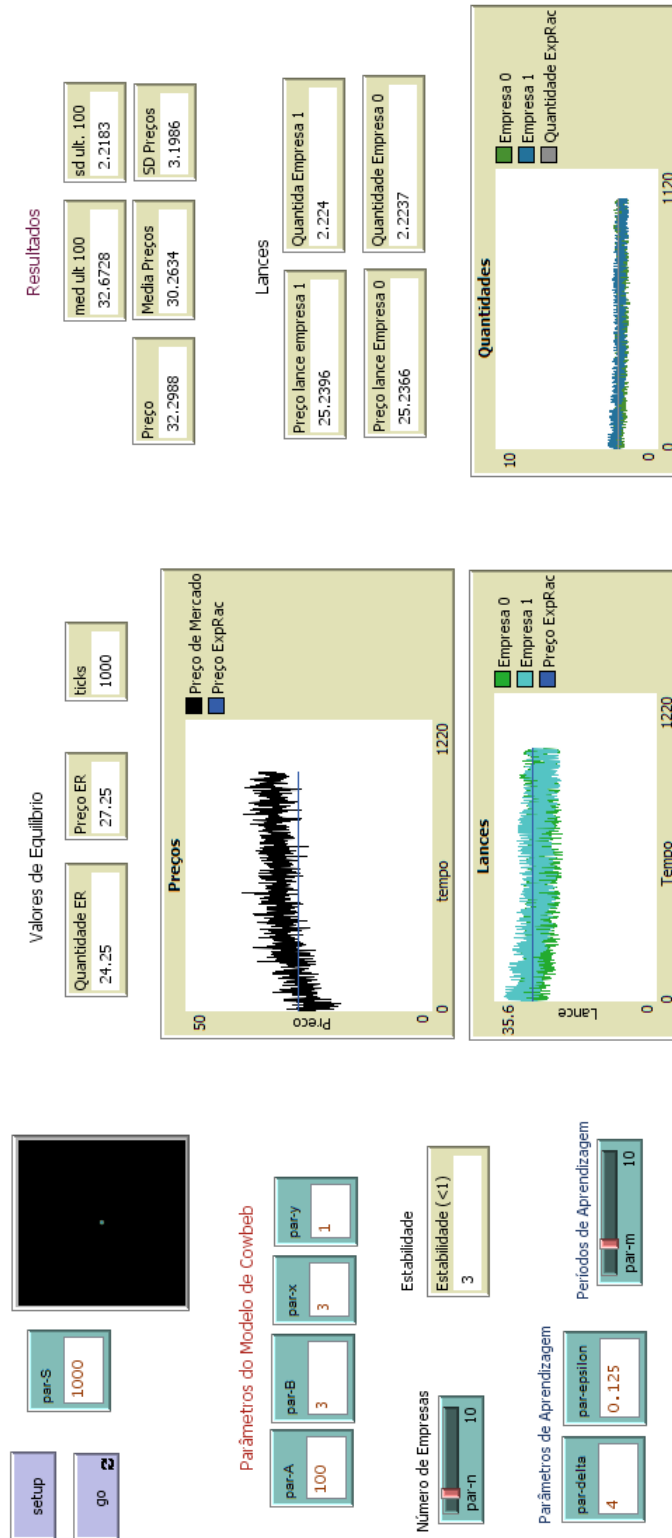
```
to ajustar-precos
  ifelse (mean lucro-p-sup) > (mean lucro-p-inf)
    [set preco-corrente preco-corrente + par-epsilon ]
    [set preco-corrente preco-corrente - par-epsilon]
  if preco-corrente < 0 [set preco-corrente 2 * par-epsilon]
  set lucro-p-sup []
  set lucro-p-inf []
end
```

As listas são zeradas e inicializadas, definido os novos valores das variáveis a serem usadas no período de aprendizagem que se origina.

```
to inicializar-lista
  ask empresas[
    set preco-lance preco-corrente
    set quantidade (preco-lance - par-x) / (par-y * par-n)
    set custo par-x * quantidade + 0.5 * par-y * par-n *
    quantidade ^ 2
  ]
  set quantidade-total sum [quantidade] of empresas
  set preco par-A - par-B * quantidade-total
  ask empresas[
    set lucro preco * quantidade - custo
    set lucro-p-sup lput lucro lucro-p-sup
    set lucro-p-inf lput lucro lucro-p-inf
  ]
end
```

Este processo é repetido até que ocorra a estabilidade no padrão de comportamento.

Figura 3 – Interface do Modelo - NetLogo



Fonte: elaborado pelo autor

5

Análise do Modelo Computacional

5.1 Protocolo das Simulações

O modelo de cobweb com método de aprendizagem Sondar e Ajustar foi elaborado por meio do *software* NetLogo v6.1.1 (WILENSKY, 1999)¹, possuindo como base para criação o artigo de ARIFOVIC (1994) e KIMBROUGH; MURPHY (2008). O código completo do modelo foi incluído no apêndice como forma de torná-lo totalmente reproduzível.

Em todos os cenários analisados, vinte simulações foram realizadas para cada combinação de parâmetros. Estes cenários são divididos entre o caso estável, quando o par-B atinge valores menores do que 1, e o instável, quando são maiores do que 1. Como fonte de maior precisão da análise foram calculados também a média e o desvio-padrão dos preços de mercado, e a média e o desvio-padrão dos últimos cem preços de mercado como forma de observar as variações deste em relação ao preço de equilíbrio.

5.2 Análise de Regressão

Depois de rodar o modelo e obter os resultados, foi feita uma análise de regressão linear pela plataforma *Stata* como forma de sintetizar os resultados obtidos com o experimento, por considerar uma combinação de parâmetros razoavelmente grande — mais de 100 combinações. As simulações foram efetuadas com os dados dos parâmetros presentes na Tabela 1. Para isso, pensando no objetivo de verificar se este método de aprendizagem é eficaz para o uso do modelo de cobweb, foi criada uma variável dependente *diffprecoER* que representa a diferença entre o preço de mercado e o preço de equilíbrio, objetivando encontrar relações com o número de empresas (par-n), número de períodos de aprendizagem (par-m) e com o parâmetro B (par-B).

¹ WILENSKY, U. NetLogo. [S.l.]: Evanston, IL, 1999. Disponível em: <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>.

Tabela 2 – Regressão linear: diferença entre os preços

	Variável Dependente: Diferença entre os preços
Número de empresas ($par - n$)	-0.498*** (0.0151)
Número de períodos de aprendizagem ($par - m$)	-0.148*** (0.0038)
Parâmetro da demanda (B)	2.662*** (0.0501)
Constante	6.166*** (0.1642)
Observações	2,400
R^2	0.6923
R^2 ajustado	0.6919
Estatística F	1796.62***

Nota: *** significância estatística ao nível de 1%.

De acordo com os resultados da Tabela 2, todas as variáveis são estatisticamente significativas ao nível de 1%. Como esperado, a entrada de mais uma empresa no mercado e o incremento de mais um período de aprendizagem reduz em média, 0.498 e 0.148, respectivamente, a diferença entre os preços, aproximando-os da igualdade. Enquanto, a elevação do valor do parâmetro B , intensifica a diferença entre os preços em 2.662, caminhando para o caso instável.

Em relação ao coeficiente, torna-se necessário para a conversão que o seu valor seja menor que o valor do parâmetro delta, por este ser um limitante dos valores que o preço esperado pode assumir. Deste modo, o valor do coeficiente da regressão dá indícios de que o modelo

Tabela 3 – Regressão linear da média dos últimos cem preços

	Variável Dependente: Média dos últimos 100 preços
Número de empresas ($par - n$)	-0.463*** (0.0301)
Número de períodos de aprendizagem ($par - m$)	-0.154*** (0.0076)
Parâmetro da demanda (B)	-12.927*** (0.01)
Constante	75.536*** (0.3270)
Observações	2,400
R^2	0.8789
R^2 ajustado	0.8788
Estatística F	5796.88***

Nota: *** significância estatística ao nível de 1%.

não convergiu para o equilíbrio de expectativas racionais, por o valor deste ser maior que o do

parâmetro δ — que assume valor igual a 4 — mesmo considerando as variações deste em relação a média (desvio-padrão).

Visando confirmar a tendência de redução da variação dos preços de mercado em relação ao preço de equilíbrio apresentadas no fim dos períodos de aprendizagem, também foi realizado regressões para a média e o desvio-padrão dos últimos 100 preços de mercado, usando as mesmas variáveis independentes, como pode ser observado na Tabela 3 e Tabela 4.

Na média dos últimos 100 preços, todas as variáveis foram estatisticamente significativas ao nível de 1%. Os valores do coeficiente da Tabela 3 indicam que um aumento em qualquer um dos parâmetros irá impactar em uma redução da média dos últimos 100 preços, possuindo o parâmetro B o maior efeito, de 12.927, acompanhado do número de períodos de aprendizagem (0.463) e do número de empresas (0.154).

Esta análise também pode ser realizada em termos do bem-estar do consumidor, no qual um aumento no número de empresas, nos períodos de aprendizagem e aumento da instabilidade, são fatores que tendem a reduzir o preço de mercado, favorecendo os consumidores ao aumentar o seu poder de compra, permitindo que ele consiga adquirir mais do bem, incentivando o consumo.

Tabela 4 – Regressão linear do desvio-padrão dos últimos cem preços

	Variável Dependente: Desvio-padrão dos últimos 100 preços
Número de empresas ($par - n$)	-0.188*** (0.0026)
Número de períodos de aprendizagem ($par - m$)	-0.00003 (0.0007)
Parâmetro da demanda (B)	1.053*** (0.0087)
Constante	1.136*** (0.0284)
Observações	2,400
R^2	0.8921
R^2 ajustado	0.8920
Estatística F	5796.88***

Nota: *** significância estatística ao nível de 1%.

Esta regressão permite verificar se o modelo converge para um equilíbrio, agora diferente do definido pelas expectativas racionais. Os dados da Tabela 4 mostram que todas as variáveis, exceto número de períodos de aprendizagem, são estatisticamente significativas ao nível de 1% ². Assim como esperado e observado na outra regressão, a adição de mais uma empresa reduz o desvio-padrão dos últimos 100 preços em 0.188, em média, e um acréscimo no valor de B produz um aumento de 1.053, em média. Neste caso, pode-se assumir que há indícios de convergência do modelo para o equilíbrio, dado que a constante apresenta valor menor que o parâmetro delta.

² O parâmetro m não ser significativo é interpretado como as alterações no seu valor não são associadas à alterações no desvio-padrão.

6

Conclusões

O presente trabalho buscou implementar o método de aprendizagem *Probe and Adjust* no modelo teia de aranha, como forma de analisar se com ele, ao invés das expectativas ingênuas assumidas no modelo original, os agentes são capazes de formar expectativas de preço que converjam para os valores de equilíbrio defendidos pelas expectativas racionais. Embora *Probe and Adjust* seja considerado um método simples, ele foi escolhido por conseguir descrever de forma aproximada os processos reais de aprendizagem.

Com esse intuito, foram realizadas simulações e testes dos parâmetros considerados de maior impacto para a conversão ou divergência do preço para o preço de equilíbrio, realizando em conjunto uma regressão visando sintetizar os dados obtidos. De modo geral, os parâmetros número de empresas participantes no mercado, número de período de aprendizagem e B possuem impacto considerável para a redução da distância entre o preço de mercado e o preço de equilíbrio. Propiciando a importância do período de aprendizagem para a conversão.

Examinando os resultados de regressão da média através da lente bem-estar do consumidor, conclui-se que os consumidores têm uma propensão a serem favorecidos com o incremento destes fatores, considerando que: *i*) um aumento no número de empresas gera um mercado mais competitivo, o que força os preços do bem para baixo; *ii*) a elevação no número de períodos de aprendizagem acarreta no prolongamento do tempo de ajuste o que pode garantir preços baixos por um maior número de episódios e; *iii*) um acréscimo no parâmetro B intensifica a instabilidade do modelo, dificultando a previsão e tomada de decisão das empresas, o que pode levar a uma quantidade ofertada desproporcionalmente maior que a quantidade demandada, pressionando para a contração dos preços de mercado.

Em relação a conversão ou divergência do modelo para o equilíbrio de expectativas racionais, os resultados apresentados nas regressões dão indícios de que não ocorre a conversão, mas há uma tendência de convergir para algum outro equilíbrio como mostrado nos dados da regressão do desvio-padrão.

Pensando nas limitações do estudo e sugerindo possíveis completos para estudos futuros, a questão da convergência poderia ser mais aprofundada, analisando os valores de epsilon e delta em mais detalhes, pensando na possibilidade de correr o caso estável se algum parâmetro for alterado ou incrementado. A introdução de outras metodologias para dar mais robustez ao modelo como o incremento de outros algoritmos de aprendizagem também seria algo interessante, principalmente para comparação dos resultados, considerando que o modelo não apresentou conversão para expectativas racionais.

Referências

- ÅKERMAN, G. The cobweb theorem: A reconsideration. *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, v. 71, n. 1, p. 151–160, 1957. Citado na página [16](#).
- ALLEN, R. G. D. *Mathematical economics*. [S.l.], 1959. Citado na página [19](#).
- ARIFOVIC, J. Genetic algorithm learning and the cobweb model. *Journal of Economic dynamics and Control*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 3–28, 1994. Citado 7 vezes nas páginas [12](#), [23](#), [28](#), [32](#), [33](#), [35](#) e [39](#).
- BRAY, M. M.; SAVIN, N. E. Rational expectations equilibria, learning, and model specification. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1129–1160, 1986. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [32](#).
- BRENNER, T. Agent learning representation: advice on modelling economic learning. *Handbook of computational economics*, Elsevier, v. 2, p. 895–947, 2006. Citado 3 vezes nas páginas [26](#), [29](#) e [30](#).
- BROCK, W. A.; HOMMES, C. H. A rational route to randomness. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 1059–1095, 1997. Citado na página [32](#).
- BUSH, R. R.; MOSTELLER, F. Stochastic models for learning. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1955. Citado na página [27](#).
- CAGAN, P. The monetary dynamics of hyper-inflation. *Studies in the Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press, 1956. Citado na página [16](#).
- COASE, R. H.; FOWLER, R. F. Bacon production and the pig-cycle in great britain. *Economica*, JSTOR, v. 2, n. 6, p. 142–167, 1935. Citado na página [15](#).
- EVANS, G. W.; HONKAPOHJA, S. *Learning and expectations in macroeconomics*. [S.l.]: Princeton University Press, 2001. 1-44 p. Citado 5 vezes nas páginas [12](#), [15](#), [17](#), [25](#) e [26](#).
- EZEKIEL, M. The cobweb theorem. *The quarterly journal of economics*, MIT Press, v. 52, n. 2, p. 255–280, 1938. Citado 8 vezes nas páginas [11](#), [15](#), [16](#), [18](#), [19](#), [20](#), [21](#) e [23](#).
- FERGUSON, C. Learning, expectations, and the cobweb model. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Springer, v. 20, n. 3-4, p. 297–315, 1960. Citado 5 vezes nas páginas [12](#), [14](#), [15](#), [16](#) e [18](#).
- FISHER, I. The theory of interest. *Macmillan*, New York, 1930. Citado na página [16](#).
- FRIEDMAN, M. *Theory of the consumption function*. [S.l.]: Princeton University Press, 1957. Citado na página [16](#).
- GOODWIN, R. M. Dynamical coupling with especial reference to markets having production lags. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 181–204, 1947. Citado na página [16](#).
- GRIMM, V. et al. A standard protocol for describing individual-based and agent-based models. *Ecological modelling*, Elsevier, v. 198, n. 1-2, p. 115–126, 2006. Citado na página [31](#).

- GRIMM, V. et al. Pattern-oriented modeling of agent-based complex systems: lessons from ecology. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 310, n. 5750, p. 987–991, 2005. Citado na página 31.
- GUESNERIE, R. An exploration of the eductive justifications of the rational-expectations hypothesis. *The American Economic Review*, JSTOR, p. 1254–1278, 1992. Citado na página 32.
- GUESNERIE, R. Anchoring economic predictions in common knowledge. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 70, n. 2, p. 439–480, 2002. Citado na página 32.
- HOMMES, C.; SORGER, G. Consistent expectations equilibria. *Macroeconomic Dynamics*, Cambridge University Press, v. 2, n. 3, p. 287–321, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 32.
- HOOTON, F. Risk and the cobweb theorem. *The Economic Journal*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 60, n. 237, p. 69–80, 1950. Citado na página 16.
- KALDOR, N. A classificatory note on the determinateness of equilibrium. *The review of economic studies*, Wiley-Blackwell, v. 1, n. 2, p. 122–136, 1934. Citado na página 15.
- KIMBROUGH, S. O.; MURPHY, F. H. Learning to collude tacitly on production levels by oligopolistic agents. *Computational Economics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 33, n. 1, p. 47–78, jul 2008. Citado 6 vezes nas páginas 12, 28, 29, 32, 33 e 39.
- LEONTIEF, W. W. Verzögerte angebotsanpassung und partielles gleichgewicht. *Zeitschrift für Nationalökonomie/Journal of Economics*, JSTOR, p. 670–676, 1934. Citado na página 15.
- LUCAS, J. R. E. Econometric testing of the natural rate hypothesis, in o. eckstein, ed., the econometrics of price determination, washington: Board of governors of the federal reserve system. p. 50–59, 1972. Citado na página 17.
- MARCET, A.; SARGENT, T. J. Convergence of least squares learning mechanisms in self-referential linear stochastic models. *Journal of Economic theory*, Elsevier, v. 48, n. 2, p. 337–368, 1989. Citado na página 27.
- MIKOŁAJEK-GOCEJNA, M. Expectations in the theory of economics. *Investor Expectations in Value Based Management: Translated by Klementyna Dec and Weronika Mincert*, Springer, p. 35–46, 2014. Citado na página 17.
- MUTH, J. F. Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 315–335, 1961. Citado 4 vezes nas páginas 12, 17, 20 e 34.
- NERLOVE, M. Adaptive expectations and cobweb phenomena. *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, v. 72, n. 2, p. 227–240, 1958. Citado 5 vezes nas páginas 12, 16, 20, 23 e 34.
- RAILSBACK, S. F.; GRIMM, V. *Agent-based and individual-based modeling: a practical introduction*. [S.l.]: Princeton university press, 2019. Citado na página 31.
- RICCI, U. Die “synthetische ökonomie” von henry ludwell moore. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, v. 1, n. 5, 1930. Citado na página 14.
- SCHULTZ, H. *Der Sinn der Statistischen Nachfragen*. Bonn: Veröffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung, Kurt Schroeder Verlag, 1930. Citado na página 14.

TINBERGEN, J. Bestimmung und deutung von angebotskurven ein beispiel. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, v. 1, n. 5, p. 669–679, 1930. Citado na página 14.

WILENSKY, U. *NetLogo*. [S.l.]: Evanston, IL, 1999. Disponível em: <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>. Citado na página 39.

Apêndices

APÊNDICE

A

Código completo do programa em NetLogo

```
breed [empresas empresa]
globals [
  preco
  quantidade-total
  historia-precos
  precoER
  quantidadeER
  media100
  sd100
  QM
  PM
]

empresas-own[
  preco-corrente
  preco-lance
  quantidade
  lucro
  custo
  lucro-p-sup
  lucro-p-inf
]

to setup
  ca
  create-empresas par-n
```

```

set historia-precos []
set quantidadeER (par-A - par-x) / (par-B + par-y)
set precoER par-A - par-B * quantidadeER
set QM (par-A - par-x) / (2 * (par-B + par-y))
set PM par-A - par-B * QM
ask empresas [
  set lucro-p-sup []
  set lucro-p-inf []
  set preco-corrente ((random-float .1) + 1) * precoER
]
inicializar-lista
reset-ticks
end

to go
  tick
  ask empresas [calcular-lance]
  set quantidade-total sum [quantidade] of empresas
  set preco par-A - par-B * (quantidade-total)
  if preco < 0 [set preco 0]
  set historia-precos lput preco historia-precos
  ask empresas [calcular-lucros]
  if (ticks mod par-m) = 0 and ticks > 0 [
    ask empresas [ajustar-precos]
    inicializar-lista
  ]
  if ticks = par-S [stop]
  estatisticas
end

to calcular-lance
  set preco-lance (random-float 1) * 2 * par-delta + preco-corrente
  - par-delta
  if preco-lance < 0 [set preco-lance 0.01]
  set quantidade (preco-lance - par-x) / (par-n * par-y)
  set custo par-x * quantidade + 0.5 * par-y * par-n * quantidade ^ 2
end

to calcular-lucros

```

```

    set lucro preco * quantidade - custo
    ifelse preco-lance > preco-corrente
      [set lucro-p-sup lput lucro lucro-p-sup]
      [set lucro-p-inf lput lucro lucro-p-inf ]
  end

to ajustar-precos
  ifelse (mean lucro-p-sup) > (mean lucro-p-inf)
    [set preco-corrente preco-corrente + par-epsilon ]
    [set preco-corrente preco-corrente - par-epsilon]
  if preco-corrente < 0 [set preco-corrente 2 * par-epsilon]
  set lucro-p-sup []
  set lucro-p-inf []
end

to inicializar-lista
  ask empresas[
    set preco-lance preco-corrente
    set quantidade (preco-lance - par-x) / (par-n * par-y)
    set custo par-x * quantidade + 0.5 * par-y * par-n * quantidade ^ 2
  ]
  set quantidade-total sum [quantidade] of empresas
  set preco par-A - par-B * quantidade-total
  ask empresas[
    set lucro preco * quantidade - custo
    set lucro-p-sup lput lucro lucro-p-sup
    set lucro-p-inf lput lucro lucro-p-inf
  ]
end

to estatisticas
  if ticks >= 999
  [
    let historia100 (sublist historia-precos 900 999)
    set media100 mean historia100
    set sd100 standard-deviation historia100
  ]
end

```