



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Colegiado de Engenharia de Produção



# **Análise de modelos de cadeia de suprimentos centralizadas e descentralizadas de dois níveis por meio da teoria dos jogos**

**Ana Laura Horta Rodrigues**

João Monlevade, MG  
2023

Ana Laura Horta Rodrigues

**Análise de modelos de cadeia de suprimentos centralizadas e descentralizadas de dois níveis por meio da teoria dos jogos**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia de Produção do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Paganini Barcellos de Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva

João Monlevade, MG

2023

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

R696a Rodrigues, Ana Laura Horta.

Análise de modelos de cadeia de suprimentos centralizadas e descentralizadas de dois níveis por meio da teoria dos jogos.

[manuscrito] / Ana Laura Horta Rodrigues. - 2023.

69 f.: il.: color., gráf., tab.. + Quadro.

Orientador: Prof. Dr. Paganini Barcellos de Oliveira.

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia de Produção .

1. Administração de material. 2. Controle de estoque. 3. Teoria dos jogos. 4. Transporte de mercadorias. I. Oliveira, Paganini Barcellos de. II. Silva, Thiago Augusto de Oliveira. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 658.5

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6-2431



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Ana Laura Horta Rodrigues**

### **Análise de modelos de cadeia de suprimentos centralizadas e descentralizadas de dois níveis por meio da teoria dos jogos**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção

Aprovada em 15 de março de 2023

#### Membros da banca

Doutor - Paganini Barcellos de Oliveira - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto  
Doutor - Thiago Augusto de Oliveira Silva - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto  
Doutor - Alexandre Xavier Martins - Universidade Federal de Ouro Preto  
Doutor - Felipe Bacani - Universidade Federal de Ouro Preto  
Doutor - Cristiano Santos Benjamin - Universidade Federal de Ouro Preto

Paganini Barcellos de Oliveira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 27/03/2023



Documento assinado eletronicamente por **Paganini Barcellos de Oliveira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 27/03/2023, às 09:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0498205** e o código CRC **384DF1A2**.

*Dedico este trabalho à minha avó Maria Expedita Horta, que sempre esteve ao meu lado e me ensinou a correr atrás dos meus objetivos e nunca desistir, por mais difícil que seja. Mesmo não estando em vida para presenciar mais uma conquista da minha jornada, ela segue em meu coração. Vó, você faz parte da minha formação como pessoa e me deixou um ensinamento de que tudo que acontece em nossa vida é pra nos ensinar algo, ou seja, nada é em vão.*

# Agradecimentos

À Deus, por me dar força para não desistir a cada obstáculo desta caminhada.

À minha mãe, por me apoiar sempre, me cobrar os melhores resultados na escola e me ensinar desde cedo a importância de adquirir conhecimento.

Aos meus orientadores Paganini e Thiago, pela orientação e correções que me proporcionaram engrandecer meu conhecimento através de seus ensinamentos e por não medirem esforços em ensinar.

À [Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais \(FAPEMIG\)](#), que auxiliou no financiamento da minha experiência de pesquisa científica, que está sendo essencial no meu processo de formação.

À [Universidade Federal de Ouro Preto \(UFOP\)](#) e os professores que fizeram parte da minha formação pelo conhecimento transmitido e pela oportunidade de concluir este curso.

À todos que de alguma forma contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

*“As coisas podem até dar errado, mas não deve deixar ninguém definir seus limites a partir de sua origem. O único limite é sua alma.” – Ratatouille*

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar e comparar dois modelos de cadeia de suprimentos sob a perspectiva da Teoria dos Jogos, baseada em decisões simultâneas dos agentes pertencentes ao mercado. Um tipo de cadeia possui dois fabricantes centralizando o fluxo do serviço em um varejista, enquanto o segundo tipo possui dois fabricantes e dois varejistas exclusivos. As análises propostas se dão a partir do estabelecimento da condição de equilíbrio de mercado para preços, que resulta no lucro máximo para todos os agentes das cadeias. As soluções de Equilíbrio de Nash são obtidas por meio de cálculos matemáticos manuais, conferidos computacionalmente no software wxMaxima. Em um segundo momento, as soluções de equilíbrio são implementadas em linguagem Python para poder observar numérica e graficamente os comportamentos das variáveis mediante a alterações dos parâmetros, visando analisar e comparar as soluções de equilíbrio dos modelos. Dez diferentes cenários são estudados, em função da variação de parâmetros para produtos homogêneos e heterogêneos. As soluções de equilíbrio nos cenários estudados mostraram algumas possibilidades de inviabilidade econômica para um dos modelos e comportamentos opostos e/ou similares nas diferentes cadeias de suprimentos, a depender do parâmetro variado.

**Palavras-chaves:** Teoria dos Jogos. Cadeias de suprimentos. Equilíbrio no duopólio.



# Abstract

This assignment seeks to analyze and compare two supply chain models under the Game Theory perspective, based on simultaneous decisions of the agents belonging to the market. One type of chain has two manufacturers centralizing the flow of service in a retailer, while the second one has two manufacturers and two exclusive retailers. The proposed analyses are based on the establishment of the market equilibrium condition for prices, which results in the maximum profit for all agents of the chains. The Nash Equilibrium solutions are obtained through manual mathematical calculations, checked computationally in the software wxMaxima. In a second step, the equilibrium solutions are implemented in Python language to be able to observe numerically and graphically the behavior of the variables by changing the parameters, seeking to analyze and compare the equilibrium solutions of the models. Ten different scenarios are studied, as a function of varying parameters for homogeneous and heterogeneous products. The equilibrium solutions in the scenarios studied showed some possibilities of economic infeasibility for one of the models and opposite and/or similar behaviors in the different supply chains, depending on the varied parameter.

**Keywords:** Game Theory. Supply chains. Duopoly equilibrium.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Estrutura das cadeias de suprimentos . . . . .	6
Figura 2 – Fluxo das etapas da Metodologia . . . . .	14
Figura 3 – Comportamento do $\pi^T$ com a variação de $\alpha$ . . . . .	24
Figura 4 – Comportamento do $\pi^V$ com a variação de $\alpha$ . . . . .	25
Figura 5 – Comportamento do $\pi^F$ com a variação de $\alpha$ . . . . .	25
Figura 6 – Comportamento do $p$ com a variação de $\alpha$ . . . . .	25
Figura 7 – Comportamento do $w$ com a variação de $\alpha$ . . . . .	26
Figura 8 – Comportamento de $x$ com a variação de $\alpha$ . . . . .	26
Figura 9 – Comportamento do $\pi^T$ com a variação de $\beta$ . . . . .	27
Figura 10 – Comportamento do $\pi^V$ com a variação de $\beta$ . . . . .	27
Figura 11 – Comportamento do $\pi^F$ com a variação de $\beta$ . . . . .	27
Figura 12 – Comportamento do $p$ com a variação de $\beta$ . . . . .	28
Figura 13 – Comportamento do $w$ com a variação de $\beta$ . . . . .	28
Figura 14 – Comportamento de $x$ com a variação de $\beta$ . . . . .	28
Figura 15 – Comportamento do $\pi^T$ com a variação de $\gamma$ . . . . .	29
Figura 16 – Comportamento do $\pi^V$ s com a variação de $\gamma$ . . . . .	29
Figura 17 – Comportamento do $\pi^F$ com a variação de $\gamma$ . . . . .	30
Figura 18 – Comportamento do $p$ com a variação de $\gamma$ . . . . .	30
Figura 19 – Comportamento do $w$ com a variação de $\gamma$ . . . . .	30
Figura 20 – Comportamento de $x$ com a variação de $\gamma$ . . . . .	31
Figura 21 – Comportamento do $\pi^T$ com a variação de $c$ . . . . .	31
Figura 22 – Comportamento do $\pi^V$ com a variação de $c$ . . . . .	32
Figura 23 – Comportamento do $\pi^F$ com a variação de $c$ . . . . .	32
Figura 24 – Comportamento do $p$ com a variação de $c$ . . . . .	32
Figura 25 – Comportamento do $w$ com a variação de $c$ . . . . .	33
Figura 26 – Comportamento de $x$ com a variação de $c$ . . . . .	33
Figura 27 – Comportamento do $\pi^T$ com diferentes $\alpha$ . . . . .	34
Figura 28 – Comportamento do $\pi^V$ com diferentes $\alpha$ . . . . .	34
Figura 29 – Comportamento do $\pi^F$ com diferentes $\alpha$ . . . . .	35
Figura 30 – Comportamento do $p$ com diferentes $\alpha$ . . . . .	35
Figura 31 – Comportamento do $w$ com diferentes $\alpha$ . . . . .	35
Figura 32 – Comportamento de $x$ com diferentes $\alpha$ . . . . .	36
Figura 33 – Comportamento do $\pi^T$ com diferentes $\beta$ . . . . .	36
Figura 34 – Comportamento do $\pi^V$ com diferentes $\beta$ . . . . .	37
Figura 35 – Comportamento do $\pi^F$ com diferentes $\beta$ . . . . .	37
Figura 36 – Comportamento do $p$ com diferentes $\beta$ . . . . .	37

Figura 37 – Comportamento do $w$ com diferentes $\beta$ . . . . .	38
Figura 38 – Comportamento de $w$ com diferentes $\beta$ . . . . .	38
Figura 39 – Comportamento do $\pi^T$ com diferentes $\gamma$ . . . . .	39
Figura 40 – Comportamento do $\pi^V$ com diferentes $\gamma$ . . . . .	39
Figura 41 – Comportamento do $\pi^F$ com diferentes $\gamma$ . . . . .	39
Figura 42 – Comportamento do $p$ com diferentes $\gamma$ . . . . .	40
Figura 43 – Comportamento do $w$ com diferentes $\gamma$ . . . . .	40
Figura 44 – Comportamento de $x$ com diferentes $\gamma$ . . . . .	40
Figura 45 – Comportamento do $\pi^T$ com diferentes $c$ . . . . .	41
Figura 46 – Comportamento do $\pi^V$ com diferentes $c$ . . . . .	41
Figura 47 – Comportamento do $\pi^F$ com diferentes $c$ . . . . .	41
Figura 48 – Comportamento do $p$ com diferentes $c$ . . . . .	42
Figura 49 – Comportamento do $w$ com diferentes $c$ . . . . .	42
Figura 50 – Comportamento de $x$ com diferentes $c$ . . . . .	42
Figura 51 – Comportamento do $\pi^T$ com diferentes $\alpha$ e $c$ . . . . .	43
Figura 52 – Comportamento do $\pi^V$ com diferentes $\alpha$ e $c$ . . . . .	44
Figura 53 – Comportamento do $\pi^F$ com diferentes $\alpha$ e $c$ . . . . .	44
Figura 54 – Comportamento do $p$ com diferentes $\alpha$ e $c$ . . . . .	44
Figura 55 – Comportamento do $w$ com diferentes $\alpha$ e $c$ . . . . .	45
Figura 56 – Comportamento de $x$ com diferentes $\alpha$ e $c$ . . . . .	45
Figura 57 – Comportamento do $\pi^T$ com diferentes $\beta$ e $\gamma$ . . . . .	46
Figura 58 – Comportamento do $\pi^V$ com diferentes $\beta$ e $\gamma$ . . . . .	46
Figura 59 – Comportamento do $\pi^F$ com diferentes $\beta$ e $\gamma$ . . . . .	46
Figura 60 – Comportamento do $p$ com diferentes $\beta$ e $\gamma$ . . . . .	47
Figura 61 – Comportamento do $w$ com diferentes $\beta$ e $\gamma$ . . . . .	47
Figura 62 – Comportamento de $x$ com diferentes $\beta$ e $\gamma$ . . . . .	47

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Caracterização dos conjuntos, parâmetros e variáveis dos modelos . . . . .	16
---	----

# Lista de quadros

Quadro 3.1 – Bibliografia Relacionada . . . . .	13
---	----

# Lista de abreviaturas e siglas

**CS** Cadeia de Suprimentos

**FAPEMIG** Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais

**UFOP** Universidade Federal de Ouro Preto

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>Competição em mercados</b>	<b>4</b>
<b>2.2</b>	<b>Cadeias de Suprimentos</b>	<b>5</b>
<b>2.3</b>	<b>Teoria dos Jogos</b>	<b>6</b>
2.3.1	Equilíbrio em Jogos Oligopolistas	8
<b>3</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>16</b>
<b>5.1</b>	<b>Caracterização do jogo</b>	<b>16</b>
<b>5.2</b>	<b>Desenvolvimento do Modelo Matemático</b>	<b>17</b>
5.2.1	Modelo do Funil - M1	17
5.2.2	Modelo de Franquia - M2	19
<b>5.3</b>	<b>Condições de viabilidade para as soluções</b>	<b>20</b>
5.3.1	Condições de convexidade	20
5.3.1.1	Condição A	21
5.3.1.2	Condição B	22
5.3.1.3	Condição C	23
5.3.2	Condições que definem os casos de interesse	23
<b>5.4</b>	<b>Análise dos testes numérico-computacionais</b>	<b>24</b>
5.4.1	Produtos homogêneos: Variação positiva da demanda máxima dos produtos ( $\alpha$ )	24
5.4.2	Produtos homogêneos: Variação positiva da elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ )	26
5.4.3	Produtos homogêneos: Variação positiva da elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma$ )	29
5.4.4	Produtos homogêneos: Variação positiva do custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ )	31
5.4.5	Produtos heterogêneos: Diferentes demandas máximas dos produtos ( $\alpha$ )	34
5.4.6	Produtos heterogêneos: Variação da elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ )	36
5.4.7	Produtos heterogêneos: Variação da elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma$ )	38

5.4.8	Produtos heterogêneos: Variação de custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ ) . . . . .	40
5.4.9	Produtos heterogêneos: Variação de demandas máximas dos produtos ( $\alpha$ ) e custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ ) . . . . .	43
5.4.10	Produtos heterogêneos: Variação da elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ ) e elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma$ ) . . . . .	45
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>50</b>
	<b>APÊNDICE A – RESULTADOS COMPLETOS DO MODELO M1</b> . .	<b>52</b>
	<b>APÊNDICE B – RESULTADOS COMPLETOS DO MODELO M2</b> . .	<b>53</b>



# 1 Introdução

O comportamento do mercado é influenciado pelos grupos de compradores e vendedores que são movidos por interesses particulares (MANKIW, 2021). A estrutura do mercado se trata de como o mercado está organizado, e é caracterizada de acordo com a quantidade de competidores (oferta) e consumidores (demanda) pertencentes ao ambiente avaliado (MANKIW, 2021). O mercado pode ser classificado como mercado de competição perfeita, mercado de competição monopolista, oligopólio ou monopólio, cada qual com suas particularidades em função dos agentes participantes (WALL, 2015).

O mercado brasileiro conta, em grande maioria, com diversos mercados oligopolizados como a indústria de alimentos, farmacêutica, química, automobilística, entre outras (RIBEIRO; FREITAS; SILVA, 2020). Em todo mercado oligopolista, até o competidor que irá obter o melhor resultado econômico está sujeito ao comportamento dos demais integrantes de mercado (MANKIW, 2021). Os competidores visando obter o melhor retorno analisam as estratégias e as particularidades do mercado, de forma a escolher o cenário de maior benefício (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). Em resumo, pode-se dizer que o oligopólio é uma estrutura de mercado composta por poucos vendedores, que podem ofertar produtos idênticos ou diferenciados, e, por se tratar de um mercado com poucos competidores, a ação de qualquer um deles pode causar alteração nos resultados dos demais, bem como, de sua cadeia de suprimentos (MANKIW, 2021).

A cadeia de suprimentos inclui um conjunto de fornecedores, capazes de abastecer os ofertantes com os recursos necessários para a produção de bens e serviços (SIMCHI-LEVI; KAMINSKY; SIMCHI-LEVI, 2010). Dentre os recursos transacionados nas cadeias de suprimentos, se tem destaque para as matérias-primas, que passam por depósitos, centros de distribuição, centros de produção, estoques de produtos em processo e finalmente compõem os produtos acabados, que, por sua vez, são encaminhados aos varejistas para o atendimento dos clientes. Ademais, as cadeias de suprimentos integradas e descentralizadas compõem os modelos básicos de canais de suprimentos disponíveis para escoamento dos insumos (SIMCHI-LEVI; KAMINSKY; SIMCHI-LEVI, 2010). No modelo integrado, o fabricante, além da produção, comercializa seu produto diretamente, já no descentralizado o fabricante não tem contato direto com o consumidor, pois repassa seu produto para o varejista que o vende ao consumidor final, podendo existir um ou mais varejistas (XIAO; CHOI; CHENG, 2016).

Para compreender o comportamento dos jogadores e suas estratégias em mercados oligopolísticos com apenas dois competidores (duopólio) é comum a utilização de conceitos que estão inseridos no âmbito da Teoria dos Jogos (MANKIW, 2021). Como os resultados obtidos por cada ofertante dependem não somente da estratégia individual proposta, é importante que se conheça o mercado em que se está inserido, levando em consideração os prováveis resultados de equilíbrio entre as estratégias dos agentes pertencentes ao mesmo nível de operação, e também que se analise os aspectos vinculados aos demais elos da cadeia de suprimentos do negócio.

Neste contexto, considerando a possibilidade de representação e interpretação econômica de duas estruturas distintas de cadeias de suprimentos compostas por dois níveis, fabricantes e varejistas, que dominam certo segmento e competem entre si, sendo uma estrutura centralizada em um varejista e a outra com varejistas exclusivos para cada fabricante, este trabalho irá apontar quais são as eventuais diferenças entre os lucros dos agentes em relação às soluções de equilíbrio competitivo. Ademais é de interesse também poder identificar quais são as variáveis independentes de maior influência nos lucros dos ofertantes, em função das diferenças estruturais das cadeias de suprimentos, particularidades estas que serão estudadas e exploradas neste trabalho.

## 1.1 Objetivo

A pesquisa proposta neste trabalho irá analisar e comparar dois modelos de cadeia de suprimentos, em que um deles é composto por dois fabricantes centralizando seus produtos em um único varejista (modelo do funil), e outro que possui dois fabricantes fornecendo para dois varejistas exclusivos (modelo de franquia), ambos visando a obtenção do equilíbrio de lucro máximo para todos os agentes das cadeias, ou seja, a solução do equilíbrio de Nash.

Neste sentido, o objetivo geral desta pesquisa *é analisar e comparar dois modelos matemáticos que representam um mercado duopolista, compreendendo duas diferentes cadeias de suprimentos, que permitam avaliar o impacto de um conjunto de variáveis de decisão no lucro dos ofertantes e no equilíbrio do mercado.*

Para cumprimento do objetivo geral é necessário atender aos seguintes objetivos específicos:

- Realizar um levantamento bibliográfico sobre temas relacionados à cadeias produtivas descentralizadas, Teoria dos Jogos e estratégias competitivas;
- Selecionar modelos matemáticos da literatura para representar o problema estudado;
- Implementar os modelos em ambiente computacional;
- Realizar um conjunto de experimentos computacionais que permitam observar numericamente e graficamente os equilíbrios de mercado;

- Analisar e comparar as soluções de equilíbrio dos modelos.

## 1.2 Justificativa

O trabalho se justifica por se tratar de um tema relevante dentro do campo de estudo da Engenharia de Produção, mais especificamente na área de Engenharia Econômica. Além disso, conforme o levantamento bibliográfico realizado (ver Capítulo 3), verifica-se que há poucos estudos na literatura que adotem a Teoria dos Jogos para avaliar e comparar as condições de equilíbrio resultantes de diferentes cadeias de suprimento.

Torna-se importante a análise de cenários baseados na Teoria dos Jogos, de forma a contribuir com a literatura, ao proporcionar uma nova visão com o intuito de ampliar o conhecimento em relação à modelos conhecidos da literatura. Dessa forma, espera-se que as análises propostas possam contribuir para ampliação do conhecimento na temática abordada.

Diante do exposto, espera-se que todo o conhecimento gerado através do trabalho agregue valor na formação da autora do trabalho, de modo a acrescentar conhecimento e ampliar a sua visão estratégica, em assuntos que são relevantes para sua a formação em engenharia.

## 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos, iniciando pela introdução e contextualização no Capítulo 1. No Capítulo 2 conceitua-se os pontos-chave para o alicerceamento e a execução deste trabalho. O Capítulo 3 apresenta um levantamento bibliográfico que compreende os trabalhos da literatura identificados como mais próximos da pesquisa proposta. O Capítulo 4 apresenta a metodologia, que traz a caracterização e descrição das etapas para a realização do trabalho. O Capítulo 5 contempla os resultados obtidos, destacando as características do fluxo e as regras do jogo, bem como as soluções de equilíbrio e os resultados dos testes computacionais propostos. Para finalizar, o Capítulo 6 apresenta as principais conclusões e considerações finais.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Competição em mercados

De acordo com Frank (2013) o mercado é caracterizado por um grupo de compradores e vendedores de um bem ou serviço. Goolsbee, Levitt e Syverson (2018) definem o mercado como um produto específico que está sendo ofertado e adquirido em um determinado lugar e um período de tempo. Mankiw (2021) conceitua o mercado competitivo como um mercado em que há uma grande gama de compradores e vendedores e que a influência deles no que se refere ao preço de mercado é insignificante. Segundo Pindyck e Rubinfeld (2010) para se definir o mercado é necessário identificar os consumidores, vendedores e os produtos que o compreende. Para realizar a análise do mercado utiliza-se como ferramenta básica as curvas de oferta e de demanda (FRANK, 2013).

A demanda é um conceito de fluxo que determina a quantidade de produto que os compradores de determinado mercado estão dispostos a consumir a um certo preço (WALL, 2015). A demanda pode ser influenciada pelo preço, pela quantidade, renda e gostos dos consumidores e pelo preço de bens substitutos ou complementares (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). O preço praticado na venda do produto pode alterar a demanda (lei da demanda), ou seja, a variação de preço é inversamente proporcional a variação da demanda, sendo assim, se o preço de um produto cai, a quantidade demandada tende a aumentar e vice versa (MANKIW, 2021). A curva de demanda é uma representação gráfica que apresenta qual a quantidade de produto que os consumidores estão dispostos e são capazes de comprar a diferentes preços (WALL, 2015). A curva de demanda tem como propriedade fundamental sua inclinação descendente, caracterizada pela relação inversa entre as variáveis preço e quantidade (FRANK, 2013).

De maneira similar, mas sobre a ótica dos produtores, a oferta esta relacionada a quantidade de um bem ou serviço que os vendedores estão aptos e propensos a vender para um dado preço (MANKIW, 2021). Alguns fatores que podem influenciar a oferta são o preço, o custo de produção dos fornecedores, a quantidade de vendedores e as opções de vendedores fora do mercado (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). O custo produtivo de unidades adicionais tende a aumentar a medida que se deseja a ofertar mais produtos. Este comportamento é descrito pela lei da oferta, em que há uma relação diretamente proporcional entre variação de preço e variação da quantidade ofertada, de forma que, se o preço de um produto sobe, as empresas ofertam mais deste bem (FRANK, 2013). A curva da oferta é a representação gráfica que mostra qual a quantidade de bens os vendedores estão dispostos a ofertar a determinado preço, desde que, mantenha constante quaisquer outros fatores que possam influenciar a quantidade ofertada (PINDYCK; RUBINFELD, 2010).

O equilíbrio é definido como o ponto de encontro das curvas de demanda e de oferta. Este ponto de interseção define qual é o preço e quantidade de equilíbrio do mercado (WALL, 2015). O preço de equilíbrio é o preço que iguala a quantidade demandada e a quantidade ofertada (MANKIW, 2021). O equilíbrio pode ser alterado quando há o deslocamento da curva de oferta e de demanda, o que pode ocorrer, de tempos em tempos, em muitos mercados competitivos (PINDYCK; RUBINFELD, 2010).

As estruturas de mercado de competição podem ser definidas como competição perfeita, competição monopolista, oligopólio e monopólio (WALL, 2015). O mercado competitivo é definido como um mercado composto por tantos compradores e vendedores que o impacto causado por cada um deles é insignificante sobre o preço cobrado por cada um deles no mercado, para um dado produto homogêneo (MANKIW, 2021). Segundo Wall (2015), o mercado de competição perfeita descreve a estrutura de mercado ideal e seu comportamento competitivo resulta na maior eficiência se tratando da alocação dos recursos. Mankiw (2021) cita que os mercados perfeitamente competitivos são mais fáceis de serem analisados, mas difíceis de se observar em situações reais, o que dá origem a diferentes estruturas de mercado.

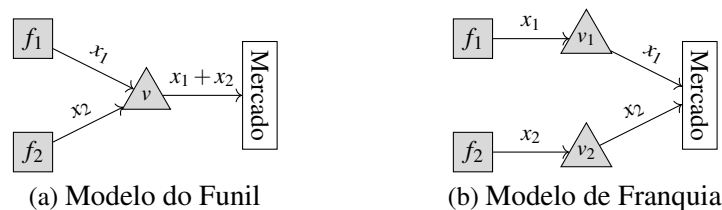
De acordo com Pindyck e Rubinfeld (2010), o oligopólio é definido como um mercado onde apenas algumas empresas são responsáveis por toda produção ou por grande parte dela, sendo que os produtos podem ser diferenciados ou não. Wall (2015), Goolsbee, Levitt e Syverson (2018) acrescentam que o oligopólio se caracteriza como uma situação de mercado onde poucas, porém grandes, empresas dominam o mercado. Mankiw (2021) afirma que cada empresa em um mercado oligopolista deve refletir em como sua decisão de produção pode afetar as decisões de todas as outras empresas integrantes do mercado. Assim, análises de equilíbrio nos diferentes tipos de mercados dependem das características dos ofertantes, bem como da estrutura da cadeia de suprimentos em que eles estão inseridos (XIA; XIAO; ZHANG, 2019).

## 2.2 Cadeias de Suprimentos

Uma cadeia de suprimentos engloba um conjunto de atividades funcionais que, por meio de um processo produtivo que reúne diferentes atividades, converte as matéria-primas em produto acabado, sendo que, cada uma das atividades de transformação agrega valor ao produto (BALLOU, 2018). Segundo Vasnani et al. (2019), a cadeia abrange sistemas complexos que se envolvem recursos, atividades, empresas e informações que colaboram com a movimentação de uma mercadoria por entre os níveis de suprimentos, e, portanto depende de todos os membros para o seu funcionamento eficiente e eficaz.

A escolha da estrutura de canal da cadeia de suprimentos é uma escolha estratégica. A cadeia de suprimentos pode ser delineada com a estrutura integrada, centralizada ou descentralizada (MAHMOODI; ESHGHI, 2014). A estrutura integrada está relacionada ao fabricante fornecer o seu produto final diretamente ao cliente, já uma estrutura descentralizada consiste no repasse dos produtos a um varejista exclusivo para que eles possam vender o produto ao consumidor final (XIA; XIAO; ZHANG, 2019). Na estrutura centralizada se tem uma cadeia com  $n$  fabricantes que fornecem seus produtos ao consumidor final por meio de um varejista comum (GIRI; CHAKRABORTY; MAITI, 2015). A Figura 1a mostra uma cadeia em que o único varejista ativo é o  $v$ , as fabricas  $f_1$  e  $f_2$  centralizam seus produtos em um único varejista. Já na Figura 1b há um varejista para cada produtor,  $v_1$  e  $v_2$ , o que caracteriza o tipo de cadeia descentralizada. Nas figuras 1a e 1b os fabricantes ( $f$ ) são representados pelo quadrado, os varejistas ( $v$ ) representados pelo triângulo, o retângulo representa o mercado, as setas indicam o fluxo dos produtos  $x_1$  e  $x_2$  até chegar ao mercado.

Figura 1 – Estrutura das cadeias de suprimentos



Na configuração do duopólio, analisando pelo ponto de vista da cadeia de suprimentos, o fabricante tem incentivo para adotar a descentralização em seu canal de distribuição visto que, adotando a descentralização, onde se adiciona um varejista e se utiliza de um contrato tarifário em duas partes, o fabricante pode ter um lucro maior do que vendendo diretamente o consumidor (XIAO; CHOI; CHENG, 2016). Este e outros cenários da cadeia de suprimentos podem ser analisados por meio da Teoria dos Jogos.

## 2.3 Teoria dos Jogos

Segundo Fiani (2015), a Teoria dos Jogos busca entender como os jogadores tomam suas decisões em situações estratégicas, sejam eles organizações, países, indivíduos, entre outros. Goolsbee, Levitt e Syverson (2018) apontam que o propósito da Teoria dos Jogos é compreender o que pode vir a acontecer quando atores econômicos interagem de forma estratégica. De acordo com Wall (2015), a essência da Teoria dos Jogos é fazer com que um competidor identifique as melhores decisões possíveis que o seu rival pode tomar, considerando cada uma das suas estratégias, para assim, planejar contramedidas, caso seu oponente reaja as suas escolhas estratégicas.

A ordenação da implementação das estratégias depende da estrutura do jogo, podendo ser categorizado como jogos simultâneos, onde as estratégias dos dois jogadores são escolhidas no mesmo momento, sendo assim, um não tem conhecimento da decisão do outro; repetidos, onde se utiliza da estratégia de jogos simultâneos repetidas vezes; ou sequenciais, onde um dos jogadores toma a decisão primeiro e o outro jogador toma sua decisão sabendo da estratégia do primeiro jogador (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018).

Para compreender como as decisões são tomadas é necessário conhecimento das preferências dos jogadores, pois são elas que norteiam as escolhas de estratégias a serem executadas (FIANI, 2015). É importante avaliar se os jogadores irão tomar decisões de forma cooperativa, acordo entre as partes, ou de forma não cooperativa, no qual cada jogador toma suas próprias decisões estratégicas individualmente, que é o tipo de jogo mais realista, quando se trata da maior parte dos jogos de firma e consumidores (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). Os jogos são descritos em função das regras e particularidades do jogo, o que pressupõem a caracterização dos seguintes conceitos:

- **Jogadores:** os jogadores são agentes tomadores de decisão, as suas ações tem a capacidade de afetar todos os outros integrantes do jogo, podendo ser apenas um indivíduo ou uma organização (FIANI, 2015).
- **Estratégias:** por estratégia entende-se a decisão que cada jogador irá tomar, levando em conta que sua decisão afeta os outros jogadores, da mesma forma que a decisão dos outros implica em consequências a si próprio. Por este motivo para a escolha das estratégias é necessário um raciocínio complexo de forma a tentar prever cenários de decisão de todos os jogadores (FIANI, 2015).
- **Payoffs:** os *payoffs* são os benefícios atribuídos a cada jogador ao determinar a ação estratégica que será tomada, combinada com as ações dos outros jogadores (BÊRNI; FERNANDEZ, 2014).
- **Equilíbrio:** o equilíbrio é o termo que faz referência a situação onde todos os jogadores tomam as melhores decisões, considerados os seus objetivos e levando em conta as estratégias dos outros jogadores (WALL, 2015).

Nos jogos, cada estratégia escolhida gera uma recompensa. A estratégia que tem a melhor recompensa esperada é chamada de estratégia ótima, porém o resultado ótimo para um jogador pode mudar dependendo da escolha do outro. A estratégia que independente da decisão do outro jogador traz o melhor retorno é chamada de estratégia dominante, enquanto àquela que não traz um bom resultado, independente da estratégia adotada pelo outro jogador, é chamada de estratégia dominada (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). Quando todos dos jogadores em interação escolhem a melhor estratégia para si considerando as estratégias adotadas pelos outros jogadores se tem o equilíbrio de Nash (MANKIW, 2021).



### 2.3.1 Equilíbrio em Jogos Oligopolistas

O equilíbrio do mercado oligopolista é influenciado pelas decisões de cada integrante do mercado, e pode ser definido como momento em que cada participante do mercado toma as melhores decisões possíveis, considerando as ações de outros integrantes (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). O tipo mais simples de oligopólio é chamado de duopólio e se refere a um mercado com apenas dois integrantes (MANKIW, 2021). Augustin Cournot, um dos primeiros economista-matemático francês, e Joseph Bertrand, economista francês, estudaram os mercados oligopolistas e elaboraram teorias com premissas que levam em consideração as ações e reações dos rivais no processo de tomada de decisão (WALL, 2015).

O modelo de Cournot tenta explicar como são tomadas as decisões dos integrantes de mercado, desde a competição perfeita até o monopólio, de forma a maximizar os lucros (BIERMAN; FERNANDEZ, 2011). Pindyck e Rubinfeld (2010) definem o jogo de Cournot como um modelo no qual os concorrentes fabricam produtos homogêneos, consideram fixo o nível produtivo da concorrência e decidem de forma simultânea a quantidade que será produzida. Goolsbee, Levitt e Syverson (2018) acrescentam que, na concorrência de Cournot, as empresas não controlam o preço de seus bens e sim a quantidade a ser produzida.

De acordo com Frank (2013), a quantidade de equilíbrio para um oligopólio de Cournot pode ser definida a partir do diagrama de demanda residual, onde se desloca a curva de demanda duopolista até que alcance a quantidade produzida pela outra firma. Pindyck e Rubinfeld (2010) destacam que o equilíbrio de Cournot é definido através das curvas de reação onde cada participante realiza a projeção das quantidades e estima, de forma assertiva, a quantidade de produção do seu concorrente, para maximizar os seus lucros.

O modelo de Bertrand, diferente do de Cournot, considera que os integrantes do mercado irão manter os preços atuais nos produtos ofertados (FRANK, 2013). Goolsbee, Levitt e Syverson (2018) consideram que a concorrência de Bertrand é um modelo de oligopólio no qual cada uma das firmas escolhe o preço do seu produto simultaneamente levando em consideração que o concorrente irá manter seu preço atual. De acordo com Wall (2015), Bertrand obteve resultado de seu modelo ao constatar que a tendência do mercado é minimizar a super-lucratividade em consequência da competição, pois os integrantes são incentivados a minimizar o preço para conseguir uma participação significativa no mercado, fazendo com que os outros participantes reajam e se inicie uma “guerra de preços” até que o preço se reduza ao mínimo para cobrir apenas o custo médio da firma.



De acordo com Frank (2013) no modelo de Bertrand não pode haver um equilíbrio estável, sendo que cada empresa vende o seu produto a um preço inferior a sua concorrente. O incentivo de minimização de preços será interrompido a partir do momento em que o preço praticado atinja o nível do custo marginal, ou seja, não haverá mais incentivos de minimização de preços quando se atingir o equilíbrio do oligopólio de Bertrand (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). Pindyck e Rubinfeld (2010) criticam o modelo pelo fato de que, em mercados de produtos idênticos, a competição pelas quantidades é mais natural, mesmo fixando o preço, não se tem dados de qual a fatia do mercado cada firma irá atender e que, atingindo o equilíbrio, a empresa se mantém no mercado mas não obtém lucro. Por outro lado, as fatias de mercado levam em consideração não somente o preço, mas também as diferenças de desempenho, *design* e durabilidade do bem ofertado, tornando mais natural a concorrência entre preços (PINDYCK; RUBINFELD, 2010).

A diferenciação dos produtos faz com que o preço de cada produto tenha efeito diferente na demanda dos integrantes do mercado (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018). Fiani (2015) destaca que quando os produtos são diferenciados, a demanda de cada firma é caracterizada por uma função inversa do seu próprio preço e uma função direta, em se tratando do preço do outro integrante do mercado, causando o efeito de minimizar a sua própria demanda, quando se aumenta seu preço de oferta, e aumentando a demanda do concorrente. O equilíbrio é dado pela intercessão das curvas de reação para preços entre concorrentes do mercado, onde, neste ponto, são tomadas as melhores decisões de ambos integrantes, sendo que, se uma delas decidir modificar o seu preço o lucro da firma irá diminuir (GOOLSBEE; LEVITT; SYVERSON, 2018).

### 3 Revisão da Literatura

Buscou-se na literatura trabalhos relacionados à análise de cadeias de suprimentos, tendo como base a Teoria dos Jogos. Foram identificados trabalhos científicos que abrangem as três estruturas de [Cadeia de Suprimentos \(CS\)](#), porém, com diferentes tipos de variáveis sendo consideradas nos modelos.

[Banker, Khosla e Sinha \(1998\)](#) tem a variável “qualidade” no duopólio e no oligopólio como tema central de seu estudo, o seu objetivo é avaliar três diferentes cenários de competição: *i)* competição duopolística assimétrica, onde o potencial de demanda intrínseca da empresa dominante diminui; *ii)* um duopólio simétrico em que as empresas são impedidas de cooperar na definição de níveis de qualidade; e *iii)* competição oligopolística simétrica onde o número de firmas aumenta. O artigo propõe modelos de competição oligopolista para investigar se os níveis de equilíbrio de qualidade aumentam à medida que a competição se intensifica.

No estudo de [McGuire e Staelin \(2008\)](#) utiliza-se uma abordagem da teoria dos jogos diferente da maioria dos artigos analisados em seu estudo no que se refere a estrutura do canal, tendo como objetivo final determinar a estrutura do canal de equilíbrio sob diferentes condições de mercado, em vez de condições de equilíbrio sob uma determinada estrutura de canal. Para isso, os autores realizam uma investigação do efeito da substituição do produto nas estruturas de distribuição do equilíbrio de Nash em um duopólio.

[Liu, Cai e Tsay \(2014\)](#) examina a eficácia do compartilhamento de custos de propaganda em um modelo fabricantes-varejistas concorrentes que vendem produtos parcialmente substituíveis que podem diferir no tamanho do mercado. Com os resultados encontrados não se obteve resolução definitiva para o problema apresentado, no entanto o estudo fornece uma estrutura geral para entender como a estrutura do canal interage com decisões em torno de publicidade e outros esforços de expansão de mercado semelhantes, abrindo inúmeros caminhos para pesquisas futuras.

O artigo de [Mahmoodi e Eshghi \(2014\)](#) tem por objetivo investigar a concorrência de cadeias de suprimentos duopolistas quando se trata de preço, tendo a função de demanda como uma distribuição estocástica. Realiza-se um estudo baseado em duas cadeias de suprimentos concorrentes, sendo cada cadeia com um fabricante que vende seu produto através de um varejista exclusivo, podendo ser estruturada como integrada, descentralizada ou mista e competem entre si por preço.

A pesquisa de [Chen, Liang e Yang \(2015\)](#) propõem um cronograma de investimento cooperativo em qualidade, no qual dois fabricantes originais compartilham as despesas parciais de investimento em qualidade de seus próprios produtos para induzir a melhoria da qualidade do fabricante contratado, cujas demandas são sensíveis aos preços e a qualidade dos produtos. Os autores avaliam três cenários de decisão, onde no primeiro há um fabricante contratado (sem poder de decisão) e dois fabricantes originais com poder de decisão da qualidade do produto e preço de varejo; no segundo cenário a decisão de qualidade é centralizada, onde os dois fabricantes originais definem cooperativamente o nível de qualidade e as despesas de investimento de qualidade são compartilhadas com o fabricante contratado; o terceiro cenário é similar ao segundo, porém, a decisão de qualidade é descentralizada, sendo assim os dois fabricantes originais definem de forma não cooperativa o nível da qualidade do produto.

[Giri, Chakraborty e Maiti \(2015\)](#) centraliza sua pesquisa na decisão de preço e qualidade em cadeias de suprimentos de dois elos com  $n$  fabricantes e um varejista, com o objetivo de estudar e comparar um modelo de competição com decisões de qualidade e preço em cenários centralizados, de competição de Stakelberg e de coalizão. Os autores comparam dois modelos, sendo um com diferentes preços e outro com preços homogêneos para os produtos ofertados.

[Xiao, Choi e Cheng \(2016\)](#) examinam o prazo de entrega e as estratégias de **CS** de dois fabricantes de produção sob encomenda que competem em preço e prazo de entrega. Os autores exploram como o *leadtime* cotado depende da estratégia de **CS** e explicam quando e por que “**CS** descentralizado” é ideal para um fabricante.

Em seu estudo [Xia, Xiao e Zhang \(2019\)](#) exploram a interação entre estratégia de estrutura de canais, prestação de serviços e concorrência na **CS** de modo a encontrar as condições sob as quais a descentralização da **CS** é uma estratégia melhor. Eles tem como modelo de estudo duas cadeias de suprimentos competindo em preço e serviço, onde cada cadeia consiste em um fabricante e um varejista, onde cada fabricante tem duas opções possíveis de estrutura de canal de distribuição, a integração ou descentralização.

A pesquisa de [Chakraborty, Chauhan e Ouhimmou \(2019\)](#) objetiva estudar e comparar um modelo de competição com decisão de preço, qualidade e custo compartilhado em cadeias de dois elos com 2 fabricantes e um varejista em estruturas de mercado sem compartilhamento, com contrato de compartilhamento simples e com contrato de compartilhamento com barganha. Os autores comparam dois modelos, o primeiro com diferentes preços para os produtos e o segundo com preços homogêneos.

O artigo de [Vasnani et al. \(2019\)](#) fornece uma revisão bibliográfica inclusiva e sistemática com foco nas aplicações e tendências da teoria dos jogos em diversas áreas da gestão da CS, não contando com modelos. Os autores discorrem sobre temas como o desenvolvimento da teoria dos jogos, conceitos de solução do equilíbrio de Nash e Stackelberg e sobre a integração da teoria dos jogos nas cadeias de suprimentos em jogos cooperativos e não cooperativos, simultâneos e sequenciais, em cadeias de suprimentos centralizadas e descentralizadas, incluindo a concorrência entre as cadeias de suprimentos.

[Rofin e Mahanty \(2020\)](#) investigam o impacto da discriminação de preços no atacado por um fabricante em uma CS de canal duplo varejista-e-produtor para diferentes categorias de produtos com base em sua preferência de canal online. Os autores desenvolvem modelos de teoria dos jogos para descrever a competição entre os varejistas em uma CS de dois canais composta por um varejista e um varejista eletrônico engajados na competição. O estudo auxilia os fabricantes a maximizar seus lucros adotando a estratégia certa de preço no atacado, considerando a preferência do canal online do produto, quando os fabricantes estão fornecendo para varejistas heterogêneos.

Por fim, é importante destacar que, apesar de trabalhar com as mesmas variáveis e estratégias de canal de distribuição explorado neste trabalho, pode-se verificar que os objetivos de [Chen, Liang e Yang \(2015\)](#) se diferem dos relacionados a esta pesquisa, visto que [Chen, Liang e Yang \(2015\)](#) objetiva avaliar a viabilidade de um investimento cooperativo ou não em qualidade em uma CS em um duopólio, enquanto este trabalho busca analisar e comparar dois modelos de cadeias de suprimentos e os impactos das variáveis de decisão na obtenção do equilíbrio. O Quadro 3.1 sumariza o levantamento bibliográfico realizado, o que inclui a caracterização dos trabalhos em função das variáveis e os tipos de estruturas de cadeias de suprimentos. Note que a última linha do Quadro 3.1 destaca o contexto avaliado na pesquisa proposta.

Quadro 3.1 – Bibliografia Relacionada

BIBLIOGRAFIA EXPLORADA	Variáveis						Estratégia do Canal		
	Preço de Varejo	Preço de Atacado	Qualidade	Propaganda	Lead time	Nível de Serviço	Integrada	Centralizada	Descentralizada
Banker, Khosla e Sinha (1998)		✓	✓				✓		
McGuire e Staelin (2008)	✓						✓		
Liu, Cai e Tsay (2014)	✓	✓		✓					✓
Mahmoodi e Eshghi (2014)	✓	✓					✓		✓
Chen, Liang e Yang (2015)	✓	✓	✓					✓	✓
Giri, Chakraborty e Maiti (2015)	✓	✓	✓					✓	
Xiao, Choi e Cheng (2016)	✓	✓			✓		✓		✓
Xia, Xiao e Zhang (2019)	✓	✓				✓	✓		✓
Chakraborty, Chauhan e Ouhimmou (2019)	✓	✓	✓						✓
Rofin e Mahanty (2020)	✓	✓							✓
Rodrigues (2023)*	✓	✓						✓	✓

\* Trabalho em desenvolvimento pela autora.

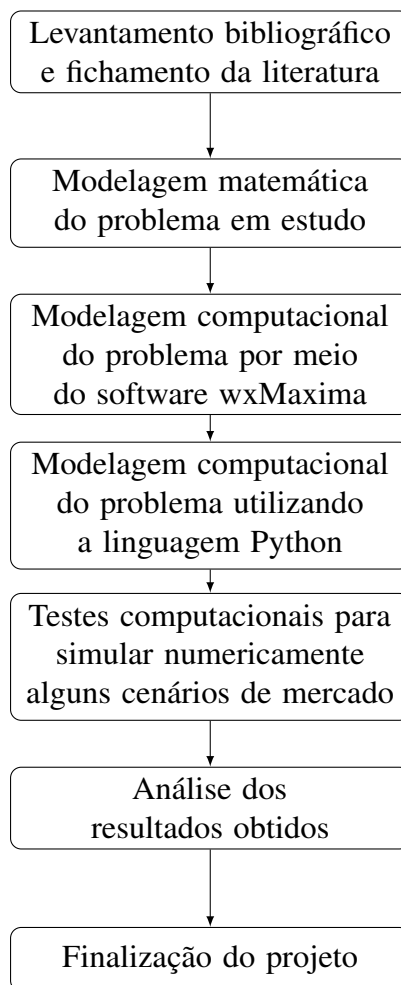
## 4 Metodologia

De maneira sucinta e objetiva, este trabalho pode ser classificado como uma pesquisa axiomática normativa, pois busca-se compreender o comportamento de modelos clássicos da literatura, as características dos problemas e as soluções resultantes da obtenção dos equilíbrios de mercado.

Quanto a natureza desta pesquisa, ela pode ser considerada de abordagem quantitativa, levando em consideração que para a estruturação do modelo é necessário uma compreensão analítico-quantitativa das variáveis utilizadas no estudo, bem como a estruturação do problema em linguagem matemática e computacional através de softwares de modelagem e simulação.

No tocante às etapas para a execução do projeto de pesquisa, a Figura 2 apresenta um fluxo que sumariza o conjunto de atividades necessárias para a sua finalização plena.

Figura 2 – Fluxo das etapas da Metodologia



Uma alternativa ampliada de se explicar os procedimentos metodológicos descritos na Figura 2 se dá a partir de sete etapas, são elas:

1. Levantamento bibliográfico e fichamento da literatura por meio de textos que abordem estudos relacionados a CS e Teoria dos Jogos;
2. Modelagem matemática do problema em estudo, por meio da construção de equações que associem um conjunto de parâmetros e variáveis do problema, e sejam capazes de descrever os preços, custos e lucros dos fabricantes e varejistas;
3. Modelagem computacional do problema por meio do software wxMaxima<sup>1</sup>. A modelagem no wxMaxima tem por objetivo verificar (conferir) os cálculos, anteriormente realizados manualmente;
4. Codificação do modelo matemático em Python<sup>2</sup>. A implementação em Python tem como foco a realização posterior de testes numéricos associados aos equilíbrios obtidos em cada estrutura de CS;
5. Realizar um conjunto de testes numérico-computacionais para simular alguns cenários de interesse dos pesquisadores, com foco em comparar o resultado do equilíbrio das diferentes cadeias e o impacto de suas variáveis no resultado para o mercado;
6. Análise dos resultados obtidos, verificando o que a pesquisa acresce na literatura e destacando as particularidades e diferenças entre os resultados dos diferentes tipos de cadeias de suprimento estudadas;
7. Documentação dos resultados da pesquisa.

---

<sup>1</sup> Sistema de manipulação de expressões simbólicas e numéricas que produz resultados de alta precisão. Para mais informações acesse: <<https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>>

<sup>2</sup> Linguagem de programação de alto nível, com sintaxe mais simplificada e próxima da linguagem humana, utilizada nas mais diversas aplicações. Para mais informações acesse: <<https://www.python.org/about/>>

## 5 Resultados e discussões

### 5.1 Caracterização do jogo

A composição do jogo depende do modelo a ser analisado. No Modelo do Funil (M1), representado pela Figura 1a, tem-se como integrantes do jogo dois fabricantes concorrentes ( $f_1$  e  $f_2$ ) e um varejista ( $v$ ), que recebe os produtos dos dois fabricantes para oferecer ao mercado. No Modelo da Franquia (M2), representado pela Figura 1b, tem-se dois varejistas concorrentes ( $v_1$  e  $v_2$ ), sendo cada um deles exclusivos de um fabricante, ou seja, o  $f_1$  fornece o seu produto ( $x_1$ ) apenas para o  $v_1$ , o mesmo acontece para  $f_2$  e  $v_2$ .

Os modelos tem como variáveis de decisão a demanda do mercado ( $x_i$ ), os preços que serão definidos e praticados pelos fabricantes ( $w_i$ ) e pelos varejistas ( $p_i$ ), e como parâmetros a demanda máxima do produto ( $\alpha_i$ ), a elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma_i$ ), a elasticidade-preço da demanda ( $\beta_i$ ) e o custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c_i$ ), para todo conjunto de produtos  $i \in I$ . As estratégias de preço dos integrantes do jogo serão definidas de forma a maximizar seus respectivos lucros. Ademais, a escolha das estratégias entre os fabricantes é simultânea em ambos os modelos. O mesmo acontece no caso do modelo M2 com os varejistas. O fluxo do jogo se dá de forma sequencial, onde os fabricantes tomam a decisão de preço  $w_i \in I$  e após essa decisão, o(s) varejista(s) toma(m) a decisão de preço  $p_i \in I$ . A Tabela 1 sumariza quais são os conjuntos, parâmetros e variáveis dos modelos a serem estudados.

Tabela 1 – Caracterização dos conjuntos, parâmetros e variáveis dos modelos

Símbolo	Descrição	Domínio
<b>Conjuntos</b>		
$I$	Conjunto de produtos $i$ .	$i \in I = \{1, 2\}$
<b>Parâmetros</b>		
$\alpha_i$	Demanda máxima do produto $i \in I$ .	$\alpha_i \geq 0$
$\gamma_i$	Elasticidade-preço cruzada da demanda de $i \in I$ .	$\gamma_i \geq 0$
$\beta_i$	Elasticidade-preço da demanda de $i \in I$ .	$\beta_i > \gamma_i, \beta_i > \gamma_j$
$c_i$	Custo marginal de produção do fabricante do produto $i \in I$ .	$c_i > 0$
<b>Variáveis</b>		
$x_i$	Demanda pelo produto $i \in I$ .	$x_i \geq 0$
$w_i$	Preço do fabricante do produto $i \in I$ .	$w_i > c_i$
$p_i$	Preço de varejo do produto $i \in I$ .	$p_i \geq w_i$
$m_i$	Margem de lucro do fabricante do produto $i \in I$ .	$m_i = w_i - c_i$
$\pi_i^F$	Lucro do fabricante do produto $i \in I$ .	$\pi_i^F \geq 0$
$\pi^V$	Lucro do único varejista.	$\pi^V \geq 0$
$\pi_i^V$	Lucro do varejista associado ao produto $i \in I$ .	$\pi_i^V \geq 0$
$\pi^T$	Lucro total do modelo	$\pi^T = \sum(\pi_i^V + \pi_i^F)$



## 5.2 Desenvolvimento do Modelo Matemático

### 5.2.1 Modelo do Funil - M1

As equações (5.1)-(5.3) e a inequação (5.4) definem as características matemáticas das demandas dos produtos, os lucros dos fabricantes e varejistas e o preço mínimo dos varejistas, respectivamente, para o modelo M1.

$$\text{M1} \begin{cases} x_i = \alpha_i - \beta_i p_i + \gamma_i p_j & \forall i \in I, j \in I, i \neq j \mid \alpha_i \geq 0, \beta_i > \gamma_i & (5.1) \\ \pi_i^F = (w_i - c_i)x_i & \forall i \in I \mid w_i > c_i & (5.2) \\ \pi^V = \sum_{i \in I} (p_i - w_i)x_i & & (5.3) \\ p_i \geq w_i & \forall i \in I. & (5.4) \end{cases}$$

Ao reescrever Eq. (5.1), obtém-se a Eq. (5.5) que é uma outra forma de definir a demanda do mercado.

$$x_i = \alpha_i - (\beta_i - \gamma_i)p_i + \gamma_i(p_j - p_i) \quad \forall i \in I, j \in I, i \neq j \mid \alpha_i \geq 0, \beta_i > \gamma_i. \quad (5.5)$$

De forma similar, também é possível reescrever a Eq. (5.3), obtendo-se a Eq. (5.6) para descrever o lucro dos varejistas.

$$\pi^V = (p_i - w_i)(\alpha_i - \beta_i p_i + \gamma_i p_j) + (p_j - w_j)(\alpha_j - \beta_j p_j + \gamma_j p_i). \quad (5.6)$$

A condição de lucro máximo do varejista é dada por  $\frac{\partial \pi^V}{\partial p_i} = 0$  e  $\frac{\partial \pi^V}{\partial p_j} = 0$ , considerando as condições de segunda ordem que precisam ser asseguradas, conforme mostrado, posteriormente, na Seção 5.3. Assim, deve-se utilizar do resultado obtido através da derivada de  $\pi^V$  em relação a  $p_i$ , seguido de um procedimento de isolar a variável de preço de varejo do produto  $i$ , obtendo-se, assim, a Eq. (5.7). Note que na Eq. (5.7)  $p_i$  está em função de  $p_j$ , portanto, de forma similar, se tem  $p_j$  em função de  $p_i$ , como mostra a Eq. (5.8).

$$p_i = \frac{\alpha_i + w_i \beta_i - w_j \gamma_j + p_j (\gamma_i + \gamma_j)}{2\beta_i} \quad (5.7)$$

$$p_j = \frac{\alpha_j + w_j \beta_j - w_i \gamma_i + p_i (\gamma_i + \gamma_j)}{2\beta_j}. \quad (5.8)$$

Para encontrar o resultado ótimo do preço de varejo  $p_i^*$  independente de  $p_j$ , substitui-se a Eq. (5.8) na Eq. (5.7), obtendo-se, após simplificações, a Eq. (5.9) para  $p_i^*$ . Em um processo similar na equação que descreve  $p_j^*$ , obtém-se a Eq. (5.10).

$$p_i^* = \frac{2\alpha_i \beta_j + \alpha_j \gamma_i + \alpha_j \gamma_j + (2\beta_i \beta_j - \gamma_i^2 - \gamma_i \gamma_j)w_i + (\beta_j \gamma_i - \beta_j \gamma_j)w_j}{4\beta_i \beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2} \quad (5.9)$$

$$p_j^* = \frac{2\alpha_j \beta_i + \alpha_i \gamma_j + \alpha_i \gamma_i + (2\beta_i \beta_j - \gamma_j^2 - \gamma_i \gamma_j)w_j + (\beta_i \gamma_j - \beta_i \gamma_i)w_i}{4\beta_i \beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2}. \quad (5.10)$$

De forma a calcular o lucro máximo do fabricante  $\pi_i^F$ , deve-se realizar o cálculo das derivadas de  $p_i^*$  e de  $p_j^*$  em relação a  $w_i$ , cujos resultados podem ser vistos na Eq. (5.11) e Eq. (5.12), respectivamente.

$$\frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i} = \frac{2\beta_i\beta_j - \gamma_i^2 - \gamma_i\gamma_j}{4\beta_i\beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i} = \frac{\beta_i\gamma_j - \beta_i\gamma_i}{4\beta_i\beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2}. \quad (5.12)$$

Note que, ao reescrever a Eq. (5.2) e incorporar a Eq. (5.1), obtém-se a Eq. (5.13) que descreve o lucro do fabricante  $i$ .

$$\pi_i^F = (w_i - c_i)[\alpha_i - \beta_i p_i^* + \gamma_i p_j^*] \quad (5.13)$$

O lucro máximo para o fabricante é obtido por meio da derivada parcial do lucro em relação ao  $w_i$ , ou seja,  $\frac{\partial \pi_i^F}{\partial w_i} = 0$ , conforme mostrado na Eq. (5.14).

$$\frac{\partial \pi_i^F}{\partial w_i} = \alpha_i - \beta_i \left[ p_i^*(w_i) + w_i \frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i} \right] + \gamma_i \left[ p_j^*(w_i) + w_i \frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i} \right] + c_i \left[ \beta_i \frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i} - \gamma_i \frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i} \right]. \quad (5.14)$$

Para encontrar preço ótimo de cada um dos fabricantes  $w_i^*$ , basta isolar o  $w_i$  da Eq. (5.14), substituir os termos  $p_i^*$  pela Eq. (5.9),  $p_j^*$  pela Eq. (5.10),  $\frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i}$  pela Eq. (5.11) e  $\frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i}$  pela Eq. (5.12). Após as simplificações obtém-se a Eq. (5.15) que define  $w_i^*$  em função de  $w_j$ . De maneira similar se define  $w_j^*$  em função de  $w_i$ , conforme mostrado na Eq. (5.16).

$$w_i^* = \frac{2\alpha_i\beta_i\beta_j - \alpha_i\gamma_i\gamma_j - \alpha_i\gamma_j^2 + \alpha_j\beta_i\gamma_i - \alpha_j\beta_i\gamma_j + (\beta_i\beta_j\gamma_i + \beta_i\beta_j\gamma_j - \gamma_i\gamma_j^2 - \gamma_i^2\gamma_j)w_j}{4\beta_i(\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j)} + \frac{c_i}{2} \quad (5.15)$$

$$w_j^* = \frac{2\alpha_j\beta_i\beta_j - \alpha_j\gamma_i\gamma_j - \alpha_j\gamma_i^2 + \alpha_i\beta_j\gamma_j - \alpha_i\beta_j\gamma_i + (\beta_i\beta_j\gamma_i + \beta_i\beta_j\gamma_j - \gamma_i\gamma_j^2 - \gamma_i^2\gamma_j)w_i}{4\beta_j(\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j)} + \frac{c_j}{2}. \quad (5.16)$$

Ao substituir a Eq. (5.16) na Eq. (5.15) é possível obter uma equação que descreva  $w_i^*$  não dependente de  $w_j^*$ , ou seja, após um conjunto de simplificações matemáticas obtém-se a Eq. (5.17).

$$w_i^* = - \frac{\alpha_i\gamma_j^2 + ((2c_i\beta_i + \alpha_i)\gamma_i + \alpha_j\beta_i)\gamma_j - \alpha_j\beta_i\gamma_i + (-2c_i\beta_i^2 - 2\alpha_i\beta_i)\beta_j}{\gamma_i\gamma_j^2 + (\gamma_i^2 - 4\beta_i\gamma_i - \beta_i\beta_j)\gamma_j - \beta_i\beta_j\gamma_i + 4\beta_i^2\beta_j}. \quad (5.17)$$

De maneira análoga, define-se  $w_j^*$  independente, o que pode ser visto na Eq. (5.18).

$$w_j^* = - \frac{\alpha_i\gamma_j^2 + ((2c_i\beta_i + \alpha_i)\gamma_i + \alpha_j\beta_i)\gamma_j - \alpha_j\beta_i\gamma_i + (-2c_i\beta_i^2 - 2\alpha_i\beta_i)\beta_j}{\gamma_i\gamma_j^2 + (\gamma_i^2 - 4\beta_i\gamma_i - \beta_i\beta_j)\gamma_j - \beta_i\beta_j\gamma_i + 4\beta_i^2\beta_j}. \quad (5.18)$$

### 5.2.2 Modelo de Franquia - M2

O Modelo M2 é semelhante ao M1, exceto por ter um varejista exclusivo para cada fabricante e seu produto. Assim, cada varejista tem seu lucro relacionado apenas ao produto que fornece para o mercado, o que resulta no modelo M2.

$$\text{M2} \begin{cases} x_i = \alpha_i - (\beta_i - \gamma_i)p_i + \gamma_i(p_j - p_i) & \forall i \in I, j \in I, i \neq j \mid \alpha_i \geq 0, \beta_i > \gamma_i \\ \pi_i^F = (w_i - c_i)x_i & \forall i \in I \mid w_i > c_i \\ \pi_i^V = (p_i - w_i)x_i & \forall i \in I \\ p_i \geq w_i & \forall i \in I. \end{cases} \quad (5.19)$$

É possível reescrever a função de lucro dos fabricantes de forma a obter a Eq. (5.20). Para isso, substitui-se a variável  $x_i$  pela Eq. (5.1) na Eq. (5.2).

$$\pi_i^F = (w_i - c_i)[\alpha_i - \beta_i p_i^*(w_i, w_j) + \gamma_i p_j^*(w_i, w_j)]. \quad (5.20)$$

Para se obter o lucro máximo deve-se calcular  $\frac{\partial \pi_i^F}{\partial w_i} = 0$ , conforme (5.21).

$$\frac{\partial \pi_i^F}{\partial w_i} = \alpha_i - \beta_i \left[ p_i^*(w_i) + w_i \frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i} \right] + \gamma_i \left[ p_j^*(w_i) + w_i \frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i} \right] + c_i \left[ \beta_i \frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i} - \gamma_i \frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i} \right] = 0. \quad (5.21)$$

Pode-se calcular o lucro do varejista por meio da associação das Eq. (5.1) e Eq. (5.19) de forma similar ao realizado na Eq. (5.20), tendo como resultado a Eq. (5.22).

$$\pi_i^V = (p_i - w_i)(\alpha_i - \beta_i p_i + \gamma_i p_j) \quad \forall i \in I \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \pi_i^V}{\partial p_i} = \alpha_i - 2\beta_i p_i + \gamma_i p_j + w_i \beta_i \quad \forall i \in I. \quad (5.23)$$

A curva de reação dos varejistas consiste na maximização do seu lucro, quando  $\frac{\partial \pi_i^V}{\partial p_i} = 0, \forall i \in I$ , conforme mostrado na Eq. (5.23). Com isso, utiliza-se do resultado obtido por meio da derivada de  $\pi_i^V$  em relação a  $p_i$  e isolando a variável de preço de varejo do produto  $i$ , resultando na Eq. (5.24), para o caso em que a equação descreve  $p_i$  em função de  $p_j$ , e Eq. (5.25) quando  $p_j$  fica em função de  $p_i$ .

$$p_i(p_j) = \frac{\alpha_i + \gamma_i p_j + w_i \beta_i}{2\beta_i} \quad i \in I \quad (5.24)$$

$$p_j(p_i) = \frac{\alpha_j + \gamma_j p_i + w_j \beta_j}{2\beta_j} \quad j \in I. \quad (5.25)$$

Para encontrar o resultado ótimo dos preços de varejo de ambos os produtos, substitui-se a Eq. (5.25) na Eq. (5.24), obtendo-se, após simplificações, as Eq. (5.26) e Eq. (5.27), para  $p_i^*$  e

$p_j^*$ , respectivamente.

$$p_i^* = \frac{2\alpha_i\beta_j + \gamma_i\alpha_j + \gamma_i\beta_j w_j + 2\beta_i\beta_j w_i}{4\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j} \quad (5.26)$$

$$p_j^* = \frac{2\alpha_j\beta_i + \gamma_j\alpha_i + \gamma_j\beta_i w_i + 2\beta_j\beta_i w_j}{4\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j}. \quad (5.27)$$

Em uma etapa posterior, deve-se calcular as derivadas parciais de  $p_i^*$  e de  $p_j^*$  em relação a  $w_i$ , cujos resultados podem ser vistos nas Eq. (5.28) e Eq. (5.29), respectivamente.

$$\frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i} = \frac{2\beta_i\beta_j}{4\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i} = \frac{\gamma_j\beta_i}{4\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j}. \quad (5.29)$$

Para encontrar o preço ótimo dos fabricantes  $w_i^*$ , isola-se o  $w_i$  da Eq. (5.21) e substitui os termos  $p_i^*$  pela Eq. (5.26),  $p_j^*$  pela Eq. (5.27),  $\frac{\partial p_i^*(w_i)}{\partial w_i}$  pela Eq. (5.28) e  $\frac{\partial p_j^*(w_i)}{\partial w_i}$  pela (5.29). Após as simplificações obtém-se a Eq. (5.30) que define  $w_i^*$  em função de  $w_j$ . De maneira similar se define  $w_j^*$  em função de  $w_i$  (ver Eq. (5.31)).

$$w_i^* = \frac{2\alpha_i\beta_j + \alpha_j\gamma_i + \beta_j\gamma_i w_j}{4\beta_i\beta_j - 2\gamma_i\gamma_j} + \frac{c_i}{2} \quad (5.30)$$

$$w_j^* = \frac{2\alpha_j\beta_i + \alpha_i\gamma_j + \beta_i\gamma_j w_i}{4\beta_i\beta_j - 2\gamma_i\gamma_j} + \frac{c_j}{2}. \quad (5.31)$$

Posteriormente, deve-se substituir a Eq. (5.31) na Eq. (5.30) para ter uma equação que descreva  $w_i^*$  não dependente de  $w_j^*$ , e após as simplificações tem-se a Eq. (5.32).

$$w_i^* = \frac{\{(\alpha_j\gamma_i + 2\alpha_i\beta_j) [4\beta_i\beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2] + \beta_j(\gamma_i - \gamma_j) [2\alpha_j\beta_i + \alpha_i(\gamma_i + \gamma_j)]\}}{(\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j) [16\beta_i\beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2]} + \frac{-\beta_j [8c_i\beta_i + 2c_j(\gamma_i - \gamma_j)]}{[16\beta_i\beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2]}. \quad (5.32)$$

De maneira similar define-se  $w_j^*$  independente, que pode ser visto na Eq. (5.33).

$$w_j^* = \frac{\{(\alpha_i\gamma_j + 2\alpha_j\beta_i) [4\beta_j\beta_i - (\gamma_j + \gamma_i)^2] + \beta_i(\gamma_j - \gamma_i) [2\alpha_i\beta_j + \alpha_j(\gamma_j + \gamma_i)]\}}{(\beta_j\beta_i - \gamma_j\gamma_i) [16\beta_j\beta_i - (\gamma_j + \gamma_i)^2]} + \frac{-\beta_i [8c_j\beta_j + 2c_i(\gamma_j - \gamma_i)]}{[16\beta_j\beta_i - (\gamma_j + \gamma_i)^2]}. \quad (5.33)$$

## 5.3 Condições de viabilidade para as soluções

### 5.3.1 Condições de convexidade

Para garantir que o equilíbrio de Bertrand para preços respeite as premissas básicas que explicam um comportamento racional dos ofertantes no mercado sob a perspectiva da interpretação econômica, deve-se garantir as seguintes condições:

- A.** A função de lucro do varejista precisa ser estritamente côncava no Modelo M1 - a matriz Hessiana ( $H^V$ ) deve ser simétrica negativa definida e, para isso, todos os autovalores da matriz  $H^V$  devem ser negativos;
- B.** A função de lucro dos fabricantes deve ser estritamente côncava nos modelo M1 e M2 -  $\frac{\partial^2 \pi_i^F}{\partial w_i} < 0 \forall i \in I$ ;
- C.** A função de lucro do varejista precisa ser estritamente côncava no Modelo M2 -  $\frac{\partial^2 \pi_i^V}{\partial p_i} < 0 \forall i \in I$ .

### 5.3.1.1 Condição A

Considerando os dois produtos,  $I = 1, 2$ , pode-se, assim, calcular o lucro do varejista por meio das Eq. (5.3) e Eq. (5.1).

$$\pi^V = (p_1 - w_1)(\alpha_1 - \beta_1 p_1 + \gamma_1 p_2) + (p_2 - w_2)(\alpha_2 - \beta_2 p_2 + \gamma_2 p_1). \quad (5.34)$$

Deve-se, então, calcular as derivadas do lucro em relação aos preços  $p_1$  e  $p_2$ , para então gerar a matriz hessiana  $H^V$  conforme apresentado na Eq. (5.41) para o modelo M1, considerando as Eq. (5.35)-(5.40).

$$\frac{\partial \pi^V}{\partial p_1} = \alpha_1 - 2\beta_1 p_1 + \gamma_1 p_2 + (p_2 - w_2)\gamma_2 \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^2 \pi^V}{\partial p_1} = -2\beta_1 \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial^2 \pi^V}{\partial p_1 \partial p_2} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \pi^V}{\partial p_2} = \alpha_2 - 2\beta_2 p_2 + \gamma_2 p_1 + (p_1 - w_1)\gamma_1 \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial^2 \pi^V}{\partial p_2} = -2\beta_2 \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial^2 \pi^V}{\partial p_2 \partial p_1} = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (5.40)$$

$$H^V = \begin{bmatrix} -2\beta_1 & \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & -2\beta_1 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Por definição, os autovalores de  $H^V$  são os valores de  $\lambda$  para os quais o sistema de equações definido por Eq. (5.42) tem solução, ou seja:

$$(H^V - \lambda I)x = \bar{0}, \quad (5.42)$$

sendo que  $H^V - \lambda I$  é dado por:

$$H^V - \lambda I = \begin{pmatrix} -2\beta_1 & \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & -2\beta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta_1 - \lambda & \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & -2\beta_1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Para que o sistema descrito na Eq. (5.42) tenha solução única, é necessário que o  $\det|H^V - \lambda I| = 0$ , portanto:

$$\begin{aligned} \det|H^V - \lambda I| &= 0 \\ \det \begin{vmatrix} -2\beta_1 - \lambda & \gamma_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & -2\beta_1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (-2\beta_1 - \lambda)(-2\beta_2 - \lambda) - (\gamma_1 + \gamma_2)^2 &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda(\beta_1 + \beta_2) + 4\beta_1\beta_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

As soluções para a Eq. (5.44) serão reais quando os valores de expressos pela Eq. (5.45) forem:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-2(\beta_1 + \beta_2) \pm \sqrt{4(\beta_1 + \beta_2)^2 - 4[4\beta_1\beta_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2]}}{2} = \\ &= \frac{-2(\beta_1 + \beta_2) \pm \sqrt{4[(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2]}}{2} = \\ &= -(\beta_1 + \beta_2) \pm \sqrt{[(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2]}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

No caso em que o sinal associado à raiz quadrada da Eq. (5.45) seja negativo, o valor de  $\lambda$  sempre será negativo. Para o caso em que o sinal da raiz seja positivo, o valor de  $\lambda$  será negativo, se:

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \beta_2) &\geq \sqrt{[(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2]} = \\ (\beta_1 + \beta_2)^2 &\geq (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2 = \\ 0 &\geq -\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_2^2 + \beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2 = \\ 0 &\geq -4\beta_1\beta_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

### 5.3.1.2 Condição B

Em ambos casos, modelos M1 e M2, o lucro máximo do fabricante será obtido quando  $\frac{\partial \pi_i^F}{\partial w_i} = 0$ , se a função de lucro for côncava, i.e., se  $\frac{\partial^2 \pi_i^F}{\partial w_i} < 0$ . A partir da Eq. (5.21), pode-se derivar  $\frac{\partial^2 \pi_i^F}{\partial w_i}$ :

$$\frac{\partial^2 \pi_i^F}{\partial w_i} = -2\beta_i \frac{\partial p_i^*}{\partial w_i} + 2\gamma_i \frac{\partial p_j^*}{\partial w_i} < 0. \quad (5.47)$$

Para o **modelo M1**, se tem:

$$\frac{\partial^2 \pi_i^F}{\partial w_i} = -2\beta_i \left( \frac{2\beta_1\beta_2 - \gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2}{4\beta_1\beta_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2} \right) + 2\gamma_i \kappa_7 = \frac{-2\beta_i(2\beta_i\beta_j - \gamma_i^2 - \gamma_i\gamma_j) + 2\gamma_i(\beta_i\gamma_j - \beta_i\gamma_i)}{4\beta_i\beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2} < 0. \quad (5.48)$$

Note que, o denominador é necessariamente maior que zero,  $4\beta_i\beta_j - (\gamma_i + \gamma_j)^2 > 0$ , pois por definição  $\beta_i > \gamma_i$  e  $\beta_j > \gamma_j$ . Reescrevendo o numerador:

$$\begin{aligned} & -4\beta_i^2\beta_j + 2\beta_i\gamma_i^2 + 2\beta_i\gamma_i\gamma_j + 2\beta_i\gamma_i\gamma_j - 2\beta_i\gamma_i^2 < 0 \\ & -4\beta_i(\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j) < 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Como  $\beta_i > \gamma_i$  e  $\beta_j > \gamma_j$ , o numerador sempre será negativo. Já para o **modelo M2**, considerando a Eq. (5.29) e, portanto:

$$\frac{\partial^2 \pi_i^F}{\partial w_i} = -2\beta_i \left( \frac{2\beta_i\beta_j}{4\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j} \right) + 2\gamma_i \left( \frac{\gamma_j\beta_i}{4\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j} \right) = \frac{-4\beta_i^2\beta_j + 2\gamma_i\gamma_j\beta_i}{4\beta_i\beta_j - \gamma_i\gamma_j} < 0. \quad (5.50)$$

Note que, a Eq. (5.46), descrita na **condição A**, impõe que o denominador seja positivo e o numerador necessariamente seja negativo na Eq. (5.50).

### 5.3.1.3 Condição C

Considerando as Eq. (5.22) e Eq. (5.23), é fácil perceber que:

$$\frac{\partial^2 \pi_i^V}{\partial p_i} = -2\beta_i < 0 \quad \forall i \in I. \quad (5.51)$$

Conforme exposto na Tabela 1, pode-se verificar que a condição  $\beta_i > 0$  sempre será satisfeita.

### 5.3.2 Condições que definem os casos de interesse

É necessário considerar as seguintes condições associadas aos **limites inferiores** das variáveis e os **lucros** dos agentes, ou seja:

- c.i)  $w_i^* > c_i \forall i \in I$  dos modelos M1 e M2;
- c.ii)  $p_i^* > w_i^* \forall i \in I$  dos modelos M1 e M2;
- c.iii)  $x_i^* > 0 \forall i \in I$  dos modelos M1 e M2;
- c.iv)  $\pi_i^F > 0 \forall i \in I$  dos modelos M1 e M2;
- c.v)  $\pi^V > 0$  do modelo M1;
- c.vi)  $\pi_i^V > 0 \forall i \in I$  do modelo M2.

Note que, se tratam de condições desejáveis para uma análise econômica racional dos mercados. É válido destacar também que, embora seja possível estabelecer uma análise matemática das seis condições elencadas anteriormente, como o foco deste trabalho se concentrará em uma avaliação numérica, as provas matemáticas dessas condições ficarão como desdobramento de trabalhos futuros.

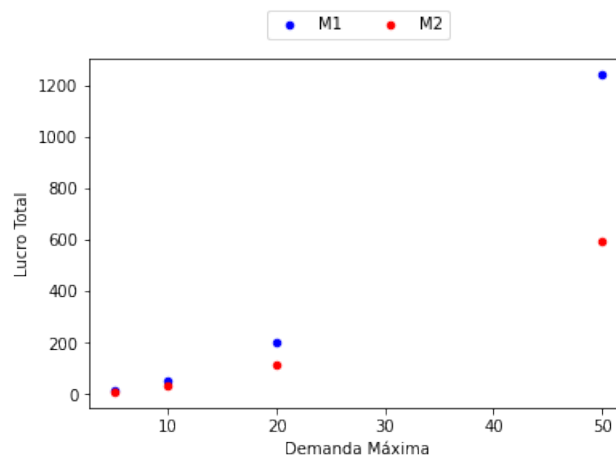
## 5.4 Análise dos testes numérico-computacionais

Os testes numérico-computacionais foram realizados de forma a verificar o comportamento das variáveis à medida que os parâmetros dos modelos são alterados. Foram realizados testes considerando dois cenários de produtos, homogêneos e heterogêneos, conforme mostram os resultados completos apresentados nos Apêndices A e B. Os cenários estudados tiveram como base um procedimento de análise marginal, cujos testes consistem em variar um parâmetro e manter os demais fixos, bem como verificar como as variáveis são afetadas pela variação desse parâmetro, utilizando valores numéricos para os parâmetros que satisfazem as condições A, B e C, conforme apresentado na sequência.

### 5.4.1 Produtos homogêneos: Variação positiva da demanda máxima dos produtos ( $\alpha$ )

Quando avaliado variação positiva da demanda máxima dos produtos ( $\alpha$ ), para o caso de produtos homogêneos, verificou-se que, à medida que se aumenta o  $\alpha$ , obtém-se também um aumento nos lucros, preços e quantidades de ambos os modelos. Para obter esse resultado, considerou-se fixo os parâmetros em  $\beta_1=\beta_2=10$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=9$  e  $c_1=c_2=0$  e realizou-se as alterações no parâmetro  $\alpha_1=\alpha_2$ , tendo como elementos do conjunto  $[5,10,20,50]$ . Neste intervalo todas as variáveis tiveram relação direta com o  $\alpha$ , conforme mostrado nas Figuras 3-8.

Figura 3 – Comportamento do  $\pi^T$  com a variação de  $\alpha$



Pode-se perceber por meio das Figuras 3-5 que, ao aumentar o  $\alpha$ , os lucros aumentam, porém, o lucro de M1 se sobressai sobre M2, tanto para os varejistas quanto para o lucro total do mercado. Por outro lado, quando se analisa os lucros dos fabricantes, há uma inversão, com o modelo M2 sobressaindo sobre o M1.



Figura 4 – Comportamento do  $\pi^V$  com a variação de  $\alpha$

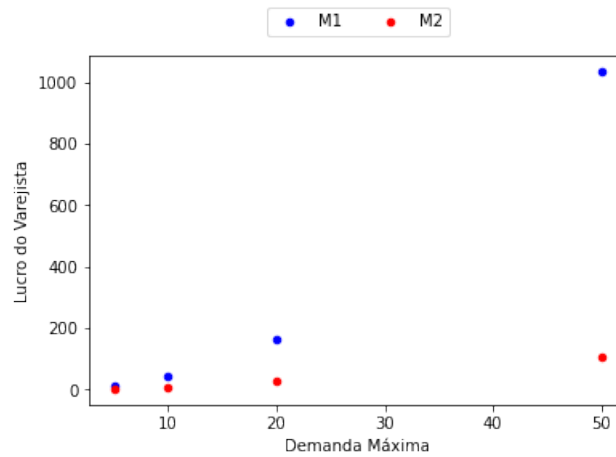


Figura 5 – Comportamento do  $\pi^F$  com a variação de  $\alpha$

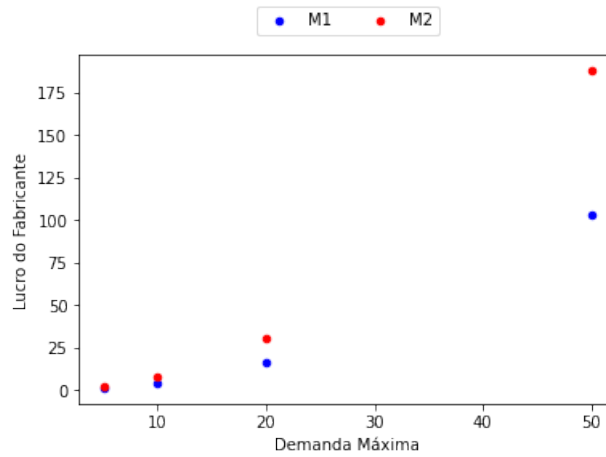
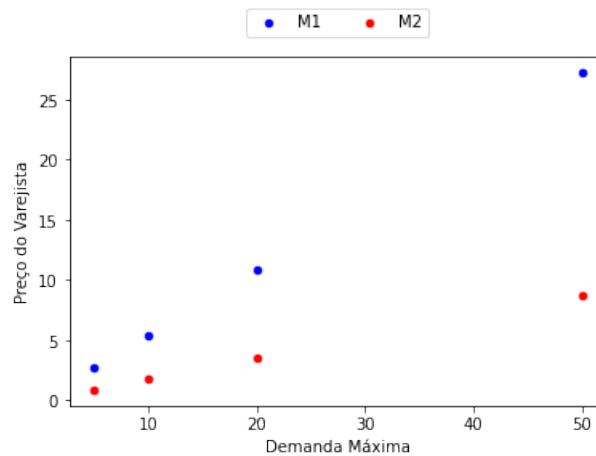
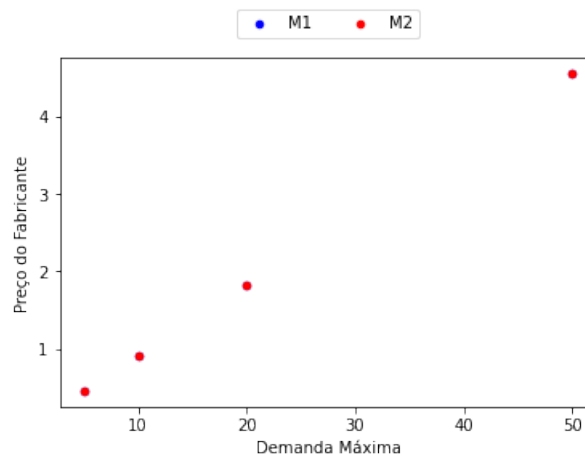
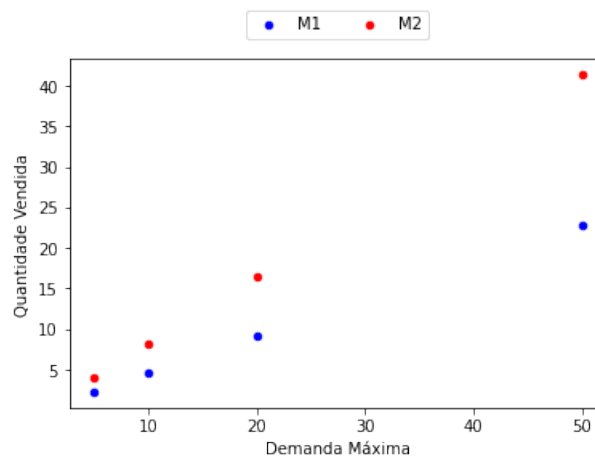


Figura 6 – Comportamento do  $p$  com a variação de  $\alpha$



No tocante aos preços, as Figuras 6-7 mostram que o valor praticado pelos fabricantes em ambos os modelos é o mesmo, porém o preço dos varejistas do modelo M1 é mais alto. Nota-se também que as quantidades vendidas em M1 são maiores do que em M2, conforme indicado na Figura 8.

Figura 7 – Comportamento do  $w$  com a variação de  $\alpha$ Figura 8 – Comportamento de  $x$  com a variação de  $\alpha$ 

#### 5.4.2 Produtos homogêneos: Variação positiva da elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ )

Os valores dos lucros, preços e quantidades de ambos os modelos são inversamente proporcionais ao aumento da elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ ), ou seja, com o aumento de  $\beta$  se tem a redução dos valores das variáveis analisadas. Para se comprovar essa premissa, adotou-se os seguintes valores para os parâmetros  $\beta_1=\beta_2=[1,2,3,5,10]$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=5$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=0.5$  e  $c_1=c_2=0$ . Os resultados dos testes numéricos podem ser vistos nas Figuras 9-14, cujos pontos azuis se referem ao modelo M1 e os vermelhos se referem ao modelo M2.

Ao analisar e comparar os lucros dos modelos, pode-se verificar que a medida em que os valores de  $\beta$  aumentam, os modelos tendem a ter uma diferença muito menor dos lucros, chegando a ter lucros iguais ou bem próximos um do outro. Nas Figuras 9 e 11, é possível notar que o modelo M2 tem lucro total e lucro do fabricante superiores ao modelo M1, o inverso ocorre quando se analisa a Figura 10, em que o lucro do modelo M1 inicia maior e, a medida que  $\beta$  aumenta, o seu valor se aproxima do modelo M2.

Figura 9 – Comportamento do  $\pi^T$  com a variação de  $\beta$

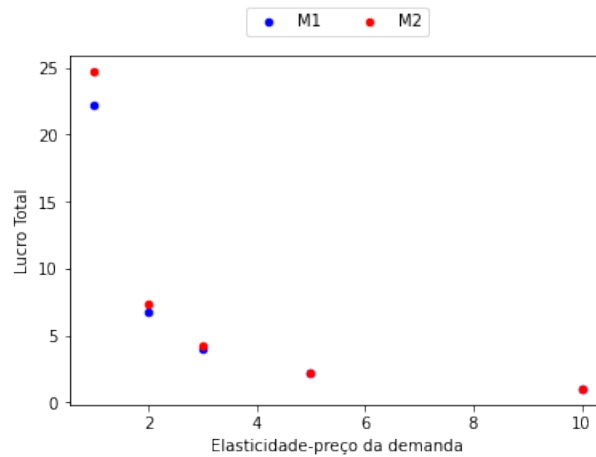


Figura 10 – Comportamento do  $\pi^V$  com a variação de  $\beta$

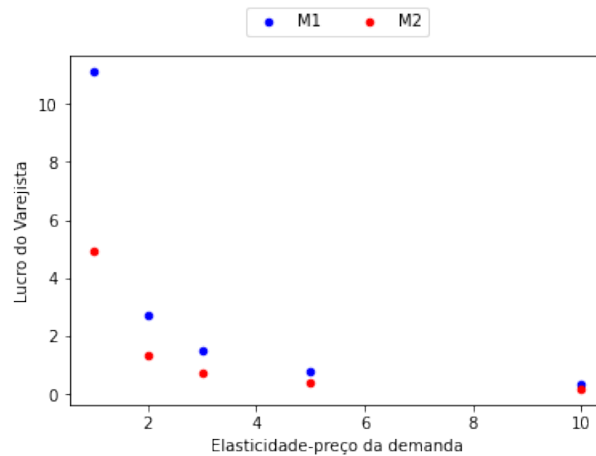
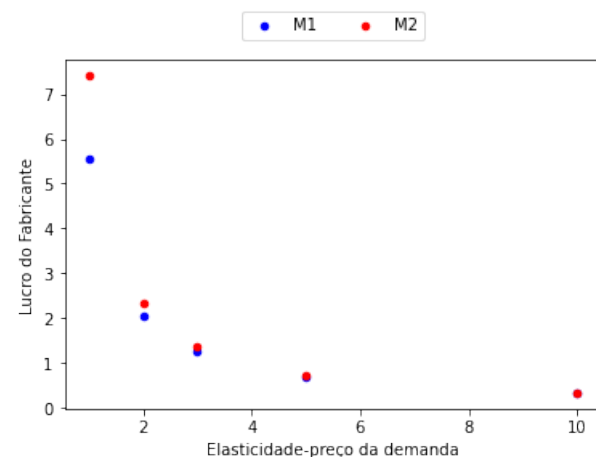


Figura 11 – Comportamento do  $\pi^F$  com a variação de  $\beta$



Com relação aos preços, ao observar as Figuras 12-13, pode-se perceber que os preços dos fabricantes em ambos os modelos são iguais, enquanto os varejistas, mesmo iniciando com o preço maior no modelo M1, a medida que o preço cai, ambos convergem para o mesmo valor. Nota-se também que as quantidades vendidas do modelo M2 são maiores que as do modelo M1, como observado na Figura 14.

Figura 12 – Comportamento do  $p$  com a variação de  $\beta$

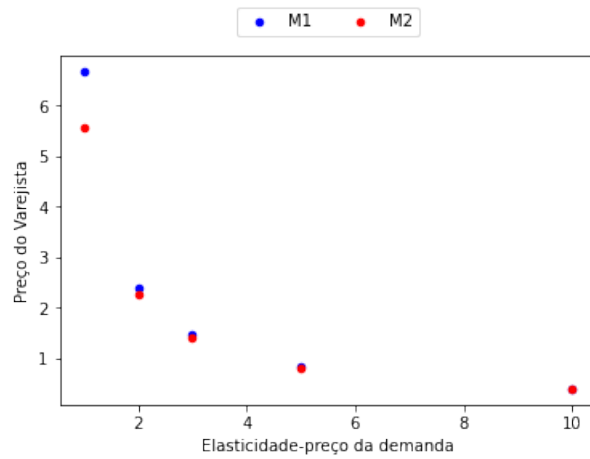


Figura 13 – Comportamento do  $w$  com a variação de  $\beta$

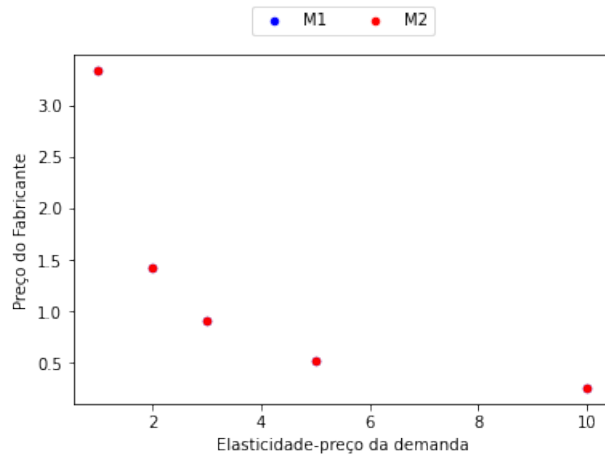
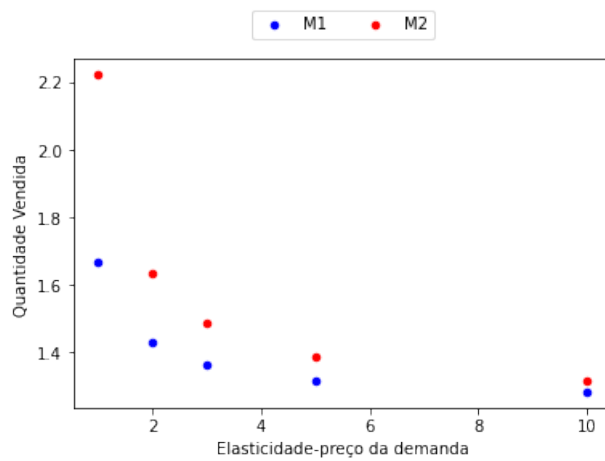


Figura 14 – Comportamento de  $x$  com a variação de  $\beta$



### 5.4.3 Produtos homogêneos: Variação positiva da elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma$ )

Ao analisar o cenário em que se tem produtos homogêneos com variações positivas da elasticidade-preço cruzada da demanda, verificou-se que os valores dos lucros, preços e quantidades de ambos os modelos se elevam quando há o aumento da elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma$ ), ou seja, o aumento das variáveis é diretamente relacionado com o  $\gamma$ . Tal conclusão se confirma ao fixar os parâmetros  $\alpha_1=\alpha_2=5$ ,  $\beta_1=\beta_2=10$  e  $c_1=c_2=0$ , para valores de  $\gamma_1=\gamma_2=[0.5, 1, 3, 5, 9]$ . Os resultados dos testes numéricos são ilustrado por meio das Figuras 15-20.

Figura 15 – Comportamento do  $\pi^T$  com a variação de  $\gamma$

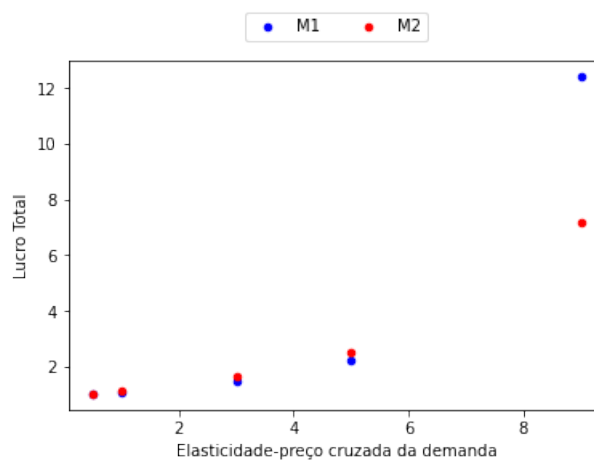
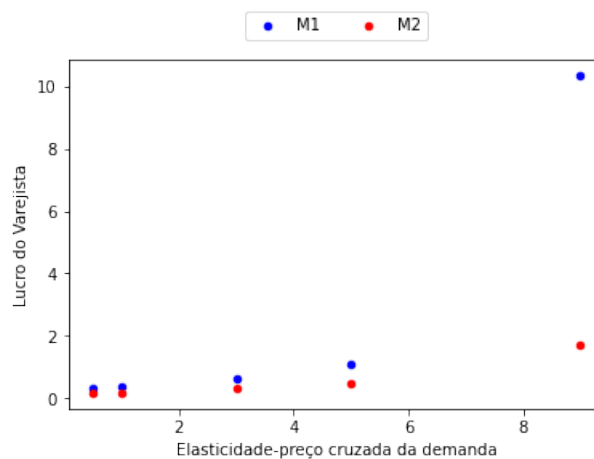


Figura 16 – Comportamento do  $\pi^V$ s com a variação de  $\gamma$



A Figura 15 mostra que o lucro total dos modelos inicia com valores bem próximos e a medida que se aumenta o  $\gamma$  o lucro total do modelo M2 se destaca com pouca diferença, exceto quando  $\gamma$  é igual a 9. Já na Figura 16 pode-se verificar que no modelo M1 o lucro de varejistas é maior, enquanto e na Figura 17 o lucro que se destaca é o do fabricante do modelo M2.

Figura 17 – Comportamento do  $\pi^F$  com a variação de  $\gamma$

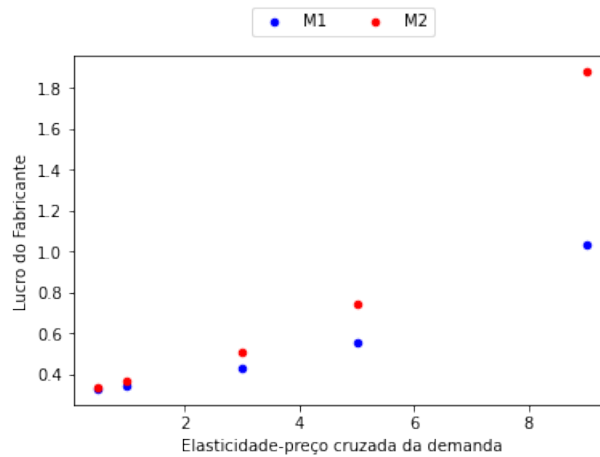


Figura 18 – Comportamento do  $p$  com a variação de  $\gamma$

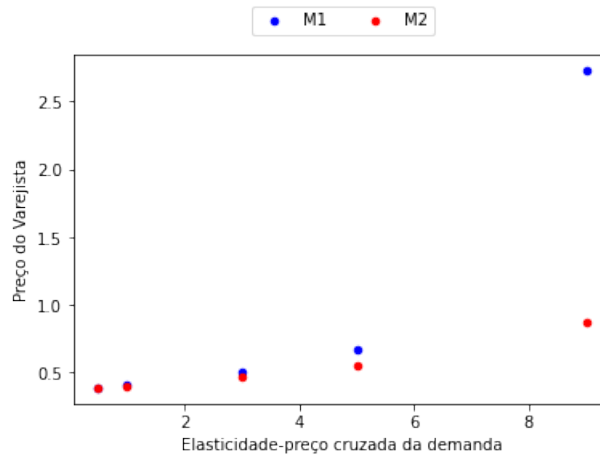
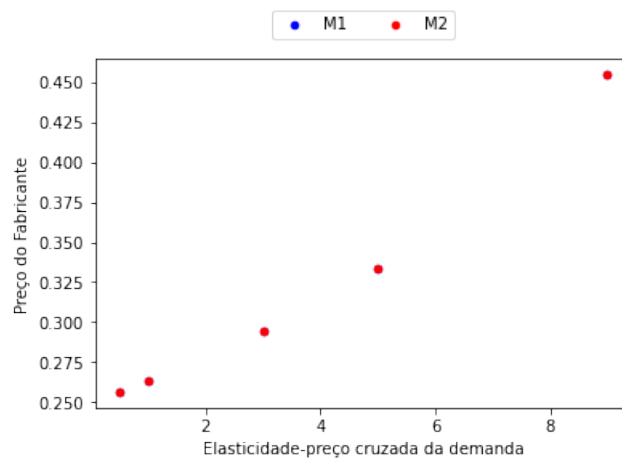
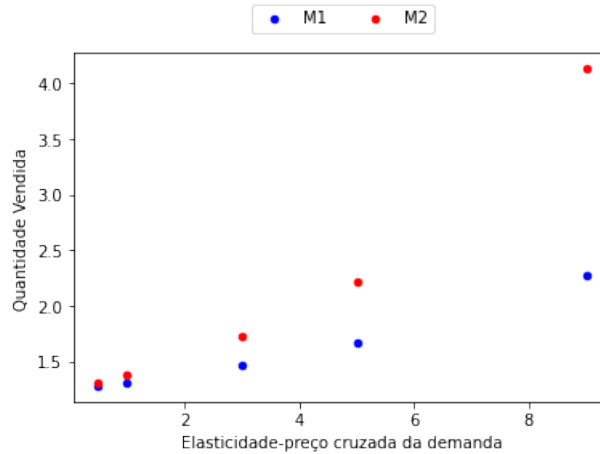


Figura 19 – Comportamento do  $w$  com a variação de  $\gamma$



Observando as Figuras 18 e 19, verifica-se que ambos os modelos resultam em preços iguais para os fabricantes, porém os preços dos varejistas do modelo M1 são maiores que os M2. Ademais, A Figura 20 mostra que são vendidas mais quantidades de produtos do modelo M2, produto com menor preço de varejo.

Figura 20 – Comportamento de  $x$  com a variação de  $\gamma$



#### 5.4.4 Produtos homogêneos: Variação positiva do custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ )

Com o aumento do custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ ), os valores dos lucros, preços e quantidades dos modelos não tem comportamento similar, como observado nos outros casos. Cada modelo reage de forma única à medida que se tem o aumento de  $c$ , conforme mostram os testes numéricos realizados. O parâmetro  $c_1=c_2$  foi incrementado dentro do intervalo  $[0,1,2,5,10]$ , sendo fixados os parâmetros  $\alpha_1=\alpha_2=50$ ,  $\beta_1=\beta_2=5$  e  $\gamma_1=\gamma_2=3$ . Os resultados dos testes numérico-computacionais com base neste dados é sintetizado pelas Figuras 21-26.

Figura 21 – Comportamento do  $\pi^T$  com a variação de  $c$

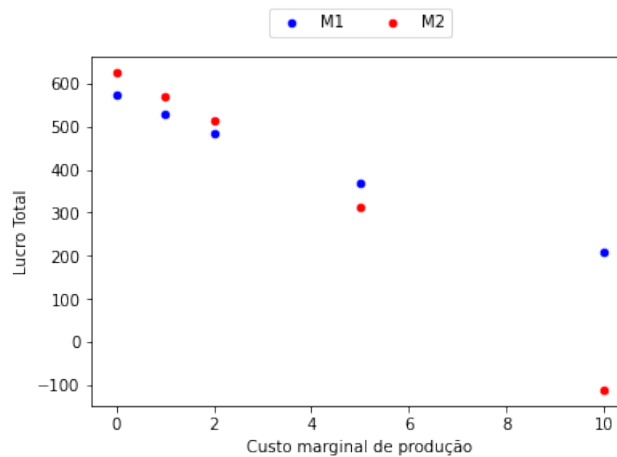


Figura 22 – Comportamento do  $\pi^V$  com a variação de  $c$

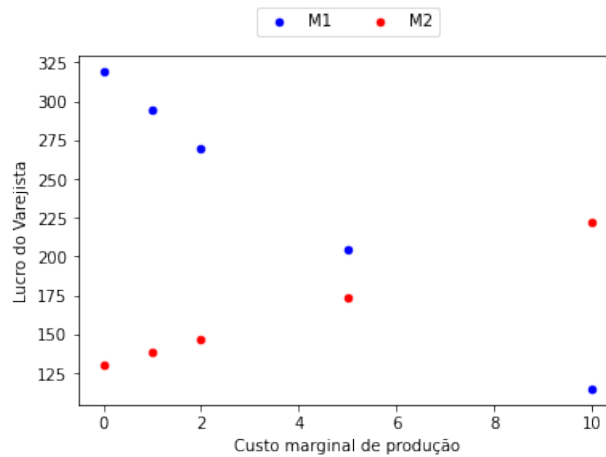


Figura 23 – Comportamento do  $\pi^F$  com a variação de  $c$

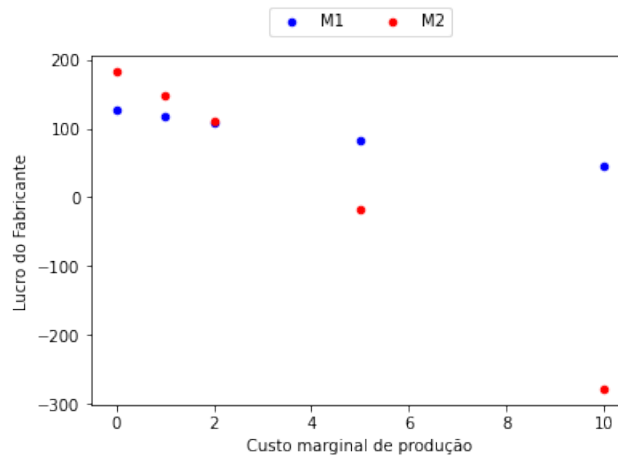
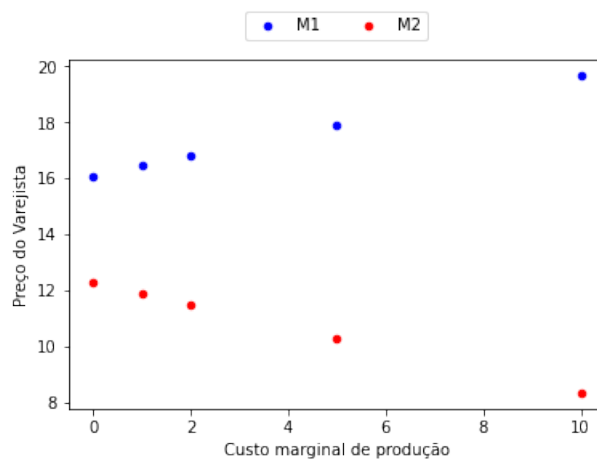


Figura 24 – Comportamento do  $p$  com a variação de  $c$



As Figuras 21-23 indicam que à medida em que se aumenta o valor de  $c$ , há a inversão do modelo que tem melhor retorno. O modelo M2 inicia os testes com o lucro total e lucro do varejista maiores se comparados aos valores do modelo M1. Porém, com o aumento de  $c$ , os lucros total e do varejista do modelo M1 se sobressaem e o modelo demonstra melhor retorno se comparado com o M2. Já o lucro dos varejistas do modelo M1, inicia com maior retorno, e a medida que há o aumento de  $c$ , ele se torna inferior ao M2.



Figura 25 – Comportamento do  $w$  com a variação de  $c$

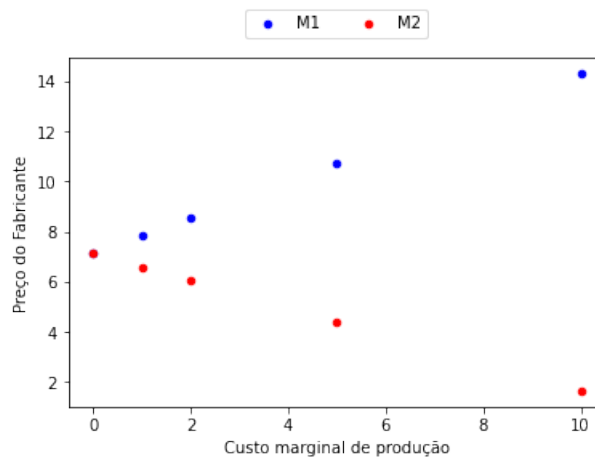
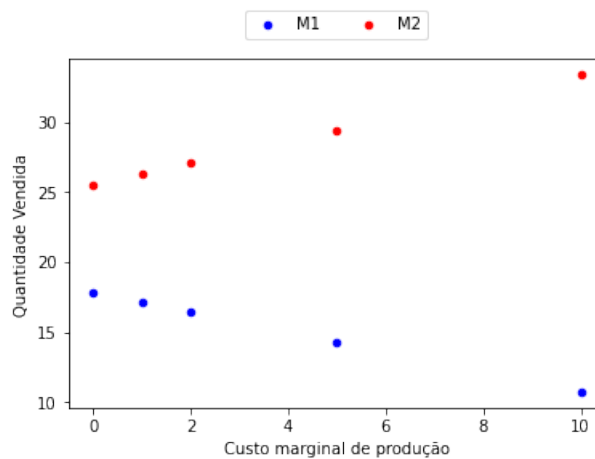


Figura 26 – Comportamento de  $x$  com a variação de  $c$



Quanto aos preços (ver Figuras 24-25) se tem um distanciamento dos valores de cada modelo, ou seja, à medida que o preço de um modelo aumenta, o outro diminui.

Assim, é possível verificar que os preços praticados, tanto pelo fabricante quanto pelo varejista, no modelo M2, caem à medida que o custo aumenta, e no modelo M1 os preços aumentam. As quantidades tem o mesmo comportamento, porém o modelo M2, que tem aumento da quantidade vendida, é o mesmo que diminui o preço. O comportamento das quantidades vendidas pode ser visualizado na Figura 26.

### 5.4.5 Produtos heterogêneos: Diferentes demandas máximas dos produtos ( $\alpha$ )

As Figuras 27-32 resumizam os testes cujos valores dos parâmetros fixos são  $\beta_1=\beta_2=5$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=3$  e  $c_1=c_2=10$ . Definiu-se valores distintos de  $\alpha$  para cada produto, sendo  $\alpha_1=200$  e  $\alpha_2=150$ . Neste cenário, observa-se que o modelo M2 se sobressai quando se trata do lucro total, apesar do lucro do varejista do modelo M1 ser maior que cada varejista do modelo M2, a união dos lucros é maior no modelo M2. No modelo M1 se tem lucros superiores para os fabricantes. No tocantes aos produtos, tanto para fabricantes quanto para varejistas, o produto 1 é aquele que resulta no maior lucro.

Figura 27 – Comportamento do  $\pi^T$  com diferentes  $\alpha$

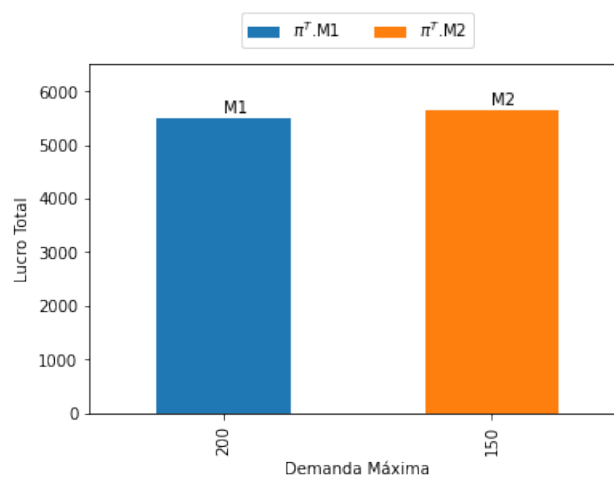
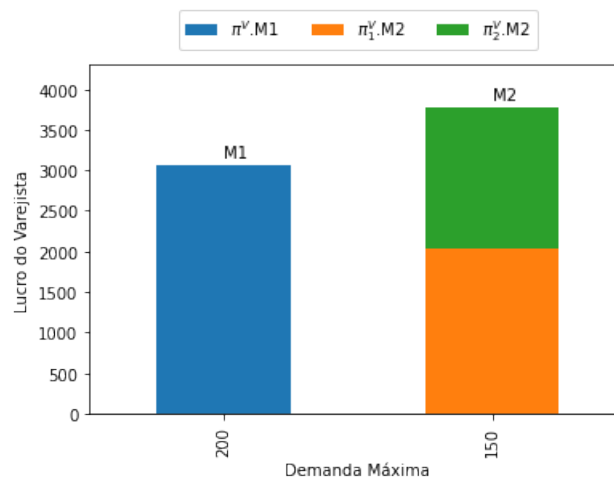


Figura 28 – Comportamento do  $\pi^V$  com diferentes  $\alpha$



É possível notar que tanto os preços de varejo quanto os preços dos fabricantes para ambos os produtos, são maiores no modelo M1, sendo o preço do produto 2 menor em todos os cenários, se comparado com o produto 1. No que se trata de quantidades, verifica-se que há mais produtos vendidos no modelo 2, considerando uma avaliação conjunta ou individual dos produtos.

Figura 29 – Comportamento do  $\pi^F$  com diferentes  $\alpha$

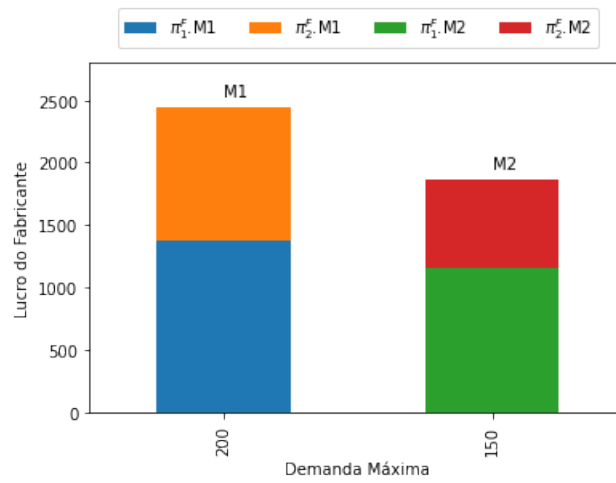


Figura 30 – Comportamento do  $p$  com diferentes  $\alpha$

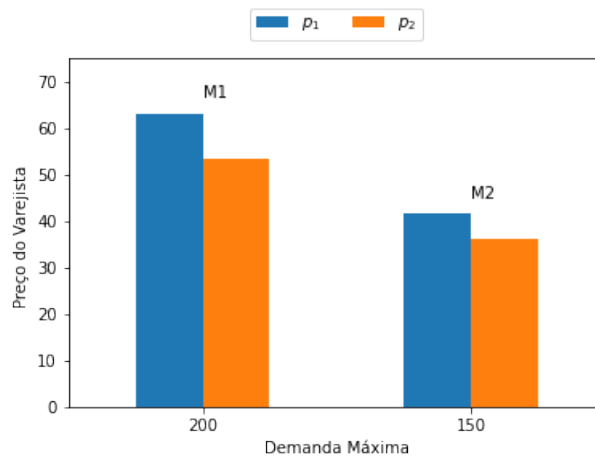
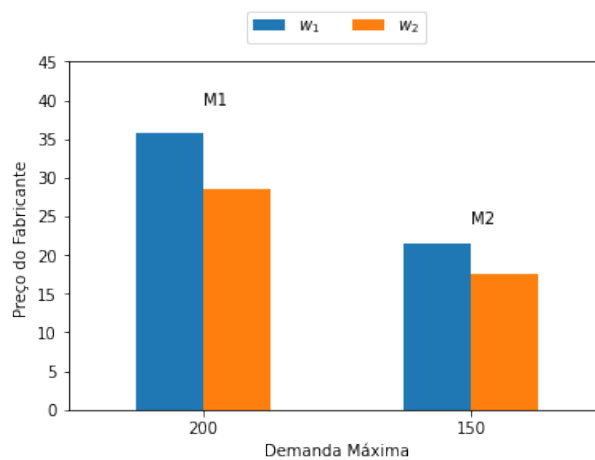
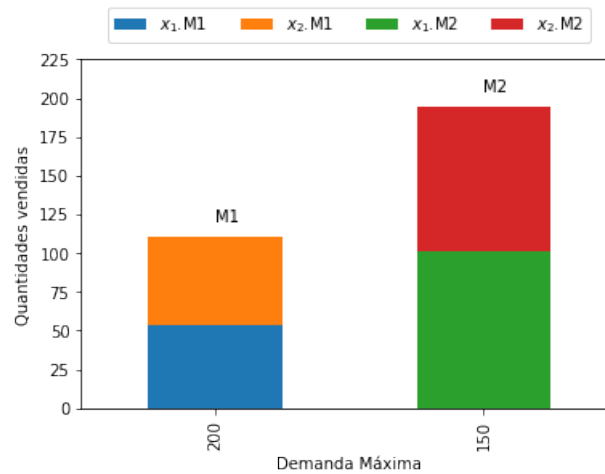


Figura 31 – Comportamento do  $w$  com diferentes  $\alpha$



Neste contexto, pode-se dizer que as maiores quantidades vendidas são do modelo M2, que tem o menor valor de demanda máxima ( $\alpha$ ), onde os preços praticados são menores, e apesar do lucro dos fabricantes serem menores, o lucro dos varejistas e lucro total são maiores quando comparados ao modelo M1.

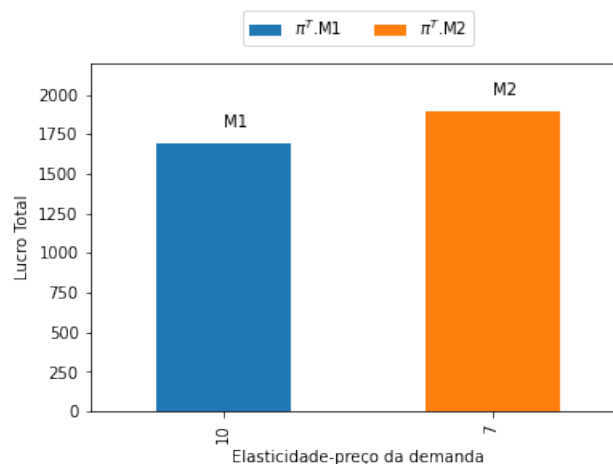
Figura 32 – Comportamento de  $x$  com diferentes  $\alpha$



### 5.4.6 Produtos heterogêneos: Variação da elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ )

Nos cenários em que se varia a elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ ) para produtos heterogêneos, os parâmetros dos testes estabelecidos foram  $\beta_1=10$  e  $\beta_2 = 7$ , considerando fixo  $\alpha_1=\alpha_2=200$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=3$ ,  $c_1=c_2=10$ . Os resultados dos testes numéricos podem ser vistos nas Figuras 33-38. O comportamento dos lucros se mantém o mesmo se comparado aos resultados encontrados nos testes com  $\alpha$  diferentes. Porém, há inviabilidade econômica sob a perspectiva dos lucros do fabricante do modelo M1. O lucro do fabricante do produto 1 se torna negativo (ver Figura 35), não atendendo assim a condição de que  $\pi_i^F > 0 \forall i \in I$ .

Figura 33 – Comportamento do  $\pi^T$  com diferentes  $\beta$



Quanto aos preços e quantidades, o modelo M1 pratica preços mais altos do que M2, assim como o preço do produto 2 mais elevado, tanto para fabricante quanto para varejistas, em ambos modelos. As quantidades vendidas do modelo M2 foram maiores que a do modelo M1, conforme mostrado na Figura 38. Por outro lado, verifica-se também que apesar do modelo M1 apresentar menores quantidades vendidas a altos preços, e ter lucros total e de varejistas inferiores se comparado ao modelo M2, apenas M1 é viável economicamente.

Figura 34 – Comportamento do  $\pi^V$  com diferentes  $\beta$

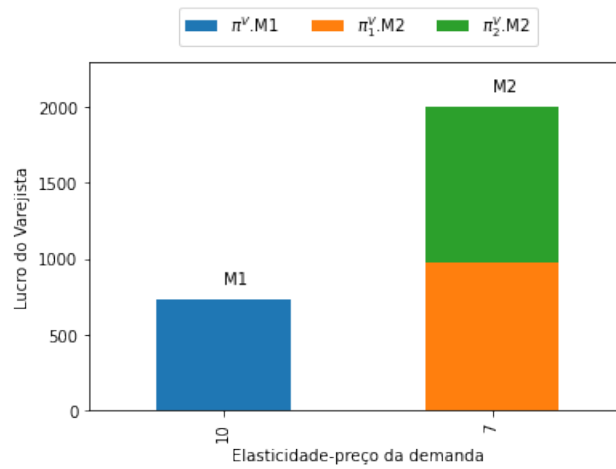


Figura 35 – Comportamento do  $\pi^F$  com diferentes  $\beta$

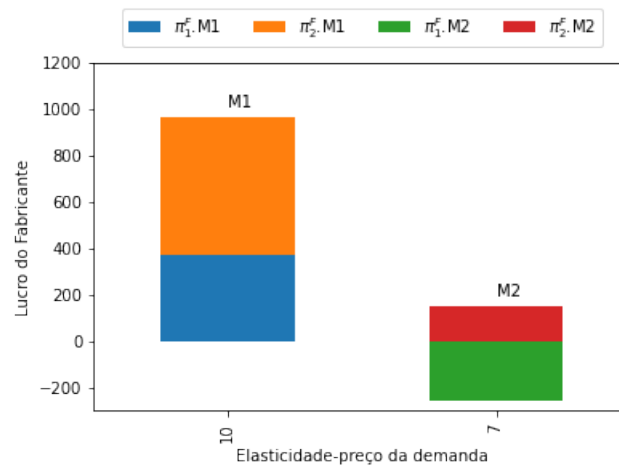
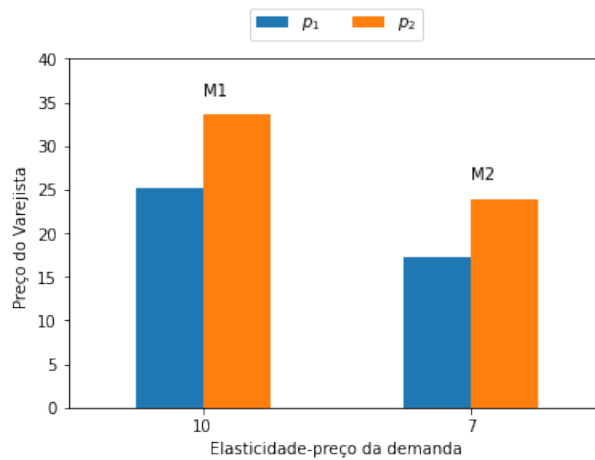


Figura 36 – Comportamento do  $p$  com diferentes  $\beta$



Além disso, é válido salientar que, M1 apresenta maior valor de elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ ). Pode-se perceber também que, o modelo M2 tem lucro para o fabricante 1 negativo pois, o preço de venda do produto 1 é inferior ao seu custo de produção, desrespeitando a condição  $w_i^* > c_i \forall i \in I$ , que, mais uma vez, implica em inviabilidade.

Figura 37 – Comportamento do  $w$  com diferentes  $\beta$

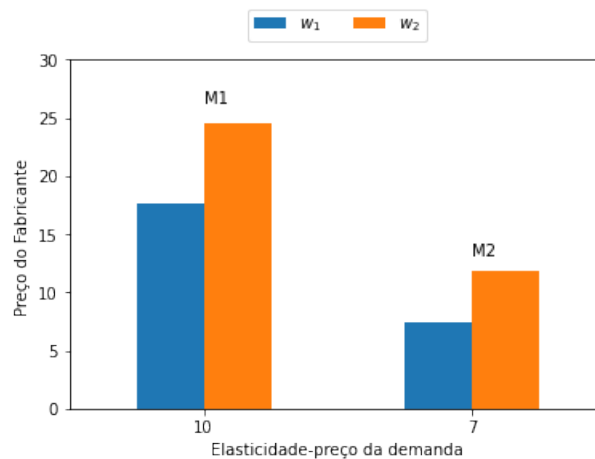
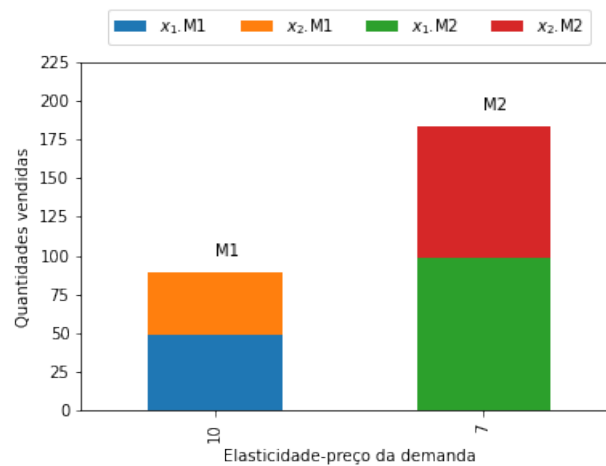


Figura 38 – Comportamento de  $w$  com diferentes  $\beta$



#### 5.4.7 Produtos heterogêneos: Variação da elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma$ )

Os testes numéricos vistos nas Figuras 33-38 foram realizados com os parâmetros definidos da seguinte forma:  $\alpha_1=\alpha_2=200$ ,  $\beta_1=\beta_2=5$ ,  $c_1=c_2=10$ ,  $\gamma_1=3$  e  $\gamma_2=1$ . Note que, neste teste, diferentemente dos dois anteriores, os lucros totais e dos varejistas são maiores no modelo M2, assim como o lucro dos fabricantes em M1 se torna um elemento de destaque.

No que se refere aos preços, verifica-se que o modelo M1 tem preços maiores que M2, sendo o preço do produto 1 mais alto quando comparado com o produto 2 em ambos os modelos. As quantidades vendidas no modelo M2 sobressaem ao modelo M1. Ademais, pode-se verificar que o modelo com menor elasticidade-preço cruzada da demanda ( $\gamma$ ), modelo M2, tem melhores lucros total e de varejo. No entanto, os lucros são inferiores para os fabricantes, com destaque para o modelo M1 que possui mais produtos vendidos e preço inferior, comportamento natural e esperado, quando se trata de análise de demanda.

Figura 39 – Comportamento do  $\pi^T$  com diferentes  $\gamma$

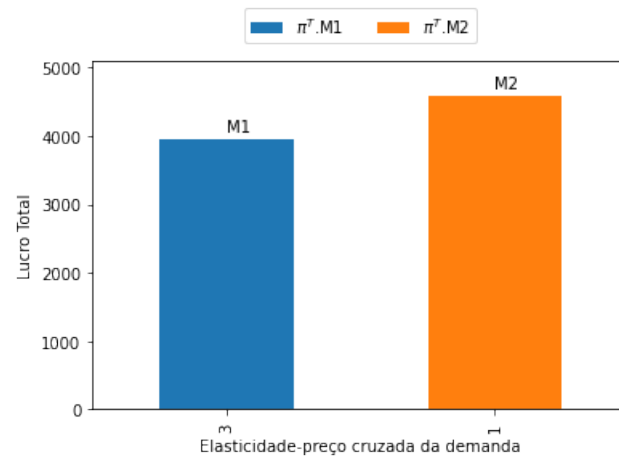


Figura 40 – Comportamento do  $\pi^V$  com diferentes  $\gamma$

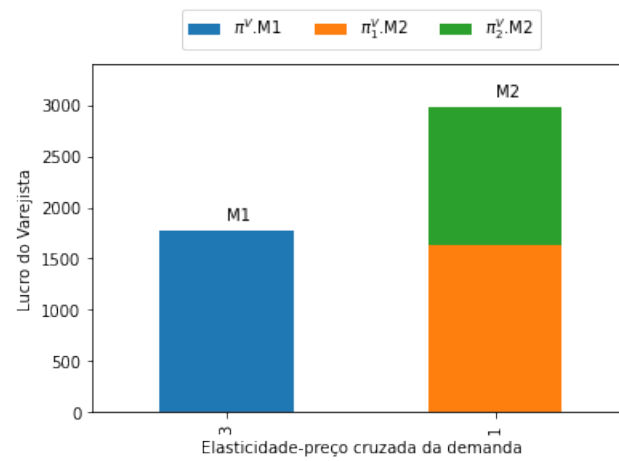


Figura 41 – Comportamento do  $\pi^F$  com diferentes  $\gamma$

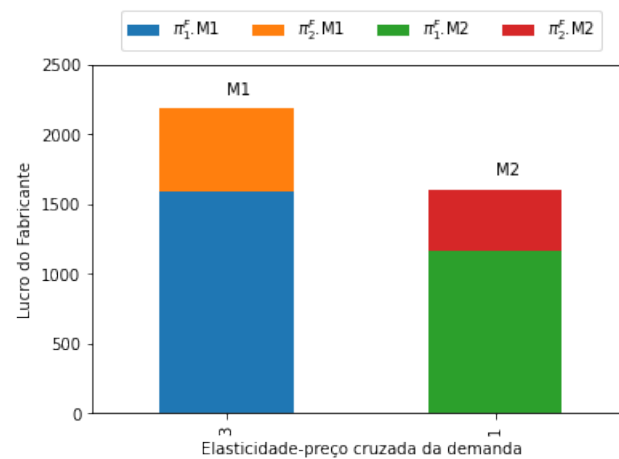


Figura 42 – Comportamento do  $p$  com diferentes  $\gamma$

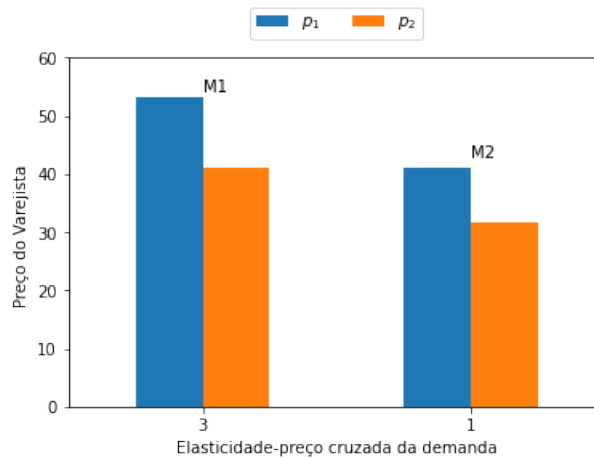


Figura 43 – Comportamento do  $w$  com diferentes  $\gamma$

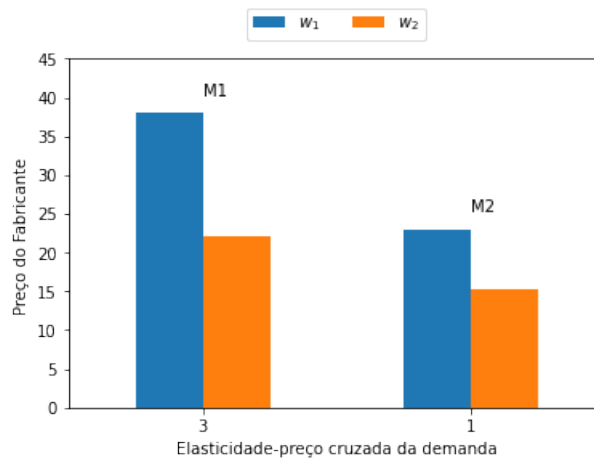
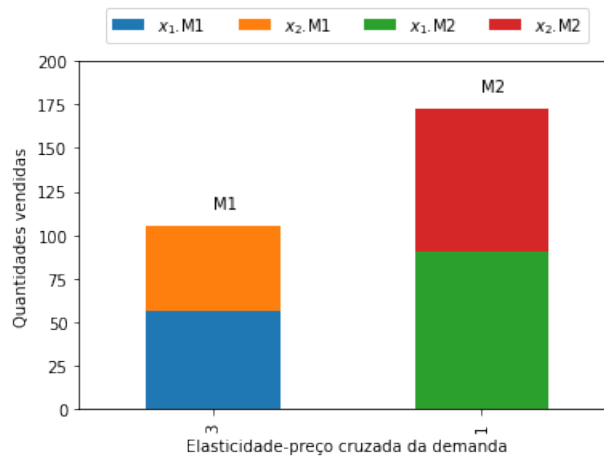


Figura 44 – Comportamento de  $x$  com diferentes  $\gamma$



#### 5.4.8 Produtos heterogêneos: Variação de custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ )

Para realizar os testes numéricos com diferentes  $c$ , foram definidos os seguintes valores para os parâmetros:  $\alpha_1=\alpha_2=200$ ,  $\beta_1=\beta_2=5$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=3$ ,  $c_1=10$  e  $c_2=25$ . Os resultados dos testes estão expostos nas Figuras 45-50.



Figura 45 – Comportamento do  $\pi^T$  com diferentes  $c$

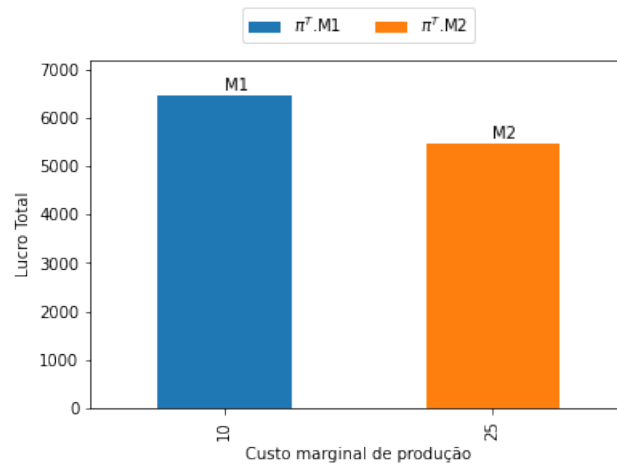


Figura 46 – Comportamento do  $\pi^V$  com diferentes  $c$

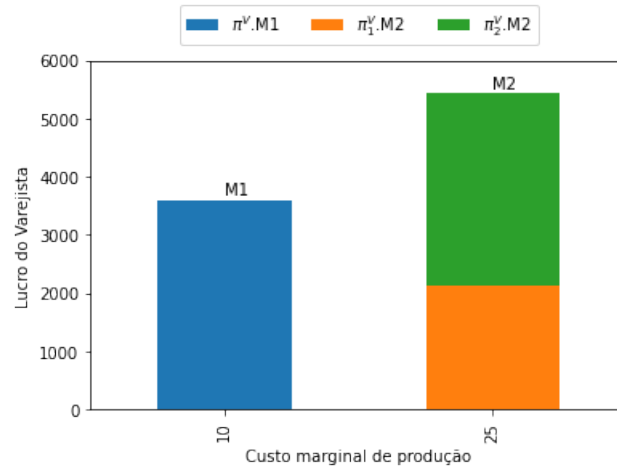


Figura 47 – Comportamento do  $\pi^F$  com diferentes  $c$

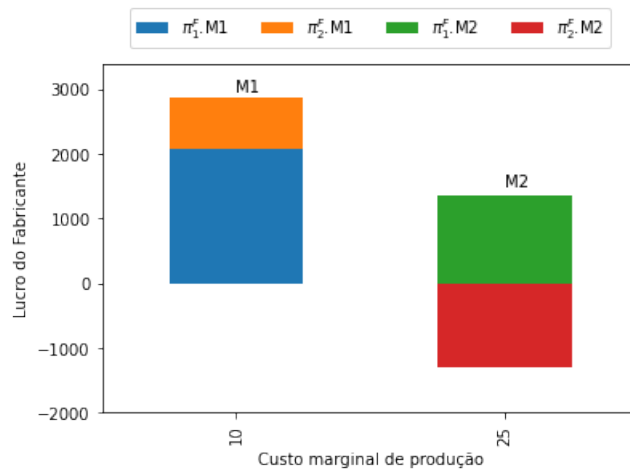


Figura 48 – Comportamento do  $p$  com diferentes  $c$

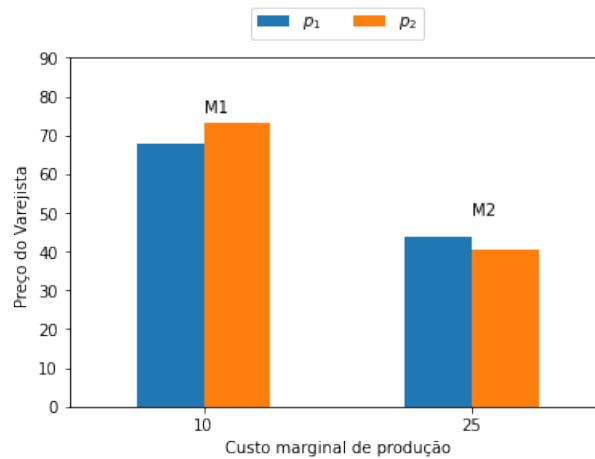


Figura 49 – Comportamento do  $w$  com diferentes  $c$

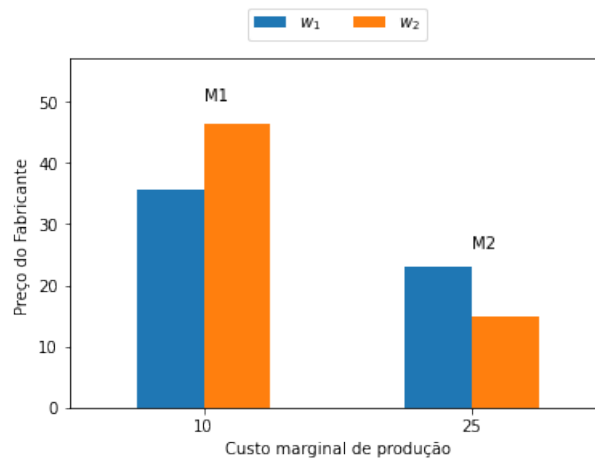
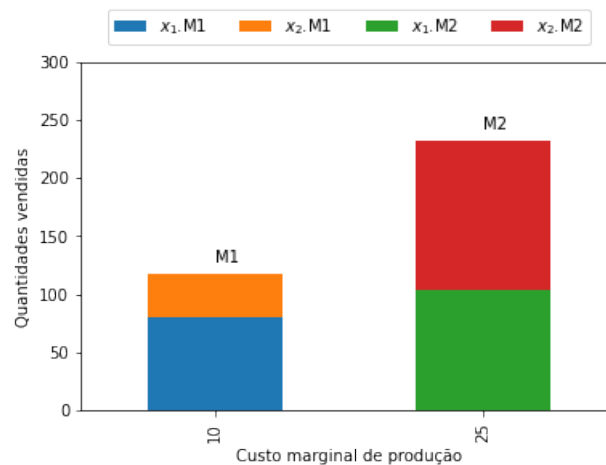


Figura 50 – Comportamento de  $x$  com diferentes  $c$



O modelo M1 apresenta melhores valores de lucro total e lucro do fabricante. O varejista que tem maior lucro é o do modelo M1, mesmo a junção dos lucros do modelo M2 sendo mais elevada, o que nos leva a considerar que o lucro total dos varejistas é maior no modelo M2. Ao analisar de forma isolada os lucros dos fabricantes, pode-se perceber que se tem um lucro negativo para o fabricante 2 do modelo M2, ou seja, o modelo não é viável economicamente por não atender a condição de que  $\pi_i^F > 0 \forall i \in I$ .

Por consequência ao lucro negativo no modelo M2, verifica-se que o preço praticado para venda do produto 2 não supera o seu custo de produção, o que inviabiliza o modelo pela condição  $w_i^* > c_i \forall i \in I$ .

Assim, é possível verificar que o produto 1, mesmo com menor  $c$ , tem maior preço de venda que o produto 2. Os preços praticados no modelo M2 são maiores para o produto 2, que tem maior valor de  $c$ . Pode-se observar que o produto com menor preço é aquele que possui maiores quantidades vendidas.

Contudo, como se tratam de situações que possuem diferentes custos, existe a possibilidade de inviabilidade econômica, tal como mostrado no cenário analisado. Neste sentido, fica claro a importância dos ofertantes conhecerem bem os seus custos para que assim consigam analisar a condição de entrada no mercado. No cenário simulado, é interessante notar que mesmo com fabricantes tendo prejuízo é possível que os varejistas se beneficiem e tenham lucros.

#### 5.4.9 Produtos heterogêneos: Variação de demandas máximas dos produtos ( $\alpha$ ) e custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ )

Em uma situação em que os produtos são heterogêneos e há variação de demandas máximas dos produtos ( $\alpha$ ) e custo marginal de produção do fabricante do produto ( $c$ ), é possível obter um nível mais elevado de lucro total e para fabricantes no modelo M1. Já o modelo M2 se destaca quando se trata do lucro dos varejistas. Note que se trata de um caso em que o modelo M1 apresenta maiores preços para o produto 1, tanto do varejista quanto do fabricante.

Em outras palavras, para chegar a estas conclusões, o cenário projetado foi definido de forma a ter como referência os valores de  $\alpha_1$  e  $c_1$ , e determinando que os valores de  $\alpha_2$  e  $c_2$  sejam a metade desta referência. Assim, os valores dos parâmetros utilizados nos testes numéricos foram estipulados da seguinte forma:  $\beta_1=\beta_2=5$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=3$ ,  $\alpha_1=500$ ,  $\alpha_2=250$ ,  $c_1=50$  e  $c_2=25$ . Os resultados dos testes são ilustrados por meio das Figuras 51-56.

Figura 51 – Comportamento do  $\pi^T$  com diferentes  $\alpha$  e  $c$

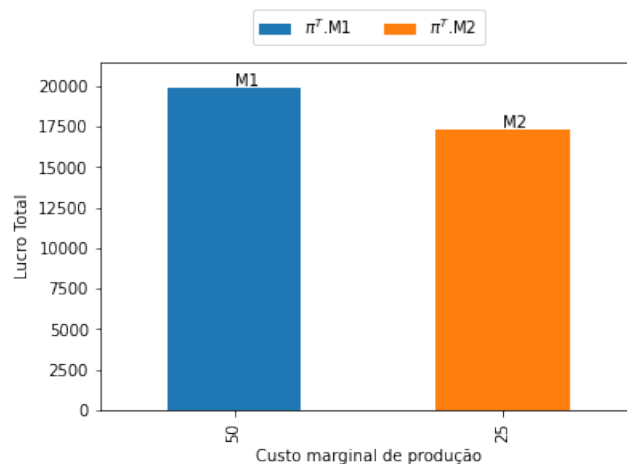


Figura 52 – Comportamento do  $\pi^V$  com diferentes  $\alpha$  e  $c$

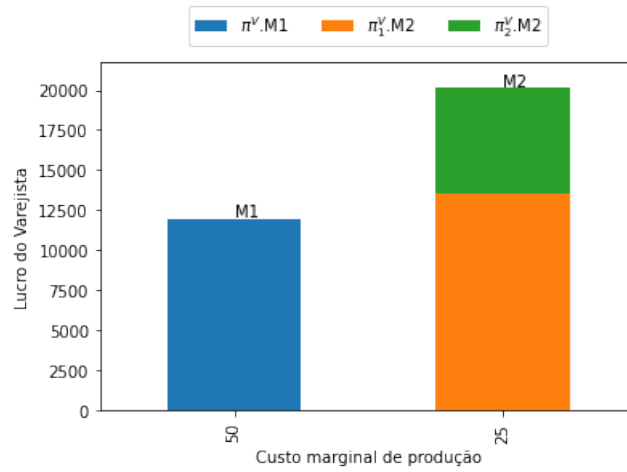


Figura 53 – Comportamento do  $\pi^F$  com diferentes  $\alpha$  e  $c$

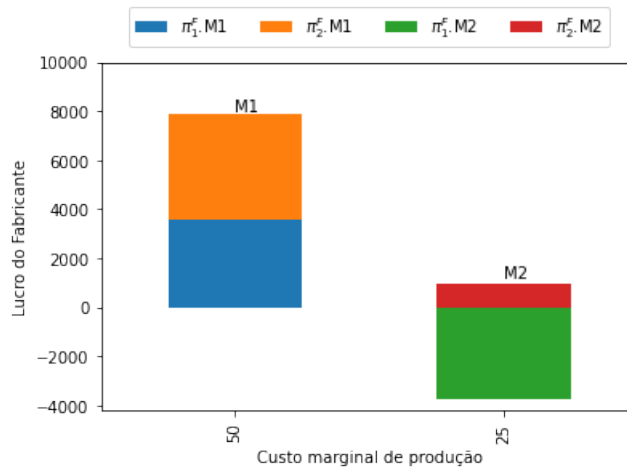
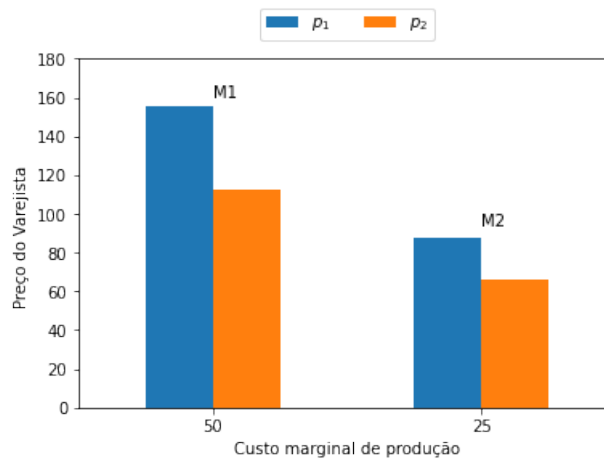


Figura 54 – Comportamento do  $p$  com diferentes  $\alpha$  e  $c$



Observa-se que há lucro negativo para o fabricante 1 do modelo M2, não respeitando a condição estabelecida de que  $\pi_i^F > 0 \forall i \in I$ . Essa situação decorre do fato do preço praticado para venda do produto 1 não cobrir os custos de produção, o que desrespeita outra condição  $w_i^* > c_i \forall i \in I$ .

Figura 55 – Comportamento do  $w$  com diferentes  $\alpha$  e  $c$

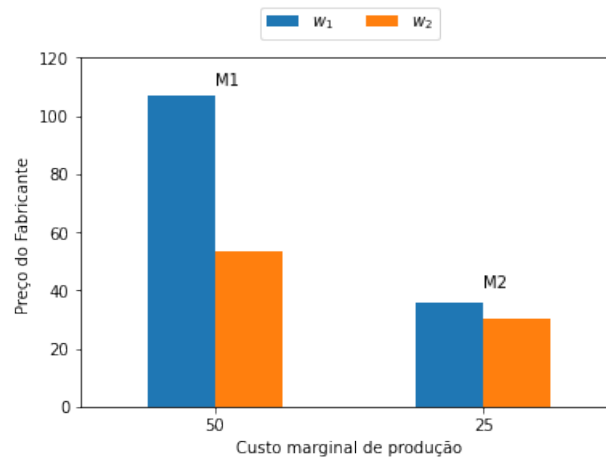
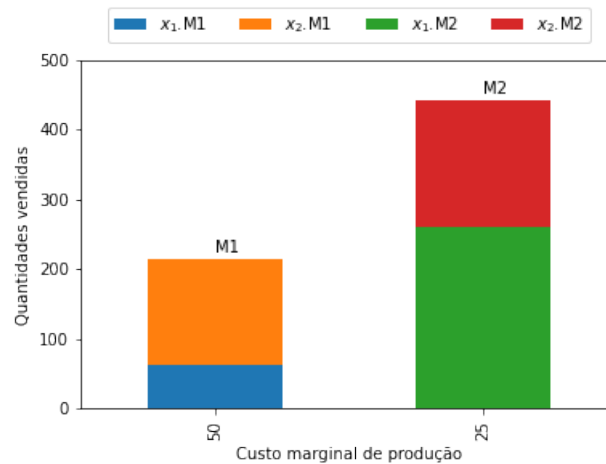


Figura 56 – Comportamento de  $x$  com diferentes  $\alpha$  e  $c$



Note também que o modelo M2 se mostra inviável, mesmo se destacando em quantidades de produto vendidas. O modelo M1, então tem melhores resultados neste cenário, onde todos os produtos ofertados trazem lucro positivo para todos os agentes do mercado.

#### 5.4.10 Produtos heterogêneos: Variação da elasticidade-preço da demanda ( $\beta$ ) e elasticidade-preço cruzada da de- manda ( $\gamma$ )

Em um último cenário proposto, definiu-se uma situação em que os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  de um produto sejam o dobro do outro, sendo fixados  $\alpha_1=\alpha_2=250$ ,  $c_1=c_2=10$ ,  $\beta_1=2.5$ ,  $\beta_2=5$ ,  $\gamma_1=1.5$  e  $\gamma_2=3$ , conforme ilustrado nas Figuras 57-62. Nesta situação há lucro positivo para todos os agentes de mercado em ambos os modelos, sendo que o lucro do fabricante e lucro total se destacam no modelo M2, enquanto o lucro do varejista é maior no modelo M1. Nota-se também que há pouca diferença entre o lucro total de cada modelo.

Figura 57 – Comportamento do  $\pi^T$  com diferentes  $\beta$  e  $\gamma$

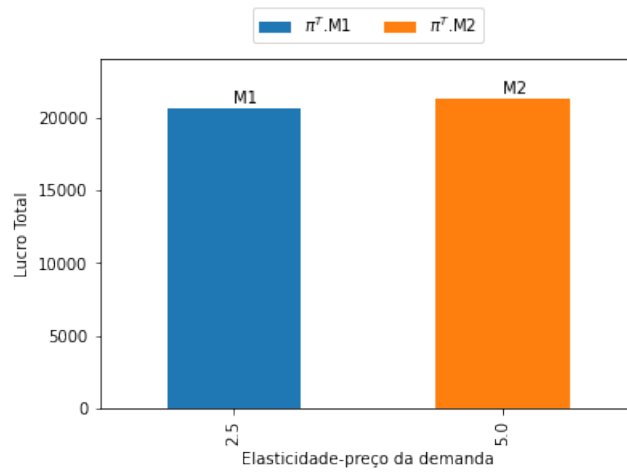


Figura 58 – Comportamento do  $\pi^V$  com diferentes  $\beta$  e  $\gamma$

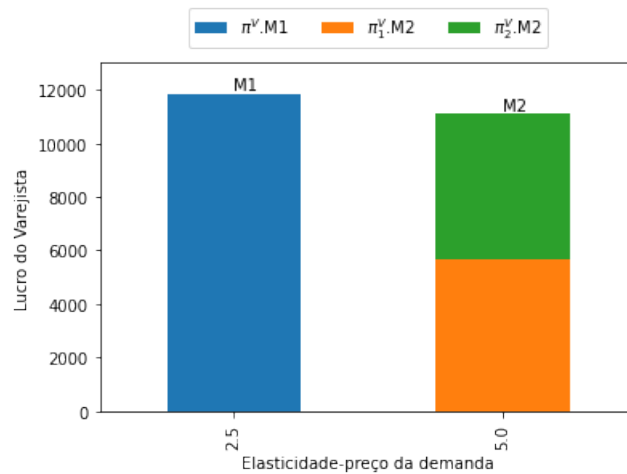
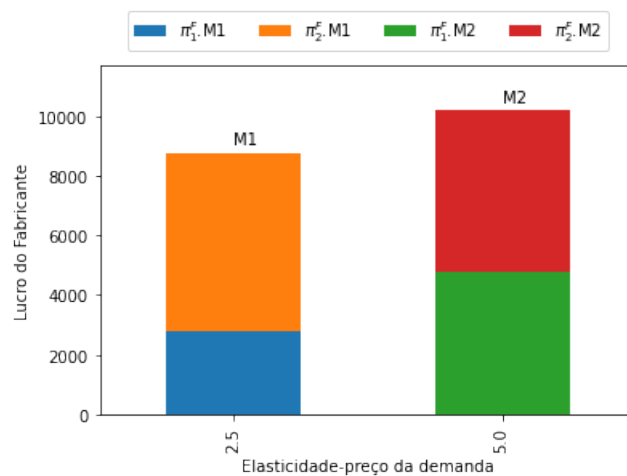


Figura 59 – Comportamento do  $\pi^F$  com diferentes  $\beta$  e  $\gamma$



Quanto aos preços praticados, se tem maiores preços no modelo M1, para ambos os agentes do mercado, assim como os preços do varejo são maiores em ambos modelos. Quando se analisa os preços dos fabricantes, há um preço superior do produto 2 em M1 e do produto 1 em M2. Tal situação implica em maiores vendas no modelo M1.

Figura 60 – Comportamento do  $p$  com diferentes  $\beta$  e  $\gamma$

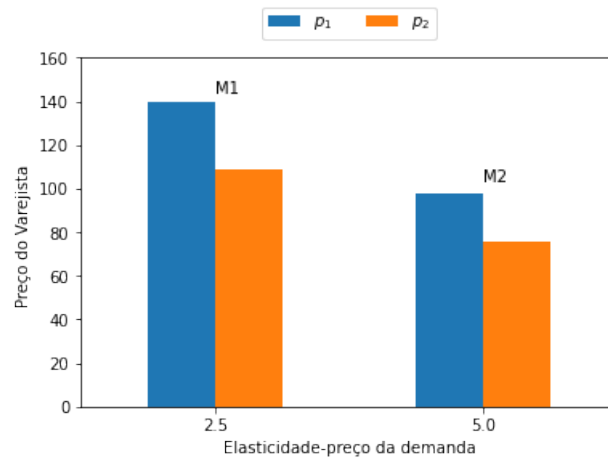


Figura 61 – Comportamento do  $w$  com diferentes  $\beta$  e  $\gamma$

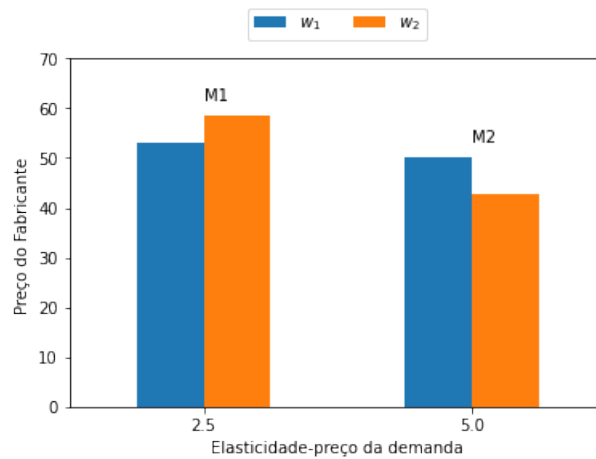
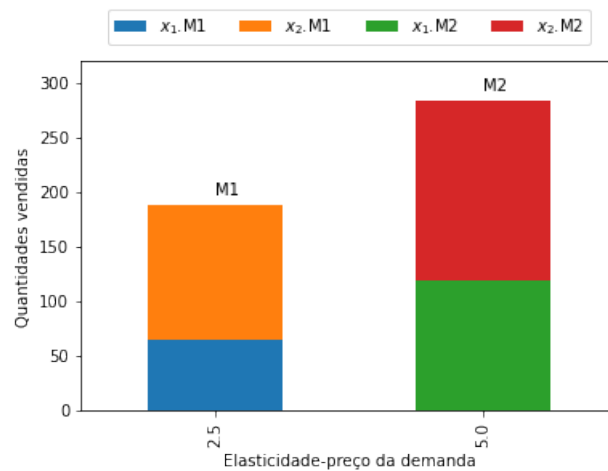


Figura 62 – Comportamento de  $x$  com diferentes  $\beta$  e  $\gamma$



Ademais, pode-se perceber que o produto com maiores valores de  $\beta$  e  $\gamma$  no modelo M1, tem maior preço praticado pelo fabricante, o que não acontece no modelo M2. Ambos os modelos são viáveis economicamente e apresentam resultados positivos sob a perspectiva dos lucros.

## 6 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo a análise e comparação de dois modelos de cadeia de suprimentos distintos, denominados M1 e M2, visando obter, para ambos os modelos, o equilíbrio de Nash. A metodologia utilizada foi definida em etapas, sendo elas a revisão da literatura, modelagem matemática dos problemas manualmente, implementação para conferência das equações, implementação das equações em linguagem computacional para análise de cenários, testes numéricos, plotagem dos resultados encontrados, a documentação e a análise dos resultados.

Pôde-se perceber o comportamento das variáveis em cenários distintos, onde considerou-se produtos homogêneos e heterogêneos. Nos testes referentes aos produtos homogêneos, além de comparar os modelos, verificou-se o comportamento das variáveis à medida que se variou positivamente cada um dos parâmetros.

Foi constatado também que para produtos homogêneos, o mercado teve tendência a crescimento quando os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  foram variados positivamente, o inverso ocorre quando se aumenta  $\beta$ . Quanto a variação de  $c$ , tem-se dois comportamentos diferentes para as variáveis, quando se trata dos lucros, à medida que um modelo apresenta queda, o outro apresenta crescimento, resultando em um cruzamento. Quanto aos preços e a quantidade ofertada, os resultados se iniciam próximos e à medida que se tem o aumento de  $c$  eles se distanciam.

Ao comparar os modelos para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  para produtos homogêneos, verificou-se valores de  $\pi^V$  e  $p$  maiores em M1,  $\pi^F$  e  $x$  maiores em M2, e  $w$  igual para ambos os modelos. Já para  $c$ ,  $\pi^V$  inicia com maiores valores para M1 e, à medida que se aumenta o parâmetro, o modelo M2 se sobressai. Já para  $\pi^F$ , tem-se o mesmo comportamento, porém invertendo os modelos, M2 inicia maior que M1. Ademais, verificou-se também maiores valores de  $p$  e  $w$  no modelo M1, sendo que, para  $w$  o preço se inicia igual, variando a medida que  $c$  aumenta, e para  $x$  o modelo M2 é sempre maior.

Ao comparar os resultados provenientes dos cenários com produtos heterogêneos com apenas um parâmetro diferente, obteve-se duas situações em que se prova a inviabilidade econômica do modelo M2, associadas com os diferentes valores de  $\beta$  e  $c$ . Quando se trata de diferentes  $\alpha$  e  $\gamma$ , tem-se  $\pi^V$  e  $x$  maiores para o modelo M2, sendo  $x_1 > x_2$  em M2; e  $\pi^F$ ,  $p$  e  $w$  maiores em M1, sendo  $p_1 > p_2$  e  $w_1 > w_2$  em M1.

Analisando os resultados no cenário de produtos heterogêneos com dois parâmetros diferentes, constatou-se outra situação de inviabilidade econômica do modelo M2, quando os valores de  $\alpha$  e  $c$  são diferentes para cada produto. Já no cenário com diferentes valores de  $\beta$  e  $\gamma$ , verificou-se maiores de  $\pi^V$ ,  $p$  e  $w$  para o modelo M1, e de  $\pi^F$  e  $x$  para M2.



Contudo, é válido ressaltar que não houve um cenário em que todas as variáveis obtém maiores resultados para apenas um modelo, no cenário com maiores preços se tem as menores quantidades vendidas, e quando o lucro é maior para o varejista, não ocorre o mesmo para o fabricante.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se a possibilidade de analisar o comportamento dos modelos com a inclusão de outras variáveis como *leadtime*, investimento em propaganda, com e/ou sem compartilhamento de custos, a mensuração dos níveis de qualidade como decisão anterior do fabricante, compreender a relação entre as condições de equilíbrio/convexidade, analisar os cenários com a variação dos parâmetros ao longo do tempo, e alterar as regras/dinâmica do jogo. Outra sugestão se concentra na ideia de se estudar os limites do domínio das soluções ótimas dos problemas, de forma a identificar o valor dos parâmetros que possibilitam assegurar viabilidade econômica no escopo das cadeias de suprimentos exploradas neste trabalho.

# Referências

- BALLOU, R. H. **Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos: Logística Empresarial**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018. 616 p.
- BANKER, R. D.; KHOSLA, I.; SINHA, K. K. Quality and competition. **Management Science, INFORMS**, v. 44, n. 9, p. 1179–1192, 1998. ISSN 00251909, 15265501. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2634708>.
- BÊRNI, D. d. A.; FERNANDEZ, B. P. M. **Teoria dos Jogos**. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2014. 304 p.
- BIERMAN, H. S.; FERNANDEZ, L. **Teoria dos Jogos**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2011. 416 p.
- CHAKRABORTY, T.; CHAUHAN, S. S.; OUHIMMOU, M. Cost-sharing mechanism for product quality improvement in a supply chain under competition. **International Journal of Production Economics**, v. 208, p. 566–587, 2019. ISSN 0925-5273. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527318304936>.
- CHEN, J.; LIANG, L.; YANG, F. Cooperative quality investment in outsourcing. **International Journal of Production Economics**, v. 162, p. 174–191, 2015. ISSN 0925-5273. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527315000316>.
- FIANI, R. **Teoria dos Jogos**. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015. 352 p.
- FRANK, R. H. **Microeconomia e Comportamento**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. 648 p.
- GIRI, B. C.; CHAKRABORTY, A.; MAITI, T. Quality and pricing decisions in a two-echelon supply chain under multi-manufacturer competition. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 78, n. 9, p. 1927–1941, Jun 2015. ISSN 1433-3015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00170-014-6779-2>.
- GOOLSBEE, A.; LEVITT, S.; SYVERSON, C. **Microeconomia**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2018. 872 p.
- LIU, B.; CAI, G. G.; TSAY, A. A. Advertising in asymmetric competing supply chains. **Production and Operations Management**, v. 23, n. 11, p. 1845–1858, 2014. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/poms.12090>.
- MAHMOODI, A.; ESHGHI, K. Price competition in duopoly supply chains with stochastic demand. **Journal of Manufacturing Systems**, Elsevier, v. 33, n. 4, p. 604–612, 2014.
- MANKIW, N. G. **Princípios de Microeconomia**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2021. 396 p.
- MCGUIRE, T. W.; STAELIN, R. An industry equilibrium analysis of downstream vertical integration. **Marketing Science**, v. 27, n. 1, p. 115–130, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1287/mksc.1070.0335>.
- PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Microeconomia**. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2010. 650 p.

- RIBEIRO, F.; FREITAS, K. B. C. de; SILVA, T. G. da. Estrutura de mercado: Oligopólio. **Aspectos educacionais e iniciação científica aplicados ao estudo do Direito**, Belo Horizonte, v. 1, p. 24–28, 2020. Disponível em: <[https://fametro.edu.br/storage/2021/06/aspectos\\_direito.pdf#page=24](https://fametro.edu.br/storage/2021/06/aspectos_direito.pdf#page=24)>.
- ROFIN, T.; MAHANTY, B. Impact of wholesale price discrimination by the manufacturer on the profit of supply chain members. **Management Decision**, Emerald Publishing Limited, 2020.
- SIMCHI-LEVI, D.; KAMINSKY, P.; SIMCHI-LEVI, E. **Cadeia de Suprimentos Projeto e Gestão: Conceitos estratégias e estudos de caso**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.
- VASNANI, N. N.; CHUA, F. L. S.; OCAMPO, L. A.; PACIO, L. B. M. Game theory in supply chain management: Current trends and applications. **International Journal of Applied Decision Sciences**, Inderscience Publishers (IEL), v. 12, n. 1, p. 56–97, 2019.
- WALL, S. **Microeconomia - Série Express**. São Paulo: Saraiva, 2015. 292 p.
- XIA, Y.; XIAO, T.; ZHANG, G. P. Service investment and channel structure decisions in competing supply chains. **Service Science**, INFORMS, v. 11, n. 1, p. 57–74, 2019.
- XIAO, T.; CHOI, T.-M.; CHENG, T. Delivery leadtime and channel structure decisions for make-to-order duopoly under different game scenarios. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v. 87, p. 113–129, 2016. ISSN 1366-5545. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S136655451600003X>>.

# APÊNDICE A – Resultados completos do modelo M1

Teste n°	Parâmetros de Entrada								Variáveis de Saída									
	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$c_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$c_2$	$p_1$	$x_1$	$p_2$	$x_2$	$\pi^V$	$w_1$	$\pi_1^F$	$w_2$	$\pi_2^F$	$\pi^T$
1	0,5	1	0,5	0	0,5	1	0,5	0	0,6670	0,1667	0,6670	0,1667	0,1110	0,3333	0,0556	0,3333	0,0556	0,2222
2	1	1	0,5	0	1	1	0,5	0	1,3333	0,3333	1,3333	0,3333	0,4444	0,6667	0,2222	0,6667	0,2222	0,8888
3	5	1	0,5	0	5	1	0,5	0	6,6667	1,6667	6,6667	1,6667	11,1111	3,3333	5,5556	3,3333	5,5556	22,2223
4	5	2	0,5	0	5	2	0,5	0	2,3810	1,4286	2,3810	1,4286	2,7211	1,4286	2,0408	1,4286	2,0408	6,8027
5	5	3	0,5	0	5	3	0,5	0	1,4545	1,3636	1,4545	1,3636	1,4876	0,9091	1,2397	0,9091	1,2397	3,9670
6	5	5	0,5	0	5	5	0,5	0	0,8187	1,3158	0,8187	1,3158	0,7695	0,5263	0,6925	0,5263	0,6925	2,1545
7	5	10	0,5	0	5	10	0,5	0	0,3914	1,2821	0,3914	1,2821	0,3460	0,2564	0,3287	0,2564	0,3287	1,0034
8	5	10	1	0	5	10	1	0	0,4094	1,3158	0,4094	1,3158	0,3847	0,2632	0,3463	0,2632	0,3463	1,0773
9	5	10	3	0	5	10	3	0	0,5042	1,4706	0,5042	1,4706	0,6179	0,2941	0,4325	0,2941	0,4325	1,4829
10	5	10	5	0	5	10	5	0	0,6667	1,6667	0,6667	1,6667	1,1111	0,3333	0,5556	0,3333	0,5556	2,2223
11	5	10	9	0	5	10	9	0	2,2723	2,2727	2,2723	2,2727	10,3306	0,4545	1,0331	0,4545	1,0331	12,3968
12	10	10	9	0	10	10	9	0	5,4545	4,5455	5,4545	4,5455	41,3223	0,9091	4,1322	0,9091	4,1322	49,5867
13	20	10	9	0	20	10	9	0	10,9091	9,0909	10,9091	9,0909	165,2893	1,8182	16,5289	1,8182	16,5289	198,3471
14	50	10	9	0	50	10	9	0	27,2727	22,7273	27,2727	22,7273	1033,0579	4,5455	103,3058	4,5455	103,3058	1239,6695
15	50	10	5	0	50	10	5	0	6,6667	16,6667	6,6667	16,6667	111,1111	3,3333	55,5556	3,3333	5,5556	172,2223
16	50	10	3	0	50	10	3	0	5,0420	14,7059	5,0420	14,7059	61,7894	2,9412	43,2526	2,9412	43,2526	148,2946
17	50	5	3	0	50	5	3	0	16,0714	17,8571	16,0714	17,8571	318,8776	7,1429	127,5510	7,1429	127,5510	573,9796
18	50	5	3	1	50	5	3	1	16,4286	17,1429	16,4286	17,1429	293,8776	7,8571	117,5510	7,8571	117,5510	528,9796
19	50	5	3	2	50	5	3	2	16,7857	16,4286	16,7857	16,4286	269,8980	8,5714	107,9592	8,5714	107,9592	485,8164
20	50	5	3	5	50	5	3	5	17,8571	14,2857	17,8571	14,2857	204,0816	10,7143	81,6327	10,7143	81,6327	367,347
21	50	5	3	10	50	5	3	10	19,6429	10,7143	19,6429	10,7143	114,7959	14,2857	45,9184	14,2857	45,9184	206,6327
22	150	5	3	10	150	5	3	10	51,7857	46,4286	51,7857	46,4286	2155,6122	28,5714	862,2449	28,5714	862,2449	3880,1020
23	150	5	3	20	150	5	3	20	55,3571	39,2857	55,3571	39,2857	1543,3673	35,7143	617,3469	35,7143	617,3469	2778,0611
24	150	1	0,5	10	150	1	0,5	10	203,3333	48,3333	203,3333	48,3333	9344,4444	106,6667	4672,2222	106,6667	4672,2222	18688,8888
25	200	5	3	10	150	5	3	10	63,1696	53,5714	53,4732	57,1429	3065,2105	35,7143	1377,5510	28,5714	1061,2245	5503,9860
26	200	5	3	10	200	5	3	25	67,8571	80,3571	73,2143	37,5000	3587,3724	35,7143	2066,3265	46,4286	803,5714	6457,2703
27	200	5	3	10	200	5	1	10	53,1926	56,8452	40,9361	48,5119	1770,6642	38,0682	1595,5425	22,1591	589,8607	3956,0674
28	200	10	3	10	200	7	3	10	25,2170	48,5829	33,5842	40,5615	734,3934	17,6471	371,5162	24,5455	589,9854	1695,8950
29	500	5	3	50	250	5	3	25	155,1339	62,5000	112,7232	151,7857	11977,8380	107,1429	3571,4286	53,5714	4336,7347	19886,0013
30	250	2,5	1,5	10	250	5	3	10	139,7237	64,3264	109,0904	123,7192	11846,0397	53,1250	2774,0750	58,3669	5983,9169	20604,0316

# APÊNDICE B – Resultados completos do modelo M2

Teste n°	Parâmetros de Entrada								Variáveis de Saída										
	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$c_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$c_2$	$p_1$	$x_1$	$\pi_1^V$	$p_2$	$x_2$	$\pi_2^V$	$w_1$	$\pi_1^F$	$w_2$	$\pi_2^F$	$\pi^T$
1	0,5	1	0,5	0	0,5	1	0,5	0	0,5556	0,2222	0,0494	0,5556	0,2222	0,0494	0,3333	0,0741	0,3333	0,0741	0,2470
2	1	1	0,5	0	1	1	0,5	0	1,1111	0,4444	0,1975	1,1111	0,4444	0,1975	0,6667	0,2963	0,6667	0,2963	0,9876
3	5	1	0,5	0	5	1	0,5	0	5,5556	2,2222	4,9383	5,5556	2,2222	4,9383	3,3333	7,4074	3,3333	7,4074	24,6914
4	5	2	0,5	0	5	2	0,5	0	2,2449	1,6327	1,3328	2,2449	1,6327	1,3328	1,4286	2,3324	1,4286	2,3324	7,3304
5	5	3	0,5	0	5	3	0,5	0	1,4050	1,4876	0,7377	1,4050	1,4876	0,7377	0,9091	1,3524	0,9091	1,3524	4,1802
6	5	5	0,5	0	5	5	0,5	0	0,8033	1,3850	0,3837	0,8033	1,3850	0,3837	0,5263	0,7290	0,5263	0,7290	2,2254
7	5	10	0,5	0	5	10	0,5	0	0,3879	1,3149	0,1729	0,3879	1,3149	0,1729	0,2564	0,3372	0,2564	0,3372	1,0202
8	5	10	1	0	5	10	1	0	0,4017	1,3850	0,1918	0,4017	1,3850	0,1918	0,2632	0,3645	0,2632	0,3645	1,1126
9	5	10	3	0	5	10	3	0	0,4671	1,7301	0,2993	0,4671	1,7301	0,2993	0,2941	0,5089	0,2941	0,5089	1,6164
10	5	10	5	0	5	10	5	0	0,5556	2,2222	0,4938	0,5556	2,2222	0,4938	0,3333	0,7407	0,3333	0,7407	2,4690
11	5	10	9	0	5	10	9	0	0,8678	4,1322	1,7075	0,8678	4,1322	1,7075	0,4545	1,8783	0,4545	1,8783	7,1716
12	10	10	9	0	10	10	9	0	1,7355	8,2645	6,8301	1,7355	8,2645	6,8301	0,9091	7,5131	0,9091	7,5131	28,6864
13	20	10	9	0	20	10	9	0	3,4711	16,5289	27,3205	3,4711	6,5289	27,3205	1,8182	30,0526	1,8182	30,0526	114,7462
14	50	10	9	0	50	10	9	0	8,6777	41,3223	107,7534	8,6777	41,3223	107,7534	4,5455	187,8287	4,5455	187,8287	591,1642
15	50	10	5	0	50	10	5	0	5,5556	22,2222	49,3827	5,5556	22,2222	49,3827	3,3333	74,0741	3,3333	74,0741	246,9136
16	50	10	3	0	50	10	3	0	4,6713	17,3010	29,9326	4,6713	17,3010	29,9326	2,9412	50,8854	2,9412	50,8854	161,6360
17	50	5	3	0	50	5	3	0	12,2449	25,5102	130,1541	12,2449	25,5102	130,1541	7,1429	182,2157	7,1429	182,2157	624,7396
18	50	5	3	1	50	5	3	1	11,8524	26,2951	138,2868	11,8524	26,2951	138,2868	6,5934	147,0794	6,5934	147,0794	570,7324
19	50	5	3	2	50	5	3	2	11,4600	27,0801	146,6660	11,4600	27,0801	146,6660	6,0440	109,5106	6,0440	109,5106	512,3532
20	50	5	3	5	50	5	3	5	10,2826	29,4349	173,2821	10,2826	29,4349	173,2821	4,3956	-17,7903	4,3956	-17,7903	310,9836
21	50	5	3	10	50	5	3	10	8,3203	33,3595	222,5712	8,3203	33,3595	222,5712	1,6484	-278,6068	1,6484	-278,6068	-112,0712
22	150	5	3	10	150	5	3	10	32,8100	84,3799	1423,9937	32,8100	84,3799	1423,9937	15,9341	500,7159	15,9341	500,7159	3849,4192
23	150	5	3	20	150	5	3	20	28,8854	92,2292	1701,2450	28,8854	92,2292	1701,2450	10,4396	-881,7517	10,4396	-881,7517	1638,9866
24	150	1	0,5	10	150	1	0,5	10	163,1111	68,4444	4684,6420	163,1111	68,4444	4684,6420	94,6667	5794,9630	94,6667	5794,9630	20959,2100
25	200	5	3	10	150	5	3	10	41,5952	100,8332	2033,4682	36,2698	93,4368	1746,0865	21,4286	1152,3798	17,5824	708,4767	5640,4112
26	200	5	3	10	200	5	3	25	43,6964	103,0975	2125,8169	40,5265	128,4567	3300,2252	23,0769	1348,1974	14,8352	-1305,7413	5468,4982
27	200	5	3	10	200	5	1	10	41,0062	90,2111	1627,6073	31,7474	82,2692	1353,6447	22,9640	1169,4976	15,2936	435,4971	4586,2467
28	200	10	3	10	200	7	3	10	17,2737	98,9366	978,8443	23,8913	84,5822	1022,0208	7,3801	-259,2065	11,8081	152,9346	1894,5932
29	500	5	3	50	250	5	3	25	87,7913	260,3852	13560,0925	66,4473	181,1375	6562,1620	35,7143	-3719,7888	30,2198	945,4982	17347,9639
30	250	2,5	1,5	10	250	5	3	10	97,8324	119,1138	5675,2436	75,7966	164,5142	5412,9048	50,1869	4786,8153	42,8938	5411,4935	21286,4572