



UFOP
Universidade Federal
de Ouro Preto

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil
Curso de Graduação em Engenharia Civil



Fernanda Moronari da Silva

Cálculo de deflexões usando a Resistência dos Materiais e a
Teoria da Elasticidade

Ouro Preto

2017

Fernanda Moronari da Silva

Cálculo de deflexões usando a Resistência dos Materiais e a
Teoria da Elasticidade

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao Curso de Engenharia
Civil da Universidade Federal de Ouro
Preto como parte dos requisitos para a
obtenção do Grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. D.Sc. Jaime Florencio Martins (UFOP)

Ouro Preto

2017

S586c

Silva, Fernanda Moronari da.

Cálculo de deflexões usando a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade [manuscrito] / Fernanda Moronari da Silva. - 2017.

28f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Florencio Martins.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.

1. Deflexão (Tecnologia). 2. Vigas. 3. Elasticidade. 4. Resistência dos Materiais. I. Martins, Jaime Florencio. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

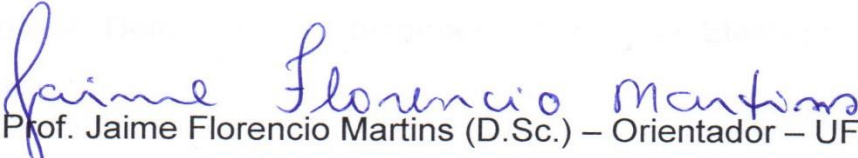
CDU: 624

Catálogo: ficha@sisbin.ufop.br

Fernanda Moronari da Silva

Cálculo de deflexões usando a Resistência dos Materiais e a
Teoria da Elasticidade

Monografia de conclusão de curso para
obtenção do Grau de Engenheiro Civil
na Universidade Federal de Ouro
Preto, defendida e aprovada em 09 de
maio de 2017, pela banca examinadora
constituída pelos professores:


Prof. Jaime Florencio Martins (D.Sc.) – Orientador – UFOP


Prof. Fernando Antonio Borges Campos – UFOP


Prof. Geraldo Donizetti de Paula (D.Sc.) – UFOP

Resumo

A análise de vigas visa determinar as tensões e deformações produzidas pelas cargas atuantes. Na engenharia civil, especificações de projeto limitam a deflexão máxima que uma viga pode sofrer, uma vez que deformações excessivas podem alterar a eficiência da estrutura. Neste trabalho tem-se um estudo de deflexão de viga biapoiada usando-se os métodos da Resistência dos Materiais e da Teoria da Elasticidade. Ambos os métodos são obtidos pela integração de equações simplificadoras, visando determinar a deflexão máxima vertical e também o máximo valor da componente horizontal, essa última obtida somente pela aplicação da Teoria da Elasticidade. O estudo se baseou na análise de uma viga biapoiada solicitada por flexão simples, ou seja, submetida a momento fletor e esforço cortante. Este trabalho busca a comparação dos resultados dos dois métodos. Os resultados apresentaram coerência e um direcionamento para futuros estudos de outros tipos de vigas e carregamentos.

Palavras-chave: Deflexão, viga biapoiada, Teoria da Elasticidade, Resistência dos Materiais.

Abstract

The aim of beam analysis is to determine the tensions and deformations produced by acting loads. In civil engineering, design specifications limit the maximum deflection a beam can withstand, since excessive deformations can affect the integrity of a structure and its members. In this work, a bi-supported beam deflection study was performed using the Materials Resistance and Elasticity Theory methods. Both methods were obtained by the integration of simplified equations, determining the maximum vertical deflection and also the maximum value of the horizontal component, the latter obtained only by applying Elasticity Theory. The study was based on the analysis of a bi-supported beam by simple bending, that is, subjected to a bending moment and shear stress. This work seeks to compare the results of the two methods. The results presented provide a guide for future studies of other types of beams and loads.

Keywords: Deflection, bi-supported beam, Elasticity Theory, Materials Resistance

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	6
2. OBJETIVOS	7
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
4. METODOLOGIA.....	9
5. MÉTODOS DA INTEGRAÇÃO	9
5.1. Resistência dos Materiais	9
5.1.1. Hipóteses.....	10
5.1.2. Condições de contorno	10
5.1.3. Convenções de sinais.....	11
5.1.4. Equação da Linha Elástica	11
5.2. Teoria da Elasticidade.....	12
5.2.1. Hipóteses	14
5.2.2. Condições de contorno.....	14
5.2.3. Convenções de sinais.....	15
5.2.4. Equações das componentes u e v de uma viga biapoiada	15
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	18
6.1. Deflexão de uma viga biapoiada pela Resistência dos Materiais	18
6.2. Deflexão de uma viga biapoiada pela Teoria da Elasticidade.....	20
7. CONCLUSÕES	24
REFERÊNCIAS	25
APÊNDICE A – Gráficos do deslocamento vertical	Erro! Indicador não definido.
APÊNDICE B – Gráfico do deslocamento horizontal....	Erro! Indicador não definido.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Hibbeler (2004), a Resistência dos Materiais é um ramo da mecânica que estuda as tensões e deformações que ocorrem nos sólidos provenientes de forças externas a eles aplicadas e apresenta a teoria básica para conhecer os deslocamentos e esforços envolvidos em cada situação.

A história da Resistência dos Materiais remonta ao início do século XVII, quando Galileu Galilei realizou experiências para estudar os efeitos de cargas em hastes e vigas feitas de vários materiais. No entanto, para a compreensão adequada, foi necessário estabelecer descrições experimentais precisas das propriedades mecânicas de um material. Somente a partir do século XVIII, principalmente na França, notáveis como Saint-Venant, Poisson, Lamé e Navier, realizaram estudos tanto experimentais como teóricos sobre o assunto, ocasionando expressiva melhora nos métodos para tais descrições.

As análises teóricas e os resultados experimentais têm igual importância no estudo da Resistência dos Materiais. O desenvolvimento histórico da Resistência dos Materiais é uma fascinante mistura de teoria e experiência, esta mostrando o caminho adequado em alguns casos, aquela em outro. Homens famosos, como Leonardo da Vinci (1452-1519) e Galileu Galilei (1564-1642), fizeram experiências para determinar a resistência dos fios, barras e vigas, sem que tivessem desenvolvido teorias adequadas (pelos padrões de hoje) para explicar os resultados atingidos. Ao contrário, o famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783) desenvolveu a teoria matemática das colunas, calculando a carga crítica de uma coluna, em 1744, muito antes de qualquer experiência que evidenciasse a importância de seu achado (TIMOSHENKO, 1994).

Com o passar do tempo, depois que muitos dos problemas fundamentais da Resistência dos Materiais foram resolvidos, tornou-se necessário usar técnicas de matemática avançada e de computador para resolver problemas mais complexos. Como resultado, essa ciência ampliou-se para outras disciplinas de mecânica avançada, tais como Teoria da Elasticidade e a Teoria da Plasticidade.

A pesquisa nesses campos está em andamento não só para satisfazer a demanda pela resolução de problemas avançados de engenharia, como também para justificar o uso mais amplo e as limitações em que a teoria fundamental da Resistência dos Materiais é baseada (HIBBELER, 2004).

A análise de vigas é bastante comum em problemas de engenharia. Para a Engenharia Civil, o domínio sobre as construções das mais variadas estruturas é fundamental para utilização funcional e segura das mesmas.

Muitas vezes é preciso limitar o grau de deflexão que uma viga ou eixo pode sofrer quando submetido a uma carga. Portanto, no desenvolvimento do trabalho, serão apresentadas as teorias e soluções para a análise de uma viga biapoiada solicitada por flexão simples, através de dois métodos: Resistência dos Materiais e Teoria da Elasticidade.

A Resistência dos Materiais é o ramo da mecânica que estuda as relações entre cargas externas aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças internas que atuam dentro do corpo, abrangendo também o cálculo da deformação do corpo e o estudo da sua estabilidade (HIBBELER, 2004).

Segundo Martins (2011) a Resistência dos Materiais introduz hipóteses simplificadoras, próximas do comportamento real dos sólidos, que permitem obter a componente vertical do deslocamento dos pontos localizados no eixo de uma viga. A Teoria da Elasticidade também faz uso de hipóteses simplificadoras, a diferença entre as duas ciências está na profundidade do exame dos problemas abordados, uma vez que a Teoria da Elasticidade fornece as componentes vertical e horizontal do deslocamento de todos os pontos da viga.

2. OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é a avaliação teórica dos resultados obtidos a partir do cálculo de deflexão de uma viga biapoiada submetida à flexão simples, ou seja, viga solicitada por momento fletor (M) e força cortante (V), usando-se a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade.

Neste trabalho obtêm-se a deflexão máxima (v) e também o máximo valor da componente horizontal (u), essa última obtida somente com a análise pela Teoria da Elasticidade.

Os resultados das avaliações de cada método serão comparados e utilizados para investigar se a diferença dos resultados obtidos pelas duas ciências é significativa.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vigas são elementos estruturais, projetados para suportar carregamentos aplicados perpendicularmente ao seu eixo longitudinal. As vigas também devem ser projetadas para limitar as deflexões. Devido ao carregamento, as vigas ficam solicitadas por força cortante e momento fletor que, em geral, variam de ponto a ponto ao longo do eixo (HIBBELER, 2004).

O objetivo da análise de vigas, geralmente, será a determinação das tensões, deformações específicas e deformações totais produzidas pelas cargas; se essas quantidades puderem ser determinadas para todos os valores crescentes da carga até o ponto de ruptura, tem-se um quadro completo do comportamento do corpo (TIMOSHENKO & GERE, 1994).

Segundo Soares (2003), as vigas empregadas nas edificações devem apresentar adequada rigidez e resistência, isto é, devem resistir aos esforços sem ruptura e ainda não se deformarem em demasia. Normalmente o interesse recai no cálculo da pior situação da peça em termos de deslocamento, ou seja, deve-se controlar a deformação máxima da viga. O deslocamento linear máximo de uma seção chama-se “flecha” e para que a viga trabalhe adequadamente, este deslocamento não pode exceder valores limitados em normas específicas, que regulamentam as estruturas.

O interesse em se determinar a deflexão máxima, em uma viga sujeita a um determinado carregamento, está no fato de que, geralmente, as especificações do projeto incluem um valor máximo admissível para esta deflexão (BEER & JOHNSTON, 1982).

Deformações excessivas podem alterar a aparência e a eficiência de uma estrutura, além de causar desconforto ou medo para os seus ocupantes e usuários. As mais severas consequências, no entanto, são devidas aos danos locais, como fissuração de elementos estruturais e não-estruturais ou rotação excessiva (LIMA; FONTES; LIMA, 2003).

A Engenharia Estrutural, através de teorias científicas, permite que os engenheiros estabeleçam as forças e solicitações que podem atuar com segurança nas estruturas ou em seus componentes. Também permite que os engenheiros determinem os materiais adequados e as dimensões necessárias da estrutura e seus componentes, sem que estes sofram efeitos prejudiciais para o seu bom funcionamento (MARTHA, 2010).

4. METODOLOGIA

Determinaram-se, analiticamente, as equações, do deslocamento vertical (v) usando-se a Resistência dos Materiais e dos deslocamentos verticais (v) e horizontais (u) usando-se a Teoria da Elasticidade, para uma viga biapoiada solicitada por flexão simples. Os deslocamentos foram calculados usando-se um programa de computador na linguagem FORTRAN.

5. MÉTODOS DA INTEGRAÇÃO

O deslocamento transversal de uma viga depende da rigidez do material e de suas dimensões, assim como das cargas aplicadas e dos apoios. Existem vários métodos de se obter o valor da deflexão de uma viga.

A seguir, apresentam-se o Métodos da Integração Direta desenvolvidos pela Resistência dos Materiais e pela Teoria da Elasticidade, comuns para o cálculo de deslocamentos transversais de vigas devidos às tensões normais causadas pelo momento fletor.

5.1. Resistência dos Materiais

O processo para o cálculo de deflexões de vigas através do método da resistência dos materiais consiste em fazer sucessivas integrações na equação

diferencial básica para a linha elástica, com as constantes de integrações sendo determinadas de acordo com as condições de contorno dos apoios da viga (TIMOSHENKO & GERE, 1994).

5.1.1. Hipóteses

A resistência dos materiais é baseada nas seguintes hipóteses:

- 1) Despreza-se a contribuição da força cortante no cálculo das deflexões;
- 2) As deflexões são pequenas quando comparadas com as dimensões da viga (base, altura e comprimento);
- 3) É válida a Lei de Hooke, ou seja, considera-se linear a relação existente entre tensões e deformações.
- 4) Seção plana perpendicular ao eixo da barra permanece plana depois de aplicado o carregamento (BEER & JOHNSTON, 1982).

5.1.2. Condições de contorno

Uma vez que a integral é indefinida surgem constantes de integração que serão determinadas usando-se as condições de contorno (ou condições de extremidades). Essas condições incluem: as restrições impostas às rotações e deslocamentos nulos nos dois apoios de uma viga simplesmente apoiada (BEER & JOHNSTON, 1982).

Uma viga biapoiada apresenta apoios de 1º e de 2º gênero, demonstrados na Figura 1.

Figura 1 – Apoios de 1º e 2º gênero



Fonte: Martins, 2011.

Condições de contorno ou condições de extremidades de uma viga biapoiada: $v = 0$.

5.1.3. Convenções de sinais

As convenções de sinais adotadas foram:

- 1) Os eixos x e y são positivos no sentido para a direita e para baixo, respectivamente;
- 2) A deflexão v é positiva quando estiver no sentido positivo de y ;
- 3) O momento fletor M é positivo quando produz tração na parte inferior da viga.

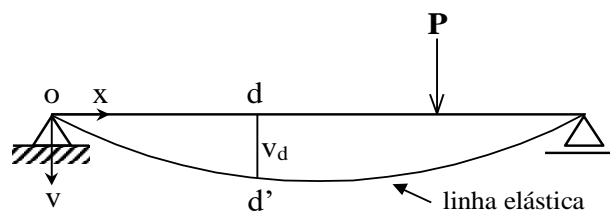
5.1.4. Equação da Linha Elástica

Segundo Martins (2011), linha elástica é, por definição, a curva na qual se transforma o eixo da viga depois de aplicado o carregamento.

A deflexão é uma função da coordenada x . A flecha e o ângulo de deflexão de uma seção dependem da posição que esta seção ocupa na barra.

A Figura 2 apresenta uma viga simplesmente apoiada sujeita a flexão. Antes da aplicação da carga P , o eixo longitudinal da viga é reto. Após a flexão o eixo longitudinal da viga, torna-se curvo.

Figura 2 – Linha elástica de viga fletida



Fonte: Martins, 2011.

Onde v_d é a deflexão ou flecha, componente vertical do deslocamento, do ponto d .

Sabendo que a flecha e o ângulo de deflexão de uma seção dependem da posição que esta seção ocupa na viga, a inclinação da Linha Elástica é obtida pela expressão:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (5.1)$$

Da flexão simples, tem-se o raio de curvatura da superfície neutra:

$$r = \frac{EI}{M(x)} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{M(x)}{EI} \quad (5.2)$$

A inclinação da Linha Elástica é obtida pela relação entre o raio de curvatura e o momento fletor. Assim, igualando-se as duas últimas expressões, tem-se:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (5.3)$$

Para EI constante e analisando-se o sinal da segunda derivada e a convecção de sinais para momentos fletores usada no Brasil, tem-se:

$$EI v''(x) = -M(x) \quad (5.4)$$

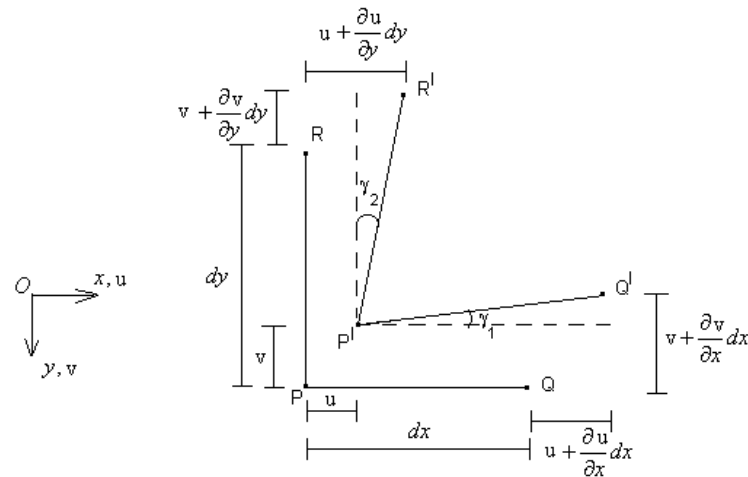
É importante lembrar que a contribuição da força cortante não é levada em consideração na expressão acima.

5.2. Teoria da Elasticidade

Segundo Martins (2011) a teoria da elasticidade relaciona deslocamentos (u e v) e deformações (ε e γ).

A Figura 3 mostra três pontos adjacentes P , Q e R . Os pontos P' , Q' e R' indicam as posições dos pontos P , Q e R na situação deformada. As componentes do deslocamento do ponto P são u e v enquanto os pontos Q' e R' , além de u e v , sofrem outros deslocamentos em função da variação dos comprimentos dx e dy , visto que o deslocamento de corpo rígido está impedido.

Figura 3 - Posição inicial e deformada de três pontos adjacentes



Fonte: Martins, 2011.

Analisando o ponto Q' , podemos obter:

- 1) A componente horizontal do deslocamento: $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, onde $\frac{\partial u}{\partial x}$ é a taxa de variação de u segundo a coordenada x .
- 2) A componente vertical do deslocamento: $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, onde $\frac{\partial v}{\partial x}$ é a taxa de variação de v segundo a coordenada x .

Raciocínio análogo é feito para obter as componentes do deslocamento do ponto R' .

A geometria da Figura 3 fornece as seguintes relações entre deslocamentos e deformações, que são válidas somente para pequenas deformações, quando os ângulos γ_1 e γ_2 são pequenos e pode-se fazer $tg\gamma_1 = \gamma_1$ e $tg\gamma_2 = \gamma_2$:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.6)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.7)$$

As deformações ε_x , ε_y e γ_{xy} podem ser obtidas usando-se a Lei de Hooke generalizada e a extensão da Lei de Hooke. Assim:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{Mxy}{EI} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{\nu Mxy}{EI} \quad (5.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{M.Q}{GLbI} \quad (5.10)$$

5.2.1. Hipóteses

A teoria da elasticidade é baseada nas seguintes hipóteses:

- 1) Admite-se que o corpo sofra deformação para que aconteça o deslocamento de qualquer partícula do corpo, isto é, o deslocamento de corpo rígido está impedido.
- 2) É válida a Lei de Hooke, ou seja, considera-se linear a relação existente entre tensões e deformações.
- 3) Seção plana perpendicular ao eixo da barra permanece plana na flexão (BEER & JOHNSTON, 1982).

5.2.2. Condições de contorno

Condições de contorno ou condições de extremidades de uma viga biapoada:

- $v = 0$ no ponto de coordenadas $x = 0$ e $y = h/2$
- $v = 0$ no ponto de coordenadas $x = L$ e $y = h/2$
- $u = 0$ no ponto de coordenadas $x = 0$ e $y = h/2$

5.2.3. Convenções de sinais

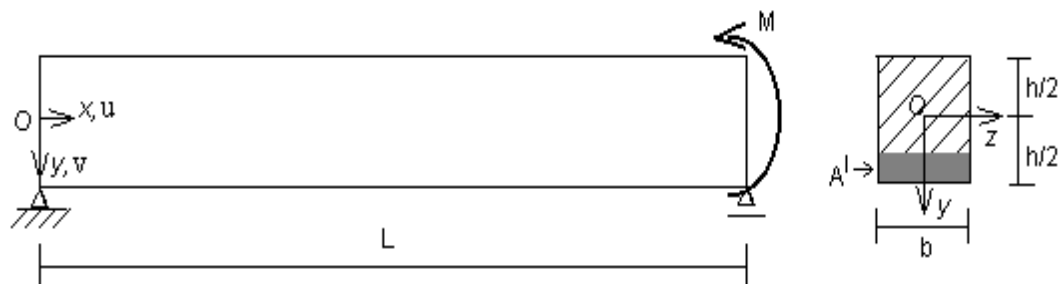
As convenções de sinais adotadas foram:

- 1) Os eixos x e y são positivos no sentido para a direita e para baixo, respectivamente;
- 2) A deflexão v é positiva quando estiver no sentido positivo de y ;
- 3) A deflexão u é positiva quando estiver no sentido positivo de x ;
- 4) O momento fletor M é positivo quando produz tração na parte inferior da viga.

5.2.4. Equações das componentes u e v de uma viga biapoiada

Considere-se uma viga biapoiada (Figura 4), solicitada por um momento fletor aplicado no apoio B.

Figura 4 - Viga biapoiada solicitada por flexão simples



Fonte: Martins, 2011.

Os esforços que solicitam a viga são momento fletor e força cortante e as equações destes esforços são:

$$M(x) = \frac{M}{L} x \quad (5.11)$$

$$V(x) = \frac{M}{L} \quad (5.12)$$

Estes esforços produzem as tensões:

$$\sigma_x = \frac{M(x).y}{I} = \frac{Mxy}{LI} \quad (5.13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{V(x).Q}{b.I} = \frac{M.Q}{LbI} \quad (5.14)$$

Considerando que em vigas de seção transversal retangular, o momento estático da área A' em relação ao eixo Oz é dado por:

$$Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.15)$$

É necessário integrar as equações (5.8) e (5.9) para determinar as equações de u e v .

$$u = \frac{Mx^2y}{2ELI} + f(y) \quad (5.16)$$

$$v = -\frac{vMxy^2}{2ELI} + g(x) \quad (5.17)$$

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções que desempenham o papel da constante arbitrária de integração indefinida.

Com as equações (5.16) e (5.17), a equação (5.10) pode ser escrita das seguintes formas:

$$\gamma_{xy} = -\frac{vMy^2}{2ELI} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{Mx^2}{2ELI} + \frac{df(y)}{dy} \quad (5.18)$$

$$\frac{M}{2GLI} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = -\frac{vMy^2}{2ELI} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{Mx^2}{2ELI} + \frac{df(y)}{dy} \quad (5.19)$$

Na equação acima alguns termos são funções apenas de x , outros de y e um é constante. Assim sendo, pode-se escrever:

$$K = F(y) + G(x) \quad (5.20)$$

Onde:

$$F(y) = -\frac{vMy^2}{2ELI} + \frac{My^2}{2GLI} + \frac{df(y)}{dy} \quad (5.21)$$

$$G(x) = \frac{Mx^2}{2ELI} + \frac{dg(x)}{dx} \quad (5.22)$$

$$K = \frac{Mh^2}{8GLI} \quad (5.23)$$

Entretanto, a equação (5.19) somente será satisfeita para qualquer x e qualquer y se $G(x)$ e $F(y)$ forem constantes. Assim $K = C_1 + C_2$. Então:

$$-\frac{vMy^2}{2ELI} + \frac{My^2}{2GLI} + \frac{df(y)}{dy} = C_1 \quad (5.24)$$

$$\frac{Mx^2}{2ELI} + \frac{dg(x)}{dx} = C_2 \quad (5.25)$$

Integrando-se $F(y)$ e $G(x)$:

$$f(y) = \frac{vMy^3}{6ELI} - \frac{My^3}{6GLI} + C_1y + C_3 \quad (5.26)$$

$$g(x) = -\frac{Mx^3}{6ELI} + C_2x + C_4 \quad (5.27)$$

Colocando-se as expressões de $f(y)$ e $g(x)$ nas equações (5.16) e (5.17):

$$u = \frac{Mx^2y}{2ELI} + \frac{vMy^3}{6ELI} - \frac{My^3}{6GLI} + C_1y + C_3 \quad (5.28)$$

$$v = -\frac{vMxy^2}{2ELI} - \frac{Mx^3}{6ELI} + C_2x + C_4 \quad (5.29)$$

As constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são determinadas a partir das condições de contorno impostas:

$$C_1 = \frac{Mh^2}{8GLI} - \frac{vMh^2}{8ELI} - \frac{ML}{6EI} \quad (5.30)$$

$$C_2 = \frac{vMh^2}{8ELI} + \frac{ML}{6EI} \quad (5.31)$$

$$C_3 = \frac{\nu M h^3}{24EI} - \frac{M h^3}{24GLI} + \frac{MLh}{12EI} \quad (5.32)$$

$$C_4 = 0 \quad (5.33)$$

Colocando-se as expressões de C_1 , C_2 , C_3 e C_4 nas equações (5.28) e (5.29), tem-se:

$$u = \frac{Mx^2y}{2EI} + \frac{\nu My^3}{6EI} - \frac{My^3}{6GLI} + \left(\frac{Mh^2}{8GLI} - \frac{\nu Mh^2}{8EI} - \frac{ML}{6EI} \right) y + \frac{\nu Mh^3}{24EI} - \frac{Mh^3}{24GLI} + \frac{MLh}{12EI} \quad (5.34)$$

$$\nu = -\frac{\nu Mxy^2}{2EI} - \frac{Mx^3}{6EI} + \left(\frac{\nu Mh^2}{8EI} + \frac{ML}{6EI} \right) x \quad (5.35)$$

As expressões (5.34) e (5.35) fornecem as componentes dos deslocamentos de todos os pontos da viga.

As componentes verticais dos deslocamentos dos pontos com coordenada $y = 0$ são dadas por:

$$\nu = -\frac{Mx^3}{6EI} + \left(\frac{\nu Mh^2}{8EI} + \frac{ML}{6EI} \right) x \quad (5.36)$$

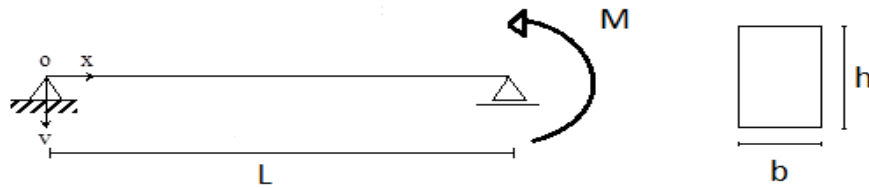
A equação (5.36) para obtenção do deslocamento vertical (ν) da Teoria da Elasticidade coincide com a equação conhecida da Resistência dos Materiais, quando se considera o comprimento longitudinal muito maior que a altura, desprezando-se o segundo termo da equação.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1. Deflexão de uma viga biapoiada pela Resistência dos Materiais

Considere-se uma viga biapoiada mostrada na Figura 5, solicitada por um momento fletor aplicado no apoio da direita.

Figura 5: Viga biapoiada solicitada por flexão simples



Fonte: a autora, 2017.

Para facilitar a análise dos resultados obtidos pela Resistência dos Materiais, adotam-se os seguintes dados para a viga estudada:

- $L = 5 \text{ m}$;
- Seção transversal: $0,20 \times 0,30 \text{ m}$;
- $M = 2,0 \times 10^5 \text{ N.m}$;
- $E = 200 \text{ GPa} = 200000 \text{ MPa}$.

Utilizando as expressões já conhecidas da Resistência dos Materiais, resultantes das integrações da equação (5.4), para obtenção da deflexão v :

- Para $0 \leq x \leq L$:

$$EI v''(x) = -M/L \quad x \quad (6.1)$$

$$EI v'(x) = -Mx^2/2L + ML/6 \quad (6.2)$$

$$EI v(x) = -Mx^3/6L + ML x/6 \quad (6.3)$$

- Para $x = L/2$

$$EI v(L/2) = M/L^2 /16 \quad (6.4)$$

Substituindo os dados na equação (6.4):

$$v(L/2) = 3,472 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v(L/2) = 3,472 \text{ mm}$$

A deflexão máxima da viga ocorre onde $v'(x) = 0$. Assim igualando a equação (6.2) à zero:

$$x = L/\sqrt{3} = 0,57735L \quad (6.5)$$

$$v(\text{máx}) = 0,064 ML^2/EI \quad (6.6)$$

Com os dados substituídos nas equações (6.5) e (6.6):

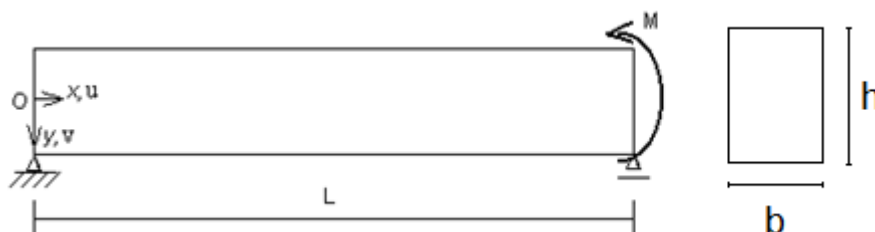
$$x = 2,88675$$

$$v(\text{máx}) = 3,5556 \text{ mm}$$

6.2. Deflexão de uma viga biapoiada pela Teoria da Elasticidade

Considerando uma viga biapoiada, Figura 6, solicitada por um momento fletor aplicado no apoio.

Figura 6: Viga biapoiada solicitada por momento fletor



Fonte: Martins, 2011.

Para facilitar a análise dos resultados obtidos pela Teoria da Elasticidade, adotam-se os seguintes dados para a viga estudada:

- $L = 5 \text{ m}$;
- Seção transversal: $0,20 \times 0,30 \text{ m}$;
- $M = 2,0 \times 10^5 \text{ N.m}$;
- $E = 200 \text{ GPa} = 200000 \text{ MPa}$.
- $G = 76,92 \text{ GPa}$
- Coeficiente de Poisson (relação entre as deformações transversal e longitudinal), $\nu = 0,3$.

Utilizando-se as equações obtidas (5.34) e (5.35) e com o auxílio do programa de computador, Fortran, encontram-se os resultados demonstrados nas tabelas 1, 2 e 3.

Na tabela 1, a máxima deflexão v foi analisada em três diferentes valores de y , uma vez que a altura da viga não é considerada desprezível em relação ao comprimento longitudinal da viga. Considera-se para exemplificar a análise do deslocamento vertical três valores para y :

- Valor mínimo de y , no caso $y = - 0,15 \text{ mm}$;
- Valor de y na linha neutra, no caso $y = 0 \text{ mm}$;
- Valor máximo de y , no caso $y = + 0,15 \text{ mm}$;

Tabela 1: Deslocamento vertical (v) para diferentes valores de y

Deslocamento vertical (v) obtido pela Teoria da Elasticidade								
Pontos	$y = - 0,15 \text{ m}$		Pontos	$y = 0,0 \text{ m}$		Pontos	$y = 0,15 \text{ m}$	
	$x \text{ (m)}$	$v \text{ (mm)}$		$x \text{ (m)}$	$v \text{ (mm)}$		$x \text{ (m)}$	$v \text{ (mm)}$
1	0,000	0,0000	22	0,000	0,0000	43	0,000	0,0000
2	0,250	0,4618	23	0,250	0,4622	44	0,250	0,4618
3	0,500	0,9167	24	0,500	0,9174	45	0,500	0,9167
4	0,750	1,3576	25	0,750	1,3588	46	0,750	1,3576
5	1,000	1,7778	26	1,000	1,7793	47	1,000	1,7778
6	1,250	2,1701	27	1,250	2,1720	48	1,250	2,1701
7	1,500	2,5278	28	1,500	2,5300	49	1,500	2,5278
8	1,750	2,8438	29	1,750	2,8464	50	1,750	2,8438
9	2,000	3,1111	30	2,000	3,1141	51	2,000	3,1111
10	2,250	3,3229	31	2,250	3,3263	52	2,250	3,3229
11	2,500	3,4722	32	2,500	3,4760	53	2,500	3,4722
12	2,750	3,5521	33	2,750	3,5562	54	2,750	3,5521
13	3,000	3,5556	34	3,000	3,5601	55	3,000	3,5556
14	3,250	3,4757	35	3,250	3,4806	56	3,250	3,4757
15	3,500	3,3056	36	3,500	3,3108	57	3,500	3,3056
16	3,750	3,0382	37	3,750	3,0438	58	3,750	3,0382
17	4,000	2,6667	38	4,000	2,6727	59	4,000	2,6667
18	4,250	2,1840	39	4,250	2,1904	60	4,250	2,1840
19	4,500	1,5833	40	4,500	1,5901	61	4,500	1,5833
20	4,750	0,8576	41	4,750	0,8648	62	4,750	0,8576
21	5,000	0,0000	42	5,000	0,0075	63	5,000	0,0000

Fonte: a autora, 2017.

Como na Resistência dos Materiais o valor encontrado para a máxima deflexão da viga ocorreu no valor de $x = 2,8867$ m, para comparar o resultado obtido na Teoria da Elasticidade com o valor obtido na Resistência dos Materiais, diminuiu-se os intervalos de análise, na superfície neutra, da coordenada x para 0,1 m em 0,1 m. Os resultados são demonstrados na Tabela 2.

Tabela 2: Deslocamento vertical (v) na superfície neutra

Deslocamento Vertical (v) para os pontos localizados na superfície neutra ($y=0,0$)					
Pontos	x (m)	v (mm)	Pontos	x (m)	v (mm)
1	0,000	0,0000	27	2,600	3,5168
2	0,100	0,1853	28	2,700	3,5461
3	0,200	0,3701	29	2,800	3,5633
4	0,300	0,5540	30	2,900	3,5681
5	0,400	0,7366	31	3,000	3,5601
6	0,500	0,9174	32	3,100	3,5387
7	0,600	1,0960	33	3,200	3,5035
8	0,700	1,2719	34	3,300	3,4541
9	0,800	1,4448	35	3,400	3,3900
10	0,900	1,6140	36	3,500	3,3108
11	1,000	1,7793	37	3,600	3,2161
12	1,100	1,9401	38	3,700	3,1053
13	1,200	2,0960	39	3,800	2,9781
14	1,300	2,2466	40	3,900	2,8341
15	1,400	2,3914	41	4,000	2,6727
16	1,500	2,5300	42	4,100	2,4935
17	1,600	2,6620	43	4,200	2,2961
18	1,700	2,7868	44	4,300	2,0800
19	1,800	2,9040	45	4,400	1,8448
20	1,900	3,0133	46	4,500	1,5901
21	2,000	3,1141	47	4,600	1,3153
22	2,100	3,2060	48	4,700	1,0202
23	2,200	3,2886	49	4,800	0,7041
24	2,300	3,3615	50	4,900	0,3667
25	2,400	3,4240	51	5,000	0,0075
26	2,500	3,4760			

Fonte: a autora, 2017.

No Apêndice A, são demonstrados os gráficos das Tabelas 1 e 2, possibilitando a melhor visualização da deflexão da viga obtida pela Teoria da

Elasticidade. O Apêndice A também apresenta o gráfico comparativo da deflexão máxima obtida pela Teoria da Elasticidade e Resistência dos Materiais.

Pela Tabela 3 é possível observar que o maior valor do deslocamento horizontal da viga ($0,7521\text{mm}$) ocorre no ponto $x = 4,750\text{m}$. Ponto esse, na coordenada x , que se encontra mais distante do referencial adotado, mas que não é no apoio, uma vez que a condição de contorno impede o deslocamento do apoio.

Tabela 3: Deslocamento horizontal (u) para diferentes valores de y

Deslocamento horizontal (u) obtido pela Teoria da Elasticidade								
Pontos	$y = - 0,15 (m)$		Pontos	$y = 0,0 (m)$		Pontos	$y = 0,15 (m)$	
	$x (m)$	$u (mm)$		$x (m)$	$u (mm)$		$x (m)$	$u (mm)$
1	0,000	0,5533	22	0,000	0,2766	43	0,000	0,0000
2	0,250	0,5512	23	0,250	0,2766	44	0,250	0,0021
3	0,500	0,5449	24	0,500	0,2766	45	0,500	0,0083
4	0,750	0,5345	25	0,750	0,2766	46	0,750	0,0188
5	1,000	0,5199	26	1,000	0,2766	47	1,000	0,0333
6	1,250	0,5012	27	1,250	0,2766	48	1,250	0,0521
7	1,500	0,4783	28	1,500	0,2766	49	1,500	0,0750
8	1,750	0,4512	29	1,750	0,2766	50	1,750	0,1021
9	2,000	0,4199	30	2,000	0,2766	51	2,000	0,1333
10	2,250	0,3845	31	2,250	0,2766	52	2,250	0,1688
11	2,500	0,3449	32	2,500	0,2766	53	2,500	0,2083
12	2,750	0,3012	33	2,750	0,2766	54	2,750	0,2521
13	3,000	0,2533	34	3,000	0,2766	55	3,000	0,3000
14	3,250	0,2012	35	3,250	0,2766	56	3,250	0,3521
15	3,500	0,1449	36	3,500	0,2766	57	3,500	0,4083
16	3,750	0,0845	37	3,750	0,2766	58	3,750	0,4688
17	4,000	0,0199	38	4,000	0,2766	59	4,000	0,5333
18	4,250	-0,0488	39	4,250	0,2766	60	4,250	0,6021
19	4,500	-0,1217	40	4,500	0,2766	61	4,500	0,6750
20	4,750	-0,1988	41	4,750	0,2766	62	4,750	0,7521
21	5,000	-0,2801	42	5,000	0,2766	63	5,000	0,8333

Fonte: a autora, 2017.

No Apêndice B é apresentado o gráfico originado da tabela 3, onde é possível melhor visualizar o deslocamento horizontal em cada ponto da viga.

7. CONCLUSÕES

Analisando-se o deslocamento horizontal, pela Teoria da Elasticidade, dos pontos que estão na coordenada $y=0$, é possível concluir que todos os pontos que se encontram na linha neutra apresentam o mesmo deslocamento horizontal.

O maior deslocamento horizontal da viga ocorre no maior valor de y e no ponto de coordenada x próxima do local em que o momento fletor está aplicado.

Pela análise do deslocamento horizontal de três pontos com a mesma coordenada x , conclui-se que seção plana permanece plana, mesmo depois de aplicado o carregamento, confirmando a hipótese formulada por Euler-Bernoulli.

Pela Teoria da Elasticidade, conclui-se também que a deflexão máxima da viga ocorre na linha neutra, onde $y=0$.

Na Resistência dos Materiais a máxima deflexão (v) da viga analisada ocorre a $2,88675\text{ m}$ do ponto de referência adotado e apresenta o valor de $3,5556\text{ mm}$. Ao aplicar o método da Teoria da Elasticidade o maior deslocamento vertical (v) ocorre no ponto aproximado de $2,90\text{ m}$ e possui o valor de $3,5681\text{ mm}$. Comparando-se os valores obtidos pelos dois métodos a diferença entre os resultados da Resistência dos Materiais e da Teoria da Elasticidade é muito pequena, aproximadamente $0,35\%$. Assim, a segunda parcela da equação (5.36) que leva em consideração a altura da viga, por não representar mudanças significativas nos resultados, pode ser desprezada.

Quando se compara, o maior valor do deslocamento horizontal que a viga apresenta com o maior valor do deslocamento vertical, gerados pela aplicação do carregamento, é possível observar que o deslocamento vertical é $474,42\%$ maior que o deslocamento horizontal encontrado pelo método da Teoria da Elasticidade, o que permite desconsiderar o deslocamento horizontal no cálculo do projeto.

Desta forma é muito mais adequado usar para obtenção da deflexão máxima de uma viga, pela simplicidade do método, a teoria elementar, ou seja, usar a Resistência dos Materiais.

REFERÊNCIAS

BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Resistência dos Materiais**. McGraw-Hill, 1982.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 7 ed. Trad. Fernando Ribeiro da Silva. Rio de Janeiro: Prentice Hall Brasil, 2004.

LIMA, P. R.L.; FONTES, C. M. A.; LIMA, J. M. F. **Análise não-linear da deflexão de vigas de concreto armado**. Sientibus, n. 28, 2003. Disponível em: <www2.uefs.br/sientibus/pdf/28/analise_nao_linear_da_deflexao_de_vigas.pdf>

MARTHA, L. F. **Métodos básicos da análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Campus, 2010.

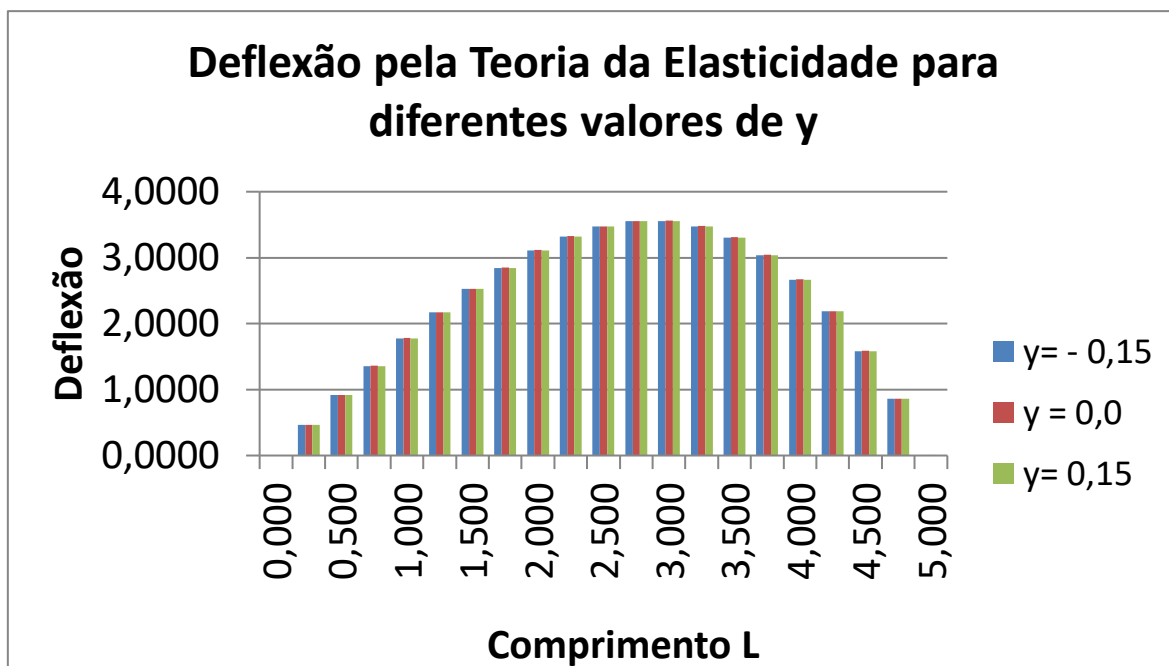
MARTINS, J.F. **Notas de aula de Resistência dos Materiais I e II, Ouro Preto**, 2011.

SOARES, S. M. B. **Estruturas I**, 2003. Disponível em: [www.feng.pucrs.br/professores/soares/Estruturas I/Capitulo_06_2003-2.pdf](http://www.feng.pucrs.br/professores/soares/Estruturas_I/Capitulo_06_2003-2.pdf)

TIMOSHENKO, S. P. & GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos** – LTC Editora. 1994.

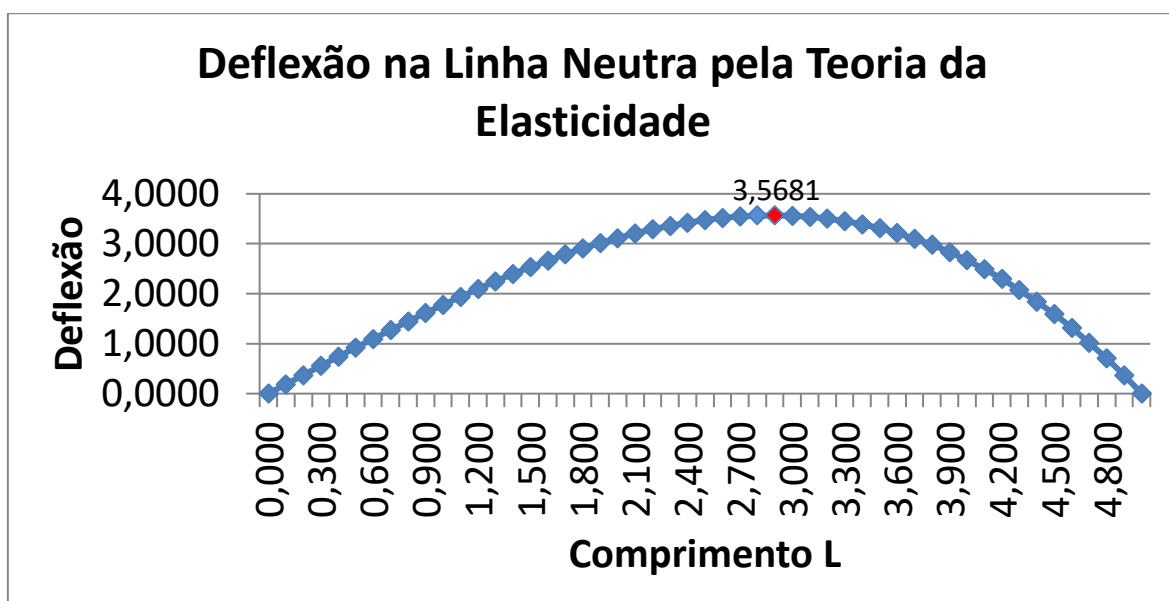
APÊNDICE A – Gráficos do deslocamento vertical

Gráfico 1: Teoria da Elasticidade – Deflexão em diferentes valores de y



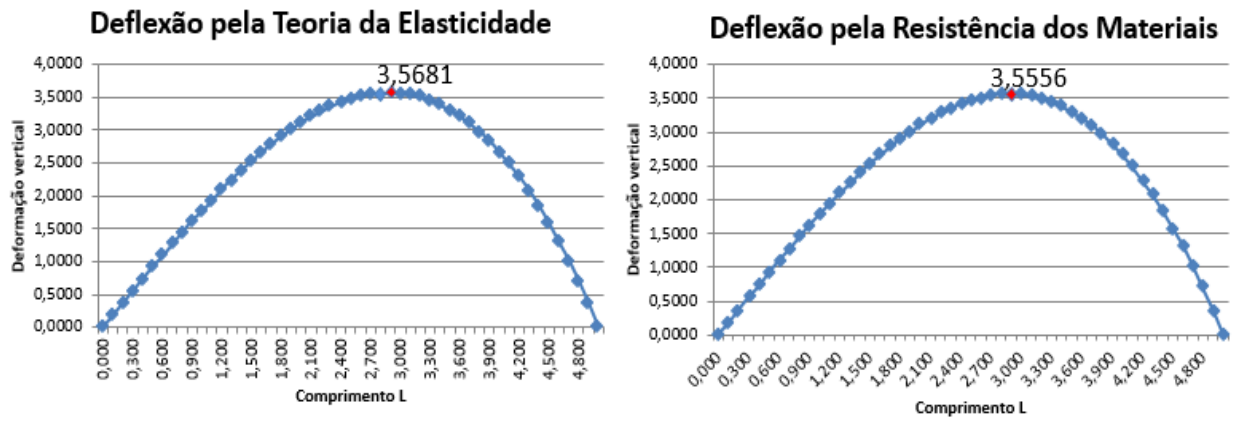
Fonte: a autora, 2017.

Gráfico 2: Teoria da Elasticidade – Deflexão na Linha Neutra

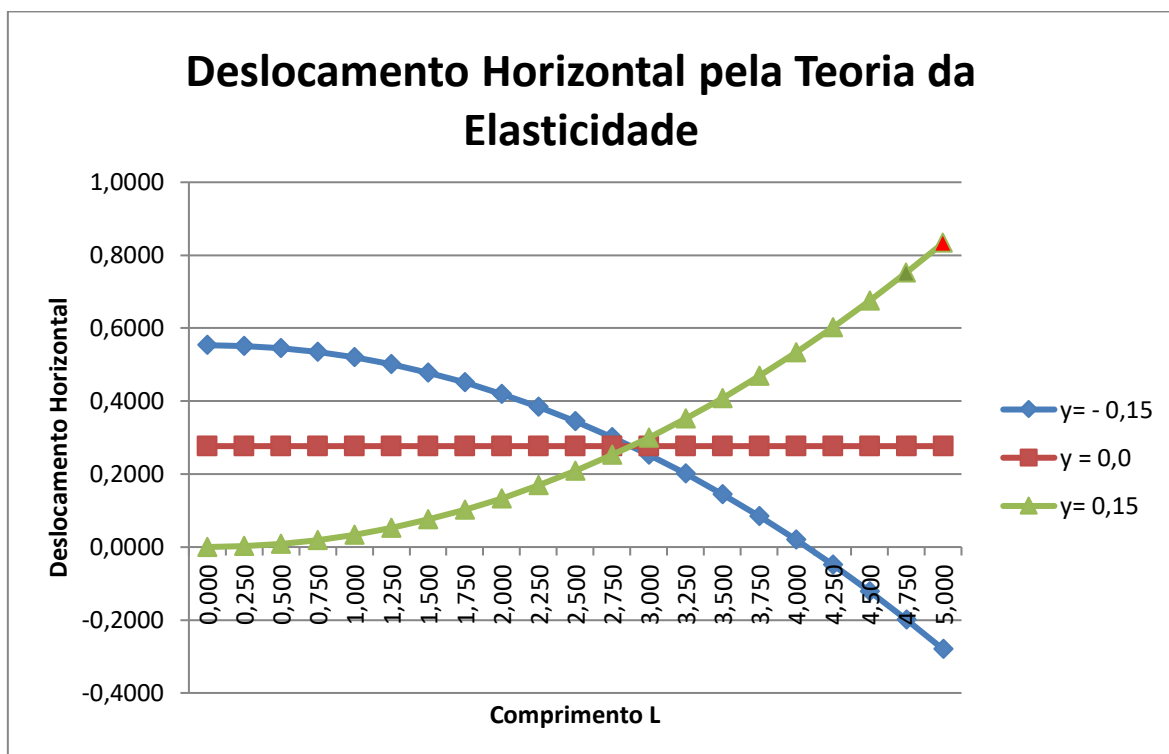


Fonte: a autora, 2017

Gráfico 3: Comparação da Deflexão obtida pela Teoria da Elasticidade e pela Resistência dos Materiais



Fonte: a autora, 2017.

APÊNDICE B – Gráfico do deslocamento horizontalGráfico 4: Teoria da Elasticidade – Deslocamento Horizontal para diferentes valores de γ 

Fonte: a autora, 2017.