



Henrique Câmara de Oliveira

O Problema Isoperimétrico como interlocutor de diversas técnicas em Matemática

Ouro Preto - MG, Brasil

Outubro 2022

Henrique Câmara de Oliveira

**O Problema Isoperimétrico como interlocutor de diversas técnicas em
Matemática**

Monografia de graduação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, através do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática (DEMAT)
Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza

Ouro Preto - MG, Brasil

Outubro 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

O48p Oliveira, Henrique Câmara De.
O Problema Isoperimétrico como interlocutor de diversas técnicas em Matemática. [manuscrito] / Henrique Câmara De Oliveira. - 2022.
67 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix De Souza.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Otimização matemática. 2. Cálculo das Variações. 3. Geometria Diferencial. I. Souza, Gil Fidelix De. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Henrique Câmara de Oliveira

O Problema Isoperimétrico como interlocutor de diversas técnicas em Matemática

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em 03 de novembro de 2022

Membros da banca

Dr. Gil Fidelix de Souza - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Rodrigo Geraldo do Couto - Universidade Federal de Ouro Preto

Gil Fidelix de Souza, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 23/02/2023



Documento assinado eletronicamente por **Gil Fidelix de Souza, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 02/03/2023, às 11:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0420582** e o código CRC **348A9767**.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pelas oportunidades e por ter me dado perseverança para superar todos os obstáculos.

Aos meus pais, Alice e Maurílio, e à minha irmã, Luiza, que sempre me apoiaram nas melhores escolhas que tomei, sobretudo na vida acadêmica, e que de perto ou de longe sempre estiveram presentes.

Ao meu orientador Gil Fidelix de Souza por toda paciência e dedicação, incomensuráveis para a produção deste trabalho. Nossos estudos foram imprescindíveis para minha evolução no curso e para minha formação enquanto licenciando em Matemática.

Aos professores Edney e Rodrigo por aceitarem o convite de compor a banca e por voltarem a atenção para este trabalho, contribuindo para o seu aprimoramento.

A todos professores, de modo geral, pela imensa atenção em cada aula dada e por transmitirem com toda paixão a beleza da matemática, mas também pela constante luta em prol da valorização da nossa profissão. Vocês contribuíram não só para minha formação de professor de matemática, mas também de cidadão.

A todos os meus familiares e amigos de longa data, que me fazem voltar a Ouro Preto cada vez mais revigorado com boas energias depois de uma visita a Piranga, meu refúgio. De modo especial, agradeço aos meus primos que moraram comigo e com quem compartilhei todos os bons e maus momentos.

Aos amigos que Ouro Preto me deu e àqueles que levo como herança da universidade. Vocês tornaram o curso mais leve, seja pelas brincadeiras ou pelo suporte dado nos momentos de desespero, resistindo juntos às dificuldades que surgissem.

Agradeço ao grupo PETMAT que tanto contribuiu para minha formação, para o meu comprometimento com a educação de qualidade e para a concretização deste trabalho.

Enfim, toda minha sincera gratidão a todos que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

O Problema Isoperimétrico, um dos mais clássicos problemas de otimização, consiste em determinar a curva de comprimento L que limita a maior área. O objetivo deste trabalho é apresentá-lo das mais variadas óticas, desenvolvendo demonstrações que utilizem de diferentes ferramentas. Dentre as abordagens possíveis, existem demonstrações que utilizam de um processo limite por polígonos, ou demonstrações construtivas baseadas em técnicas de Geometria Diferencial, há ainda demonstrações analíticas envolvendo séries de Fourier ou mesmo o uso de multiplicadores de Lagrange sob a ótica do Cálculo das Variações.

Palavras-chave: Problema/Desigualdade Isoperimétrico(a), Cálculo das Variações, Geometria Diferencial.

Abstract

The Isoperimetric Problem, one of the most classic optimization problems, consists of determining the curve of length L that limits the largest area. The objective of this work is to present it from the most varied perspectives, developing demonstrations that use different tools. Among the possible approaches, there are demonstrations that use a limiting process by polygons, or constructive demonstrations based on Differential Geometry techniques, there are still analytical demonstrations involving Fourier series or even the use of Lagrange multipliers from the perspective of the Calculus of Variations.

Keywords: Isoperimetric Problem/Inequality, Calculus of Variations, Differential Geometry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de conjuntos convexos (à esquerda) e não-convexos (à direita). Além disso, dois deles são polígonos (mais abaixo).	19
Figura 2 – Polígonos isoperimétricos de perímetro igual a 1, 83.	20
Figura 3 – (a) $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ e \mathcal{P}_3 inscritos no círculo de raio r . (b) Triângulo formado por um lado de \mathcal{P}_n e dois lados de \mathcal{P}_{n+1} .	20
Figura 4 – Lados de $\overline{\mathcal{P}_1}$ e \mathcal{P}_1 .	21
Figura 5 – (a) $\overline{\mathcal{P}_n}$ e $\overline{\mathcal{P}_{n+1}}$ para $n = 1$. (b) Triângulo formado no canto inferior direito de 5(a).	21
Figura 6 – Ângulo α para polígono circunscrito e inscrito	22
Figura 7 – Traço de $\alpha(t) = (t^2, t^3)$.	27
Figura 8 – A curva α e cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.	27
Figura 9 – Primeira linha: exemplos de curvas que não são de Jordan. Segunda linha: exemplos de curvas de Jordan.	30
Figura 10 – Exemplo de helicóide.	31
Figura 11 – Polígono não convexo (passando por B) e polígono convexo (passando por B') de mesmo perímetro.	34
Figura 12 – Caminho poligonal da proposição 4.1.1.	35
Figura 13 – Exemplo de \mathcal{P} e de \mathcal{P}' .	35
Figura 14 – Exemplo de construção como no Lema 4.1.1.	36
Figura 15 – Exemplo de construção de \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' .	36
Figura 16 – Um dos n triângulos isósceles congruentes.	37
Figura 17 – Triângulo retângulo de catetos 1 e $\operatorname{tg}(\alpha)$.	37
Figura 18 – Círculo trigonométrico.	38
Figura 19 – Exemplo de triângulo de lados a e b	39
Figura 20 – Exemplo de polígono C'_1 (direita) a partir de C (esquerda).	40
Figura 21 – Exemplo de conjunto S e S' do Teorema 4.1.6.	40
Figura 22 – Curva fechada cuja área, nesse caso, foi dividida em cinco.	41
Figura 23 – Construção de S^1 a partir de C .	42
Figura 24 – Adotamos como eixo a reta que contém $\alpha(0)$ e $\alpha(\pi)$.	44
Figura 25 – A_1 deve ser limitada por um semicírculo para que seja máxima.	46
Figura 26 – A_2 também deve ser limitada por um semicírculo para que seja máxima.	46
Figura 27 – Exemplo de curva C , em azul escuro, e D , logo abaixo.	53
Figura 28 – Exemplo de triângulo isósceles.	61

Figura 29 – Exemplo de pentágono não convexo, exemplo em que não se tem um polígono e exemplo de pentágono convexo (da esquerda para a direita).	62
Figura 30 – Exemplo de retângulo que maximiza a área.	63
Figura 31 – Polígonos isoperimétricos regulares de 23 e 50 lados, respectivamente.	63
Figura 32 – Exemplo de triângulo construído com lados de comprimentos fixos 1 e 2.	64

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	CONTEXTO HISTÓRICO	15
3	EMBASAMENTO TEÓRICO	17
3.1	Perímetro e Área	17
3.2	Séries de Fourier	23
3.3	Curvas Parametrizadas	27
3.3.1	Superfícies Parametrizadas Regulares	30
4	ABORDAGENS DO PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO NO PLANO	33
4.1	O Problema Isoperimétrico por aproximações com polígonos	33
4.2	O Problema Isoperimétrico por técnicas de geometria diferencial- 1ª Abordagem	40
4.3	O Problema Isoperimétrico por técnicas de geometria diferencial- 2ª Abordagem	44
4.4	O Problema Isoperimétrico: uma abordagem utilizando Séries de Fourier	46
4.5	O Problema Isoperimétrico: uma demonstração utilizando multiplicadores de Lagrange	48
5	VARIAÇÕES DO PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO	53
5.1	O Problema de Plateau: uma variação do problema isoperimétrico	53
5.2	O Problema Isoperimétrico no \mathbb{R}^3	58
6	EXPLORANDO RESULTADOS NO GEOGEBRA	61
6.1	O caso dos triângulos de lado fixado	61
6.2	Polígonos: convexos versus côncavos	62
6.3	O caso dos retângulos	63
6.4	O caso dos polígonos regulares	63
6.5	O caso do triângulo com dois lados fixos	64
7	CONCLUSÃO	65
	Referências	67

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o avanço das técnicas de demonstração em matemática através do estudo do Problema Isoperimétrico. O problema, citado em uma das obras épicas mais famosas da literatura, Eneida [12], escrita ainda no século I a.C., consiste em determinar qual a curva simples e fechada do plano que, dentre todas aquelas que possui mesmo perímetro, engloba a maior área.

Por meio deste problema obtemos o resultado que garante que dado um perímetro L de uma curva simples e fechada no plano que limita uma área A , vale a desigualdade

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}. \quad (1.1)$$

Além disso, somente o círculo maximiza a área, ou seja, somente se a curva for um círculo haverá igualdade em (1.1), solucionando a versão mais clássica do problema. Além desta, outras versões do problema foram estudadas, sendo elas restrições do problema original ou generalizações para o \mathbb{R}^3 .

Este trabalho foi estruturado de modo a apresentar ao leitor inicialmente as restrições do problema a um tipo específico de curvas como os polígonos, por exemplo. E então, apresentar cada vez menos restrições até que tenhamos o problema clássico. Depois disso, ainda seguimos o estudo de modo análogo para situações menos específicas, nos permitindo trabalhar no \mathbb{R}^3 .

No segundo capítulo, é apresentada a lenda de Dido, história abordada pelo autor romano Víglio em sua obra mais importante [12], onde a princesa Dido poderia tomar posse de toda terra que pudesse cercar com o couro de um touro.

O terceiro capítulo traz a base para os capítulos seguintes. A primeira seção, baseada em [4] e [5], traz conceitos básicos de topologia e define perímetro e área. Na segunda seção desse capítulo fazemos uma breve exposição sobre as séries de Fourier, baseada na referência [9]. Por fim, o capítulo se encerra com apresentação de conceitos básicos de curvas e superfícies de acordo com [11].

No quarto capítulo, o foco é nas abordagens do problema isoperimétrico no \mathbb{R}^2 . Inicialmente nos restringimos aos casos em que a curva é um polígono. Depois, abordamos o problema para curvas fechadas e simples de um modo geral, utilizando algumas demonstrações, entre elas as que utilizamos séries de Fourier e multiplicadores de Lagrange.

Partimos, então, para as abordagens no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 no capítulo 5, baseado nas referências [3] e [8]. Nesse capítulo, estudamos o problema de Plateau e um problema mais geral onde fixamos a área de uma superfície afim de maximizar o volume compreendido por tal superfície.

Por fim, apresentamos algumas sugestões de atividades de exploração no software livre de geometria dinâmica Geogebra. Nelas propomos a exploração de alguns dos resultados apresentados no capítulo 4 para polígonos.

Contexto Histórico

O Problema Isoperimétrico, de que tanto falaremos neste trabalho, está relacionado a uma lenda dita Lenda de Dido. Tal lenda é citada no poema épico Eneida, escrito pelo poeta Virgílio [12] no século I a. C.. O poema foi encomendado pelo imperador de Roma da época, Augusto, para enaltecer o glorioso Império Romano, exaltar o poder de seu líder e tentar ultrapassar os gregos Ilíada e Odisséia, de Homero.

Dido (por vezes também chamada Elisa), princesa fenícia e, posteriormente, rainha de Cartago, é uma das personagens humanas que compõe o poema. Dido foi casada com Siqueu, homem com valioso tesouro que despertou o interesse de Pigmaleão, irmão de Dido e sucessor do pai Mattan no trono de Tiro. A ambição de Pigmaleão culmina no assassinato de Siqueu, mas Dido, munida do tesouro do marido, fugiu acompanhada de seguidores para que se fundasse uma nova cidade. A expedição chega então à costa do Mar Mediterrâneo, ao norte da África (hoje Tunísia). Após desembarcar, Dido, negocia terras com o Rei Jarbas para que possa ter seu próprio território. Como resposta, o rei permitiu que Dido ocupasse toda a porção de terra que fosse capaz de cercar com o couro de um touro.

A princesa ordena que se corte o couro do touro em tiras extremamente finas e depois que estas tiras fossem unidas, formando uma espécie de corda. Dessa forma, Dido conseguiu, segundo a lenda, cercar uma grande quantidade de terra. Além disso, como a região era costeira, Dido utilizou o litoral como fronteira e estendeu a corda feita de couro de touro limitando uma porção de terra em forma de semicírculo apoiado à costa. A cidade fundada por Dido recebeu o nome de Birsa, que significa couro, e mais tarde se tornaria Cartago.

Eneias, herói do poema de Virgílio, parte de Troia, que havia sido destruída, buscando fundar uma nova cidade. Em sua expedição, Eneias chega até o reino de Dido, onde foi recebido pela rainha, que ouvia os relatos das aventuras vivenciadas pelo herói. Então, por influência de Vênus, mãe de Eneias e deusa do amor, Dido se apaixona pelo troiano. Passado o tempo, porém, Mercúrio, a mando de Júpiter, lembra Eneias de seu objetivo de fundar uma nova cidade. Eneias então parte, deixando Dido abandonada e furiosa, o que a faz cometer um suicídio. Segundo a obra, enquanto a expedição troiana era retomada, partindo de Cartago, era possível ver a fumaça que saía da pira funerária. Após isso, Dido ainda aparece no poema, quando no Mundo dos Mortos, Eneias vê a rainha.

No poema, Dido representaria o poder de Cartago que rivalizava com a grandiosa Roma. De um modo mais geral, Dido personifica todas as últimas terras conquistadas pelo Império Romano.

Mesmo com todo ar folclórico que rodeia esta história, segundo [7], é comum que mapas reais da Idade Média, como das cidades de Braga (Portugal), Colônia (Alemanha) e Paris (França), as retratem cercadas por muralhas circulares ou semicirculares. Isso mostra que, possivelmente, a ideia de que a construção de muros neste formato exigia menos recursos e trabalho, limitando um território maior, já era presente.

O Problema Isoperimétrico e sua solução já eram conhecidos pelos matemáticos na antiguidade, no entanto,

uma demonstração satisfatória e amplamente aceita demorou para surgir. A primeira demonstração é atribuída a Weierstrass, surgida em 1870, e é uma consequência de estudos da teoria do Cálculo das Variações. Outras demonstrações surgiram no início do século XX, como a de Adolf Hurwitz e a de Erhard Schmidt.

Embasamento Teórico

A fim de desenvolver o estudo das diferentes abordagens e demonstrações do Problema Isoperimétrico, faz-se necessário o estudo de conceitos e teoremas de modo que disponhamos de uma base para o desenvolvimento deste trabalho.

Iniciamos definindo os conceitos de perímetro e área que estão diretamente envolvidos no problema isoperimétrico.

3.1 Perímetro e Área

Antes de definir perímetro e área, é necessário compreendermos o que são as cotas de um conjunto e o que é uma sequência numérica. Por isso apresentamos as duas definições a seguir.

Definição 3.1.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente, quando existe uma constante real b , tal que $x \leq b$, para qualquer $x \in X$. Nesse caso dizemos que b é uma **cota superior** para o conjunto X . Quando existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$, dizemos que X é limitado inferiormente e que a é uma **cota inferior** para X . Quando X é limitado inferior e superiormente, dizemos que X é limitado.

Sendo $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio limitado superiormente, o **supremo** do conjunto X , que denotaremos por $\sup X$, é definido como a menor das cotas superiores de X .

Definição 3.1.2. Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **sequência** e associa os naturais k aos reais x_k . Denotamos essa sequência por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$, ou apenas por (x_k) .

Exemplo 3.1.1. Um exemplo de sequência em \mathbb{R} é a sequência dos pares $x_k = 2k$.

Definição 3.1.3. Se todos os termos x_k de uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ estiverem contidos em algum intervalo de \mathbb{R} dizemos que a sequência é **limitada**. Isto é,

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ é limitada} \iff \exists a, b > 0 \text{ tal que } a < x_k < b, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Observação 3.1.1. A sequência de números positivos $x_k = \frac{1}{k}$ é limitada superiormente por 1, pois $x_k \leq 1$ para todo k natural, ou seja, todos os elementos da sequência estão contidos no intervalo $(0, 2)$.

Definição 3.1.4. Uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é monótona se for de uma das quatro formas abaixo:

- (i) crescente, isto é, quando $x_k < x_{k+1}$ para todo k natural;
- (ii) não crescente, isto é, quando $x_k \geq x_{k+1}$ para todo k natural;

(iii) decrescente, isto é, quando $x_k > x_{k+1}$ para todo k natural;

(iv) não decrescente, isto é, quando $x_k \leq x_{k+1}$ para todo k natural.

Observação 3.1.2. A sequência dos ímpares dada por $x_k = 2k - 1$ é monótona, pois $2k - 1 < 2(k + 1) - 1 \Rightarrow x_k < x_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 3.1.5. A sequência obtida a partir da restrição de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a um subconjunto $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$, damos o nome de **subsequência** de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Como notação é habitual utilizar $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ ou $(x_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$.

Definição 3.1.6. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é dito **limite** de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e escrevemos $a = \lim x_k$, se para todo $\epsilon > 0$, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$ então $|x_k - a| < \epsilon$. Dizemos que uma sequência $(x_k) \subset \mathbb{R}$ é **convergente** se existe $\lim x_k$. Nesse caso, se $\lim x_k = a$, dizemos que x_k converge para a .

Exemplo 3.1.2. Podemos verificar que $\lim \frac{1}{k} = 0$.

De fato, $\lim \frac{1}{k} = 0$, pois para qualquer $\epsilon > 0$ dado, é possível que se tome um $k_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que se $k_0 > \frac{1}{\epsilon}$ e se $k > k_0$, então $\left| \frac{1}{k} - 0 \right| = \frac{1}{k} < \epsilon$.

Além destas, são também importantes as definições de pontos de acumulação, isolados e aderentes, para que a partir delas possamos classificar um conjunto como limitado, fechado ou compacto.

Definição 3.1.7. Dizemos que x é um **ponto interior** do conjunto $S \subset \mathbb{R}$ se existe um intervalo de centro em x inteiramente contido no conjunto S , isto é, se existir um $\epsilon > 0$ tal que se $|x - y| < \epsilon$, então $y \in S$. O conjunto de todos os pontos interiores de S é dito **interior** de S e denotado por $\text{int}S$.

Definição 3.1.8. Se $x \in \text{int}S$, dizemos que S é uma **vizinhança** de x . Isto é, sendo $\epsilon > 0$, a vizinhança de x é um intervalo $I_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Definição 3.1.9. Se, dado $x \in S \subset \mathbb{R}$ toda vizinhança de x , contém algum ponto de S diferente de x , dizemos que x é um **ponto de acumulação** de S , isto é, se $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap (S - \{x\}) \neq \emptyset$, x é um ponto de acumulação de S . Além disso, denotamos por S' o conjunto dos pontos de acumulação de S .

Definição 3.1.10. Dizemos que um ponto x é um **ponto aderente** de $S \subset \mathbb{R}$ se qualquer vizinhança de x contém algum ponto de S . O conjunto de todos os pontos aderentes de S é denominado **fecho** de S e é denotado por \bar{S} . Assim $\bar{S} = S \cup S'$. Portanto, $x \in \bar{S} \iff \forall \epsilon > 0; (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap S \neq \emptyset$.

Se faz necessário também o estudo de algumas definições no plano, que apresentamos a seguir.

Definição 3.1.11. Sendo x e y pontos de \mathbb{R}^2 , o **segmento de reta** \overline{xy} unindo x e y é o conjunto de todos os pontos da forma $\alpha x + \beta y$ onde $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

Definição 3.1.12. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ é dito **convexo** se para cada par de pontos x e y em S é verdade que $\overline{xy} \subset S$.

Definição 3.1.13. Para qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\delta > 0$, a **bola aberta** $B(x, \delta)$ com centro x e raio δ é dada por:

$$B(x, \delta) \equiv \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\| < \delta\},$$

em que $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ é a distância entre x e y .

Observação 3.1.3. Escrevemos $B((0,0),r) = B_r$ para denotar a bola aberta de centro na origem e raio $r > 0$.

Definição 3.1.14. Um ponto x é chamado de **ponto interior** do conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ se existe um $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset S$. Nesse caso dizemos que, assim como definimos em \mathbb{R} , $x \in \text{int}S$.

Definição 3.1.15. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ é um **limitado** se $\exists k > 0$ tal que $\|x\| \leq k \forall x \in S$.

Definição 3.1.16. Diz-se que o ponto a é **aderente** ao conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ quando existe uma sequência de pontos $x_k \in S$ tais que $\lim x_k = a$. Além disso, a é um ponto aderente a um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ se, e somente se, toda bola aberta centrada em a contém algum ponto de S .

Definição 3.1.17. Um conjunto S é dito **fechado** quando $\overline{S} = S$. Isto é, quando todos os pontos aderentes a S pertencem a S .

Definição 3.1.18. Um conjunto S é dito **compacto** se for limitado e fechado.

Definição 3.1.19. Dizemos que a **fronteira (ou bordo)** de um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^2$ tais que para todo $\delta > 0$, a bola aberta $B(x, \delta)$ contém pontos de S e de $\mathbb{R}^2 - S$.

Iniciaremos discutindo o Problema Isoperimétrico para polígonos, por isso, dependemos das seguintes definições.

Definição 3.1.20. Denominamos por **linha poligonal** o conjunto de segmentos de reta consecutivos não-colineares dois a dois.

Definição 3.1.21. Chamamos uma linha poligonal de **polígono simples** se ela for fechada e não possuir auto interseção.

Observação 3.1.4. Neste trabalho iremos nos referir aos polígonos simples apenas por polígonos.

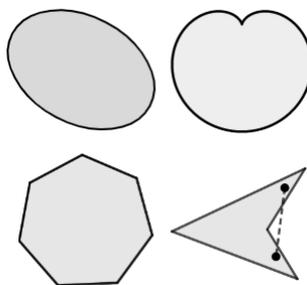


Figura 1 – Exemplo de conjuntos convexos (à esquerda) e não-convexos (à direita). Além disso, dois deles são polígonos (mais abaixo).

Definição 3.1.22. O **perímetro de polígonos** é igual a soma das medidas de cada um de seus lados.

A partir de tais definições podemos enfim definir o perímetro de um conjunto convexo e compacto do plano.

Definição 3.1.23. Seja S um subconjunto convexo e compacto de \mathbb{R}^2 tal que $\text{int}S$ seja não vazio. O **perímetro** de S (ou **comprimento da fronteira** de S) é igual ao supremo dos perímetros de todos os polígonos convexos inscritos, o que é formalmente definido a seguir.

Dado $S \subset \mathbb{R}^2$, seja $A = \{\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ polígono contido em } S\}$. Considere agora $B = \{\alpha_{\mathcal{P}} : \alpha_{\mathcal{P}} \text{ é o perímetro de } \mathcal{P} \in A\}$. Definimos o **perímetro** de S por $\sup B$.

Exemplo 3.1.3. Considerando os dois polígonos da figura 2 vemos que o perímetro de ambos, calculados pelas somas das medidas de seus lados dadas, são iguais a 1,83. Neste caso, dizemos que os polígonos são **isoperimétricos** (de mesmo perímetro).

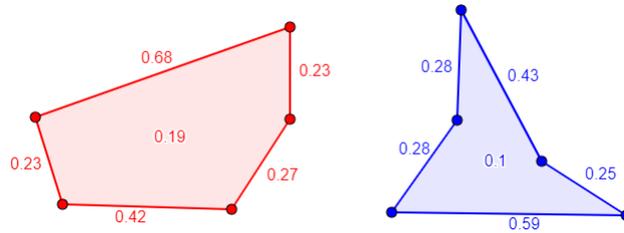


Figura 2 – Polígonos isoperimétricos de perímetro igual a 1,83.

O Lema 3.1.1 que apresentaremos a seguir nos garante a validade da técnica que utilizaremos na demonstração da fórmula do cálculo do perímetro do círculo (Proposição 3.1.1), que é um processo limite.

Lema 3.1.1. Se uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ for tanto monótona quanto limitada, (x_k) converge. Nesse caso, $\lim x_k$ é igual ao supremo ou ao ínfimo de $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots\}$, caso a sequência seja crescente ou decrescente, respectivamente.

Proposição 3.1.1. O perímetro de um círculo de raio r equivale a $2\pi r$.

Demonstração. Seja \mathcal{P}_n o polígono regular inscrito no círculo de raio r e de 2^{n+1} lados, sendo n um inteiro positivo. Chamando de l_n o lado de \mathcal{P}_n , podemos denotar seu perímetro como $c_n = 2^{n+1} \cdot l_n$. Para criar \mathcal{P}_{n+1} a partir de

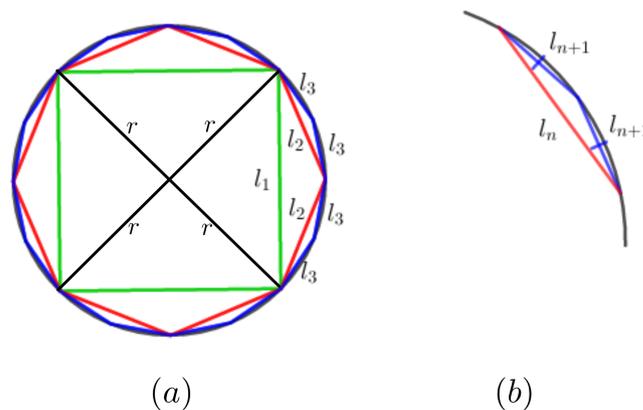


Figura 3 – (a) \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 e \mathcal{P}_3 inscritos no círculo de raio r . (b) Triângulo formado por um lado de \mathcal{P}_n e dois lados de \mathcal{P}_{n+1} .

\mathcal{P}_n , mantemos os vértices de \mathcal{P}_n e acrescentamos novos vértices que correspondem aos pontos médios dos arcos cujas extremidades são vértices consecutivos de \mathcal{P}_n . Segue da desigualdade triangular, conforme a Figura 3(a), que:

$$2r < 2l_1 < c_1 \implies 2r < c_1$$

Já pelo triângulo da Figura 3(b) temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, que $l_{n+1} < l_n$ e

$$l_n < 2l_{n+1} \implies 2^{n+1}l_n < 2^{n+1} \cdot 2l_{n+1} \implies c_n < c_{n+1}.$$

Além disso, c_n é limitada também superiormente pelo perímetro do círculo (veja Figura 3(a)) e, conseqüentemente, vale o Lema 3.1.1.

Seja agora, $\overline{\mathcal{P}}_n$ o polígono circunscrito no mesmo círculo e de 2^{n+1} lados. Denotando de L_n seu lado e C_n seu perímetro, temos que $C_n = 2^{n+1}L_n$. Pela Figura 4 podemos concluir que $L_n > l_n$ e, por isso, $C_n > c_n$. Para criar $\overline{\mathcal{P}}_{n+1}$ a partir de $\overline{\mathcal{P}}_n$, pegamos como lados os segmentos tangentes aos pontos médios dos arcos de

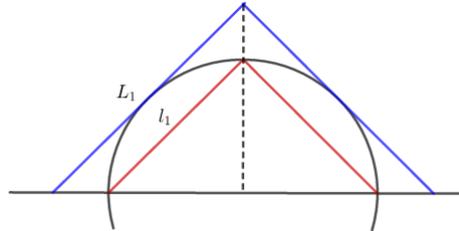


Figura 4 – Lados de $\overline{\mathcal{P}}_1$ e \mathcal{P}_1 .

extremidades iguais a pontos médios de $\overline{\mathcal{P}}_n$. Por desigualdade triangular, com o auxílio da Figura 5, temos:

$$L_{n+1} < 2 \cdot \frac{L_n - L_{n+1}}{2} = L_n - L_{n+1} \implies 2L_{n+1} < L_n \implies 2^{n+1}2L_{n+1} < 2^{n+1}L_n$$

isto é, $C_{n+1} < C_n$. E, portanto,

$$C_{n+1} < C_n < C_{n-1} < \dots < C_1 \implies 2r \leq c_n < C_n \leq C_1 = 8r.$$

Além disso, como para qualquer n natural temos $L_n > L_{n+1}$, são válidas as conseqüências do lema 3.1.1 para L_n e C_n .

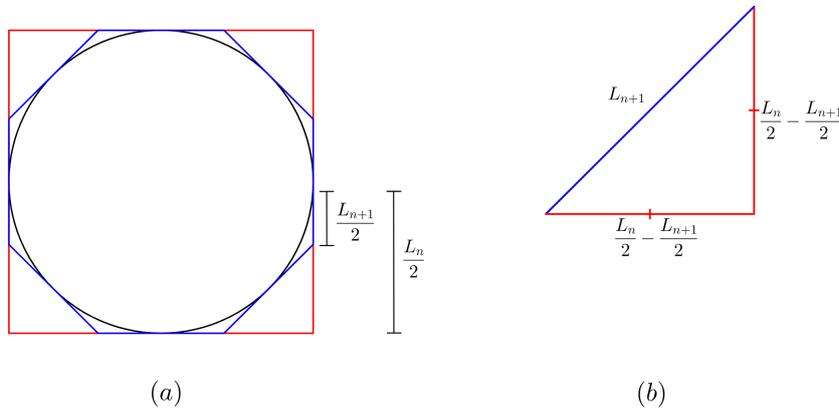


Figura 5 – (a) $\overline{\mathcal{P}}_n$ e $\overline{\mathcal{P}}_{n+1}$ para $n = 1$. (b) Triângulo formado no canto inferior direito de 5(a).

Consideremos α a metade do ângulo do vértice de um triângulo isósceles de base L_n . Assim,

$$\alpha = \frac{360}{2 \cdot 2^{n+1}} = \frac{180}{2^{n+1}}.$$

Para $\overline{\mathcal{P}}_n$ temos (Figura 6(a)):

$$\text{tg}\alpha = \frac{L_n}{2} \cdot \frac{1}{r} \implies L_n = 2r \text{tg}\alpha = 2r \text{tg}\left(\frac{180}{2^{n+1}}\right).$$

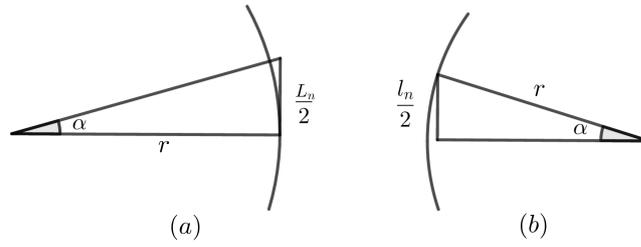


Figura 6 – Ângulo α para polígono circunscrito e inscrito

Já para \mathcal{P}_n temos (Figura 6(b)):

$$\text{sen}\alpha = \frac{l_n}{2} \cdot \frac{1}{r} \implies l_n = 2r \text{sen}\alpha = 2r \text{sen}\left(\frac{180}{2^{n+1}}\right).$$

Podemos, finalmente, definir o perímetro c do círculo de raio r como supremo de c_n .

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{n+1} 2r \text{sen}\frac{180}{2^{n+1}}\right) = 2r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{n+1} \text{sen}\frac{180}{2^{n+1}}\right).$$

Além disso, como c_n converge, os limites acima existem.

De modo análogo, para um círculo de raio R teremos

$$c' = 2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{n+1} \text{sen}\frac{180}{2^{n+1}}\right).$$

Assim,

$$\frac{c}{2r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{n+1} \text{sen}\frac{180}{2^{n+1}}\right) = \frac{c'}{2R}.$$

Desta forma, $\frac{c}{2r}$ é constante independente do círculo. E ao limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{n+1} \text{sen}\frac{180}{2^{n+1}}\right)$ atribuímos a letra π .

$$\pi = \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2R} \implies c = 2\pi r \text{ e } c' = 2\pi R.$$

Verifiquemos que também podemos definir o perímetro como supremo de C_n .

Uma vez que C_n é convergente, seja $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$.

$$l_n = L_n \cos\frac{180}{2^{n+1}} \implies c_n = C_n \cos\frac{180}{2^{n+1}} \implies C_n - c_n = C_n \left(1 - \cos\frac{180}{2^{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[C_n \left(1 - \cos\frac{180}{2^{n+1}}\right) \right] = (1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n - c_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \implies C = c.$$

Portanto, o perímetro de um círculo de raio r , que corresponde ao supremo da sequência dos perímetros dos polígonos regulares inscritos (c_n) ou ao ínfimo da sequência dos perímetros dos polígonos regulares circunscritos (C_n), é dado por $c = 2\pi r$

□

Analogamente, podemos definir a área.

Definição 3.1.24. *Seja S um subconjunto convexo e compacto de \mathbb{R}^2 tal que $\text{int}S$ seja não vazio. A **área** de S é igual ao supremo das áreas de todos os polígonos convexos inscritos, o que é formalmente definido a seguir.*

*Dado $S \subset \mathbb{R}^2$, seja $A = \{\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ polígono contido em } S\}$. Considere agora $B = \{\beta_{\mathcal{P}} : \beta_{\mathcal{P}} \text{ é a área de } \mathcal{P} \in A\}$. Definimos a **área** de S por $\sup B$.*

3.2 Séries de Fourier

Uma das demonstrações que nos dispomos a inserir neste trabalho é desenvolvida a partir do conceito de séries de Fourier, este conceito e alguns de seus resultados são importantes fundamentos para a Seção 4.4.

Definição 3.2.1. *Dada uma função contínua por partes $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a **série de Fourier** de f como*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right),$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad \forall n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

É possível representar uma função contínua por sua série de Fourier, o que nos garante o seguinte resultado.

Teorema 3.2.1. (Teorema de Fourier) *Nos pontos de $(-L, L)$ nos quais f é contínua, a série de Fourier de f converge para f . Isto é, nesse caso, podemos representar f pela sua série de Fourier:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \quad t \in (-L, L).$$

Exemplo 3.2.1. *Seja L um real positivo e $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL < t \leq dL \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ tais que } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Utilizando a mudança de variáveis $s = \frac{n\pi t}{L}$, temos $ds = \frac{n\pi}{L} dt \Rightarrow dt = \frac{L}{n\pi} ds$. Além disso, se $cL < t \leq dL \Rightarrow \frac{n\pi}{L}cL < \frac{n\pi}{L}t \leq \frac{n\pi}{L}dL \Rightarrow n\pi c < s \leq n\pi d$. Assim,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) dt = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} 1 dt = \frac{1}{L}(dL - cL) = d - c,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{1}{L} \int_{n\pi c}^{n\pi d} \cos(s) \frac{L}{n\pi} ds = \frac{(\text{sen}(n\pi d) - \text{sen}(n\pi c))}{n\pi}$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{cL}^{dL} f(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{-(\cos(n\pi d) - \cos(n\pi c))}{n\pi}.$$

Logo, a série de Fourier de f é dada por

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \\ &= \frac{d-c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi d) - \text{sen}(n\pi c)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi d) - \cos(n\pi c)}{n\pi} \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.2. Podemos notar que a série de Fourier de $g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = 1$ é um caso particular do Exemplo 3.2.1, em que $c = -1$ e $d = 1$. Por isso, podemos substituir estes valores na série de Fourier encontrada para a função f no exemplo anterior.

$$S_g(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Mas sabemos que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ e que $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então,

$$S_g(t) = 1 = g(t).$$

Ou seja, nesse caso, a função é igual à sua série de Fourier.

Teorema 3.2.2. (Identidade de Parseval) Sendo $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e C^1 por partes, tal que $f(-L) = f(L)$, então é válida a igualdade a seguir:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

em que a_n e b_n são os coeficientes da série de Fourier de f .

Demonstração. Escrevamos f a partir de sua série de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \\ f(t) \cdot f(t) &= \frac{a_0}{2} f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(t) a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + f(t) b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L (f(t))^2 dt = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt + b_n \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right) \quad (3.1)$$

Mas, como

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \Rightarrow \int_{-L}^L f(t) dt = a_0 L,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = a_n L,$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \Rightarrow \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = b_n L.$$

Substituindo estas três integrais em (3.1), temos então que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L (f(t))^2 dt &= \frac{a_0^2 L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 L + b_n^2 L) = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

□

Este importante resultado é de suma importância para o trabalho, uma vez que esta identidade possui como consequência os resultados 3.2.1 e 3.2.2 apresentados a seguir.

Corolário 3.2.1. Se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua C^2 por partes tal que $f(-L) = f(L)$, então os coeficientes da série de Fourier de f' , que converge, podem ser obtidos derivando, termo a termo, a série de Fourier de f .

Demonstração. Inicialmente, demonstraremos que basta derivar f termo a termo, para encontrar os coeficientes c_n e d_n da série de f' . Sejam a_n e b_n os coeficientes da série de Fourier de f , então, para $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

e, integrando por partes,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \left[f(t) \cdot \frac{L}{\pi n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L f'(t) \cdot \frac{L}{\pi n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right] \\ &= - \int_{-L}^L f'(t) \cdot \frac{L}{\pi n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\ &= - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \frac{1}{L} \cdot f'(t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = - \frac{L}{n\pi} \cdot d_n \\ &\Rightarrow d_n = - \frac{n\pi}{L} \cdot a_n. \end{aligned}$$

Analogamente, para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\ &= \frac{1}{L} \left[-f(t) \cdot \frac{L}{\pi n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L -f'(t) \cdot \frac{L}{\pi n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \right]. \end{aligned}$$

E, como $f(L) = f(-L)$ e $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \frac{1}{L} \cdot f'(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{L}{n\pi} \cdot c_n \\ &\Rightarrow c_n = \frac{n\pi}{L} \cdot b_n. \end{aligned}$$

Por outro lado, se derivarmos $f(t)$, termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \\ f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi}{L} \cdot a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \frac{n\pi}{L} \cdot b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right). \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema de Fourier, sabemos que, uma vez que c_n e d_n são os coeficientes da série de Fourier de $f'(t)$,

$$f'(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right).$$

Logo,

$$c_n = \frac{n\pi}{L} \cdot b_n \quad \text{e} \quad d_n = -\frac{n\pi}{L} \cdot a_n,$$

como tínhamos calculado. Dessa maneira, derivar, termo a termo, a série de Fourier de $f(t)$, é uma forma alternativa de se obter os coeficientes da série de Fourier de $f'(t)$.

Além disso, conforme o Teorema de Fourier (Teorema 3.2.1), a série de Fourier de f' converge, uma vez que $f' : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e C^1 por partes com $f'(-L) = f'(L)$. \square

Corolário 3.2.2. *Sejam f e g funções satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2.2 e sejam a_n e b_n , os coeficientes da série de Fourier de f , e c_n e d_n os de g , então*

$$\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) g(t) dt.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Fourier (Teorema 3.2.1),

$$\begin{aligned} f + g &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \\ f + g &= \frac{a_0 + c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da série de Fourier da função $f + g$ são $a_n + c_n$ e $b_n + d_n$.

Utilizando a Identidade de Parseval (Teorema 3.2.2) na função $f + g$, temos que

$$\frac{(a_0 + c_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f + g)^2 dt.$$

Desenvolvendo ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\frac{a_0^2 + 2a_0 c_0 + c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n c_n + c_n^2 + b_n^2 + 2b_n d_n + d_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2 dt + \frac{2}{L} \int_{-L}^L f g dt + \frac{1}{L} \int_{-L}^L g^2 dt.$$

Mas, também pela Identidade de Parseval,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{e} \quad \frac{1}{L} \int_{-L}^L g^2 dt = \frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + d_n^2).$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2 + 2a_0 c_0 + c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n c_n + c_n^2 + b_n^2 + 2b_n d_n + d_n^2) &= \\ = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f g dt + \frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2 + d_n^2). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2 + 2a_0 c_0 + c_0^2 - a_0^2 - c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n c_n + c_n^2 + b_n^2 + 2b_n d_n + d_n^2 - a_n^2 - b_n^2 - c_n^2 - d_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f g dt.$$

Logo,

$$\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f g dt.$$

\square

3.3 Curvas Parametrizadas

Nesta seção iremos estudar subconjuntos de \mathbb{R}^2 (aos quais chamaremos de curvas) que são unidimensionais e nos quais a teoria do cálculo diferencial é aplicada. Definiremos estes subconjuntos através de funções diferenciáveis. Uma função real de uma variável é dita **diferenciável** se possuir derivadas de todas as ordens (que são, por consequência, contínuas) em todos os seus pontos. A definição de curva que apresentaremos a seguir, não é totalmente satisfatória, mas está de acordo com as propostas desse trabalho.

Definição 3.3.1. Uma **curva parametrizada diferenciável** de \mathbb{R}^n é uma aplicação, de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^n . O conjunto dos pontos de \mathbb{R}^n formado pelos pontos $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I$, é o **traço** de α . A curva α é regular se seu **vetor tangente** é não nulo para todo $t \in I$, ou seja, $\alpha'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Em nosso trabalho consideraremos os casos em que $n = 2$ ou $n = 3$.

Exemplo 3.3.1. A aplicação em \mathbb{R}^2 , $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma curva diferenciável parametrizada cujo traço está marcado na figura 7. Vemos que $\alpha'(0) = (0, 0)$, logo o vetor tangente é nulo quando $t = 0$.

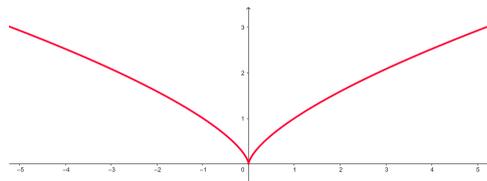


Figura 7 – Traço de $\alpha(t) = (t^2, t^3)$.

Exemplo 3.3.2. As duas curvas parametrizadas $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, sendo $t \in (0 - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, são distintas mas possuem o mesmo traço. Ambas possuem o círculo de raio 1 e centro na origem como traço, mas a norma do vetor tangente de α é 1 enquanto a norma do vetor tangente de β é 2.

Exemplo 3.3.3. A curva diferenciável parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

possui como seu traço em \mathbb{R}^3 uma hélice no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Conforme a figura 8.

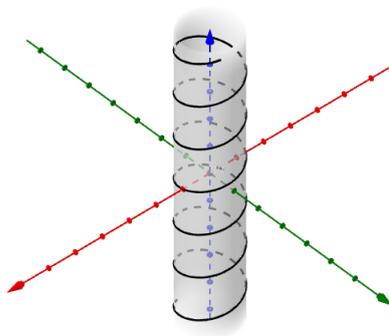


Figura 8 – A curva α e cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Exemplo 3.3.4. A curva $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ não é uma curva regular, pois $\alpha'(0) = (0, 0)$.

Exemplo 3.3.5. Um círculo $\beta(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, é uma curva regular, pois

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2} = r \neq 0$$

para qualquer t .

Definição 3.3.2. (Função Comprimento de Arco) Seja $t \in I$, o comprimento do arco da curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, a partir do ponto t_0 , é por definição:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du,$$

sendo $\|\alpha'(u)\|$ a norma do vetor $\alpha'(u)$. Uma vez que $\alpha'(u) \neq 0$, o comprimento de arco s é uma função diferenciável de t .

Exemplo 3.3.6. A função comprimento de arco de um círculo de raio r parametrizado por $\alpha(u) = (r \cos(u), r \sin(u))$, $u \in [0, 2\pi]$ é

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{(-r \sin(u))^2 + (r \cos(u))^2} du = \int_0^t r du = rt - r \cdot 0 = rt.$$

Utilizando a definição 3.3.2 podemos definir também as curvas que são parametrizadas por meio do comprimento de arco.

Definição 3.3.3. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **parametrizada pelo comprimento de arco** (p.p.c.a.), se para todo $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco de α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Ou seja, se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 3.3.1. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Demonstração. Seja α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja $t_0 \in I$ constante. Consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$. Se $t_0 \leq t_1$, temos que

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(u)\| du = t_1 - t_0.$$

Mas se $t_1 \leq t_0$, então

$$-s(t_1) = \int_{t_1}^{t_0} \|\alpha'(u)\| du = t_0 - t_1.$$

Assim, $s(t_1) = t_1 - t_0$ para todo $t_1 \in I$, ou seja, $s'(t) = 1$ e daí $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Para demonstrar a recíproca, supomos $\|\alpha'(t)\| = 1 \forall t \in I$. Logo,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0.$$

Portanto α é uma curva parametrizada por comprimento de arco. □

Exemplo 3.3.7. A curva $\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$, $s \in [0, 2\pi r]$, com $r > 0$ é p.p.c.a., pois:

$$\|\alpha'(s)\| = \left\| \left(r \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} \right), r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} \right) \right\| = \left\| \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \right\| = 1.$$

Além de definirmos a parametrização por comprimento de arco, nos convém também determinar uma forma de reparametrizar uma curva pelo comprimento de arco.

Proposição 3.3.2. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular cuja função comprimento de arco a partir de t_0 é $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$, então existe uma função h , inversa de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Demonstração. Como α é uma curva regular, $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ e, conseqüentemente, s é estritamente crescente. Assim, s é bijetora, ou seja, admite uma inversa diferenciável $h : J \rightarrow I$. Das propriedades de funções compostas, temos que, para todo $t \in I$, $h(s(t)) = t$. Se aplicarmos a derivada em ambos os lados dessa equação obtemos que $h'(s(t)) \cdot s'(t) = 1$. Logo, $h'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0$.

Portanto, $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in J$ é uma reparametrização de α . Como

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s)) \cdot h'(s)\| = \|\alpha'(t) \cdot h'(s)\| = \left\| \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = 1,$$

e pela Proposição 3.3.1, β está parametrizada pelo comprimento de arco. \square

Exemplo 3.3.8. De acordo com o exemplo 3.3.6, a função comprimento de arco do círculo $\beta(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ é

$$s(t) = rt \Rightarrow t = \frac{s}{r} = h(s).$$

Então

$$\alpha(s) = \beta \circ h = \beta(x(h(s)), y(h(s))) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

$s \in [0, 2\pi r]$, é uma reparametrização de β por comprimento de arco.

Definição 3.3.4. A curvatura $k(t)$ de uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ de \mathbb{R}^2 é dada por

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

ou

$$k(s) = \frac{x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{3/2}}$$

se α está parametrizada pelo comprimento de arco s .

Exemplo 3.3.9. O círculo de raio r pode ser parametrizado como $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Logo a curvatura de um círculo é dada por

$$k(t) = \frac{-r \sin(t)(-r \sin(t)) - r \cos(t)(-r \cos(t))}{(r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

Exemplo 3.3.10. A reta $\beta(t) = (t, at + b)$ tem curvatura nula, pois

$$k(t) = \frac{0}{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Exemplo 3.3.11. A parábola $\gamma(t) = (t, t^2)$, por sua vez, não possui curvatura constante como o círculo e a reta já que

$$k(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Algumas curvas terão propriedades de grande utilidade para o desenvolvimento deste trabalho. Tais curvas são definidas a seguir.

Definição 3.3.5. Dizemos que uma curva $\alpha : [0, L] \in \mathbb{R}^2$ é **fechada** se $\alpha(0) = \alpha(L)$. Além disso, se α não se auto-intersecta, dizemos que α é uma curva **simples**.

Definição 3.3.6. Caso a curva $\alpha : [0, L] \in \mathbb{R}^2$ for simples e fechada, ela é dita uma **curva de Jordan**.

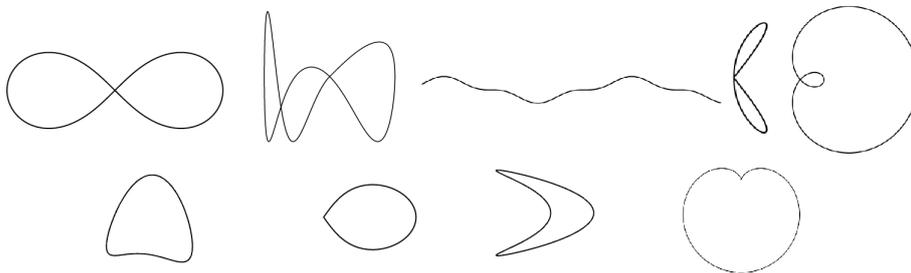


Figura 9 – Primeira linha: exemplos de curvas que não são de Jordan. Segunda linha: exemplos de curvas de Jordan.

3.3.1 Superfícies Parametrizadas Regulares

Neste trabalho não iremos nos restringir somente às abordagens no plano e, por isso, estudaremos também as superfícies parametrizadas regulares. Para este estudo nos baseamos principalmente em [11].

Definição 3.3.7. Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, em que U é um aberto, tal que

- (a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- (b) para todo par $(u, v) \in U$, temos $X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq 0$, onde $X_u(u, v) \times X_v(u, v)$ denota o produto vetorial de $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$.

O subconjunto M de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $X(u, v)$ é o traço da aplicação X .

Exemplo 3.3.12. O traço de $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, é o cilindro de equação $x^2 + y^2 = r^2$.

Definição 3.3.8. A aplicação de Gauss $N : U \rightarrow S^2$ de uma superfície $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\|} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

onde $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ e $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$, sendo S^2 a esfera unitária de centro na origem em \mathbb{R}^3 .

A seguir definimos a curvatura média de uma superfície para que possamos compreender a definição de superfície mínima, que utilizaremos no Capítulo 5.

Definição 3.3.9. A curvatura média H de uma superfície M , parametrizada por $X(u, v)$ é dada por

$$H = \frac{gE - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{cases} E = \langle X_u, X_u \rangle \\ F = \langle X_u, X_v \rangle \\ G = \langle X_v, X_v \rangle \end{cases},$$

são os coeficientes da Primeira Forma Quadrática e

$$\begin{cases} e = \langle X_{uu}, N \rangle \\ f = \langle X_{uv}, N \rangle \\ g = \langle X_{vv}, N \rangle \end{cases},$$

são os coeficientes da Segunda Forma Quadrática.

Definição 3.3.10. Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular e $D \subset U$ é uma região de \mathbb{R}^2 , então dizemos que $X(D)$ é uma **região da superfície** X . A **área da região** $X(D)$ é dada por

$$A(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma quadrática de X .

Definição 3.3.11. Uma superfície parametrizada regular é dita **superfície mínima** se sua curvatura média é identicamente nula.

Exemplo 3.3.13. As helicóides são superfícies que podem ser parametrizadas como

$$X(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), au),$$

onde $(u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Os coeficientes das primeira e segunda formas quadráticas destas superfícies

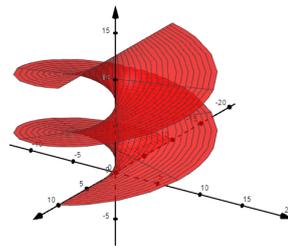


Figura 10 – Exemplo de helicóide.

são dados por

$$E = v^2 + a^2, \quad G = 1, \quad f = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}, \quad e = F = g = 0.$$

Portanto,

$$H = \frac{0}{2(v^2 + a^2)} = 0,$$

isto é, as helicóides são superfícies mínimas.

Abordagens do Problema Isoperimétrico no Plano

O Problema Isoperimétrico, em sua forma mais clássica, propõe que se encontre a maior área possível, dado um perímetro, considerando \mathbb{R}^2 como universo. Esta restrição ao plano é a condição que adotamos nas abordagens deste capítulo.

4.1 O Problema Isoperimétrico por aproximações com polígonos

A fim de iniciar o nosso estudo de demonstrações do Problema Isoperimétrico, nessa seção trataremos de alguns casos particulares deste problema, considerando apenas polígonos. No primeiro caso iremos considerar somente os triângulos e focaremos em obter qual deles nos dá a maior área ao fixarmos o perímetro, conforme o teorema a seguir.

Teorema 4.1.1. *Dentre todos os triângulos de perímetro dado, o equilátero possui maior área.*

Demonstração. Sejam x, y e z os lados de um triângulo e $2p$ o seu perímetro. Da fórmula de Heron e do fato que $z = 2p - x - y$, podemos considerar o máximo a função

$$f(x, y) = A^2(x, y) = p(p-x)(p-y)(-p+x+y).$$

Calculando $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, obtemos $p(p-y)(2(p-x)-y) = 0$ e $p(p-x)(2(p-y)-x) = 0$, resultando em $x = y = \frac{2p}{3}$, que é o ponto crítico de $f(x, y)$. No entanto, por $f(x, y)$ ser o quadrado de uma função não negativa $A(x, y)$, estas funções possuem o mesmo ponto crítico, que é o ponto de máximo de ambas. Portanto, $x = y = z$, verificando pelo teste da segunda derivada que o maior triângulo, fixado o perímetro, é o equilátero. □

Observação 4.1.1. *A fim de que um polígono \mathcal{P} possua a maior área dentre os demais com mesmo perímetro, \mathcal{P} deve ser convexo. De fato, se \mathcal{P} não é convexo no vértice B , então os vértices consecutivos a ele, digamos A e C , são tais que o segmento \overline{AC} não está contido no polígono (veja Figura 11). Dessa forma, ao refletirmos \overline{AB} e \overline{BC} em relação a \overline{AC} , obtemos um polígono convexo de mesmo perímetro, mas com área maior. Repetindo o argumento aos demais vértices em que \mathcal{P} não é convexo, obtemos um polígono convexo \mathcal{P}' com o mesmo perímetro de \mathcal{P} , porém de maior área.*

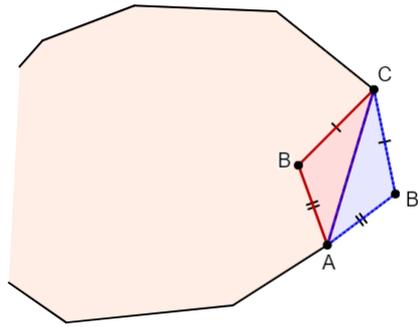


Figura 11 – Polígono não convexo (passando por B) e polígono convexo (passando por B') de mesmo perímetro.

Pela observação anterior, o quadrilátero de perímetro fixado que possui maior área deve ser convexo. Para simplificar este caso particular, assumiremos que os ângulos internos de quadriláteros de perímetro fixo e área máxima devem ser ângulos retos, pois o caso geral é provado adiante no Teorema 4.1.3.

Em nosso segundo caso particular, trabalharemos de maneira análoga à anterior, no entanto, considerando apenas os retângulos.

Teorema 4.1.2. *Dentre todos os retângulos de perímetro dado, o quadrado é o de maior área.*

Demonstração. Seja x e y base e altura, respectivamente, de um retângulo de perímetro $2p$, ou seja,

$$2p = 2(x + y) \implies p = x + y.$$

Além disso, pelo cálculo da área A de retângulos

$$A = xy \implies A(x) = x(p - x) = -x^2 + px.$$

O valor de x que maximiza a área é $\frac{p}{2}$. Portanto, $x = y = \frac{p}{2}$, verificando pelo teste da segunda derivada que o retângulo de maior área dentre aqueles de mesmo perímetro é o quadrado. □

Vimos então que tanto no caso dos triângulos quanto no caso dos retângulos de mesmo perímetro, a maior área era obtida quando todos os lados possuíam a mesma medida. Nosso próximo passo é generalizar este resultado para os n -ângulos, pois esperamos que aquele em que os n lados são congruentes seja o que possui a maior área entre todos os demais de mesmo perímetro.

Proposição 4.1.1. *Dados uma reta r e dois pontos X e Y em um plano pertencentes ao mesmo semiplano determinado por r , a poligonal de menor comprimento ligando estes pontos e contendo um ponto de r é a poligonal formada pelos segmentos \overline{PX} e \overline{PY} , em que $P \in r$ é de tal forma que os ângulos \widehat{XPN} e \widehat{NPY} são iguais, sendo \overline{PN} a semirreta ortogonal a r que tem origem em P , com N pertencendo ao mesmo semiplano determinado por r que contém X e Y . Observe a Figura 12.*

Demonstração. O caminho poligonal γ deve tocar r em um único ponto P (caso contrário, podemos formar um triângulo com dois pontos de r e uma extremidade de γ e, pela desigualdade triangular, verificar que utilizando apenas um dos pontos, o comprimento de γ é encurtado). O ponto P é a interseção de r com $\overline{X'Y'}$, sendo X'

simétrico de X em relação à reta r . Caso contrário, se esta interseção fosse um outro ponto Q teríamos uma curva de maior comprimento. Para tal conclusão observemos que $\triangle XQR \equiv \triangle X'QR$ e $\triangle XPR \equiv \triangle X'PR$ e, consequentemente, $\overline{XP} = \overline{X'P}$ e $\overline{XQ} = \overline{X'Q}$. Além disso, segue da desigualdade triangular que

$$\overline{X'P} + \overline{PY} \leq \overline{X'Q} + \overline{QY} \Rightarrow \overline{XP} + \overline{PY} \leq \overline{XQ} + \overline{QY}.$$

Como $\triangle XPR \equiv \triangle X'PR$, $P\widehat{X}R = P\widehat{X}'R$. No entanto, $P\widehat{X}R = X\widehat{P}N$ (ângulos alternos internos) e $P\widehat{X}'R = N\widehat{P}Y$ (ângulos correspondentes), e assim $X\widehat{P}N = N\widehat{P}Y$. \square

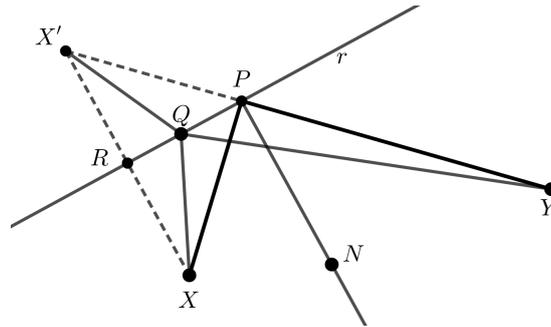


Figura 12 – Caminho poligonal da proposição 4.1.1.

Podemos utilizar a proposição anterior para concluir que:

Lema 4.1.1. *Dentre os n -ângulos de área A dada, o n -ângulo regular possui o menor perímetro.*

Demonstração. Tomamos um polígono \mathcal{P} , com lados \overline{AB} e \overline{BC} não congruentes, como na Figura 13. Utilizando a reta r paralela à \overline{AC} por B , segue da Proposição 4.1.1 que podemos obter B' com

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

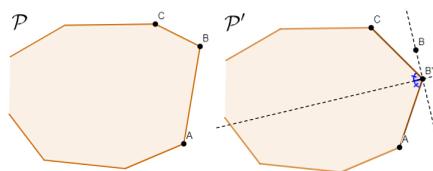


Figura 13 – Exemplo de \mathcal{P} e de \mathcal{P}' .

Desse modo, o polígono \mathcal{P}' obtido de \mathcal{P} pela substituição de B por B' nos fornece um polígono com lados $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$ congruentes e perímetro menor que o original, repetindo o processo aos demais lados não congruentes concluímos que o polígono equilátero é o de menor perímetro.

Consideremos agora \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} três lados de \mathcal{P} que, como vimos, devem ter o mesmo comprimento. Suponhamos que $A\widehat{B}C = \alpha$ e $B\widehat{C}D = \alpha'$ sejam diferentes e que α seja o maior. Seja $F \in \overline{CD}$ tal que $C\widehat{B}F = \beta < \frac{\alpha - \alpha'}{2}$ e tracemos a paralela a \overline{BF} passando por C e cuja interseção com o prolongamento de \overline{AB} seja E , conforme a Figura 14. Denotemos $\gamma = E\widehat{B}F$ e $\gamma' = B\widehat{F}C$. Vemos que

$$\alpha + \gamma - \beta = \pi \quad \text{e} \quad \alpha' + \gamma' + \beta = \pi.$$

Portanto, $\gamma' - \gamma = \alpha - \alpha' - 2\beta$. Como $2\beta < \alpha - \alpha'$, ambos os lados da igualdade são positivos e, por isso, $\gamma' > \gamma$. Assim, temos que

$$\overline{BE} + \overline{EF} < \overline{BC} + \overline{CF}.$$

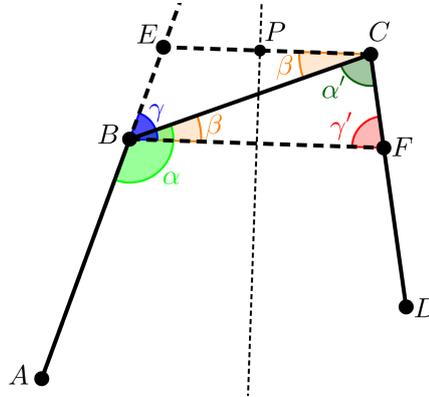


Figura 14 – Exemplo de construção como no Lema 4.1.1.

(Para validar tal desigualdade, basta pegarmos o quadrilátero $BECF$, marcarmos a interseção P da mediatriz de \overline{BF} com a reta que contém \overline{EC} e notar que a menor curva de extremidades B e F e contendo E ou C , passará pelo ponto, dentre estes dois, cuja distância ao ponto P é a menor, nesse caso, este ponto será o E).

Substituindo \overline{BC} e \overline{CF} por \overline{BE} e \overline{EF} , \mathcal{P} terá mesma área, mas um perímetro menor, o que é um absurdo. Assim \mathcal{P} deverá ser, além de equilátero, equiângulo. \square

Teorema 4.1.3. *Dentre os n -ângulos de perímetro L dado, o n -ângulo regular possui a maior área.*

Demonstração. Suponhamos que \mathcal{P} seja o n -ângulo de maior área e perímetro L . Supondo que \mathcal{P} não seja regular, há, pelo lema 4.1.1, um n -ângulo \mathcal{P}' regular de mesma área S , mas de perímetro $L' < L$. Sejam \overline{AB} e \overline{BC} dois lados consecutivos de \mathcal{P}' . Escolhemos um B' na reta r perpendicular à diagonal \overline{AC} (veja Figura 15) tal que

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} - (\overline{AB} + \overline{BC}) = L - L' \Rightarrow L = L' - (\overline{AB} + \overline{BC}) + (\overline{AB'} + \overline{B'C}).$$

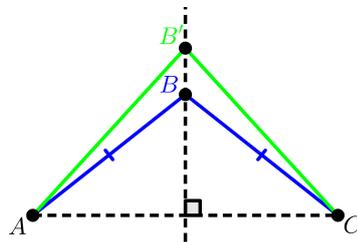


Figura 15 – Exemplo de construção de \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' .

Assim, pegando \mathcal{P}' (de perímetro L') e trocando \overline{AB} e \overline{BC} por $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$, construímos um n -ângulo \mathcal{P}'' de perímetro L e de área $S'' > S$, o que é um absurdo. Portanto \mathcal{P} é regular. \square

Teorema 4.1.4. *Dados dois polígonos regulares de perímetro L , aquele com o maior número de lados é o de maior área.*

Demonstração. Como a área de um polígono regular de perímetro L é equivalente à soma das áreas dos n triângulos isósceles cuja base é o lado $l = \frac{L}{n}$ desse polígono e cuja altura é o apótema a , essa área pode ser expressada como

$$A = n \cdot \frac{a \cdot \frac{L}{n}}{2} = a \cdot \frac{L}{2}.$$

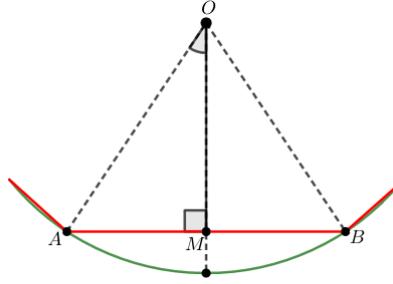


Figura 16 – Um dos n triângulos isósceles congruentes.

Seja AOB um dos n triângulos isósceles congruentes em que o n -ágono regular pode ser dividido, em que O é o centro da circunferência circunscrita e sendo o apótema $a = \overline{OM}$. Além disso, vemos que o ângulo $\widehat{AOM} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$. No triângulo retângulo AOM vemos que

$$\operatorname{tg}(\widehat{AOM}) = \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{L}{2n}}{a} \Rightarrow a = \frac{\frac{L}{2n}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Assim

$$A = a \cdot \frac{L}{2} = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Dois raios de um círculo unitário, tais que o ângulo formado por ele seja α , formam um setor circular de área $\frac{\alpha}{2}$. Podemos prolongar um desses raios e traçar a tangente que contém a extremidade do outro raio, para que seja formado um triângulo de área $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$, como na Figura 17. A razão $\frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\alpha}$ da área do triângulo pela área do setor aumenta (ou diminui) conforme o aumento (ou redução) do valor de α . Portanto, $\frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ aumenta (ou

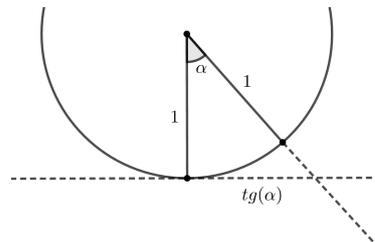


Figura 17 – Triângulo retângulo de catetos 1 e $\operatorname{tg}(\alpha)$.

diminui) conforme o valor de n aumenta (ou diminui). Ou seja, se tivermos $n_1 > n_2$ como dois números de lados de n -ágonos regulares de perímetro L ,

$$\frac{\pi}{n_1} < \frac{\pi}{n_2} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{n_1}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n_1}\right)} > \frac{\frac{\pi}{n_2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n_2}\right)} \Rightarrow A_1 > A_2,$$

sendo estas, áreas quando há n_1 e n_2 lados respectivamente. Portanto, a área do polígono regular aumenta (ou diminui) conforme o seu número de lados aumenta (ou diminui) (função crescente).

□

Teorema 4.1.5 (Zenodorus). *Sejam um polígono de área A e um círculo de área A_C . Se ambos possuem perímetro L , então $A_C > A$.*

Demonstração. Tomemos a área A de um n -ágono regular de perímetro L que, pelo Teorema 4.1.3, é a maior dentre as áreas de todos os n -átomos de mesmo perímetro. Como vimos, essa área pode ser dada como

$$A = n \cdot \frac{L}{2n} \cdot \frac{\frac{L}{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{L^2}{4\pi} \cdot f\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Em que $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg}(x)}$ com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ acima, determina se a área é maior ou menor. De

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x) - x}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{2 \operatorname{sen}^2(x)},$$

como $2 \operatorname{sen}^2(x) > 0$ para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, o sinal de f' é o mesmo que o de $\operatorname{sen}(2x) - 2x$. Para sabermos o sinal de $f'(x)$ no domínio de f , recorreremos à uma análise no ciclo trigonométrico da Figura 18. Pondo $\alpha = \widehat{AOB} \neq 0$

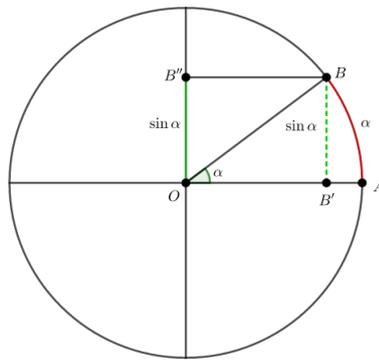


Figura 18 – Círculo trigonométrico.

cujo seno é $\overline{OB''} = \operatorname{sen} \alpha = \overline{BB'}$, teremos $\overline{BB'} < \widehat{AB}$ o que é equivalente a $\operatorname{sen} \alpha < \alpha$. Assim, para qualquer x do domínio de f teremos $\operatorname{sen}(2x) - 2x < 0$. Portanto, f' é negativa e, conseqüentemente f é uma função decrescente (o que reforça o Teorema 4.1.4). Além disso, usando a Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sec^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos^2(x) = \cos^2(0) = 1.$$

Como

$$0 < \frac{x}{\operatorname{tg}(x)} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$

segue do Teorema do Confronto que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\operatorname{tg}(x)} = 0$, pois

$$0 < \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\operatorname{tg}(x)} < \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0.$$

Das informações de f ser decrescente, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\operatorname{tg}(x)} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{tg}(x)} = 1$, concluímos que $0 < f(x) < 1$, portanto

$$A = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \underbrace{f(x)}_{< 1} < \frac{L^2}{4\pi}.$$

Essa desigualdade é dita **desigualdade isoperimétrica para polígonos**. A área de um círculo de raio $r = L/2\pi$ é tal que

$$A_c = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi} > A,$$

concluindo o resultado. \square

Lema 4.1.2. *Dentre todos os triângulos com dois lados dados, o triângulo no qual esses lados são perpendiculares tem a maior área.*

Demonstração. Sejam a e b os lados dados e tomemos a como a base do triângulo. A área do triângulo $A = \frac{a}{2} \cdot h$, em que h é a altura, será máxima se, e somente se, a altura for máxima. Chamando de P , o vértice comum a a e a b , vemos que as posições possíveis para o vértice não estar contido em a formam uma circunferência de raio b e centro P .

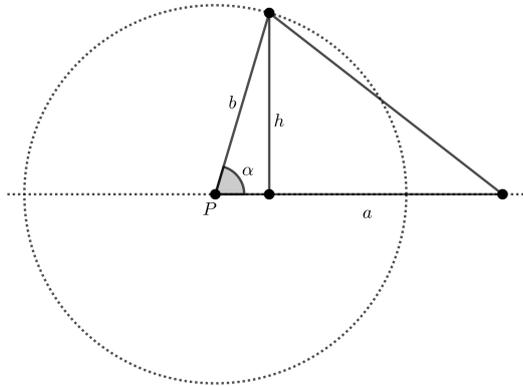


Figura 19 – Exemplo de triângulo de lados a e b

Além disso, podemos notar que $h = b \cdot |\sin \alpha|$, sendo α o ângulo interno de vértice P . Logo, h é máximo se, e somente se, $|\sin \alpha|$ for máximo, ou seja, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (apesar de $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ também maximizar $|\sin \alpha|$, enquanto ângulo de um triângulo, α está compreendido entre 0 e π e este valor não convém). Portanto o triângulo de maior área dados dois lados, é retângulo no ângulo formado pelos lados dados. \square

Definição 4.1.1. *Seja S um subconjunto convexo compacto de \mathbb{R}^2 . Uma **corda** de S é um segmento de reta entre dois pontos da fronteira de S .*

Lema 4.1.3. *Se a corda de um conjunto convexo C bissecta o seu perímetro dividindo-o em dois setores de áreas diferentes, então existe um conjunto convexo C' com mesmo perímetro que C mas com maior área.*

Demonstração. Seja \overline{XY} uma corda do conjunto convexo C que bissecta o perímetro mas que divide C em duas partes C_1 e C_2 com a área de C_1 maior que a área de C_2 . Seja C'_1 a reflexão de C_1 na reta que contém \overline{XY} . Então o conjunto $C' = C_1 \cup C'_1$ tem o mesmo perímetro que C mas uma área maior. A Figura 20 ilustra este processo para um polígono C específico. \square

Teorema 4.1.6. *Seja um conjunto compacto e convexo $S \subset \mathbb{R}^2$ com $\text{int}S \neq \emptyset$. Se S não for um círculo, então existe um conjunto S' de maior área que possui o mesmo perímetro que S .*

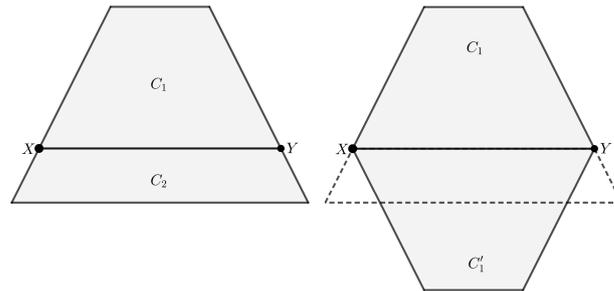


Figura 20 – Exemplo de polígono C'_1 (direita) a partir de C (esquerda).

Demonstração. Sejam X e Y pontos da fronteira de S que bissectam o perímetro. Se a corda \overline{XY} divide a área de S em duas partes diferentes, pelo lema 4.1.3 existe o conjunto S' desejado. Assim, podemos assumir que \overline{XY} divide S em duas partes S_1 e S_2 que possuem áreas iguais.

Em um círculo, quaisquer dois pontos X e Y que bissectam o perímetro são necessariamente antípodas e o segmento que os liga é um diâmetro do círculo. Daí, qualquer outro ponto P do círculo forma um triângulo $\triangle XPY$ retângulo em \hat{P} . Logo, se S não for um círculo, deve haver ao menos um ponto P da fronteira de S tal que $X\hat{P}Y$ não seja um ângulo reto, e podemos assumir que $P \in S_1$ (veja Figura 21).

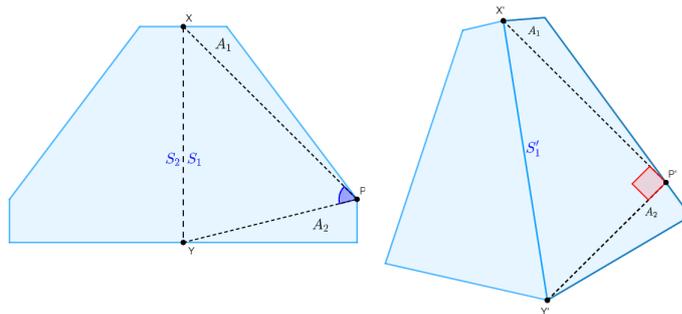


Figura 21 – Exemplo de conjunto S e S' do Teorema 4.1.6.

Os segmentos \overline{XP} e \overline{PY} dividem S_1 em três partes: o triângulo XPY , o setor A_1 cortado pela corda \overline{XP} , e o setor A_2 cortado pela corda \overline{PY} . Agora substituímos S_1 por uma nova figura S'_1 deixando A_1 e A_2 inalterados e substituindo $X\hat{P}Y$ por um ângulo reto $X'\hat{P}'Y'$. Finalmente, seja S' a união de S'_1 com a reflexão de S'_1 na corda $X'Y'$. Assim S' tem o mesmo perímetro que S e, pelo lema 4.1.2, a área de S' é maior que a de S . \square

Pelo teorema 4.1.6, somente o círculo não nos dá a possibilidade de se obter a partir dele uma nova figura de mesmo perímetro e área maior. Isto é, o círculo é a figura de maior área dado um perímetro fixo.

4.2 O Problema Isoperimétrico por técnicas de geometria diferencial- 1ª Abordagem

Nessa seção, iremos abordar o Problema Isoperimétrico para curvas em geral, isto é, nosso foco aqui é buscar a curva que, dentre todas que possuem o mesmo perímetro, limita a maior área. Este problema é apresentado no teorema 4.2.1 e a demonstração adotada, que é bem construtiva, aparece nas referências [1] e [2]. Para isso, precisaremos compreender alguns conceitos e proposições que apresentamos nesta seção.

A seguir, apresentaremos uma heurística para a fórmula do cálculo da área A limitada por uma curva parametrizada, utilizando as teorias do Cálculo Diferencial e Integral.

A área A limitada por uma curva parametrizada $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, como a da curva, em verde na figura 22, pode ser calculada dividindo esta área em n áreas A_i , com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, como a área hachurada em azul na figura 22. Estas áreas A_i são tais que estão limitadas por retas verticais. Desta forma, podemos estimá-las como um retângulo de altura $y(t_i^*)$, sendo t_i^* um ponto sobre a curva entre t_{i-1} e de t_i (pontos sobre os segmentos verticais que limitam A_i). Assim, temos:

$$A_i = y(t_i^*)[x(t_{i-1}) - x(t_i)]$$

e, pelo Teorema do Valor Médio (Capítulo 4.2 de [10]),

$$A_i = y(t_i^*)x'(t_i^*)\Delta t_i.$$

A área A pode ser expressa como a soma das áreas A_i e quanto mais dividirmos esta área mais preciso fica este valor (soma de Riemann). Por isso,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y(t_i^*)x'(t_i^*)\Delta t_i = - \int_a^b y(t)x'(t)dt.$$

Como tomamos $x(t_{i-1}) > x(t_i)$, o sinal negativo na integral anterior garante o valor positivo para a área. Assim,

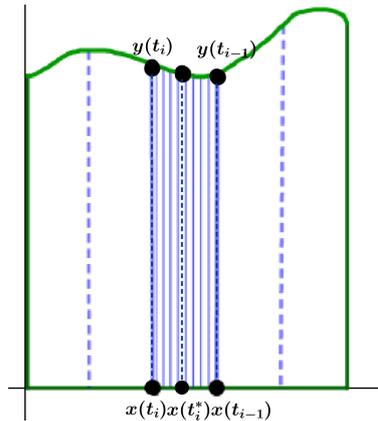


Figura 22 – Curva fechada cuja área, nesse caso, foi dividida em cinco.

devemos utilizar a seguinte fórmula para a área A limitada por uma curva fechada simples orientada positivamente $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in [a, b]$ é um parâmetro arbitrário.

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y)dt$$

Veja que a segunda fórmula é obtida se dividirmos a área A por segmentos horizontais e fazermos um processo análogo ao anterior. A terceira fórmula vem imediatamente da metade da soma da duas primeiras (já que $A = \frac{1}{2}(A + A)$). O desenvolvimento acima é feito para um tipo específico de curva parametrizada, mas é possível estendê-la ao caso geral.

Exemplo 4.2.1. Sendo $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ a parametrização do círculo de raio r , então $\alpha'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$. Usando, opcionalmente, a terceira fórmula, temos:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(r \cos t)(r \cos t) - (-r \sin t)(r \sin t)]dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t)dt$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} dt = \frac{(2\pi - 0)r^2}{2} = \pi r^2.$$

Lema 4.2.1. Se a, b, c e d são reais tais que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então vale a igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Demonstração. Pela segunda igualdade vemos que esta é equivalente à primeira.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \iff ab + ad = ab + bc \iff ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

□

Teorema 4.2.1. (Problema Isoperimétrico) Seja uma curva fechada plana C de comprimento L e seja A a área da região limitada por C . Então

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

e a igualdade acontece se, e somente se, C for um círculo.

Demonstração. Sejam E e E' duas retas paralelas que não interceptam a curva fechada C . Pelo Teorema do Valor Extremo, existem duas retas tangentes a C , T e T' , paralelas, tais que a curva esteja inteiramente contida na faixa limitada por estas duas retas. Seja S^1 o círculo que não intercepta C e é tangente simultaneamente a T e T' , e seja O seu centro. Tomemos o sistema de coordenadas com origem em O e eixo X perpendicular a T e T' .

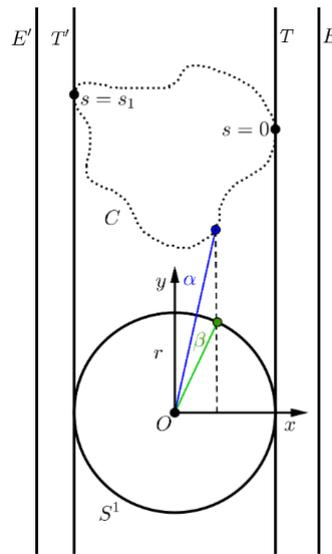


Figura 23 – Construção de S^1 a partir de C .

Parametrizamos a curva C pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de maneira que ela seja positivamente orientada e que nos pontos tangentes de T e T' , $s = 0$ e $s = s_1$, respectivamente. Consideremos $\beta(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s))$, com $s \in [0, L]$, a equação de S^1 . Sendo $2r$ a distância entre T e T' e \bar{A} a área do círculo, temos:

$$A = \int_0^L xy' ds \quad \text{e} \quad \bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^L \bar{y}x' ds.$$

Podemos notar que

$$A + \bar{A} = A + \pi r^2 = \int_0^L xy' ds - \int_0^L \bar{y}x' ds = \int_0^L (xy' - \bar{y}x') ds.$$

Como um número nunca é maior que seu módulo,

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - \bar{y}x') ds \leq \int_0^L \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2} ds = \int_0^L \sqrt{((x, \bar{y}), (y', -x'))^2} ds.$$

Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &\leq \int_0^L \sqrt{((x, \bar{y}), (y', -x'))^2} ds = \int_0^L |(x, \bar{y}), (y', -x')| ds \\ &\leq \int_0^L \|(x, \bar{y})\| \cdot \|(y', -x')\| ds. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sabemos que o vetor tangente de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é unitário, isto é, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo s , uma vez que a curva C é p.p.c.a.. Além disso, como $\alpha'(s) = (x', y')$, temos que $\|\alpha'(s)\| = \|(\pm x', \pm y')\| = \|(\pm y', \pm x')\|$. Logo,

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^L \|(x, \bar{y})\| \cdot \|(y', -x')\| ds = \int_0^L \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} ds = \int_0^L \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} ds.$$

Como $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$, obtemos

$$A + \pi r^2 \leq \int_0^L \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} ds = \int_0^L r ds = Lr.$$

Portanto, a soma das áreas limitadas pelo círculo e a curva não é maior que Lr . Pela Desigualdade das Médias para as áreas A e \bar{A} temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{A \cdot \pi r^2} &\leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{Lr}{2} \\ A \cdot \pi r^2 &\leq \frac{L^2 r^2}{4} \Rightarrow 4\pi A \leq L^2, \end{aligned}$$

chegando a desigualdade desejada.

A igualdade $L^2 = 4\pi A$ ocorre se, e somente se, acontece igualdade na Desigualdade das Médias e na Desigualdade de Cauchy. Da Desigualdade das Médias sabemos que a igualdade só ocorre se os números forem iguais e, por isso, $A = \bar{A} = \pi r^2$. Além disso,

$$\frac{A + \pi r^2}{2} = \frac{Lr}{2} \Rightarrow \pi r^2 + \pi r^2 = Lr \Rightarrow L = \frac{2\pi r^2}{r} = 2\pi r$$

e r não depende da direção da reta T .

Pela igualdade em 4.1, temos:

$$\int_0^L \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2} ds = \int_0^L \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)} ds$$

resultando em

$$(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)$$

ou

$$(xx')^2 + 2xx'\bar{y}y' + (\bar{y}y')^2 = 0 \Rightarrow (xx' + \bar{y}y')^2 = 0.$$

Logo,

$$xx' = -\bar{y}y' \Rightarrow \frac{x}{y'} = -\frac{\bar{y}}{x'} \Rightarrow \frac{x^2}{(y')^2} = \frac{\bar{y}^2}{(x')^2}.$$

Assim, pelo lema 4.2.1,

$$\frac{x^2}{(y')^2} = \frac{\bar{y}^2}{(x')^2} = \frac{x^2 + \bar{y}^2}{(x')^2 + (y')^2} \Rightarrow \frac{x}{y'} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}{\|\alpha'\|} = \pm \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}.$$

Sabemos, da equação do círculo, que $\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \pm r$. Isto é,

$$\frac{x}{y'} = \pm r \Rightarrow x = \pm r y'.$$

Como r não depende da escolha da direção da reta T podemos trocar x por y na última igualdade. Podemos verificar isso repetindo a construção e as considerações feitas até aqui, no entanto, construindo T e T' horizontalmente. Dessa forma obtemos

$$y = \pm r x'.$$

Portanto,

$$x^2 + y^2 = (\pm r y')^2 + (\pm r x')^2 = r^2[(x')^2 + (y')^2] = r^2$$

e x e y são coordenadas de um círculo C . Ou seja, a desigualdade isoperimétrica é válida, e a igualdade vale quando a curva em questão é um círculo. \square

4.3 O Problema Isoperimétrico por técnicas de geometria diferencial- 2ª Abordagem

Nesse seção iremos apresentar outra demonstração possível para o Problema Isoperimétrico, ou seja, iremos apresentar outra alternativa para chegarmos à conclusão de que o círculo é a curva que abrange a maior área dentre aquelas que possuem um mesmo perímetro.

Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$ uma curva p.p.c.a., simples, fechada e C^1 por partes. Podemos considerar que α possui comprimento $L = 2\pi$, pois, caso contrário, podemos obter, por homotetia, uma outra curva p.p.c.a semelhante a α e com o comprimento desejado.

Podemos representar α no plano cartesiano de modo que a reta que contém os pontos $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ e $\alpha(\pi)$ da curva seja um eixo horizontal, dividindo a curva em duas de mesmo comprimento, uma acima do eixo e outra abaixo, conforme a figura 24.

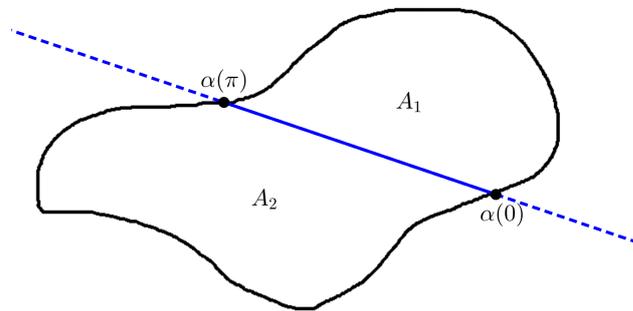


Figura 24 – Adotamos como eixo a reta que contém $\alpha(0)$ e $\alpha(\pi)$.

A área A_1 na figura 24 é dada por

$$A_1 = - \int_0^\pi x'(s)y(s) ds \leq \int_0^\pi \frac{[-x'(s)]^2 + [y(s)]^2}{2} ds, \quad (4.2)$$

sendo a desigualdade acima consequência da desigualdade das médias.

A área A_1 é máxima quando ocorre a igualdade, logo

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi [(x'(s))^2 + (y(s))^2] ds = \frac{1}{2} \int_0^\pi [(y(s))^2 - (y'(s))^2 + 1] ds,$$

pois α é p.p.c.a.

Pelo fato de que a reta $\overleftrightarrow{\alpha(0)\alpha(\pi)}$ é o eixo Ox , temos que $y(0) = y(\pi) = y(2\pi) = 0$, e escrevemos

$$y(s) = u(s) \operatorname{sen}(s),$$

em que u é contínua e diferenciável. Deste modo,

$$y'(s) = u'(s) \operatorname{sen}(s) + u(s) \operatorname{cos}(s).$$

Então,

$$\begin{aligned} (y(s))^2 - (y'(s))^2 + 1 &= (u(s))^2 \operatorname{sen}^2(s) - [u'(s) \operatorname{sen}(s) + u(s) \operatorname{cos}(s)]^2 + 1 \\ &= (u(s))^2 [\operatorname{sen}^2(s) - \operatorname{cos}^2(s)] - 2u(s)u'(s) \operatorname{sen}(s) \operatorname{cos}(s) \\ &\quad - (u'(s))^2 \operatorname{sen}^2(s) + 1 \\ &= [(u(s))^2(-\operatorname{sen}(s) \operatorname{cos}(s))]' - (u'(s))^2 \operatorname{sen}^2(s) + 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [(-u(s))^2 \operatorname{sen}(s) \operatorname{cos}(s)]' - (u'(s))^2 \operatorname{sen}^2(s) + 1] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [-u(s))^2 \operatorname{sen}(s) \operatorname{cos}(s)]' ds + \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 - (u'(s) \operatorname{sen}(s))^2] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 - (u'(s) \operatorname{sen}(s))^2] ds. \end{aligned}$$

Logo, A_1 é máxima se $(u'(s) \operatorname{sen}(s))^2 = 0$ para todo s , ou seja, quando $u'(s) = 0$, $s \in [0, \pi]$, ou ainda, quando $u(s) = k$. Então,

$$y(s) = u(s) \operatorname{sen}(s) = k \operatorname{sen}(s), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Além disso, ao considerarmos A_1 , como valor máximo, há a igualdade em (4.2). Isto é,

$$\begin{aligned} - \int_0^\pi x'(s)y(s) ds &= \int_0^\pi \frac{x'(s)^2 + y(s)^2}{2} ds \\ \Rightarrow -2 \int_0^\pi x'(s)y(s) ds &= \int_0^\pi [x'(s)^2 + y(s)^2] ds \\ \Rightarrow \int_0^\pi [-2x'(s)y(s) - (x'(s))^2 - (y(s))^2] ds &= 0 \\ \Rightarrow - \int_0^\pi (x'(s) + y(s))^2 ds &= 0. \end{aligned}$$

Como a integral acima é nula e o integrando é não negativo, concluímos que

$$(x'(s) + y(s))^2 = 0 \Rightarrow x'(s) = -y(s) = -k \operatorname{sen}(s) \Rightarrow x(s) = k \cos(s) + c, \quad c, k \in \mathbb{R}.$$

Então A_1 possui maior área se a curva que a limita for $(k \cos(s) + c, k \operatorname{sen}(s))$, sendo $c, k \in \mathbb{R}$ e $s \in [0, \pi]$, ou seja, um semicírculo de raio k e centro em $(c, 0)$.

Do fato de que A_1 tem perímetro $\pi k = \frac{L}{2} = \pi$, temos que $k = 1$ e a curva que nos fornece a maior área A_1 é o semicírculo unitário $(\cos(s) + c, \operatorname{sen}(s))$, $c \in \mathbb{R}$, $s \in [0, \pi]$. Assim, a Figura 25 representa melhor a curva α .

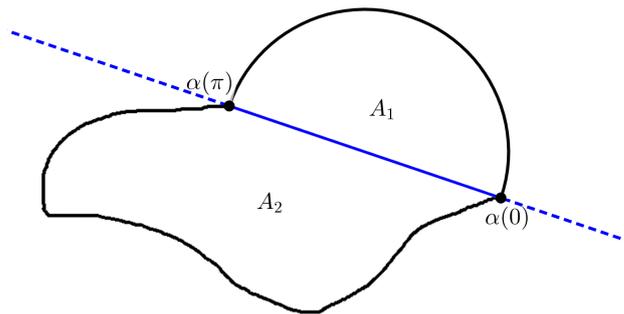


Figura 25 – A_1 deve ser limitada por um semicírculo para que seja máxima.

O processo para determinar a curva que, junto ao eixo, limita A_2 é análogo. No entanto, essa curva será um semicírculo como o que limita A_1 , mas agora utilizando como domínio $s \in [\pi, 2\pi]$. Dessa forma, a área limitada por α , que é a soma de A_1 com A_2 , será a máxima quando $\alpha(s) = (\cos(s) + c, \operatorname{sen}(s))$, $c \in \mathbb{R}$, $s \in [0, 2\pi]$. Ou seja, o círculo é a curva que limita a maior área, fixado um perímetro.

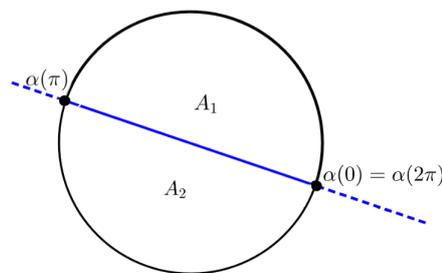


Figura 26 – A_2 também deve ser limitada por um semicírculo para que seja máxima.

4.4 O Problema Isoperimétrico: uma abordagem utilizando Séries de Fourier

Nesta seção partiremos para a próxima demonstração do Problema Isoperimétrico, em que iremos utilizar as séries de Fourier, definidas em 3.2.1 e cujos resultados estão descritos pelos teoremas da seção 3.2. Apesar de na seção 3.2 apresentarmos resultados discutidos por [9], o uso destas séries para a demonstração do problema é abordado por [1].

Chamemos de C uma curva fechada C^2 por partes de comprimento L que limita uma região de área A . Além disso, seja $\bar{\alpha} = (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ p.p.c.a. e sua reparametrização $\alpha(t) = \bar{\alpha}(f(t))$ em que $f(t) = L \left(\frac{1}{2} + t \right)$,

$t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, isto é,

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= [L \cdot \bar{x}'(f(t))]^2 + [L \cdot \bar{y}'(f(t))]^2 \\ &= L^2 [\bar{x}'(f(t))^2 + \bar{y}'(f(t))^2] \\ &= L^2. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.2.1, vemos que

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-2n\pi a_n \operatorname{sen}(2n\pi t) + 2n\pi b_n \cos(2n\pi t)] = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi [-a_n \operatorname{sen}(2n\pi t) + b_n \cos(2n\pi t)]$$

e, analogamente,

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi [-c_n \operatorname{sen}(2n\pi t) + d_n \cos(2n\pi t)].$$

Já pela Identidade de Parseval (3.2.2),

$$2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x'(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^2 (b_n^2 + (-a_n)^2) = \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.3)$$

e

$$2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (y'(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (c_n^2 + d_n^2). \quad (4.4)$$

Somando (4.3) e (4.4), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L^2 dt \\ &= L^2. \end{aligned}$$

Como já vimos, a área A pode ser obtida pela integral

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)y'(t) dt.$$

Pelo Corolário 3.2.2

$$\begin{aligned} A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)y'(t) dt &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot 2n\pi d_n + b_n \cdot 2n\pi(-c_n)) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (a_n d_n - b_n c_n). \end{aligned}$$

Logo,

$$L^2 - 4A\pi = \sum_{n=1}^{\infty} [2n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 4n\pi^2 (a_n d_n - b_n c_n)]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n)^2 + (nb_n)^2 + (nc_n)^2 + (nd_n)^2 - 2na_nd_n + 2nb_nc_n] \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - d_n)^2 - d_n^2 + (nd_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 - c_n^2 + (nc_n)^2] \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - d_n)^2 + d_n^2(n^2 - 1) + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2 - 1)].
\end{aligned}$$

Como todos os termos à direita da igualdade são não negativos, obtemos

$$L^2 - 4A\pi \geq 0.$$

Para que haja a igualdade é necessário que $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ quando $n > 1$, e que $b_1 = -c_1 = -c$ e $a_1 = d_1 = d$, caso $n = 1$. Assim, podemos escrever $x(t)$ e $y(t)$ simplesmente como:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + d \cos(2\pi t) - c \sin(2\pi t)$$

e

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + c \cos(2\pi t) - d \sin(2\pi t).$$

Podemos ainda notar que

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 = (d \cos(2\pi t) - c \sin(2\pi t))^2$$

e

$$\left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = (c \cos(2\pi t) + d \sin(2\pi t))^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 &= d^2 \cos^2(2\pi t) - 2cd \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) + c^2 \sin^2(2\pi t) + \\
&\quad + c^2 \cos^2(2\pi t) + 2cd \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) + d^2 \sin^2(2\pi t) \\
&= c^2 + d^2.
\end{aligned}$$

Ou seja, como chegamos à equação do círculo de centro em $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right)$ e de raio $\sqrt{c^2 + d^2}$, somente esta curva nos dá $L^2 - 4A\pi = 0$, solucionando o problema isoperimétrico.

4.5 O Problema Isoperimétrico: uma demonstração utilizando multiplicadores de Lagrange

Nesta abordagem é utilizado o conceito de multiplicadores de Lagrange que faz parte da teoria do Cálculo das Variações, que é uma evolução de problemas de otimização de funções. Um exemplo destes problemas de otimização é o Exemplo 4.5.1 abaixo. No entanto, antes disso, precisamos do resultado a seguir.

Teorema 4.5.1. *Seja uma função derivável definida em um aberto U , $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, e seja q um ponto de extremo relativo de F , então o gradiente de F em q é tal que $\nabla F(q) = 0$.*

A fim de maximizar ou minimizar uma função $F(x, y, z)$, dada uma restrição $G(x, y, z) = c$, em que c é uma constante, devemos encontrar as soluções do sistema de equações $\nabla F(x, y, z) = \lambda \nabla G(x, y, z)$, sendo λ uma constante. À equação $G(x, y, z) = c$ damos o nome de **vínculo** do problema de otimização.

Exemplo 4.5.1. Uma caixa retangular sem tampa é construída utilizando 12m^2 de papelão. Nesse caso podemos maximizar a função volume dada por $f = xyz$, sendo as dimensões x, y e z positivas. Nos é dada a área total do paralelepípedo, exceto uma de suas faces, portanto essa função é o nosso vínculo g e é dada por $g = 2xz + 2yz + xy$. Calculando os gradientes destas funções temos $\nabla f = (yz, xz, xy)$ e $\nabla g = (2z + y, 2z + x, 2x + 2y)$. Então, fazendo $\nabla F(x, y, z) = \lambda \nabla G(x, y, z)$, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z + y) & (A) \\ xz = \lambda(2z + x) & (B) \\ xy = \lambda(2x + 2y) & (C). \end{cases}$$

Fazendo $(A) \div (B)$ e $(C) \div (B)$, vemos que $x = y$ e que $y = 2z$, respectivamente. Logo,

$$2xz + 2yz + xy = g(x, y, z) = g(2z, 2z, z) = 12z^2 = 12 \Rightarrow z = 1$$

e $\{2, 2, 1\}$, são as dimensões que maximizam o volume da caixa.

Sob a ótica do Cálculo das Variações, o Problema Isoperimétrico é visto como um problema em que devemos encontrar a curva fechada α que torne máxima a integral

$$\frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y) dt \quad (\text{Área})$$

dada a restrição

$$\int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = L \quad (\text{Perímetro}).$$

Fixado o perímetro L , se α é a curva fechada simples e regular que é a solução do problema, podemos supor que α é p.p.c.a.. Seja R a região delimitada por α e $N(t)$ o vetor normal à curva em $\alpha(t)$. Da regularidade de α , existe um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que se $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável com

$$-\epsilon < f(t) < \epsilon, \quad t \in [0, L], \quad (4.5)$$

com $f(0) = f(L)$, então

$$\alpha_f(t) := \alpha(t) + f(t)N(t)$$

é uma curva fechada, regular e simples, delimitando uma região R_f .

Considere o espaço vetorial

$$\mathcal{F} = \{\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha \in C^2 \text{ e } \alpha(0) = \alpha(L)\}$$

e \mathcal{F}_ϵ o subconjunto de \mathcal{F} que contém a curva $O : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (definida por $O(t) = (0, 0)$) e todas as curvas f satisfazendo (4.5).

Utilizaremos a estrutura vetorial de \mathcal{F}_ϵ para trabalhar com as funções

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathcal{F}_\epsilon & \rightarrow & \mathbb{R} & \text{e} & \mathcal{L} : \mathcal{F}_\epsilon & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha_f & \mapsto & A(R_f) & & \alpha_f & \mapsto & \ell(\alpha_f) \end{array}$$

sendo $\mathcal{A}(\alpha_f) := \mathcal{A}(f) = A(R_f)$ e $\mathcal{L}(\alpha_f) := \mathcal{L}(f) = \ell(\alpha_f)$ a área e o perímetro de R_f , nessa ordem. Para resolvermos o Problema Isoperimétrico, devemos maximizar \mathcal{A} tal que \mathcal{L} seja constante.

Sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, temos

$$\alpha_f(t) := \alpha(t) + f(t)N(t) = (x(t) - f(t)y'(t), y(t) + f(t)x'(t)).$$

E, uma vez que $N'(t) = -k(t)\alpha'(t)$, sendo k a curvatura de α , teremos

$$\begin{aligned} \alpha'_f(t) &= \alpha'(t) + f'(t)N(t) + f(t)N'(t) \\ &= \alpha'(t)(1 - f(t)k(t)) + f'(t)N(t) \\ &= ((1 - k(t)f(t))x'(t) - f'(t)y'(t), (1 - k(t)f(t))y'(t) + f'(t)x'(t)). \end{aligned}$$

A partir destas equações, podemos escrever \mathcal{A} e \mathcal{L} em função de α e de f :

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^L \|\alpha'_f(t)\| dt = \int_0^L \sqrt{[(1 - kf)x' - f'y']^2 + [(1 - kf)y' + f'x']^2} dt.$$

Mas,

$$\begin{aligned} &[(1 - kf)x' - f'y']^2 + [(1 - kf)y' + f'x']^2 = \\ &= (1 - kf)^2(x')^2 - 2(1 - kf)x'f'y' + (f'y')^2 + (1 - kf)^2(y')^2 + 2(1 - kf)x'f'y' + (f'x')^2 \\ &= (1 - kf)^2\|\alpha'\|^2 + (f')^2\|\alpha'\|^2 = (1 - kf)^2 + (f')^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^L \sqrt{(1 - kf)^2 + (f')^2} dt.$$

Além disso, escrevendo $\alpha_f(t) = (x_f(t), y_f(t))$, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f) &= \frac{1}{2} \int_0^L (x_f y'_f - x'_f y_f) dt = \frac{1}{2} \int_0^L (x - fy')[(1 - kf)y' + f'x'] - (y + fx')[(1 - kf)x' - f'y'] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (xy' + fxx'' + f'xx' - fy'y' - f^2x''y' - ff'x'y' - x'y + fyy'' + f'yy' - fx'x' \\ &\quad + f^2x'y'' + ff'x'y') dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (xy' - x'y) dt + \frac{1}{2} \int_0^L (fxx'' + fyy'' - fx'x' - fy'y' + f'xx' + f'yy' + 2fx'x' + 2fy'y') dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (f^2x'y'' - f^2x''y' - 2fx'x' - 2fy'y') dt \\ &= A(R) + \frac{1}{2} \int_0^L [f(xx'' + x'x' + yy'' + y'y') + f'(xx' + yy')] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L [f^2(k(x')^2 + k(y')^2) - 2f\|\alpha'\|^2] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(R) + \frac{1}{2} \int_0^L (f^2 k - 2f) dt + \frac{1}{2} \int_0^L [f(xx' + yy')' + f'(xx' + yy')] dt \\
&= A(R) + \frac{1}{2} \int_0^L [f(xx' + yy')] dt - \int_0^L \left(1 - \frac{k}{2} f\right) f dt.
\end{aligned}$$

Como

$$f(xx' + yy') = f\langle(x, y), (x', y')\rangle = f\langle\alpha, \alpha'\rangle$$

e

$$\langle\alpha, \alpha'\rangle = \langle\alpha, \alpha'\rangle + \langle\alpha', \alpha\rangle = 2\langle\alpha, \alpha'\rangle \Rightarrow \langle\alpha, \alpha'\rangle = \frac{\langle\alpha, \alpha'\rangle}{2} = \frac{(x^2 + y^2)'}{2} = \frac{1'}{2} = 0,$$

então,

$$\mathcal{A}(f) = A(R) - \int_0^L \left(1 - \frac{k}{2} f\right) f dt.$$

O equivalente ao teorema dos multiplicadores de Lagrange na teoria do Cálculo das Variações é o Teorema de Euler (veja p. 62 de [6]). Tal teorema aplicado ao nosso estudo é traduzido como

$$\nabla\mathcal{A}(0) = \lambda\nabla\mathcal{L}(0) \tag{4.6}$$

em que

$$\nabla\mathcal{A}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(0 + hv) - \mathcal{A}(0)}{h}$$

e

$$\nabla\mathcal{L}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(0 + hv) - \mathcal{L}(0)}{h},$$

sendo v uma função pertencente ao conjunto \mathcal{F}_e . De modo que (4.6) é escrito como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(0 + hv) - \mathcal{A}(0)}{h} = \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(0 + hv) - \mathcal{L}(0)}{h}.$$

Desenvolvendo os limites, vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(0 + hv) - \mathcal{A}(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[A(R) - \int_0^L \left(1 - \frac{k}{2} hv\right) hv dt - (A(R) - 0) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^L - \left(1 - \frac{k}{2} hv\right) v dt = - \int_0^L v dt
\end{aligned}$$

e que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(0 + hv) - \mathcal{L}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\int_0^L \sqrt{(1 - khv)^2 + h^2(v')^2} - 1 \right] dt}{h}.$$

Suponhamos que possamos proceder da seguinte forma:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\int_0^L \sqrt{(1 - khv)^2 + h^2(v')^2} - 1 \right] dt}{h} = \int_0^L \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt{(1 - khv)^2 + h^2(v')^2} - 1 \right) \right] dt.$$

Sabemos que, dada uma função g ,

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Então, tomando $g(h) = \sqrt{(1 - khv)^2 + h^2(v')^2}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(0 + hv) - \mathcal{L}(0)}{h} = \int_0^L \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \right) dt = \int_0^L g'(0) dt$$

e

$$g'(h) = \frac{2(1 - hkv)kv + 2h(v')^2}{2\sqrt{(1 - hkv)^2 + h^2(v')^2}} \Rightarrow g'(0) = kv.$$

Por isso,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(0 + hv) - \mathcal{L}(0)}{h} = \int_0^L g'(0) dt = \int_0^L kv dt.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(0 + hv) - \mathcal{A}(0)}{h} = \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(0 + hv) - \mathcal{L}(0)}{h} \Rightarrow - \int_0^L v dt = \lambda \int_0^L kv dt,$$

Resultando em

$$\int_0^L (v + \lambda kv) dt = 0 \Rightarrow \int_0^L (1 + \lambda k)v dt = 0 \forall v \in \mathcal{F}.$$

Escolhendo $v = 1 + \lambda k \in \mathcal{F}$,

$$\int_0^L (1 + \lambda k)^2 dt = 0 \Rightarrow 1 + \lambda k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{\lambda}.$$

Ou seja, a curva que é a solução do Problema Isoperimétrico possui a função curvatura $k(t)$ constante em $[0, L]$, o que ocorre apenas se α é uma reta ($k = 0$) ou um círculo ($k \neq 0$), sendo a segunda opção a que se encaixa à nossa situação.

Variações do Problema Isoperimétrico

5.1 O Problema de Plateau: uma variação do problema isoperimétrico

A partir desta seção iremos abordar o Problema Isoperimétrico não mais em \mathbb{R}^2 , mas no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . Agora porém, deixamos de fixar o perímetro de uma curva e passamos a fixar a projeção de uma superfície no plano xOy , buscando minimizar a área desta superfície. Além disso, neste trabalho consideraremos apenas os casos em que a superfície seja o gráfico de uma função.

Nessa seção particularmente, iremos discutir um problema que enunciamos no teorema abaixo, apresentado na referência [3].

Teorema 5.1.1 (Problema de Plateau). *Fixada uma curva simples e fechada $C \subset \mathbb{R}^3$, existe uma superfície parametrizada diferenciável*

$$\begin{aligned} X : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

que se estende continuamente ao bordo ∂D de D , tal que

$$X(\partial D) = C.$$

Além disso, a área de $X(D)$ é a menor dentre todas as outras superfícies com as mesmas propriedades.

Como o caso geral do Teorema 5.1.1 exige muitas ferramentas das quais não dispomos no momento, partiremos para o caso em que D é o disco centrado na origem em $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.



Figura 27 – Exemplo de curva C , em azul escuro, e D , logo abaixo.

Iremos supor aqui que a superfície que soluciona o problema de Plateau para a curva C é um gráfico de uma função

$$u : D \rightarrow \mathbb{R}$$

e que a curva C é dada pelo gráfico

$$\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$$

em que $\phi = u|_{\partial D}$.

Usando técnicas de Cálculo de Variações, queremos demonstrar que u satisfaz a equação diferencial:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0 \text{ em } D$$

o que equivale simplesmente a

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0.$$

Lema 5.1.1. *Se C é o gráfico de uma função e satisfaz o teorema 5.1.1, a equação diferencial*

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0 \text{ em } D$$

é equivalente à

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0.$$

Demonstração. De fato, há essa equivalência. Vejamos:

Admitindo que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0 \text{ em } D$$

e sabendo que, ao tomarmos $f = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$ e $F = \nabla u$, é válida a propriedade

$$\operatorname{div}(fF) = \langle \nabla f, F \rangle + f \cdot \operatorname{div} F,$$

vemos que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = \langle \nabla f, \nabla u \rangle + f \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \langle (f_x, f_y), (u_x, u_y) \rangle + f(u_{xx} + u_{yy}).$$

Como

$$f_x = -\frac{(1 + \|\nabla u\|^2)^{-\frac{3}{2}}}{2} (2u_x u_{xx} + 2u_y u_{xy}) = -(1 + \|\nabla u\|^2)^{-\frac{3}{2}} (u_x u_{xx} + u_y u_{xy})$$

e, analogamente,

$$f_y = -(1 + \|\nabla u\|^2)^{-\frac{3}{2}} (u_x u_{xy} + u_y u_{yy}),$$

então,

$$\langle \nabla f, \nabla u \rangle = f_x u_x + f_y u_y = -(1 + \|\nabla u\|^2)^{-\frac{3}{2}} (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}).$$

Logo,

$$\operatorname{div}(fF) = 0 \iff -(1 + \|\nabla u\|^2)^{-\frac{3}{2}} (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}) + f(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -f^3 (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}) + f(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\
&\Leftrightarrow f^2 (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}) = u_{xx} + u_{yy} \\
&\Leftrightarrow u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = (u_{xx} + u_{yy})(1 + \|\nabla u\|^2) \\
&\Leftrightarrow u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + u_x^2 u_{xx} + u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} \\
&\Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} + u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 + u_x^2) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2) u_{xx} = 0.
\end{aligned}$$

□

Então, consideremos o resultado a seguir, que é uma restrição do Teorema 5.1.1.

Teorema 5.1.2 (Problema de Plateau no Disco). *Se $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 cujo gráfico $G_r(u) \in \mathbb{R}^3$ tem a menor área dentre todos os gráficos cuja fronteira é a curva fechada e simples $C \subset \mathbb{R}^3$. Então u é solução do **Problema de Dirichlet**:*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0, & \text{em } D \\ u = \phi, & \text{em } \partial D. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $u \in C^2(D)$, isto é, definida no disco fechado e com derivadas contínuas até a segunda ordem. Podemos parametrizar $S := G_r(u)$ por

$$\Psi : (x, y) \in D \rightarrow (x, y, u(x, y)).$$

Dessa forma, $\Psi_x = (1, 0, u_x)$ e $\Psi_y = (0, 1, u_y)$ formam uma base de vetores tangentes a S em $\Psi(x, y)$. Se fizermos o produto vetorial $\Psi_x \times \Psi_y$, vemos que o elemento de área de S é dado por

$$dA = \|\Psi_x \times \Psi_y\| dx dy = \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} dx dy.$$

Logo,

$$A(S) = \iint_S dA = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} dx dy.$$

Se escolhermos $g \in C^2(D)$ tal que $g|_C = 0$, ou seja, g restrita a C seja igual a 0, então temos que $G_r(u + g)$ tem o mesmo bordo que $G_r(u)$. Seja u tal que $A(G_r(u)) \leq A(G_r(u + g))$ para toda g . Sendo $A(g) := A(G_r(u + g))$, com a notação introduzida na Seção 4.5, temos que $\nabla A(0) = 0$, ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(0 + hv) - A(0)}{h}$$

para toda $v \in C^2(D)$ com $v|_{\bar{C}} = 0$. Como

$$A(0 + hv) = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla(u + hv)\|^2} dx dy$$

e

$$A(0) = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \, dx dy,$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(hv) - A(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \iint_D \left(\sqrt{1 + \|\nabla(u + hv)\|^2} - \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \right) dx dy \right] \\ &= \iint_D \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt{1 + \|\nabla(u + hv)\|^2} - \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Sendo $g(h) = \sqrt{1 + \|\nabla u + h\nabla v\|^2}$, temos que

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt{1 + \|\nabla(u + hv)\|^2} - \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \right).$$

Mas, vemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u + h\nabla v\|^2 &= \langle \nabla u + h\nabla v, \nabla u + h\nabla v \rangle \\ &= \langle \nabla u, \nabla u \rangle + h^2 \langle \nabla v, \nabla v \rangle + 2h \langle \nabla u, \nabla v \rangle \\ &= \|\nabla u\|^2 + h^2 \|\nabla v\|^2 + 2h \langle \nabla u, \nabla v \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} g(h) &= \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + h^2 \|\nabla v\|^2 + 2h \langle \nabla u, \nabla v \rangle} \\ \Rightarrow g'(h) &= \frac{2h \|\nabla v\|^2 + 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle}{2\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + h^2 \|\nabla v\|^2 + 2h \langle \nabla u, \nabla v \rangle}} \\ &= \frac{h \|\nabla v\|^2 + \langle \nabla u, \nabla v \rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + h^2 \|\nabla v\|^2 + 2h \langle \nabla u, \nabla v \rangle}} \end{aligned}$$

e

$$g'(0) = \frac{\langle \nabla u, \nabla v \rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}.$$

Então, retomando no cálculo da integral, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(hv) - A(0)}{h} &= \iint_D [g'(0)] \, dx dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\langle \nabla u, \nabla v \rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Além disso, por propriedade do divergente, temos que

$$\frac{\langle \nabla u, \nabla v \rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} = \operatorname{div} \left(v \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) - v \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right).$$

Por isso,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(hv) - A(0)}{h} = 0 \iff \iint_D \left[\frac{\langle \nabla u, \nabla v \rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right] dx dy = 0$$

$$\iff \iint_D \operatorname{div} \left(v \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) dx dy - \iint_D v \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) dx dy = 0.$$

Mas, como $v|_{\bar{C}} = 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(hv) - A(0)}{h} = 0 \iff 0 - \iint_D v \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) dx dy = 0.$$

Sendo v arbitrário, há um u que satisfaça essa equação. De fato, podemos exemplificar um valor para v , a fim de esboçar uma possível solução. Seja r o raio de D , tomando

$$v(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in B_{\frac{r}{2}} \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin B_{\frac{3r}{4}} \end{cases},$$

com $v \in C^2(D)$, temos, nesse caso,

$$\begin{aligned} & \iint_D v \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) dx dy = \\ &= \iint_{B_{\frac{r}{2}}} v \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) dx dy + \iint_{B_{\frac{3r}{4}} \setminus B_{\frac{r}{2}}} v \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

pois, ambas as integrais que são termos da última equação são zero (são, a princípio, não negativas). \square

De fato, a curvatura média do gráfico de uma função $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pela expressão

$$2H = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right).$$

Como $u(x, y)$ é o gráfico de uma função, seja $U(x, y) = (x, y, u(x, y))$. Assim, $U_x = (1, 0, u_x)$, $U_y = (0, 1, u_y)$ e $\|U_x \times U_y\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} \neq 0$, para algum (x, y) . Além disso, os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas são

$$E = \langle U_x, U_x \rangle = \|U_x\|^2 = u_x^2 + 1; \quad e = \langle U_{xx}, N \rangle = \frac{u_{xx}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}};$$

$$F = \langle U_x, U_y \rangle = u_x u_y; \quad f = \langle U_{xy}, N \rangle = \frac{u_{xy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}};$$

$$G = \langle U_y, U_y \rangle = \|U_y\|^2 = u_y^2 + 1; \quad g = \langle U_{yy}, N \rangle = \frac{u_{yy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}}.$$

$$\Rightarrow 2H = \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(1 + \|\nabla u\|^2) \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}.$$

Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) &= -\frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{(1 + \|\nabla u\|^2) \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} + \frac{u_{xx} + u_{yy}}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \\ &= \frac{(u_{xx} + u_{yy})(1 + u_x^2 + u_y^2) - u_x^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} - u_y^2 u_{yy}}{(1 + \|\nabla u\|^2) \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(1 + \|\nabla u\|^2) \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \\
&= 2H.
\end{aligned}$$

Portanto, os gráficos que solucionam o problema de Plateau no disco são superfícies mínimas.

5.2 O Problema Isoperimétrico no \mathbb{R}^3

Considerando ainda o espaço o \mathbb{R}^3 , o Problema Isoperimétrico busca responder a seguinte pergunta: Quais são as superfícies compactas regulares em \mathbb{R}^3 que, dentre as demais de mesma área fixa, englobam o volume máximo? Assim, nosso objetivo nessa seção é discutirmos o resultado a seguir, que aparece na referência [8].

Teorema 5.2.1. *Para todas as superfícies compactas, regulares e convexas $M \in C^2$ que encerram algum volume, isto é, que não possuem bordo, temos*

$$[A(M)]^3 \geq 36\pi[V(M)]^2.$$

A prova que aqui apresentaremos não é completa, pois introduzimos a hipótese de que M possa ser bissectada por um plano de tal modo que a projeção ortogonal dos dois setores formados seja um disco. Nela, utilizamos ideias similares às adotadas no teorema 4.2.1.

Demonstração. Suponhamos que o plano $z = 0$ intercepte a superfície M ao longo de um círculo, centrado na origem e de raio r , que a divida em duas regiões, de tal forma que as projeções ortogonais destas regiões sejam o interior do disco. Chamemos de S a esfera de raio r e centro na origem e de $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ uma das parametrizações locais de M . A partir de $X(u, v)$, podemos parametrizar S por

$$\bar{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), \pm \sqrt{r^2 - x(u, v)^2 - y(u, v)^2}).$$

Consideremos θ_i e $\bar{\theta}_i$ os ângulos entre os eixos coordenados ($i \in \{1, 2, 3\}$ representando os eixos x, y, z) e as normais a M e S (respectivamente, $N = (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3)$ e $\bar{N} = (\cos \bar{\theta}_1, \cos \bar{\theta}_2, \cos \bar{\theta}_3)$). E sejam $d\sigma_i$ e $\bar{d}\sigma_i$ os elementos de área de M e S , mantida esta ordem, temos que:

$$\begin{aligned}
\cos \theta_3 d\sigma_3 &= \langle N, e_3 \rangle \|X_u \times X_v\| dudv \\
&= \frac{(x_u y_v - x_v y_u)}{\|X_u \times X_v\|} \|X_u \times X_v\| dudv \\
&= (x_u y_v - x_v y_u) dudv
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\cos \bar{\theta}_3 \bar{d}\sigma_3 &= \langle \bar{N}, e_3 \rangle \|\bar{X}_u \times \bar{X}_v\| dudv \\
&= \frac{(x_u y_v - x_v y_u)}{\|\bar{X}_u \times \bar{X}_v\|} \|\bar{X}_u \times \bar{X}_v\| dudv \\
&= (x_u y_v - x_v y_u) dudv.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\cos \theta_3 d\sigma_3 = \cos \bar{\theta}_3 \bar{d}\sigma_3 = (x_u y_v - x_v y_u) dudv.$$

Portanto,

$$V(M) = \iint_M x \cos \theta_1 d\sigma = \iint_M y \cos \theta_2 d\sigma$$

e

$$V(S) = \iint_M \bar{z} \cos \theta_3 d\sigma = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Se fizermos $2V(M) + \frac{4}{3}\pi r^3$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2V(M) + \frac{4}{3}\pi r^3 &= \iint_M \langle \bar{X}(u, v), N(u, v) \rangle d\sigma \\ &\leq \iint_M \|\langle \bar{X}(u, v), N(u, v) \rangle\| d\sigma \\ &\leq \iint_M \|\bar{X}(u, v)\| \cdot \|N(u, v)\| d\sigma. \end{aligned}$$

Ressaltamos que a última das desigualdades da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como, $\|\bar{X}(u, v)\| = r$ e $\|N(u, v)\| = 1$,

$$2V(M) + \frac{4}{3}\pi r^3 \leq r \iint_M d\sigma = r \cdot A(M).$$

No entanto, pela Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica, temos

$$\begin{aligned} r \cdot A(M) &\geq 2V(M) + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3V(M) + 3V(M) + 4\pi r^3}{3} \\ &\geq \sqrt[3]{36\pi[V(M)]^2 r^3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A(M) \geq \sqrt[3]{36\pi[V(M)]^2},$$

ou seja,

$$[A(M)]^3 \geq 36\pi[V(M)]^2.$$

□

É possível observar que a igualdade na última equação é realizada pela esfera, sendo, portanto, a superfície que mantida a área fixa englobe o maior volume. Isso porque o volume da esfera é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$ e a área por $4\pi r^2$.

Logo,

$$\begin{aligned} [A(M)]^3 &= (4\pi r^2)^3 = 64\pi^3 r^6 \\ 36\pi[V(M)]^2 &= 36\pi \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2 = 64\pi^3 r^6. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [A(M)]^3 = 36\pi[V(M)]^2.$$

Explorando resultados no Geogebra

O Geogebra é um *software* livre de Geometria Dinâmica com uma variedade de ferramentas que permitem explorar a geometria, álgebra e estatística, por exemplo, inclusive de maneira simultânea. Disponível em várias versões, o Geogebra vem se tornando uma das maiores tecnologias para o ensino de matemática dos últimos tempos. Alguns dos fatores do *software* que contribuem para sua consolidação na posição de uma boa tecnologia para o ensino são sua versatilidade, gratuidade e de fácil acesso.

Pensando nisso, além de utilizar o *software* como ferramenta de produção de algumas das imagens que ilustram este trabalho, achamos de grande valia dedicar parte dele à exploração de maneira lúdica e dinâmica alguns dos resultados mais triviais obtidos na seção 4.1.

6.1 O caso dos triângulos de lado fixado

A primeira atividade a ser explorada ilustra a situação em que o polígono em questão são triângulos, afim de verificarmos, ainda que de modo superficial, que o triângulo isósceles possui a maior área dentre os demais triângulos de mesmo perímetro e com um dos lados fixado.

Esta atividade está disponível em: <https://www.geogebra.org/m/adnexpd>

Inicialmente, devemos configurar a medida do lado fixado. Isto pode ser feito deslocando os vértices A e B (em preto), conforme se deseje. Depois disto fixaremos esta medida, ou seja, não iremos mais deslocar estes vértices.

Deslocaremos agora o vértice C (em azul), desconsiderando os casos em que os três pontos são colineares. Observando o perímetro e a área dados na parte superior da tela, como na figura 28, podemos perceber que:

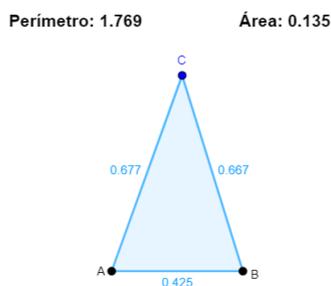


Figura 28 – Exemplo de triângulo isósceles.

1. mover o ponto C não altera o perímetro do triângulo;
2. entre todos os triângulos de mesmo perímetro e de cuja medida \overline{AB} está fixada, quanto mais próximas as medidas dos demais lados, maior a área, de modo que o isósceles seja o de maior área possível.

Neste caso, ao mover o ponto C o perímetro é mantido pois este ponto pertence à elipse de focos A e B , ou seja, a soma das medidas dos lados não fixados é constante. Esta mesma estratégia será utilizada em atividades de outras seções deste capítulo.

6.2 Polígonos: convexos versus côncavos

Partiremos agora para a atividade de exploração que tem como objetivo mostrar que os polígonos convexos têm áreas maiores que os polígonos não convexos, conforme a Observação 4.1.1.

A atividade produzida está disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mt8pz2cs>

Aqui escolhemos trabalhar com um pentágono, mas atividades como esta podem ser feitas com polígonos com outro número de lados.

O primeiro passo para explorar este resultado é deslocar os vértices vermelhos para o local que se deseje. Depois disso, só iremos mover os vértices em verde. Fixados os vértices em vermelho, observe o perímetro dado na parte superior da tela. Então mova os vértices em verde e observe o que ocorre com a área e com o perímetro.

Três situações diferentes podem ocorrer, conforme a figura 29. Os vértices podem não formar um pentágono, podem formar um pentágono convexo ou podem formar um pentágono não convexo. O primeiro caso deve ser desconsiderado.

Ao observar o que ocorre com a área ao deslocarmos os vértices verdes do pentágono, podemos concluir que dentre demais pentágonos de mesmo perímetro,

1. os pentágonos convexos possuem área maior que os não convexos;
2. os pentágonos convexos possuem maior área conforme a medida dos dois lados que contém um vértice verde se aproximam.

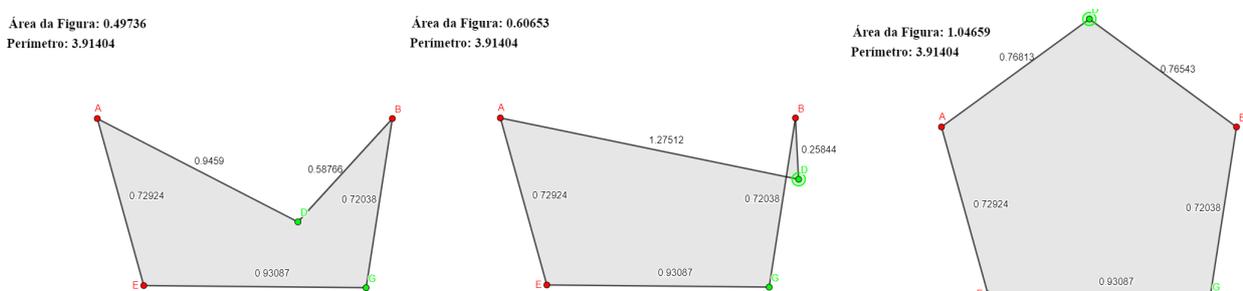


Figura 29 – Exemplo de pentágono não convexo, exemplo em que não se tem um polígono e exemplo de pentágono convexo (da esquerda para a direita).

6.3 O caso dos retângulos

A atividade desta seção foi pensada de modo que possamos ter uma intuição do resultado garantido pelo Teorema 4.1.2.

A atividade criada nesta seção está disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/qcrtpbmv>

Como iremos trabalhar com retângulos de perímetros fixados, o primeiro passo é inserir na caixa de texto "Perímetro" um valor positivo. Depois disso, os retângulos que possuem este valor fixado como perímetro podem ser visualizados ao movermos o ponto azul, como na figura 30.

Variando a posição do ponto azul e observando as diferentes áreas obtidas, podemos concluir que o retângulo de maior área é, de modo particular, um quadrado.

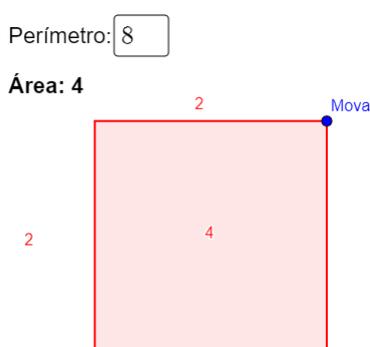


Figura 30 – Exemplo de retângulo que maximiza a área.

6.4 O caso dos polígonos regulares

Outro resultado que pode ser ligeiramente percebido por meio de uma atividade no Geogebra é o teorema 4.1.4. A atividade em questão está disponível em <https://www.geogebra.org/classic/wgwevggr>

O primeiro passo é determinar quanto vale o perímetro a ser fixado. Para isso basta que se insira na caixa de texto este valor. Posteriormente, deve-se mudar o controle deslizante que determina o número de lados do polígono regular a ser criado. A área deste polígono é dada na parte superior da tela.

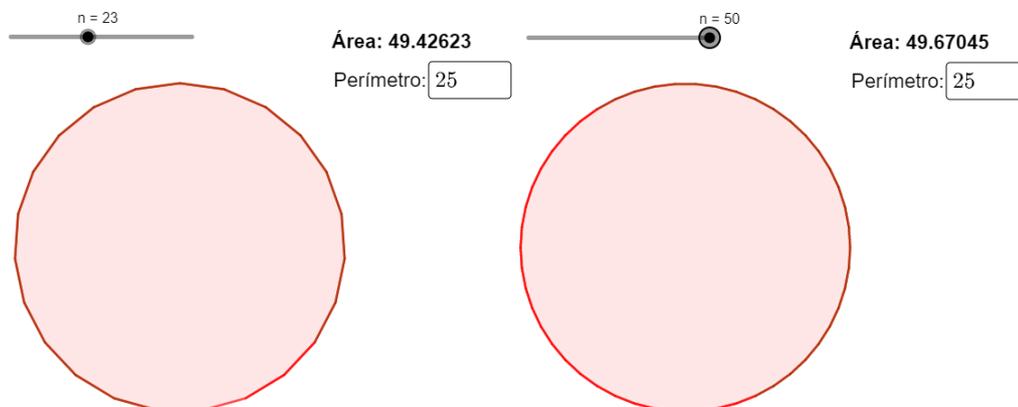


Figura 31 – Polígonos isoperimétricos regulares de 23 e 50 lados, respectivamente.

Observando o comportamento da área conforme se aumenta (ou diminui) o número de lados, é possível perceber que, por mais que o perímetro seja mantido, a área aumenta (ou diminui) conforme o número de lados fica maior (ou menor).

A figura 31 representa dois polígonos que podem ser construídos por meio desta atividade quando o perímetro fixado é 25. Apesar disso, a área indicada é superior no polígono com mais lados.

6.5 O caso do triângulo com dois lados fixos

Este último caso não se trata de um problema isoperimétrico, isto é, o perímetro não é fixo, mas ainda assim buscamos otimizar a área de um polígono. Neste caso a área a ser fixada é a de um triângulo cujo dois lados são dados. Queremos chegar a conclusão de que o triângulo com a maior área é aquele onde os dois lados dados são perpendiculares, conforme nos garante o teorema 4.1.2.

A atividade está disponível em <https://www.geogebra.org/classic/mhzcturm>

Inicialmente deve-se inserir as medidas dos lados a serem fixados. Dadas as medidas, um triângulo é formado. Movendo o vértice destacado obtemos vários triângulos com dois lados com medidas dadas, como na figura 32. Se nos atentarmos aos valores assumidos pela área e pelo ângulo dados, simultaneamente, podemos ver que o triângulo de maior área é aquele que é retângulo no ângulo destacado. Ou seja, quanto mais próximo de 90° o ângulo destacado estiver, maior a área.

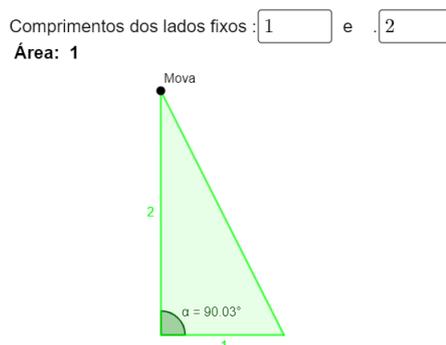


Figura 32 – Exemplo de triângulo construído com lados de comprimentos fixos 1 e 2.

Conclusão

Problemas de otimização, ou problemas de máximos e mínimos, se destacam por propor encontrar soluções que alcancem um objetivo determinado. Neste trabalho estudamos um dos mais clássicos problemas de otimização, dito Problema Isoperimétrico. Nele o objetivo a ser alcançado era encontrar a maior área possível dentre as curvas de comprimento fixo. O objetivo principal deste trabalho foi estudar este problema, o demonstrando a partir de várias óticas distintas.

Inicialmente, estudamos o contexto histórico no qual o problema está inserido, seja em sua mais famosa citação em Eneida [12], na lenda épica da princesa Dido, ou em suas possíveis consequências nas cidades medievais, como em seu urbanismo com as muralhas circulares que poupavam tempo, gasto e esforço. Por mais que pareça trivial dizer que o círculo engloba a maior área dentre as demais curvas fechadas de mesmo período, vimos que demonstrações com maior rigor e aceitação vieram a surgir somente em 1870, com Weierstrass.

No quarto capítulo, estudamos as demonstrações do Problema Isoperimétrico clássico, restrito ao \mathbb{R}^2 . Na primeira seção deste capítulo, nos restringimos aos polígonos. Se o número de lados destes polígonos fosse fixo, concluímos que a solução seria o polígono regular. Eliminando cada vez mais restrições, vimos que todo polígono possui área menor que o círculo de mesmo perímetro, resultado atribuído a Zenodorus. Nas seções 4.2 e 4.3, trabalhamos com as curvas no geral, e não somente os polígonos, e ainda assim encontramos o círculo como solução do Problema Isoperimétrico. As demonstrações adotadas nestas seções são mais construtivas, no entanto, demonstrações mais algébricas também podem ser utilizadas, como as das seções 4.4 e 4.5. Na primeira utilizamos a representação de uma função por meio de sua série de Fourier, enquanto na segunda nos aproximamos mais da teoria do Cálculo das Variações.

Assim como antes de abordar o Problema Isoperimétrico em sua forma mais clássica, a restringimos, estudamos também variações do problema, desconsiderando a restrição do problema ao plano. Estas variações foram exploradas no capítulo 5. A primeira busca solucionar o problema de Plateau no disco, um clássico problema de otimização em \mathbb{R}^3 , e compõe a seção 5.1. Nela concluímos que dentre as superfícies que são gráfico de uma função cujo domínio é o disco unitário em \mathbb{R}^2 de centro na origem a de menor área é uma superfície mínima. Já na outra seção deste capítulo vimos que a esfera é a superfície que maximiza o volume, quando consideramos todas aquelas que são compactas, regulares, convexas e que compreendem algum volume, dada uma área fixada.

Por fim, utilizamos o software livre de geometria dinâmica Geogebra, ferramenta que tem ganhado espaço na área da educação, para explorar visualmente alguns resultados obtidos na primeira seção do capítulo 4. As atividades criadas não substituem de maneira alguma as demonstrações apresentadas, mas podem ser aliadas para a compreensão de cada resultado. Além disso, elas tornam possível uma abordagem destes resultados para um público menos exigente quanto às demonstrações.

Referências

- [1] Viktor Blåsjö. The isoperimetric problem. *The American Mathematical Monthly*, 112(6):526–566, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 46.
- [2] Djairo G de Figueiredo. Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana. *Matemática Universitária, números*, 9, 1989. Citado na página 40.
- [3] Patrícia Kruse Klaser and Miriam Telichevesky. O problema isoperimétrico. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 53.
- [4] Steven R Lay. *Convex sets and their applications* john wiley & sons. *New York*, 1982. Citado na página 13.
- [5] Elon Lages Lima. *Análise real*, volume 1. IMPA Rio de Janeiro, 2004. Citado na página 13.
- [6] José Alex Ferreira Silva Lima et al. Introdução ao cálculo variacional e problemas de otimização aplicados no ensino básico. 2019. Citado na página 51.
- [7] Roberto Limberger. Abordagens do problema isoperimétrico. 2012. Citado na página 15.
- [8] Francesco Mercuri and Renato Luna Pedrosa. Uma introdução às desigualdades isoperimétricas. 1993. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 58.
- [9] Reginaldo J Santos. Tópicos de equações diferenciais. *Belo Horizonte*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 46.
- [10] James Stewart. *Cálculo, Volume I*. Cengage Learning, 2013. Citado na página 41.
- [11] Keti Tenenblat. *Introdução à geometria diferencial*. Editora Blucher, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 30.
- [12] P. Virgílio. *Eneida. Tradução de Manuel Odorico Mendes. Disponível em*, volume <http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html>. (acessado em 07/09/2022). Citado 3 vezes nas páginas 13, 15 e 65.