



Ministério da Educação  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas  
Departamento de Matemática



# **Sistemas autônomos bidimensionais: definições, exemplos e aplicações**

Paulo Gleison Rodrigues Cordeiro

Ouro Preto MG  
2018

Paulo Gleison Rodrigues Cordeiro

# **Sistemas autônomos bidimensionais: definições, exemplos e aplicações**

Monografia apresentada ao Curso de Matemática  
Licenciatura da Universidade Federal de Ouro  
Preto como parte dos requisitos necessários para a  
obtenção do grau em Licenciado em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel

Ouro Preto - MG  
12 de dezembro de 2018



UFOP  
Universidade Federal  
de Ouro Preto



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
**Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)**  
Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática



**Ata da sessão pública para julgamento da Monografia de conclusão de curso de Paulo Gleison Rodrigues Cordeiro, na área de Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto.**

Aos doze dias do mês de dezembro de dois mil e dezoito, às 17h00min, no auditório do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, reuniu-se a Comissão Julgadora composta pelos professores: Felipe Rogério Pimentel (orientador), Éder Marinho Martins e Monique Rafaella Anunciação de Oliveira para avaliação da monografia do aluno Paulo Gleison Rodrigues Cordeiro, intitulada **“Sistemas Autônomos Bidimensionais: definições, exemplos e aplicações”**. A sessão pública foi aberta pelo professor Felipe Rogério Pimentel, Presidente da Comissão Julgadora e orientador, que após formalidades de praxe passou a palavra ao aluno para apresentação oral e, em seguida, arguição pelos membros da Banca. Terminada a arguição, a Comissão reuniu-se em sessão secreta para julgamento e expedição do resultado final e decidiu pela aprovação da Monografia, por unanimidade. O resultado foi comunicado publicamente ao aluno pelo presidente da comissão. Nada havendo mais a tratar, foi encerrada a sessão da qual lavrou-se a presente ata que vai assinada pela Comissão Julgadora. Ouro Preto, 12 de dezembro de 2018.

Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Presidente

Prof. Dr. Éder Marinho Martins  
Universidade Federal de Ouro Preto

Prof.<sup>a</sup> M.<sup>a</sup> Monique Rafaella Anunciação de Oliveira  
Universidade Federal de Ouro Preto

# Resumo

Modelos matemáticos de dinâmica populacional dos mais simples podem dar uma boa ideia da dinâmica de populações na natureza. Por outro lado, estes modelos geralmente envolvem um sistema autônomo não linear de equações diferenciais ordinárias. O objetivo desse trabalho é iniciar um estudo qualitativo de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias não lineares. Nosso foco principal será o estudo dos sistemas bidimensionais. Mostraremos que podemos aproximar localmente sistemas não lineares a sistemas lineares associados, portanto faremos preliminarmente um estudo completo dos sistemas lineares bidimensionais e de seus planos de fase através de exemplos.

**Palavras-chave:** EDO, Sistemas Lineares, Sistemas não lineares, Sistemas Dinâmicos, Modelagem.

# Abstract

Mathematical models of population dynamics of the simplest can give a good idea of the dynamics of populations in nature. On the other hand, these models usually involve an autonomous nonlinear system of ordinary differential equations. The objective of this work is to initiate a qualitative study of Nonlinear Ordinary Differential Equation Systems. Our main focus will be the study of two-dimensional systems. We will show that we can approximate nonlinear systems locally to associated linear systems, so we will preliminarily make a thorough study of two-dimensional linear systems and their phase planes through examples.

**Keywords:** Diferencial Equation, Linear Systems, Nolinear Systems, Dynamical Systems, Mathematical modeling.

# Lista de figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Exemplo do Campo $X(x, y) = (-2y, x)$ . . . . .  | 7  |
| Figura 2 – Campo genérico . . . . .   | 8  |
| Figura 3 – Estabilidade Assintótica (a) e Estabilidade (b) . . . . .  | 8  |
| Figura 4 – Caso $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$ . . . . .  | 11 |
| Figura 5 – Caso $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ . . . . .   | 12 |
| Figura 6 – Caso $c_1 > 0$ e $c_2 < 0$ . . . . .   | 13 |
| Figura 7 – Caso $c_1 < 0$ e $c_2 < 0$ . . . . .   | 13 |
| Figura 8 – Caso $c_1 < 0$ e $c_2 > 0$ . . . . .   | 14 |
| Figura 9 – Plano de fase do sistema linear bidimensional para o caso $\lambda_1 = 3$ ,<br>$\lambda_2 = -1$ . Aqui os autovalores tem sinais contrários e, portanto, a<br>origem é um ponto de sela. . . . . | 14 |
| Figura 10 – Plano de fase do sistema linear para o caso em que os autovalores tem<br>o mesmo sinal. Aqui a origem é um nó atrator ( $\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = -3$ ). . . . .                          | 16 |
| Figura 11 – Plano de fase para o caso $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ . A origem é assintoticamente<br>estável (foco estável). . . . .  | 19 |
| Figura 12 – Plano de fase para as órbitas dadas em (3.44). Quando $t \rightarrow +\infty$ ,<br>verifica-se na equação (3.44) que a orientação das trajetórias ocorre no<br>sentido anti-horário . . . . .   | 20 |
| Figura 13 – Nós próprios onde $\lambda$ está associado a dois autovetores l.i. . . . .  | 21 |
| Figura 14 – Plano de fase para (3.58) onde $\lambda > 0$ e este gera apenas um autovetor<br>independente . . . . .  | 23 |
| Figura 15 – (a) Plano de fase gerado numericamente utilizando software Octave (b)<br>Plano de fase genérico explicitando o comportamento das trajetórias:<br>de (BOYCE; DIPRIMA, 2012) . . . . .            | 30 |
| Figura 16 – Solução periódica $r = 1; \theta(t) = -t + t_0$ . . . . .   | 34 |
| Figura 17 – Trajetória para $\rho_0 < 1$ . . . . .  | 36 |
| Figura 18 – Trajetória para $\rho_0 > 1$ . . . . .  | 37 |
| Figura 19 – Trajetórias do sistema 4.28. . . . .  | 37 |

# Sumário

|              |   |           |
|--------------|---|-----------|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .   | <b>1</b>  |
| <b>2</b>     | <b>MOTIVAÇÃO</b> . . . . .  | <b>2</b>  |
| <b>2.1</b>   | <b>Modelos Matemáticos na Biologia</b> . . . . .  | <b>2</b>  |
| <b>2.1.1</b> | <b>Espécies em Competição</b> . . . . .   | <b>2</b>  |
| <b>2.1.2</b> | <b>Modelo Presa-Predador</b> . . . . .  | <b>3</b>  |
| <b>2.1.3</b> | <b>Modelo SIR</b> . . . . .   | <b>4</b>  |
| <b>3</b>     | <b>SISTEMAS LINEARES</b> . . . . .  | <b>6</b>  |
| <b>3.1</b>   | <b>Campos Vetoriais</b> . . . . .   | <b>6</b>  |
| <b>3.2</b>   | <b>Sistemas Lineares</b> . . . . .  | <b>9</b>  |
| <b>4</b>     | <b>SISTEMAS NÃO LINEARES</b> . . . . .  | <b>25</b> |
| <b>4.1</b>   | <b>Perturbação de Sistemas Lineares - Casos Sensíveis</b> . . . . .                                 | <b>25</b> |
| <b>4.2</b>   | <b>Sistema Autônomo Não Linear Bidimensional</b> . . . . .  | <b>26</b> |
| <b>4.2.1</b> | <b>Espécies em competição</b> . . . . .   | <b>27</b> |
| <b>5</b>     | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .   | <b>39</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .  | <b>40</b> |
|              | <b>APÊNDICE A – <math>\alpha</math>-LIMITE, <math>\omega</math>-LIMITE E CICLO LIMITE</b> . . . . . | <b>41</b> |

# 1 Introdução

Na Biologia, para a compreensão da dinâmica de populações, o uso de modelos matemáticos é uma ferramenta que proporciona informações valiosas sobre o objeto de estudo como: o comportamento de espécies que competem por recursos, crescimento de bactérias em ambiente controlado, o risco epidêmico que um agente infeccioso possui. Por sua vez, modelos clássicos de dinâmicas populacionais, no geral, utilizam sistemas autônomos em sua construção.

Desse modo, este trabalho tem como foco apresentar a teoria básica para sistemas autônomos bidimensionais com foco na análise qualitativa destes sistemas através do comportamento de suas soluções na vizinhança de pontos singulares.

Iniciaremos apresentando modelos básicos da biomatemática para dinâmicas populacionais de forma a motivar o estudo de sistemas autônomos bidimensionais.

No capítulo 3 faremos um estudo completo dos espaços de fase para sistemas lineares bidimensionais, através de exemplos, observando a relação entre os autovalores associados a matriz de coeficientes e o espaço de fase do sistema.

Finalmente, no capítulo 4, estudaremos sistemas não lineares bidimensionais partindo de importantes resultados básicos da teoria de Sistemas Dinâmicos que estabelecem a aproximação de sistemas quase lineares com os sistemas lineares associados na vizinhança de pontos singulares.

O trabalho apresenta uma série de figuras utilizadas para mostrar os resultados encontrados. estas figuras foram construídas pelo autor através do software Geogebra (HOHENWARTER, ). As figuras 15 e 19 foram construídas pelo orientador deste trabalho, utilizando o software Octave (GNU General Public License, ) usando métodos numéricos. Estes métodos não serão abordados no trabalho.

## 2 Motivação

A Biomatemática representa uma conexão entre a Matemática e a Biologia. Fenômenos naturais podem ser descritos por equações matemáticas através de uma modelagem com modelos obtidos a partir de dados experimentais que tentam descrever matematicamente fatos reais. Uma vez modelado um problema, procura-se então resolver, em certo sentido, as equações envolvidas para, em seguida, darmos interpretações aos resultados encontrados. Como exemplos de problemas de modelagem citamos modelos de interação entre presas e predadores, modelos de populações em competições, crescimento de bactérias em um quimiostato e muitos outros. Todos esses problemas podem ser modelados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias em que cada variável envolvida descreve os agentes e situações envolvidos. Essas equações podem ser resolvidas analítica ou numericamente, a depender do grau de dificuldade envolvido nas resoluções.

### 2.1 Modelos Matemáticos na Biologia

A construção de um modelo matemático é um dos aspectos essenciais na Biomatemática pois é através dele que se descreve a situação real que será objeto de estudo, trabalhando as relações envolvidas nas hipóteses e, posteriormente, fazendo a interpretação de resultados obtidos com estes modelos. Entre os pioneiros dos modelos matemáticos de população estão Malthus (1798), Verhult (1838), Peal and Reed (1908) e também Lotka e Volterra cujo os trabalhos foram publicados nos anos 1920 e 1930 (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

#### 2.1.1 Espécies em Competição

Um modelo a ser abordado neste trabalho é o de espécies em competição. Esse modelo também é conhecido como *Modelo Lotka–Volterra* por ter sido desenvolvido pelos matemáticos Alfred James Lotka e Vito Volterra, de forma simultânea, porém individual, e procura estudar a interação entre duas espécies, nenhuma sendo presa da outra, mas ambas competindo pela comida disponível (por exemplo, duas espécies de peixe em um lago, não sendo uma predadora da outra). Quando ambas as espécies estão presentes, cada uma irá afetar os recursos da outra, de modo que elas reduzem as taxas de crescimento e as saturações uma da outra. Vamos denotar por  $x$  e  $y$  as populações das duas espécies em

um instante  $t$ . Um sistema de equações que modela esse tipo de problema é:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y), \\ \frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x). \end{cases} \quad (2.1)$$

As constantes positivas  $\alpha_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\sigma_2$  e  $\epsilon_2$  dependem das espécies e são determinadas através de observações. Quando  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são pequenos isso implica em dizer que existe uma interferência pequena de uma sobre a outra. Notemos que a não existência de uma das espécies não permite que a população existente cresça infinitamente, pois, neste modelo, é considerado uma saturação populacional que o ambiente comporta.

A expressão mais simples que representa a redução da taxa de crescimento da espécie  $x$  devido à presença da espécie  $y$  é indicada em (2.1) por  $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$  onde  $\alpha_1$  é um parâmetro que serve para medir o grau de interferência da espécie  $y$  sobre a espécies  $x$ . Observação análoga vale para a interpretação de  $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$ . Assim, em (2.1):

$x$  e  $y$  representam as populações das duas espécies no instante  $t$ ,

$\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são as taxas de crescimento das duas respectivas populações,

$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$  e  $\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$  são os níveis de saturação das respectivas populações,

$\alpha_1$  é o grau de interferência da espécie  $y$  na espécie  $x$  e

$\alpha_2$  é o grau de interferência da espécie  $x$  na espécie  $y$ .

As equações em (2.1), embora sejam completamente simples quando comparadas com as relações complexas que existem na natureza, são úteis para a compreensão de princípios ecológicos que regem esses modelos.

### 2.1.2 Modelo Presa-Predador

Um segundo modelo é o *modelo presa-predador*. Nele vamos considerar a situação em que uma das espécies (predador) se alimenta da outra (presa), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de comida (por exemplo, raposas e coelhos que vivem em uma mata - as raposas caçam os coelhos que se alimentam da vegetação na mata). Para a modelagem desse problema, partiremos dos seguintes pressupostos (EDELSTEIN-KESHET, 1988):

1. A população de presa cresce de um modo ilimitado na ausência de predadores;
2. Predadores dependem da presença de suas presas para sobreviverem;

3. A taxa predatória depende da probabilidade do encontro entre presa e predador;
4. A taxa de crescimento da população de predadores é proporcional à quantidade de alimento consumida (taxa de predação).

Em consequência destas hipóteses somos levados às seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by), \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx). \end{cases} \quad (2.2)$$

As constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são todas positivas;  $a$  é a taxa de crescimento da população de presas e  $c$  é a taxa de morte da população de predadores. As constantes  $b$  e  $d$  são medidas a partir do efeito da interação entre as duas espécies.

As equações (2.2) são também exemplos de equações de Lotka-Volterra e foram desenvolvidas em artigos escritos por Lotka em 1925 e por Volterra em 1926. Embora essas equações sejam bem simples elas representam um primeiro passo para a compreensão de fenômenos mais complicados.

### 2.1.3 Modelo SIR

Doenças infecciosas podem ser classificadas em duas categorias básicas. Aquelas causadas por vírus (ou bactérias) são chamadas de doenças microparasitárias, e as causadas por vermes, de macroparasitárias. O modelo apresentado a seguir foi estudado por Kermack e McKendrick em 1927 e serve para estudar, por exemplo, doenças infecciosas causadas por vírus em humanos. A modelagem para fenômenos desse tipo segue um padrão similar ao do de presa-predador. Entretanto não se pode classificar a relação vírus-humanos como uma relação de predação, pois: (1) a população de vírus dificilmente seria estimada e teria uma magnitude muitas vezes maior que a de hospedeiros, (2) mesmo conhecendo a quantidade de vírus, não é o seu número absoluto que determina as infecções, mas sim, a forma como eles estão distribuídos na população de hospedeiros, (3) nem todas as pessoas que têm o vírus em seu corpo apresentam sintomas da doença e (4) os vírus não circulam livremente à procura de hospedeiros já que são transmitidos através do contato direto entre uma pessoa infectada e uma pessoa sadia.

No modelo de Kermack e McKendrick, apresentado abaixo,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I \end{cases} \quad (2.3)$$

a população total de infectados, representada pela variável  $N$ , é dividida em três grupos:  $S$  que denota o número de indivíduos suscetíveis,  $I$  o número de indivíduos infectados e  $R$  o número de indivíduos que já não podem mais contrair a doença pois ou já foram infectados e adquiriram imunidade ou foram postos em isolamento. Neste modelo a população total,  $N = S + I + R$ , não se altera. As constantes  $\beta$  e  $\nu$  representam as taxas de infecção e de cura respectivamente. Esse modelo, e suas variantes, podem ser encontrados em (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Notemos que os modelos (2.1), (2.2) e (2.3) são exemplos de sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares.

## 3 Sistemas Lineares

Os modelos matemáticos bidimensionais a serem estudados serão descritos por sistemas de Equações Diferenciais da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (3.1)$$

Em que  $x$  e  $y$  são funções na variável  $t$  com  $t$  pertencente a um intervalo aberto da reta. As funções  $F$  e  $G$  em (3.1) não dependem explicitamente da variável independente  $t$ , mas apenas das variáveis dependentes  $x$  e  $y$ , diremos que um sistema desta forma é *autônomo*.

Faremos inicialmente um estudo completo de (3.1) para o caso em que  $F$  e  $G$  são lineares do tipo

$$F(x, y) = ax + by ; G(x, y) = cx + dy. \quad (3.2)$$

Depois estudaremos o caso em que  $F$  e  $G$  são funções não lineares. Em vista disso, é necessário o conhecimento prévio de algumas definições e teoremas para facilitar a compreensão do comportamento destes sistemas.

### 3.1 Campos Vetoriais

**Definição 3.1.** Definimos por *Campo Vetorial* uma aplicação  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , que associa a cada ponto  $\mathbf{x} \in \Delta$ , com  $\Delta$  sendo um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ , um vetor  $X(\mathbf{x})$  do  $\mathbb{R}^2$ .

Dizemos que  $X$  é de classe  $C^k$  se cada função coordenada  $X_i : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $i = 1, \dots, n$  é de classe  $C^k$ , ou seja,  $k$  vezes derivável com a  $k$ -ésima derivada,  $X_i^{(k)} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua.

**Exemplo 3.1.** Consideremos o campo vetorial  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde

$$X(x, y) = (-2y, x). \quad (3.3)$$

Na figura 1 esboçamos alguns vetores  $X(x, y)$  para  $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; -5 \leq x \leq 5 \text{ e } -5 \leq y \leq 5\}$ , reduzidos em comprimento através de um fator multiplicativo de  $\epsilon = 0,2$ .

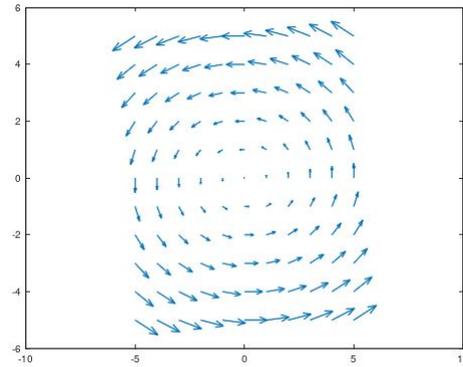


Figura 1 – Exemplo do Campo  $X(x, y) = (-2y, x)$

**Definição 3.2.** Consideremos a equação diferencial

$$\mathbf{x}' = X(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

associada a um campo vetorial, de classe  $C^k$ ,  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido em algum aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ . As aplicações diferenciáveis  $\varphi : I \rightarrow \Delta$ ,  $I$  um intervalo da reta, que satisfazem a equação (3.4), isto é,

$$\frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t)), \quad \forall t \in I \quad (3.5)$$

são chamadas trajetórias ou curvas integrais ou ainda órbitas do sistema (3.1).

Um ponto  $\mathbf{p} \in \Delta$  é dito ponto singular (ou ponto de equilíbrio, ou ainda ponto crítico) de  $X$  se  $X(\mathbf{p}) = 0$ . Se existir alguma vizinhança do ponto  $\mathbf{p}$  tal que  $\mathbf{p}$  é único ponto singular de  $X$ , dizemos que  $\mathbf{p}$  é um ponto singular isolado. Se  $X(\mathbf{p}) \neq 0$ , diremos que  $\mathbf{p}$  é um ponto regular de  $X$ .

Observa-se que o campo vetorial do sistema (3.1) corresponde a  $X(\mathbf{x}) = (F(\mathbf{x}), G(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{x} = (x, y) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$ , com as funções  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  supostamente de classe  $C^1$  em algum aberto  $\Delta$  do  $\mathbb{R}^2$ .

As órbitas do sistema (3.1) são, portanto, curvas parametrizadas diferenciáveis, traçadas no plano- $xy$ , dadas pela equação

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I \quad (3.6)$$

onde  $I$  é algum intervalo da reta.

O plano- $xy$  é chamado *Plano de Fase* e um conjunto representativo de trajetórias é chamado de *Retrato de Fase*. Entretanto, por abuso de linguagem, usaremos ao longo deste trabalho o termo Plano de Fase para denominar estes dois conceitos.

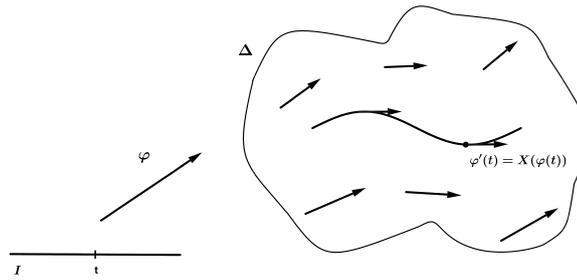


Figura 2 – Campo genérico

Se  $(x_0, y_0) \in \Delta$  então segue do Teorema de Existência e Unicidade (veja (BOYCE; DIPRIMA, 2012)) que existe uma solução única do sistema (3.1) definida em algum intervalo  $I$  contendo  $t_0$  satisfazendo as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{3.7}$$

Isto significa que duas órbitas nunca podem se cruzar em um ponto.

**Definição 3.3.** Seja  $\mathbf{p} \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$  um ponto singular do campo  $X(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ . Dizemos que  $\mathbf{p}$  é estável se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda solução,  $\mathbf{x} = \varphi(t)$ , do sistema (3.1) que satisfaz  $\|\varphi(0) - \mathbf{p}\| < \delta$ , existe para todo  $t \geq 0$  e satisfaz  $\|\varphi(t) - \mathbf{p}\| < \epsilon$  para qualquer  $t \geq 0$

Dizemos que  $\mathbf{p} \in \Delta$  é assintoticamente estável se é estável e além disso existe  $\sigma > 0$  tal que toda órbita  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  com  $\|\varphi(0) - \mathbf{p}\| < \sigma$ , implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \mathbf{p}$ . Em outras palavras, órbitas começando perto de  $\mathbf{p}$ , permanecem perto, e convergem para o ponto de equilíbrio.

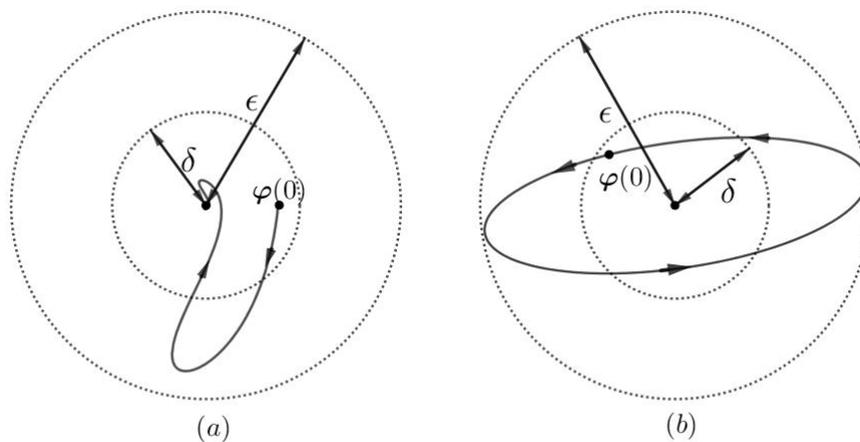


Figura 3 – Estabilidade Assintótica (a) e Estabilidade (b)

## 3.2 Sistemas Lineares

Para o caso em que  $F$  e  $G$  são funções lineares como em (3.2), o sistema (3.1) assume a seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (3.9)$$

para

$$\mathbf{x} = (x, y)^T \text{ e } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Note que a origem é um ponto singular do campo  $X(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ . Vamos supor que esta singularidade seja isolada; equivalentemente significa supor que  $\det A = ad - bc \neq 0$ .

Busquemos soluções do tipo

$$\mathbf{x} = \varphi(t) = \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} \quad (3.10)$$

para o sistema (3.8), em que

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, substituindo (3.10) em (3.9) teremos

$$\lambda \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} = A \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t},$$

como  $e^{\lambda t}$  é não nulo para todo  $t$ , obtemos

$$A \boldsymbol{\xi} = \lambda \boldsymbol{\xi}. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) nos diz que  $\lambda$  é um *autovalor* de  $A$  e  $\boldsymbol{\xi}$  o *autovetor* associado. Observemos que a equação (3.11) é equivalente a

$$(A - \lambda I) \boldsymbol{\xi} = 0. \quad (3.12)$$

Estamos buscando autovetores  $\boldsymbol{\xi}$  que satisfaçam a equação (3.12). Para tanto (3.12) deve ter solução não trivial ou, equivalentemente, o determinante da matriz  $(A - \lambda I)$  deve ser nulo, ou seja

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Desenvolvendo (3.13) chegamos à equação característica

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad (3.14)$$

em que  $\text{tr}(A) = a + d$  é o traço da matriz  $A$  e  $\det(A) = ad - bc$  é o determinante da matriz  $A$ . Portanto os autovalores de  $A$  são dados por

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}^2(A) - 4 \cdot \det(A)}}{2}. \quad (3.15)$$

Notamos que existem três possibilidades para o autovalor  $\lambda$ :

1.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , caso  $\text{tr}^2(A) > 4\det(A)$ ;
2.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , caso  $\text{tr}^2(A) < 4\det(A)$ ;
3.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_1 = \lambda_2$ , caso  $\text{tr}^2(A) = 4\det(A)$ .

**Exemplo 3.2** (Caso 1. da equação (3.16)). Consideremos o sistema linear

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3.17)$$

É fácil ver que os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ . Supondo que  $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$  é o autovetor associado à  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , a equação (3.12) torna-se equivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & 1 \\ 4 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(i)} \\ \xi_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Substituindo  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$  na expressão (3.19) é fácil ver que os autovetores associados são, respectivamente,

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Concluimos que as soluções correspondentes do sistema (3.17) são

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (3.21)$$

Notemos que ao fazer o determinante Wronskiano  $W(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$  temos

$$W(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) := \det \left[ \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \right] = \det \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t}. \quad (3.22)$$

Como o Wronskiano em (3.22) é diferente de zero para todo  $t$ , as soluções  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$  são linearmente independentes, logo a solução geral para (3.17) é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (3.23)$$

Para analisar o espaço de fase do sistema (3.17), faremos um estudo das órbitas  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  no plano- $x_1x_2$ .

Resulta da equação (3.23) que

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

No caso  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 = 0$  as órbitas, para qualquer  $t$ , estão sobre a reta  $x_2 = 2x_1$ . Quando  $c_1 > 0$ , as componentes  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  estão no primeiro quadrante e se  $t \rightarrow \infty$ ,  $x_1(t) \rightarrow \infty$  e  $x_2(t) \rightarrow \infty$ . Analogamente, se  $c_1 < 0$  e  $t \rightarrow \infty$ , as coordenadas de  $\mathbf{x}(t)$  estão no terceiro quadrante com  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  ambas convergindo para  $-\infty$ . Em ambos os casos as coordenadas de  $\mathbf{x}(t)$  sobre a reta  $x_2 = 2x_1$  afastam-se da origem.

Analogamente, quando  $c_1 = 0$  e  $c_2 \neq 0$  mostra-se que as coordenadas de  $\mathbf{x}(t)$  estarão sobre a reta  $x_2 = -2x_1$ , com  $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow (0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , em ambos os casos,  $c_2 > 0$  e  $c_2 < 0$ . É importante notar que o ponto singular  $(0, 0)$  é a órbita constante  $\mathbf{x}(t) = (0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$ .

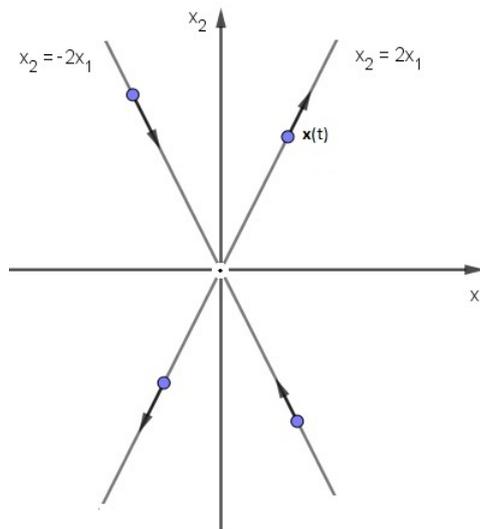


Figura 4 – Caso  $c_1 = 0$  ou  $c_2 = 0$

Quando  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  vemos que  $x_1(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$  o que mostra que as trajetórias estão sobre uma curva contida nos primeiro e quarto quadrantes. Conforme

veremos também esta curva é assintótica às retas  $x_2 = 2x_1$  e  $x_2 = -2x_1$  conforme figura 5. Além disso

$$x_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 := \frac{1}{4} \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

de modo que

$$\begin{cases} t > t_0 \Rightarrow x_2(t) > 0, \\ t < t_0 \Rightarrow x_2(t) < 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

As desigualdades (3.25) estabelecem o sentido de orientação da trajetória.

A assintoticidade entre a curva que contém a trajetória e a reta  $x_2 = 2x_1$ , por exemplo, é verificada através da distância do segmento que liga o ponto  $(x_1(t), x_2(t))$  da trajetória ao ponto correspondente  $(x_1(t), 2x_1(t))$  da reta  $x_2 = 2x_1$ , onde  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são dadas conforme (3.24). Esta distância deve convergir a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . De fato, segue de (3.24) que

$$|x_2(t) - 2x_1(t)| = 4|c_2|e^{-t} \rightarrow 0.$$

De modo análogo, verifica-se a assintoticidade entre a curva da trajetória e a reta  $x_2 = -2x_1$ .

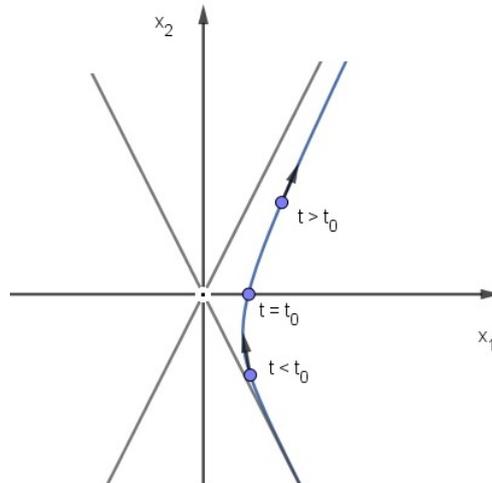


Figura 5 – Caso  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$

Para  $c_1 > 0$  e  $c_2 < 0$  observa-se que  $x_2(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ , logo  $\mathbf{x}(t)$  localiza-se nos primeiro e segundo quadrantes. Além disso

$$x_1(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 := \frac{1}{4} \ln\left(\frac{-c_2}{c_1}\right)$$

então as trajetórias estarão no primeiro quadrante se  $t > t_0$  e no segundo quadrante se  $t < t_0$  como indica a figura 6

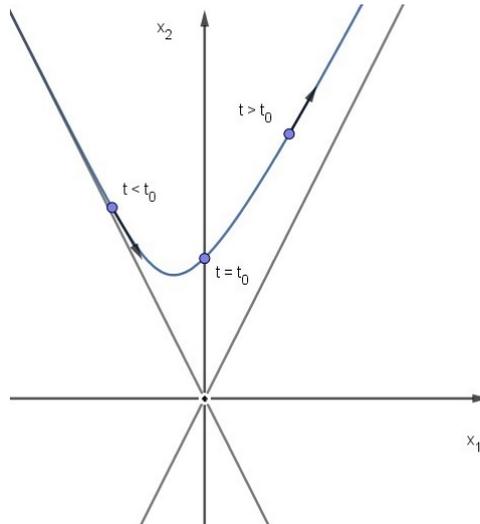


Figura 6 – Caso  $c_1 > 0$  e  $c_2 < 0$

Para  $c_1 < 0$  e  $c_2 < 0$  notemos que  $x_1(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}$  portanto,  $\mathbf{x}(t)$  está no segundo e terceiro quadrantes. Deste modo

$$x_2 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{4} \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right) = t_0$$

logo

$$x_2 = 0 \Leftrightarrow t = t_0$$

$$x_2 < 0 \Leftrightarrow t < t_0$$

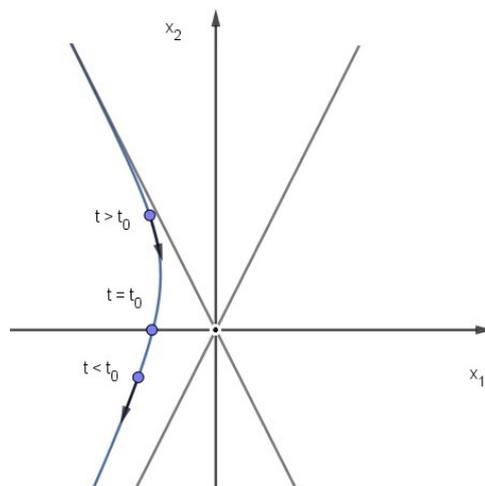


Figura 7 – Caso  $c_1 < 0$  e  $c_2 < 0$

Finalmente para  $c_1 < 0$  e  $c_2 > 0$  notemos que  $x_2(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}$  então  $\mathbf{x}(t)$  está no terceiro e quarto quadrante.

$$x_1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{c_2}{-c_1}\right) = t_0$$

$$x_1 > 0 \Leftrightarrow t > t_0$$

$$x_1 < 0 \Leftrightarrow t < t_0$$

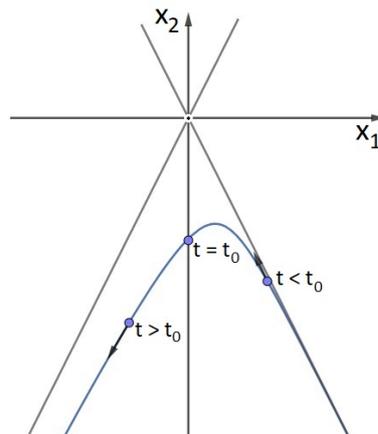


Figura 8 – Caso  $c_1 < 0$  e  $c_2 > 0$

Juntando os quatro casos a figura 9 mostra o gráfico de diversas soluções no plano de fases  $x_1x_2$ .

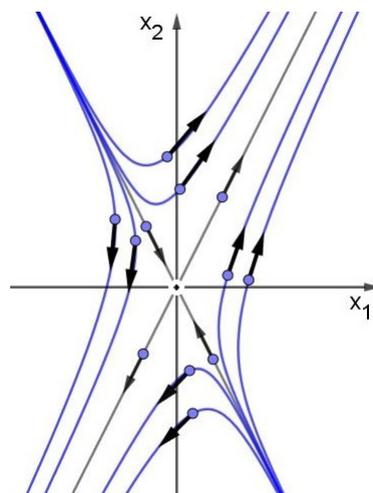


Figura 9 – Plano de fase do sistema linear bidimensional para o caso  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Aqui os autovalores tem sinais contrários e, portanto, a origem é um ponto de sela.

O padrão de trajetórias na figura 9 é típico de sistemas de segunda ordem,  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  para os quais os autovalores são reais e tem sinais opostos. Neste caso a origem é chamada

de *ponto de sela*. Pontos de sela são sempre *instáveis* pois quase todas as trajetórias se afastam dele quando  $t$  aumenta.

Mais geralmente para o caso em que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (3.26)$$

são as soluções particulares do sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Tais soluções são *l.i.* pois o wronskiano delas

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}^{(1)} & \boldsymbol{\xi}^{(2)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

nunca se anula já que os autovetores  $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$  e  $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$  são *l.i.* e a exponencial nunca se anula. Assim  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)}$  formam um conjunto fundamental de soluções e

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t}. \quad (3.27)$$

Como discutido acima o caso em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem sinais contrários revela um espaço de fase típico da figura 9. Naquela figura tivemos  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ ; para o caso em que  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$  a figura do espaço de fase é similar, bastando apenas inverter a orientação das setas.

O caso em que ambos os autovalores têm o mesmo sinal será ilustrado pelo próximo exemplo.

### Exemplo 3.3.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3.28)$$

É fácil verificar que os autovalores são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -3$  e os autovetores respectivos

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Portanto a solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \quad (3.30)$$

A figura 10 mostra as trajetórias dadas por (3.30) para diferentes valores de  $c_1$  e  $c_2$ . A solução  $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{-t}$ ,  $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$  dado em (3.29), se aproxima da origem ao longo da reta  $x_2 = x_1$  e a solução  $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{-3t}$  se aproxima da origem ao longo da reta  $x_2 = -x_1$ .

As direções destas retas são determinadas pelos autovetores  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  respectivamente. As demais soluções são combinações destas duas soluções fundamentais. Note que (3.30) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \left[ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \right]. \quad (3.31)$$

. Enquanto  $c_1 \neq 0$ , o termo  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$  fica desprezível comparado com  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  para valores suficientemente grandes de  $t$ . Assim, quando  $t \rightarrow +\infty$ , as trajetórias além de se aproximarem da origem, o fazem tendendo de maneira tangencial à reta na direção de  $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , isto é, à reta de equação  $x_2 = x_1$ .

O padrão de trajetórias ilustrado na figura 10 é típico dos sistemas lineares de segunda ordem cujos autovalores são reais distintos de mesmo sinal. No caso da figura os autovalores são negativos. Para o caso onde os autovalores forem ambos positivos, as trajetórias serão semelhantes com o sentido de percurso invertido. Nestes casos a origem é chamada de *nó*. Quando os autovalores são negativos dizemos que os *nós* são *assintoticamente estáveis* (nó atrator) e quando são positivos dizemos que são *instáveis* (fonte).

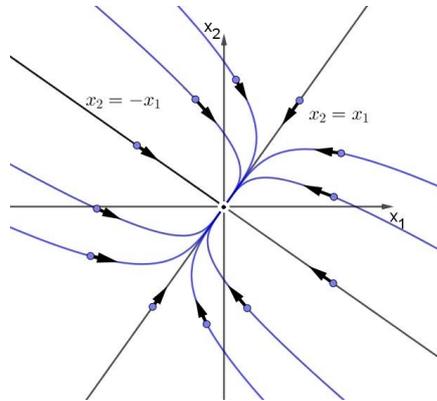


Figura 10 – Plano de fase do sistema linear para o caso em que os autovalores tem o mesmo sinal. Aqui a origem é um nó atrator ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ ).

**Exemplo 3.4** (caso 2. de (3.16)).

Suponha que os autovalores da matriz  $A$  sejam os complexos conjugados  $\lambda_1 = a + bi$  e  $\lambda_2 = a - bi$ . Verifica-se que os autovetores associados são também complexos conjugados, digamos,  $\xi^{(1)} = \alpha + i\beta$  e  $\xi^{(2)} = \alpha - i\beta$ , com  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$  e  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ . Deste modo temos as soluções complexas

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\alpha + i\beta)e^{(a+bi)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = (\alpha - i\beta)e^{(a-bi)t}. \quad (3.32)$$

Usando a Fórmula de Euler,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ,  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)}$  se reescrevem como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= e^{at}(\boldsymbol{\alpha}\cos(bt) - \boldsymbol{\beta}\sin(bt)) + ie^{at}(\boldsymbol{\alpha}\sin(bt) + \boldsymbol{\beta}\cos(bt)), \\ \mathbf{x}^{(2)} &= e^{at}(\boldsymbol{\alpha}\cos(bt) - \boldsymbol{\beta}\sin(bt)) - ie^{at}(\boldsymbol{\alpha}\sin(bt) + \boldsymbol{\beta}\cos(bt)).\end{aligned}\quad (3.33)$$

Fazendo combinações lineares complexas de  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)}$  obtemos as seguintes soluções reais de  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$

$$\begin{aligned}u(t) &= \frac{\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}}{2} = e^{at}[\boldsymbol{\alpha}\cos(bt) - \boldsymbol{\beta}\sin(bt)], \\ v(t) &= \frac{\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}}{2i} = e^{at}[\boldsymbol{\alpha}\sin(bt) + \boldsymbol{\beta}\cos(bt)].\end{aligned}\quad (3.34)$$

Portanto a solução geral real para o sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1u(t) + c_2v(t).\quad (3.35)$$

com  $u(t)$  e  $v(t)$  dadas pelo lado direito de (3.34).

Note que  $u(t)$  e  $v(t)$  são de fato l.i. Com efeito, usando as expressões que relacionam  $u(t)$  e  $v(t)$  com  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)}$  em (3.34) segue que

$$c_1u(t) + c_2v(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i}\right)\mathbf{x}^{(1)} + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i}\right)\mathbf{x}^{(2)} = 0.$$

Substituindo  $\mathbf{x}^{(i)} = e^{\lambda_i t}\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , na última equação, vem que

$$\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i}\right)e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i}\right)e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{\xi}^{(2)} = 0.$$

Como os autovalores complexos são distintos segue que os autovetores complexos associados  $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$  e  $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$  são l.i. Portanto os coeficientes da combinação linear acima devem ser todos nulos, ou seja,

$$\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i}\right)e^{\lambda_1 t} = \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i}\right)e^{\lambda_2 t} = 0.$$

Como a exponencial nunca se anula, conclui-se da equação acima que  $c_1 = c_2 = 0$ , como queríamos.

Substituindo o lado direito de (3.34) em (3.35) e fazendo um reagrupamento adequado podemos reescrever a solução geral real  $\mathbf{x}(t)$  em (3.35) como

$$\mathbf{x}(t) = e^{at}[\boldsymbol{\alpha}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt) - \boldsymbol{\beta}(c_1 \sin bt - c_2 \cos bt)].\quad (3.36)$$

Se usarmos  $\rho$  e  $\theta$  para representar as coordenadas polares do par cartesiano  $(c_1, c_2)$ , teremos  $c_1 = \rho \cos \theta$  e  $c_2 = \rho \sin \theta$ . Levando estas últimas equações em (3.36) teremos uma fórmula mais simplificada para a solução real do caso complexo

$$\mathbf{x}(t) = \rho e^{at}[\boldsymbol{\alpha}\cos(\theta - bt) + \boldsymbol{\beta}\sin(\theta - bt)],\quad (3.37)$$

onde, conforme estabelecido anteriormente,  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente, as partes real e imaginária dos autovetores complexos  $\xi^{(1)}$ ,  $\xi^{(2)}$ , e  $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ .

Tomando a norma em ambos os lados de (3.37) e aplicando a desigualdade triangular, resulta que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq |c_1| \|u(t)\| + |c_2| \|v(t)\| \\ &\leq (|c_1| + |c_2|) e^{at} (\|\alpha\| + \|\beta\|). \end{aligned} \quad (3.38)$$

No caso em que  $a < 0$ , a desigualdade em (3.38) implica que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (3.39)$$

Para o caso em que  $a > 0$ , verifica-se que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow +\infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (3.40)$$

A equação (3.37) descreve todas as trajetórias,  $\mathbf{x} = \varphi(t) = \varphi(t, \mathbf{p}_0)$ , de  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  no plano de fases  $x_1x_2$ , onde  $\mathbf{p}_0$  é o ponto da trajetória correspondente a  $t = 0$ . Fazendo  $t = 0$  em (3.37), vemos que

$$\mathbf{p}_0 = \varphi(0) = (\rho \cos \theta)\alpha + (\rho \sin \theta)\beta = c_1\alpha + c_2\beta.$$

É claro que cada trajetória está associada a um par de valores atribuídos às variáveis  $\rho$  e  $\theta$ .

**Exemplo 3.5.** Tomemos como exemplo  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  com

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores e autovetores de  $A$  são respectivamente

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$a = -1, \quad b = 2, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resulta de (3.37) que podemos escrever a solução geral como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \varphi(t) &= \rho e^{-t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\theta - 2t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\theta - 2t) \right] \\ &= \rho e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin(\theta - 2t) \\ \cos(\theta - 2t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Note que as componentes  $x_1(t) = 2\rho e^{-t} \text{sen}(\theta - 2t)$ ,  $x_2(t) = \rho e^{-t} \text{cos}(\theta - 2t)$  de  $\varphi(t)$  satisfazem

$$\frac{x_1^2}{4\rho^2 e^{-2t}} + \frac{x_2^2}{\rho^2 e^{-2t}} = 1. \quad (3.42)$$

Como  $a = \text{Re}(\lambda_{1,2}) = -1 < 0$ , sabemos de (3.39) que  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , ou seja, os vetores posição dos pontos  $\varphi(t)$  das órbitas convergem para zero quando  $t \rightarrow +\infty$ . Esta informação juntamente com a equação (3.42) nos diz que as órbitas se "espiralam elipticamente" em direção à origem como mostra a figura 11. Queremos dizer, em outras palavras, que as trajetórias ao longo do tempo, vão descrevendo curvas que se assemelham à elipses cujos semieixos,  $a = a(t) = 2\rho e^{-t}$  e  $b = b(t) = \rho e^{-t}$ , variam em cada instante  $t$  da trajetória, semieixos estes que vão tendendo a zero à medida que  $t \rightarrow +\infty$ . Dizemos neste caso que a origem é *assintoticamente estável* ou um *foco estável* ou ainda *ponto espiral*. Este tipo de singularidade é padrão para o caso genérico.

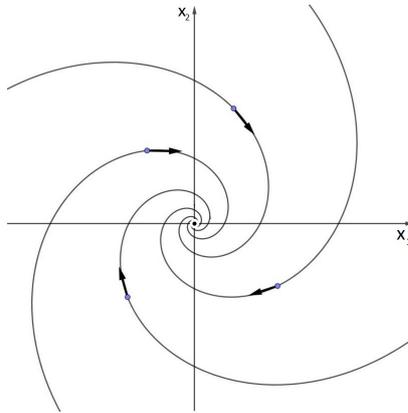


Figura 11 – Plano de fase para o caso  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ . A origem é assintoticamente estável (foco estável).

Se  $a = \text{Re}(\lambda) > 0$  o padrão das trajetórias é similar ao da figura acima invertendo-se apenas o sentido das trajetórias. Neste caso a origem é um ponto de equilíbrio *instável* ou *foco instável*.

Para o caso em que os autovalores são imaginários puros ( $a = 0$ ) o termo  $e^{at}$  em (3.37) fica igual a 1 e a solução geral, neste caso, fica:

$$\mathbf{x}(t) = \rho[\boldsymbol{\alpha} \text{cos}(\theta - bt) + \boldsymbol{\beta} \text{sen}(\theta - bt)]. \quad (3.43)$$

Dizemos neste caso que a origem é um *centro*, que também é *estável*, mas não assintoticamente estável. As órbitas são curvas fechadas (elipses).

Ilustremos este caso com o exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para a matriz  $A$  dada acima os autovalores são

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$a = 0, \quad b = 1, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resulta de (3.43) que a solução geral é

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \varphi(t) &= \rho \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\theta - t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\theta - t) \right] \\ &= \rho \begin{pmatrix} 2\cos(\theta - t) + \operatorname{sen}(\theta - t) \\ \cos(\theta - t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Note que as componentes  $x_1(t) = 2\rho\cos(\theta - t) + \rho\operatorname{sen}(\theta - t)$ ,  $x_2(t) = \rho\cos(\theta - t)$  de  $\varphi(t)$  satisfazem a equação da elipse

$$(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 = \rho^2.$$

O espaço de fase para esse exemplo é dado na figura 12.

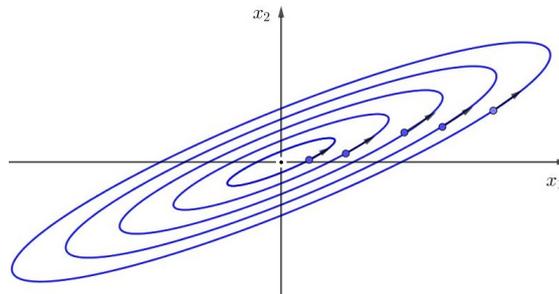


Figura 12 – Plano de fase para as órbitas dadas em (3.44). Quando  $t \rightarrow +\infty$ , verifica-se na equação (3.44) que a orientação das trajetórias ocorre no sentido anti-horário

**Exemplo 3.6.** (caso 3. de (3.16))

Quando os autovalores da matriz  $A$  são iguais digamos,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , temos as duas possibilidades de os autovetores associados serem l.i. ou l.d.

(**Caso 3.1**) Suponha que  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  são l.i. A solução geral para o sistema fica

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \varphi(t) &= c_1 e^{\lambda t} \xi^{(1)} + c_2 e^{\lambda t} \xi^{(2)}. \\ &= c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Note que as componentes de  $\varphi(t)$  satisfazem

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (c_1 \xi_1^{(1)} + c_2 \xi_1^{(2)}) e^{\lambda t}, \\ x_2(t) &= (c_1 \xi_2^{(1)} + c_2 \xi_2^{(2)}) e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dividindo ambas as equações de (3.46) membro a membro vemos que as componentes  $x_1, x_2$  satisfazem a equação de uma reta do tipo  $x_2 = mx_1$ , logo as trajetórias são semirretas. Neste caso dizemos que a origem é um *nó próprio*.

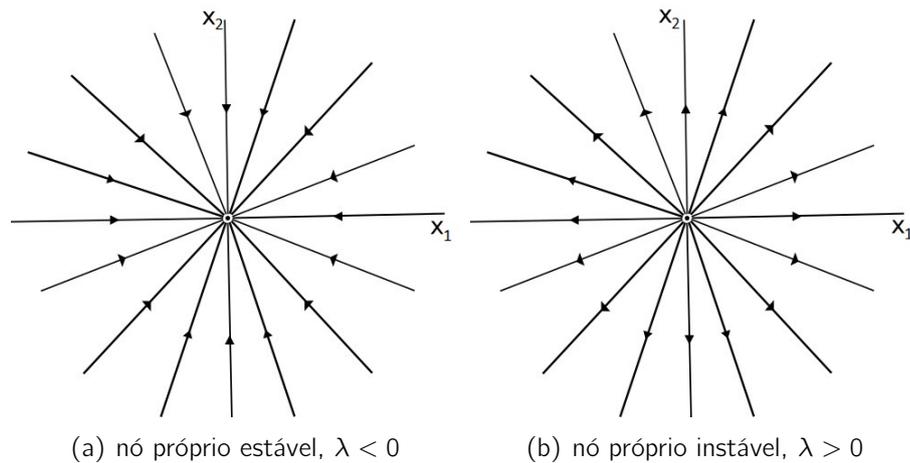


Figura 13 – Nós próprios onde  $\lambda$  está associado a dois autovetores l.i.

(**Caso 3.2**) Suponha que  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  são l.i. Em outras palavras,  $\lambda$  está associado a um único autovetor l.i.,  $\xi$ , ou seja

$$A\xi = \lambda\xi. \quad (3.47)$$

Seja  $\eta$  um vetor qualquer não colinear com  $\xi$  e sejam  $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$  com  $\alpha \neq 0$  tais que

$$A\eta = \alpha\xi + \mu\eta. \quad (3.48)$$

Resulta das duas equações anteriores que a matriz do operador  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  na base  $\{\xi, \eta\}$  é da forma

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que  $\lambda$  e  $\mu$  são os autovalores de  $B$ . Por outro lado os autovalores de  $B$  são iguais aos autovalores de  $A$ . De fato, como  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes, isto é,  $B = P^{-1}AP$ , para alguma matriz inversível  $P$ , então

$$\det(B - xI) = \det(P^{-1}AP - xP^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - xI)P) = \det(A - xI).$$

Então devemos ter  $\lambda = \mu$ .

Definindo

$$\xi^{(1)} = \alpha \xi \text{ e } \xi^{(2)} = \eta \quad (3.49)$$

é fácil ver de (3.47) e (3.48) que

$$\begin{aligned} A\xi^{(1)} &= \lambda \xi^{(1)}, \\ A\xi^{(2)} &= \xi^{(1)} + \lambda \xi^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Verifica-se por substituição direta que

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}] \quad (3.51)$$

é solução geral de  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  passando por  $\varphi(0) = c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}$ . De fato

$$\begin{aligned} \varphi' &= \lambda e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}] + e^{\lambda t}(c_2\xi^{(1)} + 0) \\ &= [\lambda(c_1 + tc_2) + c_2]e^{\lambda t}\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}\lambda e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t}[(\lambda(c_1 + tc_2) + c_2)\xi^{(1)} + \lambda c_2\xi^{(2)}]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} A\varphi(t) &= Ae^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}] \\ &= e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)(A\xi^{(1)}) + c_2(A\xi^{(2)})] \\ &= e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)\lambda\xi^{(1)} + c_2(\xi^{(1)} + \lambda\xi^{(2)})] \\ &= e^{\lambda t}[(\lambda(c_1 + tc_2) + c_2)\xi^{(1)} + \lambda c_2\xi^{(2)}], \end{aligned} \quad (3.53)$$

portanto, conclui-se que  $\varphi' = A\varphi$ .

**Exemplo 3.7.** Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3.54)$$

Encontramos os autovalores  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  e autovetor associado

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Para autovetor generalizado  $\eta$ , devemos escolher qualquer vetor que seja linearmente independente com  $\xi$ , por exemplo,  $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Em seguida devemos encontrar os coeficientes  $\alpha, \mu$  da combinação linear em (3.48). De fato

$$A\eta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

levando  $A\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ;  $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  em (3.48) e resolvendo o sistema resultante para  $\alpha$  e  $\mu$  encontramos  $\alpha = 1$  e  $\mu = 2$ . Observe que  $\mu = \lambda = 2$  como já esperávamos. Em seguida, levando os valores obtidos na equação (3.49) temos

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Portanto a solução final, conforme (3.51), fica:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) = e^{2t} \left[ (c_1 + tc_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.58)$$

Deste modo, obtemos plano de fase da figura 14.

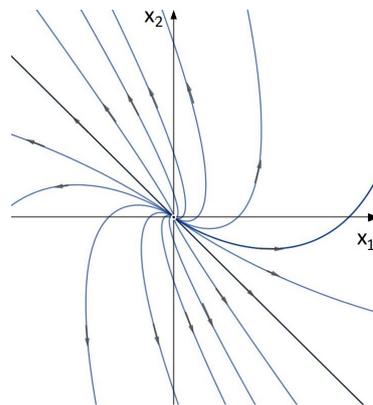


Figura 14 – Plano de fase para (3.58) onde  $\lambda > 0$  e este gera apenas um autovetor independente

O espaço de fase das soluções dadas em (3.58) é um pouco mais difícil de analisar comparativamente aos casos anteriores. Verifica-se que quando  $t \rightarrow +\infty$  cada trajetória  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  torna-se ilimitada. Quando  $t \rightarrow -\infty$ , cada trajetória  $\boldsymbol{\varphi}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  de maneira tangente a reta  $x_2 = -x_1$ , determinada pelo autovetor  $\boldsymbol{\xi}$ . O padrão de trajetória na figura 14 é típico de sistemas de segunda ordem  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  com autovalores iguais e apenas um autovetor independente. Neste caso a origem é chamada de *nó impróprio*. No caso da figura 14 temos um nó impróprio instável já que o autovalor  $\lambda$  é positivo. Quando  $\lambda$  é negativo dizemos que o nó impróprio é assintoticamente estável e o padrão das trajetórias é semelhante ao da figura 14 com a orientação invertida.

A partir dos resultados encontrados, podemos observar que o tipo de singularidade de um ponto de equilíbrio depende basicamente dos autovalores encontrados para a matriz do sistema. Temos então a seguinte tabela:

Tabela 1 – Características de Estabilidade do ponto singular de Sistemas Lineares

| <b>Autovalores</b>                 | $tr^2(A) - 4det(A)$ | Singularidade           | Estabilidade             |
|------------------------------------|---------------------|-------------------------|--------------------------|
| $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$        | $> 0$               | Nó                      | Instável                 |
| $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$        | $> 0$               | Nó                      | Assintoticamente estável |
| $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$        | $> 0$               | Ponto de sela           | Instável                 |
| $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$        | $= 0$               | Nó próprio ou impróprio | Instável                 |
| $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$        | $= 0$               | Nó próprio ou impróprio | Assintoticamente estável |
| $\lambda_{1,2} = a \pm bi \ a > 0$ | $< 0$               | Ponto espiral           | Instável                 |
| $\lambda_{1,2} = a \pm bi \ a < 0$ | $< 0$               | Ponto espiral           | Assintoticamente estável |
| $\lambda_{1,2} = a \pm bi \ a = 0$ | $< 0$               | Centro                  | Estável                  |

Fonte: adaptado de [BOYCE e DIPRIMA \(2012\)](#).

## 4 Sistemas Não Lineares

### 4.1 Perturbação de Sistemas Lineares - Casos Sensíveis

Quando um sistema linear  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  descreve algum fenômeno modelado, a matriz dos coeficientes  $A$  resulta geralmente de grandezas obtidas experimentalmente, portanto, sujeitas a pequenos erros. Como vimos pela tabela 1, os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  determinam o tipo de singularidade do ponto de equilíbrio do sistema. Estes autovalores por sua vez dependem das entradas da matriz  $A$ . É de nosso interesse, portanto, verificar se pequenas perturbações nestas entradas podem afetar significativamente a estabilidade/instabilidade de um ponto crítico e, conseqüentemente, o padrão das trajetórias na vizinhança deste ponto.

Como os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  são raízes da equação polinomial  $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ , é possível verificar que pequenas perturbações em alguns (ou todos) dos coeficientes de  $A$  são refletidas em pequenas perturbações nos autovalores. Os casos mais sensíveis são:

$$(a) \lambda_1 = ib \text{ e } \lambda_2 = -ib$$

$$(b) \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$$

No caso (a) o ponto singular do sistema é um centro e suas órbitas são curvas fechadas. Pequenas alterações na matriz  $A$  implicam numa pequena variação dos autovalores para os novos valores

$$\lambda_1 = a + ib' \text{ e } \lambda_2 = a - ib', \quad (4.1)$$

em que  $|a| \approx 0$  e  $b' \approx b$ . Entretanto quando  $a \neq 0$  o padrão das órbitas na vizinhança do ponto singular, que era "centro", muda radicalmente para "espirais assintoticamente estáveis (caso  $a < 0$ ) ou instáveis (caso  $a > 0$ )".

No segundo caso (b) vimos que o ponto singular do sistema é um nó. Então pequenas perturbações nas entradas da matriz  $A$  fazem com que as raízes iguais de seu polinômio característico se separem em dois valores, próximos um do outro. Se as raízes separadas são reais o ponto singular permanecerá um nó, mas, se as raízes separadas são complexas, o ponto singular será um ponto espiral. Observa-se também que a es(ins)tabilidade do sistema não é afetada por pequenas perturbações nos coeficientes de  $A$ , mas as trajetórias na vizinhança do ponto podem ficar substancialmente diferentes.

Para os demais casos, perturbações suficientemente pequenas dos coeficientes não alteram a estabilidade, ou instabilidade, do sistema e nem o tipo de singularidade. Por

exemplo, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, negativos e distintos, então uma pequena mudança nos coeficientes não irá alterar os sinais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e nem permitir que tornem-se iguais. Deste modo, o ponto de equilíbrio permanecerá um nó assintoticamente estável.

## 4.2 Sistema Autônomo Não Linear Bidimensional

Vamos considerar agora o sistema autônomo bidimensional não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (4.2)$$

Nosso objetivo principal é investigar o comportamento das trajetórias do sistema (4.2) em uma vizinhança de um ponto crítico  $(x_0, y_0)$ . Fazemos isso aproximando o sistema não linear por um sistema linear apropriado, cujas trajetórias sejam fáceis de descrever. É claro que queremos saber se as trajetórias do sistema linear são boas aproximações das trajetórias do sistema não linear na vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . Também precisamos saber como encontrar o sistema linear apropriado.

É conveniente escolhermos  $(0, 0)$  como o ponto singular de (4.2) sem perda de generalidade. De fato, para pontos singulares  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  podemos sempre fazer a substituição  $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}) + (x_0, y_0)$ , de modo que (4.2) fique equivalente a

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = F(\tilde{x} + x_0, \tilde{y} + y_0) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = G(\tilde{x} + x_0, \tilde{y} + y_0), \end{cases} \quad (4.3)$$

sistema este que apresenta, agora,  $(0, 0)$  como ponto singular.

O que significa um sistema não linear estar próximo de um sistema linear na vizinhança de um ponto singular (de equilíbrio) isolado? A próxima definição irá nos responder isso.

**Definição 4.1.** *Sejam o sistema não linear do tipo*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

e o sistema linear associado

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Suponha que  $(0, 0)$  seja ponto singular isolado desses dois sistemas. Dizemos que (4.4) e (4.5) estão próximos em uma vizinhança de  $(0, 0)$  se o termo não linear  $(f(x, y), g(x, y))$

fica bem pequeno quando  $(x, y)$  estiver próximo de  $(0, 0)$ , no sentido de que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|(f(x, y), g(x, y))\|}{\|(x, y)\|} = 0. \quad (4.6)$$

Em outras palavras, próximo a origem,  $\|(f, g)\|$  fica pequeno em comparação com  $\|(x, y)\|$ .

Note que (4.6) é equivalente a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0 \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0 \quad (4.7)$$

Sistemas do tipo (4.4) cuja parte não linear satisfaz (4.6) (ou (4.7)) são chamados de *sistemas quase lineares*.

A tabela 2 traz um resumo comparativo das propriedades de estabilidade e instabilidade dos pontos de equilíbrio de sistemas lineares e quase lineares.

Tabela 2 – Características comparativas de estabilidade de pontos singulares em sistemas lineares e não lineares

| Autovalores                           | Sistema Linear          |                          | Sistema Não Linear      |                          |
|---------------------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
|                                       | Singularidade           | Estabilidade             | Singularidade           | Estabilidade             |
| $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$           | Nó                      | Instável                 | Nó                      | Instável                 |
| $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$           | Nó                      | Assintoticamente Estável | Nó                      | Assintoticamente Estável |
| $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$           | Ponto de Sela           | Instável                 | Ponto de Sela           | Instável                 |
| $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$           | Nó Próprio ou impróprio | Instável                 | Nó ou Ponto Espiral     | Instável                 |
| $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$           | Nó Próprio ou Impróprio | Assintoticamente Estável | Nó ou Ponto Espiral     | Assintoticamente Estável |
| $\lambda_{1,2} = a \pm bi$<br>$a > 0$ | Ponto Espiral           | Instável                 | Ponto Espiral           | Instável                 |
| $\lambda_{1,2} = a \pm bi$<br>$a < 0$ | Ponto Espiral           | Assintoticamente Estável | Ponto Espiral           | Assintoticamente Estável |
| $\lambda_{1,2} = \pm bi$<br>$a = 0$   | Centro                  | Estável                  | Centro ou Ponto Espiral | Indeterminado            |

Fonte: adaptado de BOYCE e DIPRIMA (2012).

### 4.2.1 Espécies em competição

Voltemos ao Modelo (2.1) de Lotka–Volterra, visto na introdução, que é um exemplo de sistema não linear do tipo (4.2). Vamos estudar as soluções desse sistema para o caso particular ((BOYCE; DIPRIMA, 2012)) em que  $\epsilon_1 = \sigma_1 = \alpha_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 0,5$ ,  $\sigma_2 = 0,25$  e  $\alpha_2 = 0,75$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} = y(0,5 - 0,25y - 0,75x). \end{cases} \quad (4.8)$$

Para encontrarmos os pontos singulares de (4.8) devemos resolver o sistema não linear

$$\begin{cases} x(1 - x - y) = 0 \\ y(0,5 - 0,25y - 0,75x) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

onde encontramos as soluções  $(0, 0)$ ,  $(0, 5; 0, 5)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 2)$ . Devemos agora encontrar os sistemas lineares associados na vizinhança de cada um destes pontos singulares.

Para o ponto  $(0, 0)$  temos, já escrevendo na forma matricial;

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 - x - y) \\ y(0,5 - 0,25y - 0,75x) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Desenvolvendo chegamos a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2 - xy \\ 0,5y - 0,25y^2 - 0,75xy \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

reescrevendo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0,5y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0,25y^2 - 0,75xy \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

logo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0,25y^2 - 0,75xy \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Tomando o sistema linear associado

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

notemos que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear associado é diferente de zero, portanto o ponto  $(0, 0)$  também é ponto singular isolado do sistema linear associado. Devemos verificar se as condições (4.6) são satisfeitas para saber se este sistema é quase linear na vizinhança deste ponto singular isolado  $(0, 0)$ .

Fazendo a substituição para coordenadas polares onde  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$  temos

$$\begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0,25y^2 - 0,75xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2\cos^2\theta - r^2\cos\theta\sin\theta \\ -0,25r^2\sin\theta - 0,75r^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Em que  $r = \|(x, y)\|$ , chegamos a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r^2(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta)}{r} \quad (4.16)$$

logo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{r \rightarrow 0} -r(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) = 0. \quad (4.17)$$

Analogamente, para  $g(x, y)$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y)}{\|(x, y)\|} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-0,25r^2 \operatorname{sen} \theta - 0,75r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} -0,25r(\operatorname{sen} \theta + 3 \cos \theta \operatorname{sen} \theta) = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Conclui-se que o sistema (4.8) é um sistema quase linear na vizinhança do ponto singular  $(0, 0)$ .

Para analisar as órbitas na proximidade deste ponto singular vamos analisar o sistema linear associado (4.14). É fácil ver que os autovalores da matriz em (4.14) são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 0,5$ , logo, este ponto singular é também um nó instável no sistema não linear (4.13).

Para o ponto  $(x_0, y_0) = (0,5; 0,5)$ , fazendo  $\tilde{x} = x - 0,5$  e  $\tilde{y} = y - 0,5$  em (4.11), temos

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tilde{x} + 0,5)[1 - (\tilde{x} + 0,5) - (\tilde{y} + 0,5)] \\ (\tilde{y} + 0,5)[0,5 - 0,25(\tilde{y} + 0,5) - 0,75(\tilde{x} + 0,5)] \end{pmatrix}.$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5\tilde{x} - 0,5\tilde{y} - \tilde{x}^2 - \tilde{x}\tilde{y} \\ -0,375\tilde{x} - 0,125\tilde{y} - 0,25\tilde{y}^2 - 0,75\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 \\ -0,375 & -0,125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tilde{x}^2 - \tilde{x}\tilde{y} \\ -0,25\tilde{y}^2 - 0,75\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Notemos que  $\det(A) = -0,125 \neq 0$ , logo o ponto  $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$  (equivalentemente  $x_0 = y_0 = 0,5$ ) é um ponto singular isolado do sistema linear associado a (4.20) e, além disso, a parte não linear de (4.20) satisfaz as condições (4.6) como já visto anteriormente. A matriz da parte linear de (4.20) apresenta autovalores  $\lambda_1 \approx -0,78436$  e  $\lambda_2 \approx 0,15936$ , portanto, o ponto singular  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$  é um ponto de sela para o sistema linear associado a (4.20), logo o ponto  $(0,5; 0,5)$  é também um ponto de sela para o sistema não linear (4.11).

Para o ponto singular  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ , fazemos a substituição  $\tilde{x} = x - 1$  e  $\tilde{y} = y$  em (4.11) de modo que

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tilde{x}^2 - \tilde{x}\tilde{y} \\ -0,25\tilde{y}^2 - 0,75\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

A matriz do sistema linear associado a (4.21) apresenta autovalores  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -0,25$ , logo o ponto singular  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$  é um nó estável. Portanto, o ponto singular  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  é também um nó estável para o sistema (4.11).

Por fim, fazendo a substituição  $\tilde{x} = x$  e  $\tilde{y} = y - 2$  em (4.11) obtemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tilde{x}^2 - \tilde{x}\tilde{y} \\ -0,25\tilde{y}^2 - 0,75\tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

que é também quase linear na vizinhança do ponto singular  $(x_0, y_0) = (0, 2)$ .

Aqui, a matriz  $A$  apresenta os autovalores  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -0,5$ . Consequentemente o ponto singular  $(0, 2)$ , é um nó estável para (4.22).

A figura 15 exibe o espaço de fase para o sistema (4.11). Na figura da esquerda temos o espaço de fase gerado numericamente, em linguagem octave, através da discretização das equações do sistema (4.11). Cada linha traçada representa uma órbita gerada a partir de uma condição inicial dada  $(x(t_0), y(t_0))$ ,  $t_0 = 0$ , gerada aleatoriamente. Na figura da direita exibimos o mesmo espaço de fase, onde pode-se perceber o padrão das trajetórias nas vizinhanças de cada um dos quatro pontos singulares similares respectivamente ao padrão das trajetórias dos sistemas lineares associados.

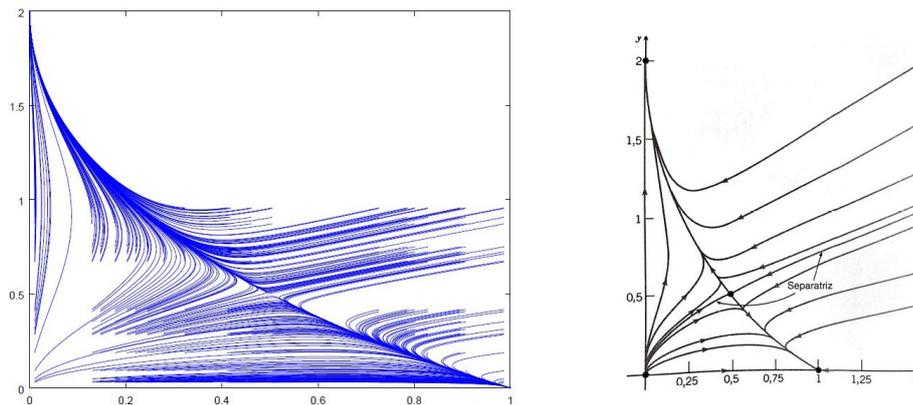


Figura 15 – (a) Plano de fase gerado numericamente utilizando software Octave (b) Plano de fase genérico explicitando o comportamento das trajetórias: de (BOYCE; DIPRIMA, 2012)

A proposição a seguir nos dá as condições que as funções  $F$  e  $G$  devem satisfazer para que o sistema (4.2) seja quase linear.

**Proposição 4.1.** *Considere o sistema não linear*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (4.23)$$

e suponha que  $(x_0, y_0)$  seja um ponto singular isolado de tal sistema. Suponha que as funções  $F$  e  $G$  têm derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Então o sistema (4.23) é quase linear no sentido da Definição 4.1.

*Demonstração.* Usando a expansão de Taylor da função  $(x, y) \mapsto (F(x, y), G(x, y))$  em torno do ponto singular  $(x_0, y_0)$  obtemos:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \mu_1(x, y), \\ G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \mu_2(x, y). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Resulta do Teorema da fórmula de Taylor com resto infinitesimal que

$$\frac{\mu_1}{r} \rightarrow 0, \quad \frac{\mu_2}{r} \rightarrow 0, \quad \text{quando } r \rightarrow 0, \quad (4.25)$$

em que  $r = \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Substituindo (4.24) em (4.23) e levando em conta que  $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ , podemos reescrever o sistema (4.23) como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1(x, y) \\ \mu_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

A expressão (4.26) mais a condição (4.25) nos dizem que, em torno do ponto singular  $(x_0, y_0)$ , o sistema não linear (4.23) é quase linear e se aproxima do sistema linear associado

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

□

A matriz dos coeficientes do sistema linear (4.27) representa a *matriz jacobiana*,  $J(x_0, y_0)$ , da função  $(x, y) \mapsto (F(x, y), G(x, y))$  avaliada no ponto  $(x_0, y_0)$ . Se  $\det J(x_0, y_0) \neq 0$ , então  $(x_0, y_0)$  é ponto singular isolado do sistema linear associado (4.27). No exemplo abordado em 2.1.2 verifica-se que as matrizes dos sistemas lineares associados a (4.13), (4.20), (4.21) e (4.22) representam respectivamente as matrizes jacobianas  $J(0, 0)$ ,  $J(0, 5; 0, 5)$ ,  $J(1, 0)$  e  $J(0, 2)$ .

No próximo exemplo vamos discutir um sistema que apresenta como uma de suas trajetórias uma curva que representa um importante conceito definido no apêndice, o de ciclo-limite.

**Exemplo 4.1.** Consideremos o sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - x(x^2 + y^2) \\ -x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Notemos que o ponto  $(0, 0)$  é ponto singular de (4.28) e é único. Note que:

$$F(x, y) = G(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x(x^2 + y^2) & \text{(I),} \\ -x + y = y(x^2 + y^2) & \text{(II).} \end{cases} \quad (4.29)$$

Se  $x \neq 0$  e  $y = 0$ : segue de (II) que  $x = 0$  (absurdo). Se  $x = 0$  e  $y \neq 0$ : segue de (I) que  $y = 0$  (absurdo). Finalmente suponha  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Então podemos reescrever as equações (I) e (II) como

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) = \frac{x + y}{x} & \text{(III)} \\ (x^2 + y^2) = \frac{-x + y}{y} & \text{(IV)} \end{cases} \quad (4.30)$$

segue de (III) e (IV) que

$$\frac{x + y}{x} = \frac{-x + y}{y} \Leftrightarrow y^2 + xy = xy - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$$

o que nos leva a um absurdo, pois  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Assim, a única solução de (4.29) é  $x = y = 0$ .

Como  $F_x = 1 - 3x^2 - y^2$ ,  $F_y = 1 - 2xy$ ,  $G_x = -1 - 2xy$ ,  $G_y = 1 - x^2 - 3y^2$  resulta que o sistema linear associado a (4.28), conforme (4.27), em torno do ponto  $(0, 0)$  é

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_x(0,0) & F_y(0,0) \\ G_x(0,0) & G_y(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Conforme a proposição 4.1, o sistema (4.28) é quase linear e se aproxima do sistema linear (4.31) em uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ .

Os autovalores da matriz dos coeficientes de (4.31) são  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ . Logo, conforme a Tabela 2,  $(0, 0)$  é um ponto espiral instável tanto para o sistema linear (4.31) quanto para o não linear (4.28). Assim, qualquer órbita de (4.28) que começa próxima da origem no plano de fase vai se afastar dela ao longo de uma espiral quando  $t$  convergir para  $+\infty$ . Porém, diferentemente do que ocorre no sistema linear (4.31), essas trajetórias não convergirão para a região do infinito. Veremos que quando  $t \rightarrow +\infty$  elas se aproximam de uma órbita periódica (veja definição A.1) descrita pelo círculo unitário do plano.

Para descrevermos completamente as órbitas do espaço de fase será conveniente trabalharmos com coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , com  $r \geq 0$ , onde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (4.32)$$

Usando as expressões do lado direito de (4.28) temos que

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= x(x + y - x(x^2 + y^2)) + y(-x + y - y(x^2 + y^2)) \\ &= (x^2 + y^2)[1 - (x^2 + y^2)] = r^2(1 - r^2). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Derivando ambos os lados de  $r^2 = x^2 + y^2$  em relação a  $t$

$$2rr' = 2xx' + 2yy' \Leftrightarrow rr' = xx' + yy' \quad (4.34)$$

e usando (4.33) em (4.34) tem-se

$$rr' = r^2(1 - r^2). \quad (4.35)$$

Usaremos a equação (4.35) para obter a função  $r = r(t)$  que será usada para descrever as órbitas no plano de fase. Note que o lado direito de (4.35) se anula em  $r = 0$  e em  $r = 1$ , que  $r = 0$  corresponde ao ponto singular  $(0, 0)$  e  $r = 1$  é a equação polar do círculo unitário,  $C$ , de equação  $x^2 + y^2 = 1$ .

A partir de (4.35) temos

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} > 0 \text{ para } r < 1 \Rightarrow r(t) \text{ é crescente para } r < 1 \\ \frac{dr}{dt} < 0 \text{ para } r > 1 \Rightarrow r(t) \text{ é decrescente para } r > 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

logo, no interior do círculo  $C$  as trajetórias estão orientadas para fora e, no exterior, para dentro. Aparentemente  $C$  é uma trajetória-limite para este sistema.

Em seguida vamos obter a Equação Diferencial para  $\theta = \theta(t)$ . Por um lado, obtemos a partir de (4.28) que:

$$\begin{aligned} yx' - xy' &= y(x + y - x(x^2 + y^2)) - x(-x + y - y(x^2 + y^2)) \\ &= x^2 + y^2 = r^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Por outro lado, levando em conta (4.32) e as expressões respectivas para  $x'$  e  $y'$  obtidas através da derivação de ambos os lados das equações em (4.32) em relação a  $t$ , é fácil ver que

$$\begin{aligned} yx' - xy' &= (r \operatorname{sen} \theta)(r' \cos \theta - r(\operatorname{sen} \theta)\theta') - r \cos \theta(r' \operatorname{sen} \theta + r(\cos \theta)\theta') \\ &= -r^2\theta'. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Comparando (4.37) com (4.38) resulta

$$r^2 = -r^2\theta' \Leftrightarrow \theta' = -1 \text{ (se } r \neq 0). \quad (4.39)$$

Assim, usando (4.35) e (4.39), o sistema (4.28) pode ser reescrito em coordenadas polares como

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases} \text{ para } r \neq 0. \quad (4.40)$$

Usaremos (4.40) para estabelecer as trajetórias de (4.28), em coordenadas polares no plano  $(r, \theta)$  sobreposto ao plano de fase  $xy$ , de modo que o polo coincida com a origem  $(0, 0)$  e o eixo polar coincida com o semi-eixo positivo  $Ox$ .

Uma solução para (4.40) é:

$$r = 1; \quad \theta(t) = -t + t_0 \quad (4.41)$$

que é o círculo unitário  $C$  orientado no sentido horário que, por sua vez, é uma trajetória periódica no sentido da definição A.1 do apêndice . Aqui,  $t_0$  representará o ângulo  $\theta(0)$  do ponto inicial da trajetória.

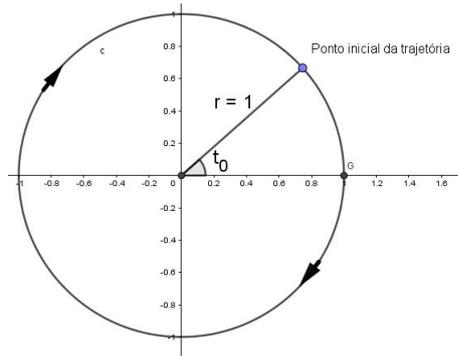


Figura 16 – Solução periódica  $r = 1; \theta(t) = -t + t_0$

Se  $r \neq 1$  e  $r \neq 0$  então, resolvendo a EDO de (4.40), temos

$$\begin{aligned} r' = r(1 - r^2) &\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = r(1 - r)(1 + r) \Leftrightarrow \int \frac{dr}{r(1 - r)(1 + r)} = \int dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int \left( \frac{1}{r} + \frac{1/2}{1 - r} + \frac{-1/2}{1 + r} \right) dr = t + k_0 \Leftrightarrow \ln |r| - \frac{1}{2} \ln |1 - r| - \frac{1}{2} \ln |1 + r| = t + k_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln |r| - \frac{1}{2} \ln |1 - r^2| = t + k_0 \Leftrightarrow \ln \frac{|r|}{\sqrt{|1 - r^2|}} = t + k_0 \Leftrightarrow \frac{|r|}{\sqrt{|1 - r^2|}} = e^{t+k_0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{r^2}{|1 - r^2|} = e^{2k_0+2t} \Leftrightarrow \frac{r^2}{1 - r^2} = \pm e^{2k_0} e^{2t}. \end{aligned}$$

Fazendo  $D_0 = \pm e^{2k_0}$  temos

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{1 - r^2} = D_0 e^{2t} &\Leftrightarrow r^2 = D_0 e^{2t} - r^2 D_0 e^{2t} \Leftrightarrow (1 + D_0 e^{2t}) r^2 = D_0 e^{2t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r^2 = \frac{D_0 e^{2t}}{1 + D_0 e^{2t}} = \frac{1}{1 + c_0 e^{-2t}} &\text{ onde } c_0 = D_0^{-1} = \pm e^{-2k_0} \Leftrightarrow r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0 e^{-2t}}}. \end{aligned}$$

Assim, as demais trajetórias, além de  $r = 0$  e  $r = 1$ , são dadas por

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0 e^{-2t}}}; \quad \theta(t) = -t + t_0, \quad c_0, t_0 \text{ constantes arbitrárias} \quad (4.42)$$

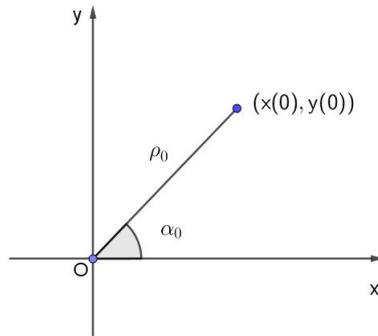
Embora a constante  $c_0 = \pm e^{-2k_0}$  seja sempre diferente de zero, não há problemas em atribuir a ela o valor zero em (4.42); Assim (4.42) inclui a solução em (4.41) como caso particular em que  $c_0 = 0$ . Precisamos estabelecer o domínio de validade da função

$r(t)$ : Se  $c_0 \geq 0$  então  $1 + c_0 e^{-2t} > 0 \forall t$  e  $r(t)$  existe para todo  $t$ . Se  $c_0 < 0$  então  $r(t)$  existe  $\forall t$  tal que  $1 + c_0 e^{-2t} > 0$ , ou equivalentemente,  $\forall t$  que satisfaz  $t > \frac{\ln(-c_0)}{2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} c_0 \geq 0 &\Rightarrow r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0 e^{-2t}}} : \theta(t) = -t + t_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ c_0 < 0 &\Rightarrow r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0 e^{-2t}}} : \theta(t) = -t + t_0 \quad \forall t > \frac{\ln(-c_0)}{2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Note que  $t \rightarrow \left[ \frac{\ln(-c_0)}{2} \right]^+ \Rightarrow r(t) \rightarrow +\infty$ . Representando por  $(\rho_0, \alpha_0)$  o ponto inicial da trajetória, obtemos, após fazermos  $t = 0$  nas equações em (4.43),  $r(0) = \rho_0$ ,  $\theta(0) = t_0 = \alpha_0$  em que:

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0}} \quad (4.44)$$



Elevando ambos os lados de (4.44) ao quadrado obtemos

$$c_0 = \frac{1}{\rho_0^2} - 1 \quad (4.45)$$

Então (4.43) se reescreve como

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\rho_0^2} - 1\right)e^{-2t}}} ; \quad \theta(t) = -t + \alpha_0 \quad (4.46)$$

É importante ressaltar que a expressão para  $r(t)$  em (4.46) está definida  $\forall t \in \mathbb{R}$  desde que  $\rho_0$  seja escolhido tal que  $0 < \rho_0 \leq 1$ . Para  $\rho_0 > 1$ , a expressão dentro da raiz e, conseqüentemente  $r(t)$ , estará definida apenas para valores de  $t > t^*$  em que

$$t^* := \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{1}{\rho_0^2} \right). \quad (4.47)$$

Além disso, observemos que

$$\rho_0 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho_0^2} > 1 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{\rho_0^2} - 1\right)e^{-2t} > 1 \Leftrightarrow r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\rho_0^2} - 1\right)e^{-2t}}} < 1. \quad (4.48)$$

Portanto

$$\rho_0 < 1 \Leftrightarrow r(t) < 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

. Analogamente,

$$\rho_0 > 1 \Leftrightarrow r(t) > 1 \quad \forall t > t^* = \frac{1}{2} \ln(1 - \rho_0^{-2})$$

Então

$$\rho_0 < 1 \Rightarrow \begin{cases} r(t) < 1 \quad \forall t \\ \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

juntamente com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -(t - \alpha_0) = -\infty \quad (4.50)$$

nos dá a informação de que as órbitas que se iniciam na região interior ao círculo  $r = 1$  permanecem nesta região e se aproximam deste círculo quando  $t \rightarrow +\infty$  e de  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , como podemos ver na figura 17.

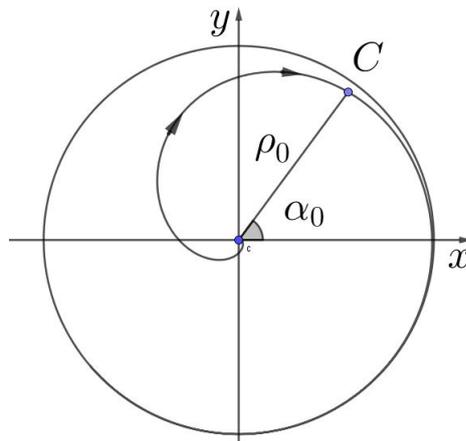


Figura 17 – Trajetória para  $\rho_0 < 1$

Também temos:

$$\rho_0 > 1 \Rightarrow \begin{cases} r(t) > 1 \quad \forall t \\ \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

que, juntamente com (4.50) nos dá a informação de que órbitas que se iniciam na região exterior ao círculo  $r = 1$ , permanecem nesta região e também se aproximam deste círculo quando  $t \rightarrow +\infty$  como se vê na figura 18.

Para o caso em que  $\rho_0 > 1$ , observa-se de (4.46) que, quando  $t \rightarrow (t^*)^+ = \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{1}{\rho_0^2} \right) \right]^+$ , a expressão dentro do denominador se aproxima de zero, logo temos

$$\lim_{t \rightarrow (t^*)^+} r(t) = +\infty ; \quad \lim_{t \rightarrow (t^*)^+} \theta(t) = -t^* + \alpha_0. \quad (4.52)$$

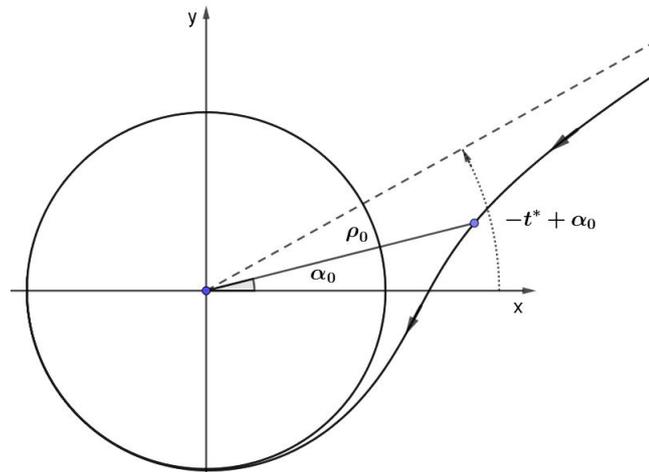


Figura 18 – Trajetória para  $\rho_0 > 1$

Note que (4.52) nos dá a informação de que as órbitas que se iniciam na região exterior ao círculo  $r = 1$  se aproximam assintoticamente da reta  $\theta = -t^* + \alpha_0$  quando  $t \rightarrow (t^*)^+$  como se pode ver na figura 18.

Nas figuras 19 aparecem os traçados de diversas trajetórias para diferentes valores atribuídos a  $\rho_0$  e  $\alpha_0$ . Para  $\alpha_0$  foram escolhidos  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$  e  $2\pi$ . Para  $\rho_0$ , escolhemos os valores 0, 01 e 1, 89. As trajetórias indicadas nas duas figuras são idênticas. A observação a se fazer na figura da direita é que nela foram traçadas também as assíntotas definidas pela equação  $\theta = -t^* + \alpha_0$  com  $t^* = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{1}{(1,89)^2} \right)$  e  $\alpha_0$  dados pelos valores atribuídos respectivamente.

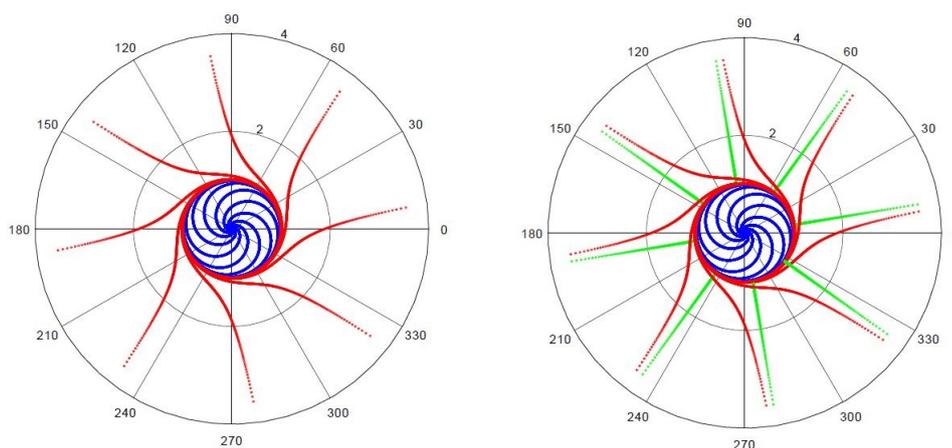


Figura 19 – Trajetórias do sistema 4.28.

Outra observação importante a ser feita aqui é que o círculo  $r = 1$  representa um *ciclo-limite estável* para o campo vetorial associado ao sistema (4.28) [Definição A.4 e Proposição A.1 do apêndice]. Este mesmo círculo também representa o conjunto  $\omega$ -limite,

$\omega(p)$ , qualquer que seja o ponto inicial  $p$  que tomemos, seja na região interior a  $C$ , seja na região exterior a  $C$  [Definições A.2 e A.3 do apêndice].

Pra finalizar, se  $\rho_0 < 1$ , então é fácil ver que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = (0, 0)$ , ou seja, toda órbita que se inicia em um ponto  $p \in \text{int}(C)$  tende ao ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ , quando  $t \rightarrow -\infty$ , o que mostra que o conjunto  $\alpha$ -limite,  $\alpha(p)$ , para cada  $p \in \text{int}(C)$  é  $(0, 0)$  [Definições A.2 e A.3 do apêndice].

## 5 Considerações Finais

Para modelos bidimensionais notamos que um estudo qualitativo do sistema de equações diferenciais nos permite ter uma boa noção do comportamento das espécies bastando conhecer seus autovalores e seus pontos singulares. Se as soluções convergirem para um ponto de equilíbrio com coordenadas não nulas, por exemplo, podemos interpretar que as espécies em questão tenderão a uma coexistência, a menos de fatores de pressão externa como desastres naturais, desequilíbrios ecológicos ou a introdução de outra espécie na competição por recursos ou habitat. Se, por outro lado, as soluções tendem à periodicidade interpretamos que as espécies coexistem contudo com um caráter de alternância, onde uma sucede a outra por um certo período de tempo, este é o caso do modelo de presa e predador.

Logicamente, a fidelidade do espaço de fase de um modelo com a realidade observada depende fortemente de como o modelo foi construído, que variáveis foram consideradas e se houve ou não fatores externos não esperados como os citados anteriormente. Por exemplo, um dos modelos matemáticos mais famosos é o modelo malthusiano de populações humanas, que previa o crescimento populacional de uma forma exponencial e, por outro lado, previa um crescimento linear para a produção de alimentos.

Os modelos apresentados inicialmente são relativamente simples por envolver apenas duas variáveis. Para fazer um estudo mais complexo do assunto deve-se estudar os  $\alpha$ -limite,  $\omega$ -limite e ciclos limite e os resultados que os envolvem, como o Teorema de Poincaré-Bendixson. Além disso, problemas mais complexos que envolvam mais variáveis tornam o estudo qualitativo do espaço de fase mais complicado, o que exige uma teoria mais robusta para a análise de espaços de fase. Outra abordagem para esse estudo é fazer uma análise da solução numérica do problema. Para tal é necessário estudar a teoria para essa análise numérica e o uso de softwares como o Octave ([GNU General Public License](#), ) como facilitador.

# Referências

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de contorno*. 9a. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2012. v, 8, 24, 27, 30

EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. [S.l.]: Siam, 1988. v. 46. 2, 3, 5

GNU General Public License. *GNU Octave*. Disponível em: <<https://www.gnu.org/software/octave/>>. 1, 39

HOHENWARTER, M. *Geogebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. 1

SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. 41

# APÊNDICE A – $\alpha$ -limite, $\omega$ -limite e Ciclo limite

**Definição A.1.** Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  uma trajetória do campo  $X$ , no sentido da definição 3.2, que passa pelo ponto  $p$  quando  $t = 0$ , isto é,  $\varphi(0, p) = p$ . Chamamos o conjunto  $\gamma_p = (\varphi(t, p); t \in I_p)$  de órbita de  $X$  pelo ponto  $p$ . Dizemos que  $\gamma_p$  é periódica se  $I_p = \mathbb{R}$  e existe um  $\tau > 0$  tal que  $\varphi(t + \tau, p) = \varphi(t, p)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e  $\varphi(t_1, p) \neq \varphi(t_2, p)$  se  $|t_1 - t_2| < \tau$ .

**Definição A.2.** Sejam  $\Delta$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  tal que a aplicação  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja um campo vetorial de classe  $C^k$  e  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  seja a curva integral de  $X$  passando pelo ponto  $p$ , definida em seu intervalo máximo  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Se  $\omega_+(p) = \infty$ , definimos o conjunto  $\omega(p) = \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = q\}$ . Analogamente, se  $\omega_-(p) = -\infty$ , definimos o conjunto  $\alpha(p) = \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = q\}$ . Os conjuntos  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  são chamados, respectivamente, de  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite.

**Definição A.3.** O conjunto  $\omega$ -limite de uma órbita  $\gamma$  é o conjunto  $\omega(p)$ ,  $\forall p \in \gamma$ , analogamente, o conjunto  $\alpha$ -limite de uma órbita  $\gamma$  é o conjunto  $\alpha(p)$ ,  $\forall p \in \gamma$ .

**Definição A.4.** Sejam  $\Delta$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Uma órbita periódica  $\gamma$  de  $X$  chama-se Ciclo-limite se existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  seja a única órbita fechada de  $X$  que intercepta  $V$ .

**Proposição A.1.** Existem apenas os seguintes tipos de ciclo limite:

- I. Estável: quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V$
- II. Instável: quando  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V$
- III. semi-estável: quando  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V \cap \text{ext}(\gamma)$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0, \forall q \in V \cap \text{int}(\gamma)$  ou o contrário.

Para demonstração desse teorema, consultar ([SOTOMAYOR, 1979](#)), página 288.