



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
Centro de Educação Aberta e a Distância  
Curso de licenciatura em Matemática



FRANCISCO MARIANO PEIXOTO COTTA

## **ANÁLISE PRÁTICA E FERRAMENTAS PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA EM SISTEMAS DE CONTROLE**

Junho, 2021  
Timóteo – MG



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
Centro de Educação Aberta e a Distância  
Curso de licenciatura em Matemática



FRANCISCO MARIANO PEIXOTO COTTA

## **ANÁLISE PRÁTICA E FERRAMENTAS PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA EM SISTEMAS DE CONTROLE**

Trabalho apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) junto ao Centro de Educação Aberta e a Distância (CEAD) como requisito indispensável à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, pelo acadêmico Francisco Mariano Peixoto Cotta, matrícula 16.2.7620, sob orientação do Professor Dr. Wendel de Oliveira Silva.

Junho, 2021  
Timóteo – MG



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Francisco Mariano Peixoto Cotta**

ANÁLISE PRÁTICA E FERRAMENTAS PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA EM SISTEMAS DE CONTROLE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, modalidade a distância, da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em 19 de julho de 2021

### Membros da banca

Doutor em Educação Matemática - Wendel de Oliveira Silva - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)  
Doutor em Educação - Milton Rosa - Leitor Crítico (Universidade Federal de Ouro Preto)  
Doutor em Educação - Daniel Clark Orey - Leitor Crítico (Universidade Federal de Ouro Preto)

Wendel de Oliveira Silva, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 19/07/2021



Documento assinado eletronicamente por **Milton Rosa, COORDENADOR(A) DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA/CEAD**, em 13/01/2023, às 09:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0456425** e o código CRC **4C8250AF**.



## RESUMO

Aplicar a modelagem matemática no estudo das funções de transferência de sistemas mecânicos utilizando a transformada de Laplace. Nos sistemas do tipo massa-mola, por exemplo, a energia potencial elástica armazenada em uma determinada mola, as funções que descrevem o comportamento desses sistemas, são descritas por equações diferenciais em que a variável dependente em geral depende de outra variável temporal, ou seja,  $y(t)$ . As funções temporais se tornam mais difíceis de ser operacional quando se pretende modelar um sistema de um modo geral, e se for necessários uma precisão do modelo matemático que representa o comportamento ou a dinâmica de um determinado objeto em análise, as equações diferenciais as quais descrevem o comportamento em análise, dependendo do grau de complexidade se tornam difíceis as suas resoluções. Mas quando se utiliza de ferramentas, assim como a transformada de Laplace (técnica utilizada na matemática) nas aplicações de modelagem em geral, recai-se em operações de equações algébricas as quais se tornam mais fáceis de ser manipuladas.

**Palavras-chaves:** Laplace. Sistemas.



## ABSTRACT

Apply mathematical modeling in the study of system transfer functions mechanically using the Laplace transform. In spring-mass systems, for example, the elastic potential energy held in a given spring, the functions that describe the behavior of these systems, are described by sadness differences in which a dependent variable generally depends on another temporal variable, that is,  $y(t)$ . Temporal functions become more difficult to operate when I intend to model a system in a general way, and if it is necessary a precision of the mathematical model that represents the behavior or dynamics of a certain object under analysis, the differences may be which describe the behavior in analysis, depending on the degree of complexity, become difficult in terms of their children. But when using tools, such as the Laplace transform (technique used in mathematics) in modeling applications in general, it falls back on operations to feel algebraic, which makes them easier to manipulate.

**Keywords:** Laplace. Systems.



## Sumário

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Introdução .....                                       | 6  |
| 2 | Equações Diferenciais de Segunda Ordem .....           | 6  |
| 3 | Transformada de Laplace .....                          | 7  |
| 4 | Sistemas Massa-Mola .....                              | 7  |
| 5 | Transformada de Laplace de um sistema massa-mola ..... | 9  |
| 6 | Ferramentas MATLAB® .....                              | 11 |
| 7 | Simulação Computacional .....                          | 12 |
|   | Simulação no domínio do tempo .....                    | 12 |
|   | Simulação no domínio s .....                           | 13 |
| 8 | Considerações Finais .....                             | 17 |
|   | Bibliografia .....                                     | 18 |
|   | Anexos .....   | 19 |
|   | Tabela1. Derivadas e Diferenciais .....                | 19 |
|   | Tabela2. Derivadas e Integrais .....                   | 20 |
|   | Tabela 3. Transformadas de Laplace .....               | 20 |
|   | Listagem1. <i>Script</i> MATLAB .....                  | 21 |
|   | Listagem 2. <i>Script</i> MATLAB .....                 | 22 |



## 1 Introdução

Um modelo matemático de um sistema é uma representação matemática das relações entre entradas e saídas do sistema. O modelo matemático é regido pelas leis físicas fundamentais que descrevem o comportamento dos elementos do sistema modelado. Para descrever completamente um sistema, um modelo deve ser capaz de descrever seu comportamento em regime transitório e permanente (BOLTON, 1995) Equações diferenciais são frequentemente usadas para expressar como a resposta de um sistema de controle varia no tempo. Elas podem ser classificadas em primeira ordem, segunda ordem, terceira ordem e assim por diante, de acordo com o grau da derivada mais alta presente na equação. Equações diferenciais de primeira ordem podem descrever, por exemplo, o nível de um tanque de água controlado por uma boia. Sistemas do tipo massa-mola-amortecedor, objeto de estudo deste trabalho, são exemplos de sistemas de controle modelados por equações diferenciais de segunda ordem (BOLTON, 1995). Existem muitos métodos de soluções para equações diferenciais. Neste trabalho, serão abordados alguns métodos de soluções de equações diferenciais de segunda ordem (BOLTON, 1995).

## 2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) foi motivado por problemas físicos (BOLTON, 1995). Através dessas equações é possível descrever a dinâmica de uma partícula, de osciladores harmônicos e campos de força, por exemplo. A forma geral de uma EDO de segunda ordem é a seguinte:  $x'' + px' + qx = f(x)$  onde  $p, q, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas definidas num intervalo aberto  $a, b$ . Existem diversos métodos de solução para EDOs de segunda ordem, alguns deles: método da Variação de Parâmetros, método de Redução de Ordem, método dos Coeficientes a Determinar, etc. (FIGUEIREDO, 2018).



### 3 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um método importante para solucionar equações diferenciais. Esse método permite transformar as equações diferenciais no domínio do tempo em equações algébricas no domínio  $s$ , de forma que uma solução pode ser encontrada através de manipulações algébricas simples (BOLTON, 1995; FIGUEIREDO, 2018). A transformada de Laplace de algum termo em função do tempo é:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Onde  $f(t)$  é uma função do tempo (BOLTON, 1995).

As transformadas de Laplace das funções mais comuns são tabeladas. Essas tabelas podem ser usadas para solucionar a maior parte dos problemas (BOLTON, 1995). A Tabela 1, na seção de Anexos, apresenta as transformadas de Laplace de algumas funções. Depois de encontrar a solução no domínio  $s$ , a transformada inversa,  $\mathcal{L}^{-1}$ , é aplicada para obter a solução no domínio do tempo (BOLTON, 1995; FIGUEIREDO, 2018).

### 4 Sistemas Massa-Mola

Sistemas físicos podem ser representados através de blocos básicos com certas propriedades. A partir de blocos simples é possível modelar sistemas mecânicos, elétricos, térmicos, etc. (BOLTON, 1995). Molas, amortecedores e massas compõem as formas básicas de um sistema mecânico. As molas representam a rigidez do sistema; os amortecedores, as forças de oposição ao movimento; e as massas, a resistência à aceleração. Sistemas como esses apresentam a dinâmica chamada de oscilação harmônica (BOLTON, 1995; FIGUEIREDO, 2018).



A rigidez da mola é descrita pela relação entre as forças  $F$  usadas para tração ou compressão da mola, e  $x$  é o deslocamento resultante da tração ou compressão. No caso de uma mola onde a tração ou compressão é proporcional à força aplicada, isto é, uma mola linear, a lei de Hooke mostra que:

$$F = -kx$$

onde  $k$  é a constante elástica ou constante de força da mola. Quanto maior o valor de  $k$ , maior a força para tracionar ou comprimir a mola e, conseqüentemente, maior a rigidez. Segundo a Terceira Lei de Newton, um objeto aplicando uma força para tracionar ou comprimir a mola recebe a reação de uma força igual em módulo e em direção oposta à força aplicada, isto é,  $kx$  (GONÇALVES, 1979; BOLTON, 1995).

O bloco de amortecimento representa as forças de oposição ao movimento, ou forças de atrito. Quanto mais rápido o objeto é empurrado, maiores as forças de oposição. O amortecedor usado para representar essas forças de amortecimento consiste em um pistão movendo-se em um cilindro fechado. No caso ideal, o amortecimento ou força resistiva  $F$  é proporcional à velocidade  $v$  do pistão. Assim:

$$F = \mu v$$

Onde  $\mu$  é uma constante positiva. Quanto maior o valor de  $\mu$ , maior a força de amortecimento em uma dada velocidade. Se a velocidade é a razão da variação do deslocamento  $x$  do pistão, isto é,  $v = dx/dt$ , então (BOLTON, 1995; FIGUEIREDO, 2018):

$$F = \mu \frac{dx}{dt}$$

De acordo com a Segunda Lei de Newton, “a aceleração adquirida por um corpo é diretamente proporcional à resultante de todas as forças que agem sobre o corpo, e inversamente proporcional à sua massa [...]” (GONÇALVES, 1979). A relação entre a força  $F$  e a aceleração  $a$  do bloco que representa a massa é:

$$F = ma$$

Onde a constante de proporcionalidade entre a força de aceleração é chamada de massa  $m$ . A aceleração é variação da velocidade no tempo, isto é,  $dv/dt$ , e a velocidade  $v$  é a variação de deslocamento  $x$  no tempo, isto é,  $dx/dt$ . Assim (BOLTON, 1995):

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

No caso de um oscilador harmônico amortecido, as forças que agem sobre a partícula são a força do amortecedor,  $F_a = \mu dx/dt$ , que é contrária ao movimento; e a força restauradora da mola,  $F_k = -kx$ . Portanto:

$$ma = F_k - F_a \Rightarrow m d^2x/dt^2 = -kx - \mu dx/dt$$

Adotando a notação de  $\dot{x}$  para  $dx/dt$ , e  $\ddot{x}$  para  $d^2x/dt^2$  e rearranjando os termos, a equação do oscilador harmônico amortecido é a seguinte (FIGUEIREDO, 2018):

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

## 5 Transformada de Laplace de um sistema massa-mola

Impondo as condições iniciais  $y(0) = y_0$  e  $y'(0) = y'_0$  e aplicando a transformada de Laplace na Equação 1:

$$m\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mu\mathcal{L}\{y'(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

onde  $f(t)$  é uma força externa.

$$ms^2Y(s) - msy_0 - my'_0 + \mu sY(s) - \mu y_0 + ksY(s) = F(s),$$

Onde  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  e  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ . Resolvendo para  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{F(s) + msy_0 + my'_0 + \mu y_0}{ms^2 + \mu s + k}$$

Considerando o caso onde não há força externa,  $f(t) = 0 \Rightarrow F(s) = 0$ , logo:

$$Y(s) = \frac{msy_0 + my'_0 + \mu y_0}{ms^2 + \mu s + k}$$

Para o caso em que o oscilador harmônico é sub amortecido, ou seja,  $\mu^2 < 4mk$ , tem-se:

$$Y(s) = \frac{msy_0 + my'_0 + \mu y_0}{m\left(s + \frac{\mu}{2m}\right)^2 - \frac{\mu^2}{4m} + k}$$

onde  $\frac{-\mu^2}{4m} + k > 0$ . Quando o sistema é superamortecido,  $\frac{-\mu^2}{4m} + k < 0$ . Considerando,

$m = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $k = 5$ ,  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = -2$ , a transformada de Laplace do sistema sub amortecido é:

$$\frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

Para o sistema superamortecido, a transformada é a seguinte:

$$\frac{s + 3}{s^2 + 5s + 5}$$

Para o caso em que o sistema é criticamente amortecido, ou seja,  $\mu^2 = 4mk$ , tem-se:

$$Y(s) = \frac{msy_0 + my'_0 + uy_0}{m(s + \frac{\mu}{2m})^2}$$

Considerando,  $m = 1$ ,  $\mu = \sqrt{20}$ ,  $k = 5$ ,  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = -2$ , a transformada de Laplace é a seguinte:

$$\frac{s + 2\sqrt{5} - 2}{s^2 + 2\sqrt{5}s + 5}$$

## 6 Ferramentas MATLAB®

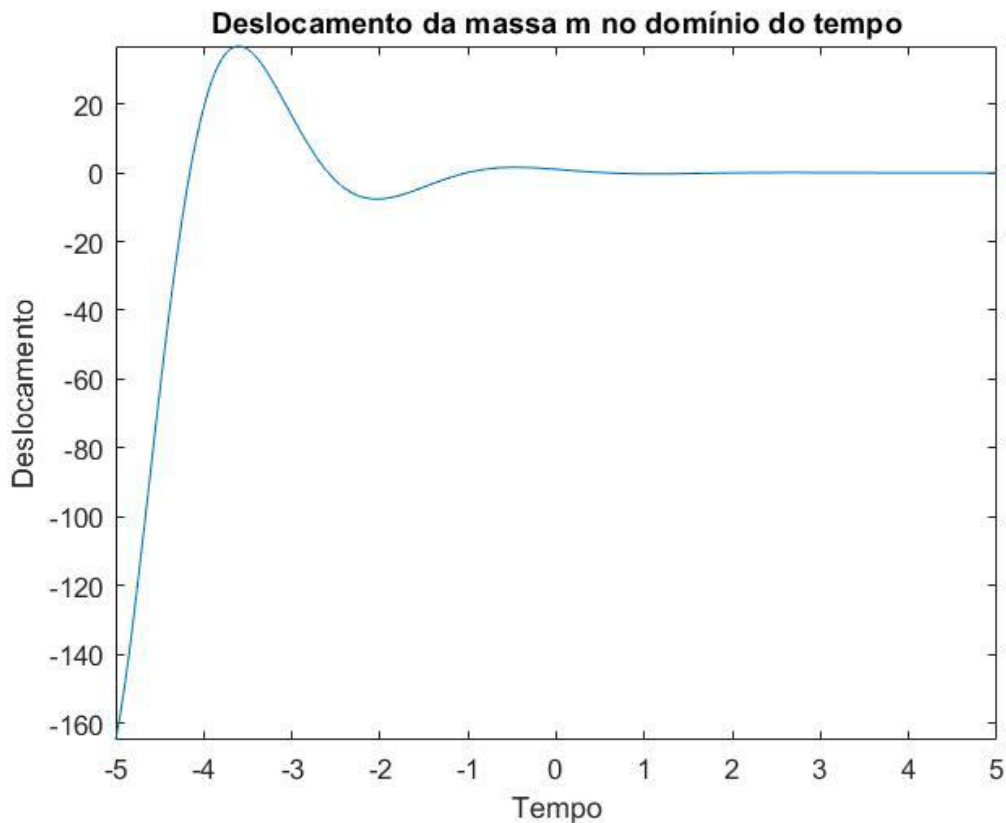
O MATLAB® é uma plataforma de programação e computação numérica muito usada em diversas áreas da engenharia. Essa ferramenta possui milhares de funções de matemática elementar, engenharia e ciência implementadas, o que facilita a criação de algoritmos (MATHWORKS, 2021).

## 7 Simulação Computacional

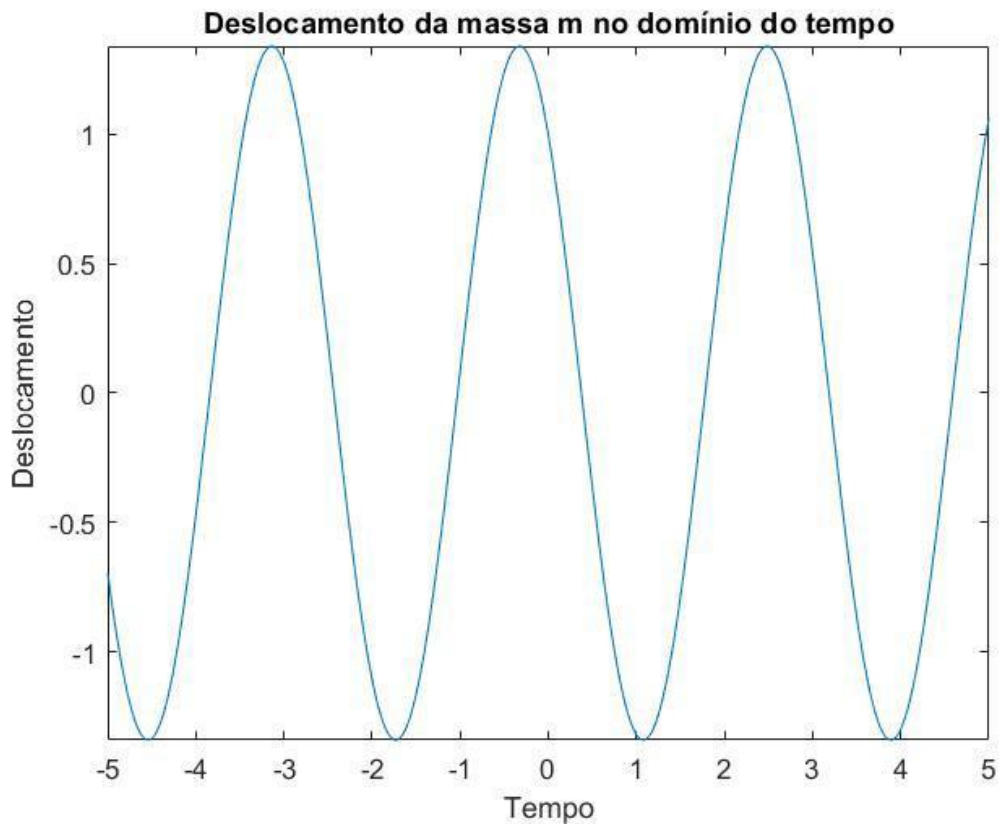
Foram feitas simulações em MATLAB® do comportamento de um sistema massa-mola amortecido. Nas simulações foram usados uma massa unitária,  $m = 1$ ; a constante da mola,  $k = 5$ . As condições iniciais são  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = -2$ .

### Simulação no domínio do tempo

As Figuras 1 e 2 mostram o deslocamento da massa no domínio do tempo para um sistema amortecido,  $\mu = 2$ , e sem amortecimento,  $\mu = 0$ , respectivamente.



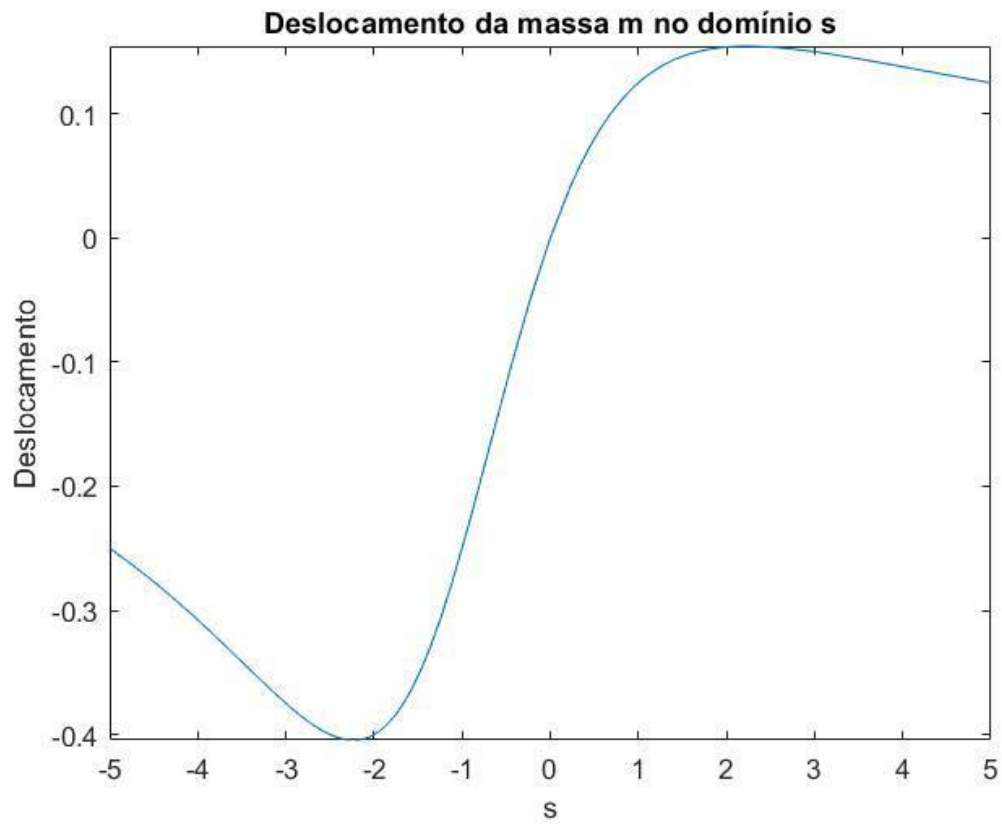
**Figura1.**Resposta temporal do deslocamento de uma massa, com amortecimento.



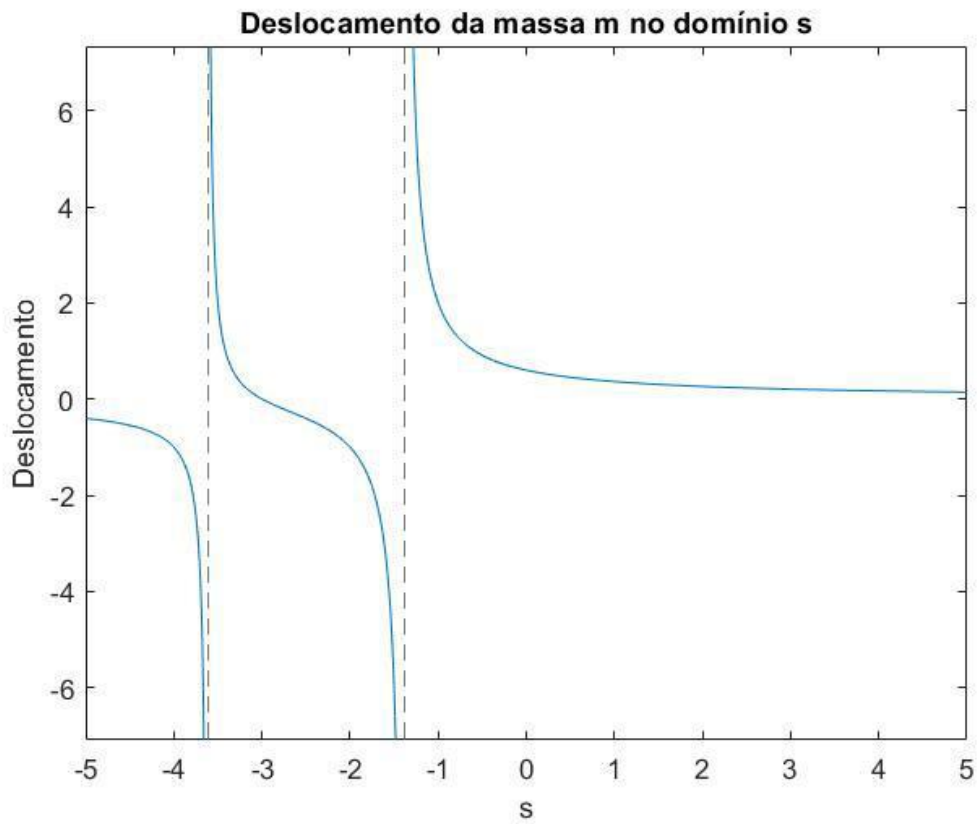
**Figura 2.** Resposta temporal do deslocamento de uma massa, sem amortecimento.

### **Simulação no domínio s**

As Figuras 3, 4, 5 e 6 mostram a resposta no domínio do sistema massa-mola sub amortecido,  $\mu = 2$ ; superamortecido,  $\mu = 5$ ; criticamente amortecido,  $\mu = \sqrt{20}$ ; e não amortecido, respectivamente.

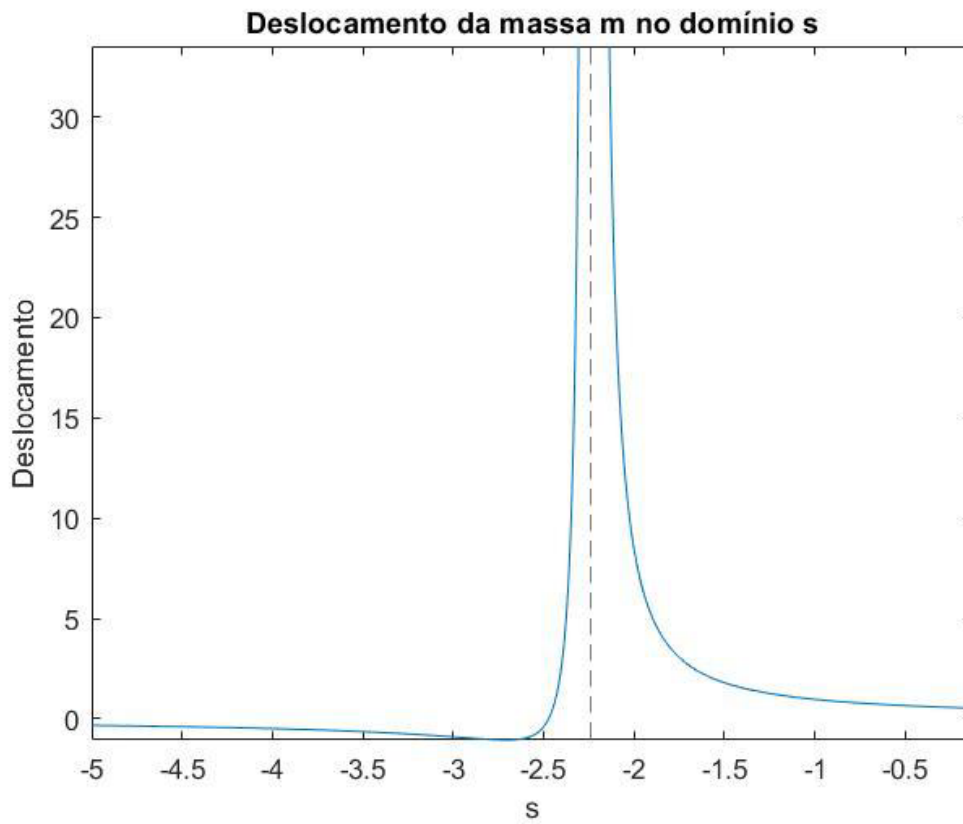


**Figura3.** Resposta no domínio  $s$  do deslocamento de uma massa, sub amortecido.

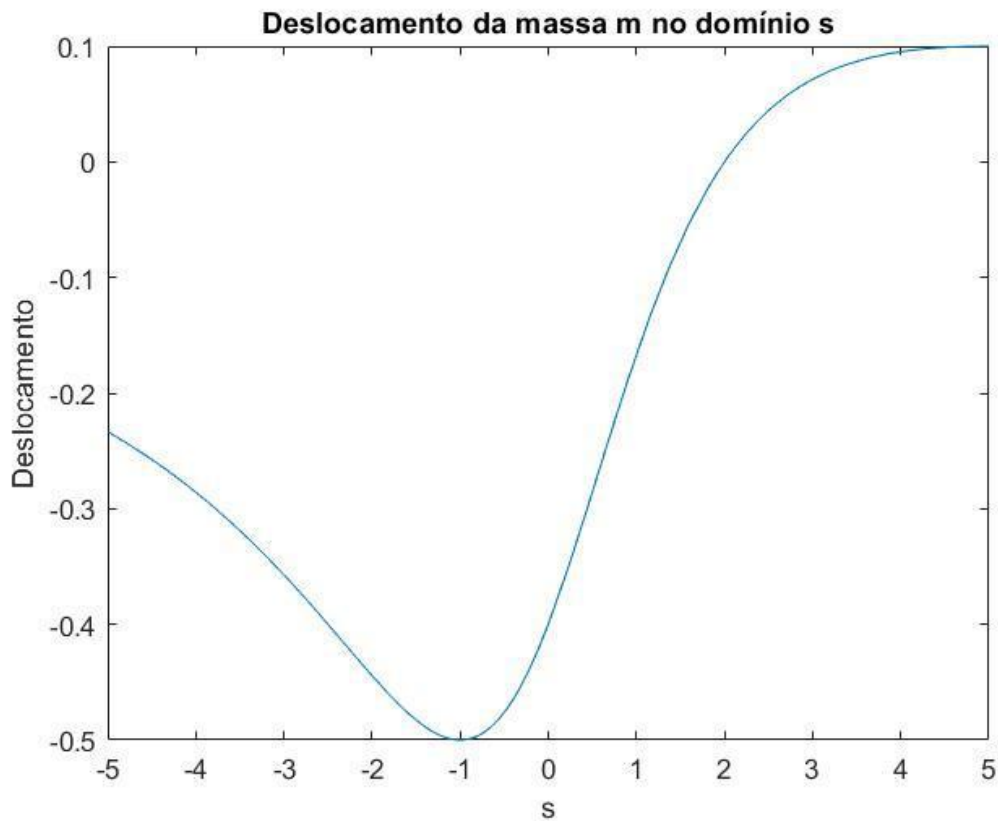


**Figura4.** Resposta no domínio  $s$  do deslocamento de uma massa, superamortecido.





**Figura 5.** Resposta no domínio  $s$  do deslocamento de uma massa, criticamente amortecido.



**Figura6.** Resposta no domínio s do deslocamento de uma massa, sem amortecimento.

## 8 Considerações Finais

Através da modelagem matemática é possível descrever e analisar diversos sistemas físicos do mundo real. As equações diferenciais são ferramentas de modelagem frequentemente usadas para este fim, pois possibilitam analisar o comportamento de um sistema ao longo do tempo. A transformada de Laplace é uma técnica que permite simplificar as equações diferenciais, e resolvê-las mais facilmente. Além das soluções analíticas, existem ferramentas computacionais capazes de resolver diversos problemas. O presente trabalho analisou um sistema massa-mola-amortecedor, aplicando soluções analítica (transformada de Laplace) e computacional (*script* MATLAB).



## Bibliografia

BOLTON, W. (1995). *Engenharia de Controle*. São Paulo: Makron Books.

FIGUEIREDO, D. G. (2018). *Equações Diferenciais Aplicadas (3ª edição)*. Rio de Janeiro: IMPA.

GONÇALVES, D. (1979). *Física: Mecânica (3ª edição)*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.

Mathworks. (2021). *MATLAB*. Acesso em 22 de junho de 2021, disponível em Site da Mathworks: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

## Anexos

**Tabela1. Derivadas e Diferenciais**

| DERIVADAS   | DIFERENCIAIS                             |
|---|--|
| $\frac{dc}{dx} = 0$   | $dc = 0$                                 |
| $\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}$                            | $d(cu) = c du$                           |
| $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$             | $d(u+v) = du+dv$                         |
| $\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v$          | $d(uv) = u.dv + v.du$                    |
| $d \frac{u}{v} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ | $d \frac{u}{v} = \frac{vdu - u dv}{v^2}$ |
| $d \frac{(u^n)}{dx} = n. u^{n-1}. \frac{du}{dx}$                | $d(u^n) = n. u^{n-1}. du$                |
| $d \frac{(u^n)}{dx} = n. c. u^{n-1}. \frac{du}{dx}$             | $d(u^n) = c. n. u^{n-1}. du$             |
| $\frac{d(cx^n)}{dx} = n. c. x^{n-1}$                            | $d(cx^n) = c. n. x^{n-1}. dx$            |

**Tabela2. Derivadas e Integrais**

| Função<br>$f(x)$ | Derivada<br>$f'(x)$ | Integral<br>$\int f(x)dx$ |
|------------------|---------------------|---------------------------|
| 0                | 0                   | C                         |
| 1                | 0                   | x+C                       |
| a                | 0                   | ax+C                      |
| x                | 1                   | $\frac{1}{2}x^2 + C$      |
| $\frac{1}{x}$    | $-\frac{1}{x^2}$    | $\ln(x)+C$                |
| $e^x$            | $e^x$               | $e^x + C$                 |

**Tabela 3. Transformadas de Laplace**

| $f(t)$          | $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ |
|-----------------|---|
| 1               | $\frac{1}{s}$   |
| t               | $\frac{1}{s^2}$   |
| $\frac{t^2}{2}$ | $\frac{1}{s^3}$   |
| $e^{-at}$       | $\frac{1}{s+a}$   |
| $te^{-at}$      | $\frac{1}{(s+a)^2}$   |

|                               |                      |
|-------------------------------|----------------------|
| $t^2 e^{-at}$                 | $\frac{2}{(s+a)^2}$  |
| $1 - e^{-at}$                 | $\frac{a}{s(s+a)}$   |
| $t - \frac{(1 - e^{-at})}{a}$ | $\frac{a}{s^2(s+a)}$ |
| $(1 - at)e^{-at}$             | $\frac{s}{(s+a)^2}$  |

Fonte: (BOLTON, 1995).

### Listagem1. Script MATLAB

```
symsx(t);
m = 2.59; % [kg]
u = 7.8; % [N/m]
k = 738.95; % [N/m]
dx = diff(x);
ode = diff(x, t, 2) == (-u*dx-k*x)/m;
cond1 = x(0) == 1;
cond2 = dx(0) == 0;
sol = dsolve(ode, [cond1 cond2]);
sol = simplify(sol);
fplot(sol) title('Deslocamento da massa m no domínio do tempo');
ylabel('Deslocamento [m]'); xlabel('Tempo [s]');
```



## Listagem 2. *Script* MATLAB

```
symsx(t);  
m = 1;  
mu = 2;  
k = 5;  
dx = diff(x);  
d2x = diff(dx);  
eqn(t) = m*d2x == (-mu*dx-k*x);  
cond1 = x(0) == 1;  
cond2 = dx(0) == -2;  
eqnLT = laplace(eqn, t, s);  
symsx_LT;  
eqnLT = subs(eqnLT, laplace(x, t, s), x_LT);  
eqnLT = subs(eqnLT, x(0), 1);  
eqnLT = subs(eqnLT, subs(diff(x(t), t), t, 0), -2);  
x_LT = solve(eqnLT, x_LT);  
x_LT = simplify(x_LT);  
sol = ilaplace(x_LT, s, t);  
fplot(x_LT) title('Deslocamento da massa m no domínio s');  
ylabel('Deslocamento');  
xlabel('s');
```