



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



Mariana de Oliveira Lopes

# **Sequência de Fibonacci: Propriedades, Curiosidades e Aplicações**

Ouro Preto, Brasil

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Mariana de Oliveira Lopes

**Sequência de Fibonacci:  
Propriedades, Curiosidades e Aplicações**

Monografia submetida ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Departamento de Matemática

Ouro Preto, Brasil

2022

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

L864s Lopes, Mariana De Oliveira.  
Sequência de Fibonacci [manuscrito]: propriedades, curiosidades e aplicações.. / Mariana De Oliveira Lopes. - 2022.  
61 f.: il.: color., tab..

Orientador: Prof. Dr. Edney Oliveira.  
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Sequências. 2. Fibonacci. 3. Número de Ouro. 4. Recorrências. I. Oliveira, Edney. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Mariana de Oliveira Lopes**

### Sequência de Fibonacci: propriedades, curiosidades e aplicações

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em 03 de novembro de 2022

#### Membros da banca

Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira - Orientador(a) - Universidade Federal de Ouro Preto  
Dr. Rodrigo Geraldo do Couto - Universidade Federal de Ouro Preto  
Dr. Thiago Morais Pinto - Universidade Federal de Ouro Preto

Edney Augusto Jesus de Oliveira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 28/12/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Edney Augusto Jesus de Oliveira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 28/12/2022, às 12:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0409489** e o código CRC **FD7283D1**.

**Referência:** Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.013965/2022-73

SEI nº 0409489

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163  
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me permitido ser forte o suficiente para chegar até aqui e principalmente por não me sentir sozinha.

Às minhas irmãs, Juliana e Maria Luiza, por sempre me apoiarem nessa jornada e por serem minhas melhores amigas.

Ao meu pai, Domingos, por sempre investir na minha educação e no meu futuro e por me motivar a ser cada dia melhor.

À minha mãe, que sempre se preocupou com a minha saúde mental durante a graduação.

Aos meus colegas, amigos e orientador do PETMAT, que são minha segunda família na UFOP. Sem vocês eu não teria me mantido tão firme até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Edney, por estar comigo durante quase todo o meu percurso na UFOP como orientador de Iniciação Científica no PETMAT, por sempre me motivar e principalmente por acreditar no meu potencial. Obrigada por ser tão gentil e paciente, o seu apoio foi fundamental para concluir esta monografia.

À UFOP, por me proporcionar todas as experiências citadas.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que estiveram presentes nos momentos mais importantes da minha jornada na UFOP e que torceram para que este trabalho fosse concretizado com sucesso.

*"A felicidade pode ser encontrada mesmo nas horas mais difíceis, se você lembrar de  
acender a luz.  
- Alvo Dumbledore"  
(Harry Potter e o Prisioneiro de Azkaban)*

# Resumo

A presente monografia busca estudar a Sequência de Fibonacci, e para tal, algumas observações são feitas com relação a sequências numéricas, destacando as PA's e PG's. Inicialmente, apresentamos uma introdução acerca das sequências numéricas, com ênfase em algumas notações e classificações. Logo após, focamos na Sequência de Fibonacci, na qual estudamos propriedades muito instigantes, em especial, a relação desta sequência com o Número de Ouro. Mostramos que a razão proveniente deste número, a razão áurea, está presente em diversos elementos na natureza, como por exemplo, na disposição de pétalas e sementes de algumas flores. Trabalhamos a construção do retângulo de ouro e algumas propriedades do triângulo de Pascal associadas a Fibonacci, assim como uma pequena introdução às Frações Contínuas e como ela se associa ao Número de Ouro. Em seguida, fizemos um estudo mais aprofundado das sequências definidas por recorrências lineares de primeira e segunda ordem, uma vez que a Sequência de Fibonacci é definida por uma recorrência deste tipo. Por fim, apresentamos algumas aplicações em que as relações de recorrências são usadas para descrever problemas clássicos como o problema com dominós, o jogo da Torre de Hanói e a Pizza de Steiner.

**Palavras-chave:** Sequências. Fibonacci. Número de Ouro. Recorrências.

# Abstract

The present monograph seeks to study the Fibonacci Sequence, and for such, some observations are made regarding numerical sequences, highlighting the arithmetic progressions and geometric progressions. Initially, we present an introduction about numerical sequences, where we emphasize some notations and classifications. Afterwards, we focused on the Fibonacci sequence, in which we studied very instigating properties, especially the relation of this sequence to the Golden Mean. We noticed that the ratio derived from this number, the golden ratio, is present in various elements in nature, for example, in the disposition of the petals and seeds of certain flowers. We work on the construction of the golden rectangle and some properties of Pascal's triangle associated with the Fibonacci sequence, as well as a short introduction to Continuous Fractions and how it is associated with the Golden Number. Finally, we made a more detailed study of sequences defined by first and second order linear recursions, since the Fibonacci Sequence is defined by a recursion. Therefore, we also brought a few very interesting applications, among these applications, there is a problem with dominoes, the Tower of Hanoi game, and Steiner's Pizza.

**Keywords:** Sequences. Fibonacci. Golden Number. Recursions.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Triângulos - 3 palitos . . . . .	18
Figura 2 – Triângulos - 5 palitos . . . . .	18
Figura 3 – Triângulos - 7 palitos . . . . .	18
Figura 4 – Leonardo Fibonacci . . . . .	21
Figura 5 – Coelhos na sequência de Fibonacci . . . . .	22
Figura 6 – Segmento de reta . . . . .	24
Figura 7 – Retângulo de Ouro - Passo 1 . . . . .	27
Figura 8 – Retângulo de Ouro - Passo 2 . . . . .	28
Figura 9 – Retângulo de Ouro - Passo 3 . . . . .	28
Figura 10 – Retângulo de Ouro - Passo 4 . . . . .	28
Figura 11 – Retângulo de Ouro - Passo 5 . . . . .	29
Figura 12 – Retângulo de Ouro - Passo 6 . . . . .	29
Figura 13 – Retângulo de Ouro . . . . .	29
Figura 14 – Retângulos de Ouro . . . . .	31
Figura 15 – Espiral Áurea . . . . .	31
Figura 16 – Arranjo das sementes do girassol . . . . .	31
Figura 17 – Nossa galáxia . . . . .	32
Figura 18 – Concha do animal marinho Nautilus . . . . .	32
Figura 19 – Sequência de Fibonacci nas flores . . . . .	33
Figura 20 – Achillea ptarmica . . . . .	33
Figura 21 – Triângulo de Pascal . . . . .	36
Figura 22 – Construção do Triângulo de Pascal . . . . .	36
Figura 23 – Triângulo de Pascal - 5 primeiras linhas . . . . .	37
Figura 24 – O Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci . . . . .	37
Figura 25 – Sequência de movimentos mínimos para 3 discos . . . . .	50
Figura 26 – Sequência de movimentos mínimos para 4 discos . . . . .	51
Figura 27 – Dominós - tabuleiro 2 x 1 . . . . .	53
Figura 28 – Dominós - tabuleiro 2 x 2 . . . . .	53
Figura 29 – Dominós - tabuleiro 2 x 3 . . . . .	53
Figura 30 – Dominós - tabuleiro 2 x 4 . . . . .	54
Figura 31 – Dominós - tabuleiro 2 x n . . . . .	54
Figura 32 – Pizza de Steiner ( $n = 1$ ) . . . . .	55
Figura 33 – Pizza de Steiner ( $n = 2$ ) . . . . .	56
Figura 34 – Pizza de Steiner ( $n = 3$ ) . . . . .	56
Figura 35 – Pizza de Steiner ( $n = 4$ ) . . . . .	57

Figura 36 – Tabuleiro de Xadrez . . . . . 58

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Quantidade de coelhos gerados após um ano . . . . .	23
Tabela 2 – Números Metálicos . . . . .	41
Tabela 3 – Pizza de Steiner . . . . .	57

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>SEQUÊNCIAS</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Progressões Aritméticas</b> . . . . .	<b>16</b>
1.1.1	Relação entre Progressões Aritméticas e funções polinomiais . . . . .	17
1.1.2	Aplicações envolvendo PA's . . . . .	18
<b>1.2</b>	<b>Progressões Geométricas</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Leonardo Fibonacci e o Problema dos Coelhos</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>O Número de Ouro</b> . . . . .	<b>23</b>
2.2.1	Retângulo de Ouro . . . . .	27
<b>2.3</b>	<b>A Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea na Natureza</b> . . . . .	<b>30</b>
2.3.1	Espiral Áurea . . . . .	30
<b>2.4</b>	<b>Propriedades da Sequência de Fibonacci</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>2.5</b>	<b>Triângulo de Pascal</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>2.6</b>	<b>As Frações Contínuas e o Número de Ouro</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>3</b>	<b>SEQUÊNCIAS DEFINIDAS POR RECORRÊNCIAS</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>3.1</b>	<b>Classificação</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>3.2</b>	<b>Recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes constantes</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>3.3</b>	<b>Recorrências lineares de segunda ordem</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>3.4</b>	<b>Torres de Hanói</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>3.5</b>	<b>Um problema com dominós</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>3.6</b>	<b>Pizza de Steiner</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>3.7</b>	<b>Lenda do Jogo de Xadrez</b> . . . . .	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>60</b>

# Introdução

Em algum momento no Ensino Médio são estudadas as sequências numéricas, na maioria das vezes, restringidas às Progressões Aritméticas e Geométricas, que são trabalhadas de forma bem sucinta, em muitos casos, se atentando somente às fórmulas e resoluções de alguns exercícios. Sendo um assunto muito amplo, com diversas aplicações, se faz necessário aprofundar o estudo das sequências neste trabalho. O principal foco está na Sequência de Fibonacci, pois estudaremos propriedades matemáticas bem curiosas, como também a fascinante relação entre essa sequência e o Número de Ouro.

Nesta monografia, as principais referências utilizadas se tratam de dissertações de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), trabalhos finais de graduação e artigos de algumas revistas universitárias, tais como (PEREIRA; FERREIRA, 2008, Cap 2), (SILVA, 2015, Cap 2), (FARIAS, 2018, Cap 2), (JUNIOR; MATOS, 2016, Cap 2), (SANTOS, 2018, Cap 2), (ARAÚJO, 2015, Cap 2), (GREGIO, 2017, Cap 1, Cap 3), (AMORIM, 2014, Cap 1, Cap 3), (ALBUQUERQUE, 2019, Cap 3) e (ÁVILA, 1994, Cap 3).

O primeiro capítulo é voltado para sequências numéricas, no qual definiremos notações e algumas de suas classificações, utilizando como exemplo as conhecidas Progressões Aritméticas (PA's) e Progressões Geométricas (PG's). Esta parte será essencial, pois definiremos como algumas sequências podem ser escritas de forma recursiva. Forma, a qual trabalharemos com mais afinco posteriormente.

No segundo capítulo, trabalharemos de forma mais abrangente a Sequência de Fibonacci, nossa principal protagonista, que será apresentada através do Problema dos Coelhoos, um problema proposto por Leonardo Fibonacci, principal detentor pelo estudo desta sequência, que é uma sequência de números inteiros com os dois termos iniciais iguais a 1, definida recursivamente por

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n \geq 1, \end{cases}$$

em que os  $F_n$ 's correspondem aos termos da sequência de Fibonacci.

Veremos também que o Número de Ouro está diretamente relacionado à sequência de Fibonacci, pois a sequência  $(a_n)$ , definida por

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad n \geq 1,$$

converge para a razão áurea, fato que será provado no decorrer da monografia. Mostraremos que esta razão está presente em diversos elementos na natureza, sendo representada através

da espiral áurea. Esta espiral é obtida através do Retângulo de Ouro, sendo as proporções deste retângulo consistentes com a razão áurea. Outras propriedades serão apresentadas, assim como a relação do Triângulo de Pascal com a sequência de Fibonacci. Não menos importante, faremos uma pequena passagem pelas Frações Contínuas e a representação do Número de Ouro através dela.

No terceiro e último capítulo serão estudadas as sequências definidas por recorrências lineares de primeira e segunda ordem, as quais apresentaremos o formato da solução geral. Desse modo, conseguiremos resolver as recorrências estudadas ao longo da monografia, principalmente a recorrência proveniente da sequência de Fibonacci, que se trata de uma recorrência linear de segunda ordem. Por fim, trabalharemos com algumas interessantes aplicações das recorrências lineares, como por exemplo, o jogo da Torre de Hanói e a Pizza de Steiner.

# 1 Sequências

Esta seção foi baseada na seção 1.1 da Dissertação de Mestrado de Bruno Chioderoli Gregio. (GREGIO, 2017)

De modo intuitivo, uma sequência de números reais é uma fila de números reais, denominados termos, que pode ou não possuir um padrão. Essas sequências podem ser finitas ou infinitas. Formalmente, definimos uma sequência infinita como segue:

**Definição 1.** *Uma sequência numérica infinita é uma função  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .*

O valor  $a(n)$ , para todo  $n$  natural diferente de zero, usualmente representado por  $a_n$ , será denominado  **$n$ -ésimo** da sequência. De um modo geral, a representação dos termos de uma sequência dada por  $a_n$ , com  $n \geq 1$  nos diz que  $n$  indica a posição do termo. Dito isso, o primeiro termo será  $a_1$ , o segundo termo  $a_2$  e assim por diante.

Denotaremos uma sequência  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ , ou  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , (ou simplesmente  $(a_n)$ ). A **Lei de formação** de uma sequência é responsável por caracterizá-la e é utilizada para calcular qualquer termo em função de  $n$ , porém, em sua maioria, as sequências não possuem lei de formação. Já a **Lei de Recorrência** é utilizada para calcular termos através de seus imediatamente antecessores.

**Exemplo 1.** *Considere a função  $a(n) = n^2$ , que gera a sequência cujos elementos são os quadrados perfeitos.*

*Deste modo temos a seguinte sequência infinita 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64....*

*No entanto, é válido comentar que nem toda sequência possui um termo geral. Por exemplo, a sequência dos decimais do número  $\pi$ .*

Definiremos agora o que entende-se por sequência finita.

**Definição 2.** *Uma sequência numérica finita é uma função  $a : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo domínio é o conjunto dos números naturais que vão de 1 até  $n$  e o contra-domínio, o conjunto dos números reais.*

Podemos afirmar que uma sequência finita sempre possui um fim ou último elemento.

**Exemplo 2.** *Vamos observar a sequência dos números pares:*

$$(2, 4, 6, 8, 10, \dots).$$

Podemos perceber que o termo geral desta sequência é  $a_n = 2n$ , com  $n$  natural, pois  $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $a_2 = 2 \cdot 2 = 4$ , e assim por diante.

**Definição 3.** *Pode-se dizer que uma sequência é chamada limitada quando existem números reais  $A$  e  $B$  para os quais todos os termos de  $(a_n)$  possuem valores entre esses dois números, ou seja,  $A \leq a_n \leq B$  para todo  $n$ .*

*Uma sequência é limitada superiormente quando se tem um número real  $B$  tal que  $a_n \leq B$ , ou seja, todos os seus termos pertencem ao intervalo  $(-\infty, B]$ . Da mesma forma,  $a_n$  é limitada inferiormente quando se tem um número real  $A$  tal que  $A \leq a_n$ , ou seja, todos os seus termos pertencem ao intervalo  $[A, +\infty)$ .*

As sequências também podem ser caracterizadas pelo comportamento de seus termos. Algumas delas podem ser **crecentes**, **decrecentes**, **não crecentes**, **não decrecentes** e **constantes**:

- i) **Sequência crescente:** quando  $a_n < a_{n+1}$ , para todo  $n$ , ou seja,  

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$
- ii) **Sequência não decrescente:** quando  $a_n \leq a_{n+1}$ , para todo  $n$ , ou seja,  

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$
- iii) **Sequência decrescente:** quando  $a_n > a_{n+1}$ , para todo  $n$ , ou seja,  

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$
- iv) **Sequência não crescente:** quando  $a_n \geq a_{n+1}$ , para todo  $n$ , ou seja,  

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$
- v) **Sequência constante:** quando todos os termos da sequência são iguais.

Podemos notar que, por definição, toda sequência crescente é uma sequência não decrescente, mas nem toda sequência não decrescente é crescente. Do mesmo modo, toda sequência decrescente é uma sequência não crescente.

Veremos agora sequências bem conhecidas, as **Progressões Aritméticas** e as **Progressões Geométricas**.

As seções 1.1 e 1.2 a seguir, tiveram base nos textos de (ALBUQUERQUE, 2019), (GREGIO, 2017) e (CASTRO, 2016).

## 1.1 Progressões Aritméticas

**Definição 4.** Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência em que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é igual a uma constante  $r$  fixada denominada razão. Em símbolos, para todo  $n > 1$ , tem-se

$$r = a_n - a_{n-1}. \quad (1.1)$$

Deste modo, reescrevendo a Equação 1.1, podemos dizer que ela é definida recursivamente por:

$$a_n = a_{n-1} + r, \quad \text{com } n > 1. \quad (1.2)$$

**Proposição 1.** Seja  $(a_n)$  uma PA, em que  $a_1$  é o primeiro termo e  $r$  sua razão. Então, o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \quad \text{para todo } n > 1. \quad (1.3)$$

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução finita. Vamos supor primeiramente  $n = 2$ , temos então que

$$a_2 = a_1 + r = a_1 + (2 - 1)r. \quad (1.4)$$

Deste modo, iremos supor que para algum  $n > 1$  seja válida a Equação 1.4 e vamos mostrar que o próximo termo  $a_{n+1}$  é dado por  $a_{n+1} = a_1 + nr$ . De fato,

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + nr.$$

Concluimos deste modo que  $a_n = a_1 + (n - 1)r$  para todo  $n > 1$ .

□

Sobre a razão de uma PA, podemos dizer que se

- $r = 0$ , a PA é constante;

**Exemplo 3.** A sequência  $(6, 6, 6, 6, 6, \dots)$  é constante, de razão  $r = 0$ .

- $r \neq 0$ , a progressão aritmética é crescente se  $r > 0$  e decrescente se  $r < 0$ .

**Exemplo 4.** Uma PA crescente, com  $r = 3$  é  $(3, 6, 9, 12, \dots)$ .

**Proposição 2.** *Seja a PA tal que  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ , a soma de seus  $n$  primeiros termos é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

*Demonstração.* Usaremos o princípio da indução finita para demonstração.

Note que para  $n = 1$  temos que  $S_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = a_1$ .

Suponhamos então que, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , a soma dos  $n$  primeiros termos seja dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \quad (1.5)$$

Podemos observar que

$$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) = S_n + a_{n+1}.$$

Sabendo que  $a_{n+1} = a_1 + nr$  e usando a Equação 1.5, obtemos

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} + (a_1 + nr) = \frac{a_1n + a_n n + 2a_1 + 2nr}{2}.$$

Como  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ , segue que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{a_1n + (a_1 + (n - 1)r)n + 2a_1 + 2nr}{2} = \frac{2a_1n + n^2r + nr + 2a_1}{2} = \frac{(2a_1 + nr)(n + 1)}{2} \\ &= \frac{(a_1 + (a_1 + nr))(n + 1)}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n + 1)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

### 1.1.1 Relação entre Progressões Aritméticas e funções polinomiais

Dado que o termo geral de uma PA é  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ , podemos relacioná-la com a função polinomial de primeiro grau, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \\ \Rightarrow a_n &= a_1 + nr - r \\ \Rightarrow a_n &= rn + (a_1 - r) \end{aligned}$$

o qual é uma função de primeiro grau em  $n$ , cujo coeficiente líder é  $r$  a razão da PA e  $a_1 - r$  o seu termo independente.

### 1.1.2 Aplicações envolvendo PA's

**Exemplo 5.** *Utilizando palitos de picolé, determinaremos qual é o número mínimo de palitos para construir  $n$  triângulos, com a restrição de que todos os vértices destes triângulos repousem sobre duas retas paralelas distintas.*

Vamos começar construindo 1 triângulo, para o qual vamos precisar de 3 palitos (Veja a Figura 1.

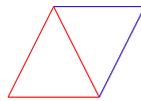
Figura 1 – Triângulos - 3 palitos



Fonte: A autora.

Se forem 2 triângulos, poderíamos pensar em 6 palitos, porém, aproveita-se um lado do triângulo já construído, precisando apenas de mais dois palitos, ou seja, temos um total de 5 palitos, veja Figura 2. Logo, podemos perceber que o próximo triângulo será sempre obtido através do imediatamente anterior.

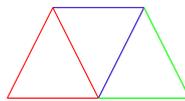
Figura 2 – Triângulos - 5 palitos



Fonte: A autora.

Pensando desta maneira, para um terceiro triângulo precisaremos apenas de mais dois palitos. Assim, para construir 3 triângulos, precisaremos de um total de 7 palitos. Observe Figura 3.

Figura 3 – Triângulos - 7 palitos



Fonte: A autora.

Logo, nota-se que a quantidade de palitos relacionada ao número de triângulos trata-se de uma PA de razão 2. Nesse caso, o  $n$ -ésimo termo é dado pela seguinte fórmula:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + 2n.$$

## 1.2 Progressões Geométricas

**Definição 5.** Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual o quociente de um termo qualquer por seu antecessor é sempre igual a uma constante  $q$  fixada denominada razão. Ou seja, para todo  $n$ ,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q. \quad (1.6)$$

Reescrevendo (1.6), obtemos a seguinte equação, a qual define  $a_{n+1}$  de modo recursivo em função de  $a_n$ . Então:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q. \quad (1.7)$$

**Proposição 3.** Seja  $(a_n)$  uma PG em que  $a_1$  é o primeiro termo e  $q$  sua razão. Então, o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad (1.8)$$

para todo  $n > 1$ .

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução finita. Considerando  $n = 1$ , temos que

$$a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1.$$

Iremos supor agora que para algum  $n \geq 1$  natural, seja válida a Equação 1.8. E iremos mostrar que o próximo termo  $a_{n+1}$  é dado por  $a_{n+1} = a_1 q^n$ . Com efeito, segue que

$$a_{n+1} = a_n q = a_1 q^{n-1} q = a_1 q^{(n-1)+1} = a_1 q^n.$$

□

**Proposição 4.** Seja  $(a_n)$  uma PG. Então a soma de seus  $n$  primeiros termos é dada por:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}.$$

*Demonstração.* Demonstraremos esta proposição usando também o princípio da indução finita. Primeiramente supondo  $n = 1$ , temos que

$$S_1 = a_1 \frac{(q^1 - 1)}{q - 1} = a_1.$$

Portanto, a fórmula é válida para  $n = 1$ . Admitimos agora que para algum  $n \in \mathbb{N}$ , tenhamos

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (1.9)$$

assim,

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + a_1 q^n. \quad (1.10)$$

Desse modo, usando a Equação 1.9, podemos concluir que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1} + a_1 q^n = \frac{-a_1 + a_1 q^n + (q - 1)a_1 q^n}{q - 1} = \frac{a_1 q^n (1 + q - 1) - a_1}{q - 1} \\ &= a_1 \frac{(q^{n+1} - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

□

## 2 A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

### 2.1 Leonardo Fibonacci e o Problema dos Coelhos

Esta seção teve base nos textos de (FARIAS, 2018, Capítulo 3) e (PEREIRA; FERREIRA, 2008, Introdução).

Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, foi um importante matemático italiano do século XII que nasceu por volta de 1170 na cidade de Pisa. Era filho de Guglielmo Bonacci, um rico mercador encarregado dos negócios das cidades de Veneza, Gênova e Pisa. Fibonacci recebeu a maior parte de sua educação no norte da África, onde seu pai desempenhava uma função alfandegária. Além disso, viajou para diversos países como Egito, Sicília, Grécia e Síria. Durante suas viagens Fibonacci conheceu os métodos matemáticos orientais e árabes, os quais despertou ainda mais seu interesse pela aritmética.

Em torno de 1200, Fibonacci regressou à Itália e em 1202 publicou o livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo). Foi neste livro que Fibonacci apresentou o Problema dos Coelhos e abrangeu o estudo sobre a "Sequência de Fibonacci", nomeada assim em homenagem ao próprio. (FARIAS, 2018)

Figura 4 – Leonardo Fibonacci



Fonte: Gigantes da Matemática. Word Press. Disponível em

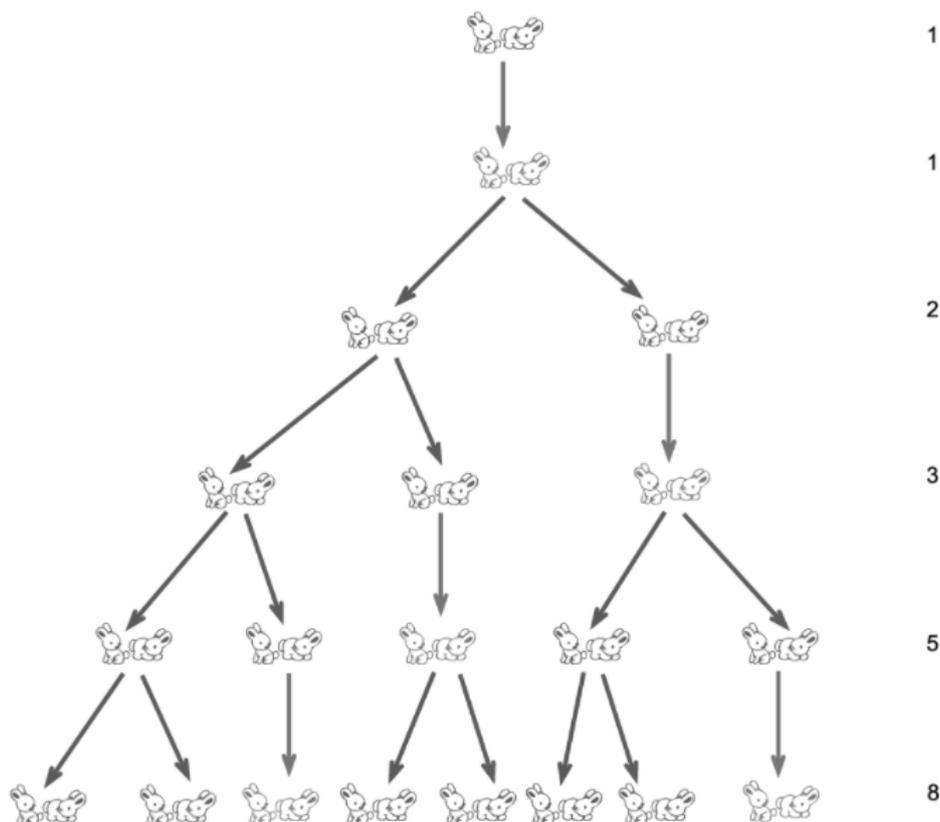
<<https://gigantesdamatematica.wordpress.com/2015/12/18/leonardo-fibonacci-1170-1250/>>

*"Considerando um casal de coelhos (macho e fêmea), nascidos no início do ano, quantos coelhos podem ser gerados a partir deste primeiro par se todos os meses cada casal dá a luz a um novo casal, que é fértil a partir do segundo mês, contanto que não haja mortes durante o ano?"*

Este foi o problema proposto por Fibonacci em 1202. Para resolvê-lo, iremos observar o que acontece a cada mês.

- No mês 1, temos um casal.
- No mês 2, ainda temos apenas um casal, pois a fertilidade só acontece no próximo mês.
- No mês 3, temos dois pares, pois a fêmea gerou outro casal.
- No mês 4, temos mais um par do casal inicial, totalizando 3. Não teremos casais do segundo par pois este ainda não é fértil.
- No mês 5, temos um par nascido de cada casal em idade fértil, totalizando 5 pares.

Figura 5 – Coelhos na sequência de Fibonacci



Fonte: PINHO, Andreia. O problema dos coelhos - Leonardo Fibonacci. Escola Secundária João da Silva Correia.

Disponível em <<https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos>>

Pode-se observar que quando nasce um casal de coelhos este demora dois meses para gerar outro, porém os casais que já haviam nascido há dois meses ou mais geram a cada mês um novo par. Podemos notar que a quantidade de casais em determinado mês será igual ao número de casais do mês anterior (pois não há mortes) somado a quantidade

de casais que existiam dois meses antes (pois estes serão os casais férteis no mês  $n$ ). Ou seja, obtemos a seguinte relação:

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1), n \geq 1.$$

Então, após um ano, que correspondem a 12 meses, de acordo com a Tabela 1, teremos 144 casais de coelhos, presumindo que não haja nenhuma morte.

Tabela 1 – Quantidade de coelhos gerados após um ano

$n$	$F(n) + F(n+1)$	$F(n+2)$
3	1+1	2
4	1+2	3
5	2+3	5
6	3+5	8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	55+89	144

**Observação 1.** A sequência de Fibonacci também pode ser definida como uma sequência de números inteiros, com os dois termos iniciais iguais a 1, em que o termo seguinte é dado pela soma dos dois anteriores. Matematicamente, essa sequência é definida recursivamente pela fórmula:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n \geq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Frente a isso, os primeiros elementos da sequência de Fibonacci são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \dots$$

## 2.2 O Número de Ouro

A seção em questão teve sua principal base nos textos de (PEREIRA; FERREIRA, 2008), (SILVA, 2015, Seção 2.2) e (SANTOS, 2018, Seção 1.1).

Por volta de 480 a.C. o escultor grego Phideas percebeu que inúmeras coisas na natureza seguiam uma mesma proporção, chamada de Proporção Áurea ou número de Deus ou número de Ouro. Foi em homenagem a Phideas que a Proporção Áurea hoje é representada pela letra grega  $\phi$  (lê-se fi). Ela é obtida, segundo Euclides, quando há a “divisão de um segmento em média e extrema razão”.

**Definição 6.** (Euclides, Os elementos). Um segmento de reta  $AB$  se diz dividido em média e extrema razão por um ponto  $C$ , entre  $A$  e  $B$ , se a razão entre o segmento  $AC$  por  $AB$  é igual a razão de  $CB$  por  $AC$ .

Seja o segmento de reta  $\overline{AB}$  ilustrado na Figura 6, chamaremos de  $AB$  a medida deste segmento. Dado um ponto  $C$  entre  $A$  e  $B$ , ele divide este segmento em média e extrema razão, ou seja

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}.$$

Figura 6 – Segmento de reta



Fonte: A autora.

Vamos tomar  $\frac{AB}{AC} = x$ , em que  $x > 0$ . Então:

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x},$$

ou seja, obtemos que

$$x = 1 + \frac{1}{x}. \quad (2.2)$$

Vamos multiplicar ambos os membros de (2.2) por  $x$ , obtendo:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$

As raízes desta equação são:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Como  $x_1 > 0$  e  $x_2 < 0$ , temos:

$$x = x_1 = \frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339\dots$$

Este resultado nada mais é que o número de Ouro mencionado inicialmente. A sequência de Fibonacci está diretamente ligada a este número, pois se fizermos a divisão do  $n$ -ésimo termo pelo termo exatamente anterior, obteremos resultados cada vez mais próximos da proporção áurea, conforme  $n$  cresce. Sendo a aproximação tanto melhor quanto for maior  $n$ , em que  $n$  é a posição do termo, veja:

$$\frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1.5; \quad \frac{5}{3} = 1.666\dots; \quad \frac{8}{5} = 1.6; \quad \frac{13}{8} = 1.625 \quad (2.3)$$

Matematicamente, considerando a sequência  $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ ,  $n \geq 1$ , em que os  $F_n$ 's correspondem aos termos da sequência de Fibonacci, temos que ela representa a taxa de crescimento do número de coelhos entre o  $(n + 1)$ -ésimo e o  $n$ -ésimo mês. A qual se aproxima cada vez mais do número de ouro.

**Teorema 1.** Temos que  $(a_n), n \geq 1$ , com  $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$  converge para  $\phi$ .

*Demonstração.* Inicialmente, note que

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

o que prova que  $a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + 1, n \geq 2$ . Pode-se notar, por meio da relação anterior, que se o limite de  $a_n$  existe e é igual a  $a$ , teremos que  $a$  é solução da equação  $a^2 - a - 1$ . De fato, sabemos que  $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ , donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}},$$

ou seja,

$$a = \frac{1}{a} + 1,$$

que é exatamente a Equação 2.2 apresentada anteriormente. Na qual sabemos que suas raízes são dadas por  $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Como  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ , podemos concluir que  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . □

Para finalizar a demonstração acima, basta provarmos a existência do limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  e para tal, utilizaremos o seguinte teorema visto em cursos de Análises na Reta (cuja demonstração pode ser consultada em (LIMA, 2017, Teorema 13))

**Definição 7.** Toda sequência de Cauchy<sup>1</sup> é convergente.

Vamos então mostrar que a sequência dada por

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1 \\ a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \end{cases} \quad (2.4)$$

é uma sequência de Cauchy.

**Teorema 2** (Sequência de Cauchy). A sequência  $(a_n)$  é dita ser uma **sequência de Cauchy** se dado  $\epsilon > 0$ , exista um índice  $N$  tal que, para todo inteiro positivo  $p$ ,

$$n > N \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

<sup>1</sup> Trata-se de uma família especial de sequências nomeadas em homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 — 1857)

Primeiro mostraremos, por indução sobre  $n$ , que a sequência dada em 2.4 é limitada, e para isso mostraremos que para todo  $n > 1$  temos

$$\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2.$$

Tomando  $n = 2$ , sabemos que é válido, pois  $\frac{3}{2} \leq 2 \leq 2$ . Suponhamos que seja válido para  $n = k$ , isto é,

$$\frac{3}{2} \leq a_k \leq 2. \quad (2.5)$$

e vamos provar que vale também para  $n = k + 1$ .

- De (2.5) temos que  $a_k \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_k} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{a_k} = a_{k+1}$ .
- Novamente por (2.5),  $\frac{3}{2} \leq a_k \Rightarrow \frac{1}{a_k} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k} \leq \frac{5}{3} < 2$ .

Com isso, concluímos que a sequência  $(a_n)$  é limitada inferiormente por 1 (pois  $a_1 = 1$  e  $3/2 \leq a_n$ ) e superiormente por 2.

Para provarmos que a sequência dada em 2.4 é de Cauchy utilizaremos o método das aproximações sucessivas: note que para todo  $n > 1$  temos

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| 1 + \frac{1}{a_n} - \left( 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right) \right| = \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n-1} - a_n|}{a_n \cdot a_{n-1}} \\ &\leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \left( \frac{4}{9} \right)^1 |a_n - a_{n-1}| \\ &\leq \left( \frac{4}{9} \right)^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \\ &\leq \left( \frac{4}{9} \right)^3 |a_{n-2} - a_{n-3}| \\ &\vdots \\ &\leq \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} |a_2 - a_1| = \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\ &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \left( \frac{4}{9} \right)^{n+p-2} + \left( \frac{4}{9} \right)^{n+p-3} + \cdots + \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} = \frac{\left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} \left( \left( \frac{4}{9} \right)^p - 1\right)}{\frac{4}{9} - 1} \\ &= \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} \left( \frac{9}{5} - \frac{9}{5} \left( \frac{4}{9} \right)^p \right). \end{aligned}$$

Note que como  $4/9 < 1$ , tomando  $N < n$  teremos que

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^p\right) < \left(\frac{4}{9}\right)^{N-1} \left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^p\right).$$

Por fim, dado  $\epsilon > 0$ , tome  $N$  de modo que

$$\epsilon = \left(\frac{4}{9}\right)^{N-1} \left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^p\right).$$

Daí, note que se  $n > N$ , temos

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

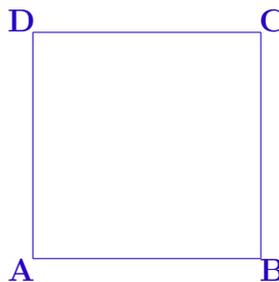
Logo,  $(a_n)$  é uma sequência de Cauchy e por consequência do Teorema 7 é convergente.

### 2.2.1 Retângulo de Ouro

Nesta seção iremos apresentar a construção de um retângulo cuja razão entre seus lados é a razão áurea. Tais retângulos são conhecidos por **Retângulos de Ouro**. Vejamos sua construção.

- 1) Primeiramente iremos desenhar um quadrado **ABCD**.

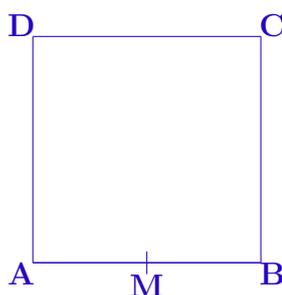
Figura 7 – Retângulo de Ouro - Passo 1



Fonte: A autora.

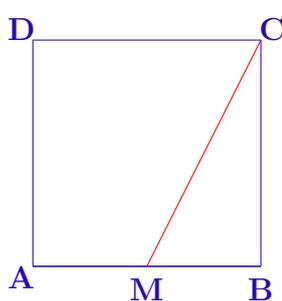
- 2) Em seguida iremos marcar o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .
- 3) O próximo passo é conectar o ponto médio  $M$  a um dos vértices do lado oposto, que no caso é  $\overline{DC}$ . Desse modo vamos formar o segmento  $\overline{MC}$ , conforme ilustrado na Figura 9.
- 4) Vamos agora construir uma circunferência com centro em  $M$  e raio  $\overline{MC}$ , o que pode ser visto na Figura 10.

Figura 8 – Retângulo de Ouro - Passo 2



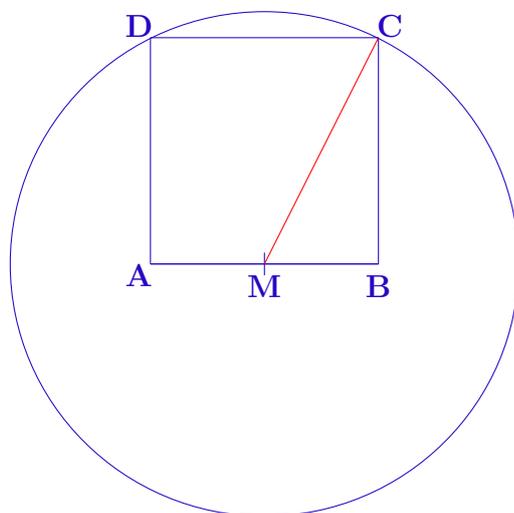
Fonte: A autora.

Figura 9 – Retângulo de Ouro - Passo 3



Fonte: A autora.

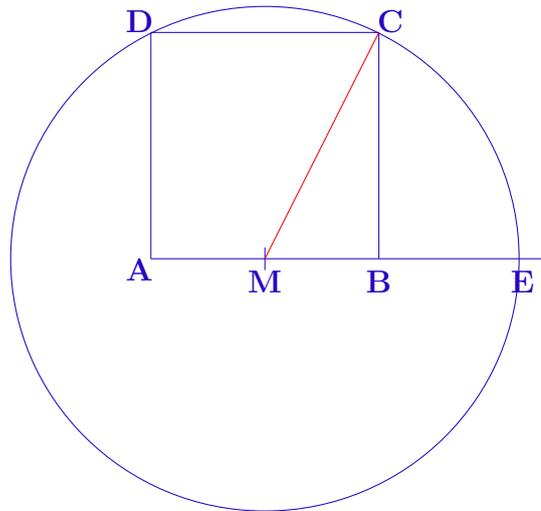
Figura 10 – Retângulo de Ouro - Passo 4



Fonte: A autora.

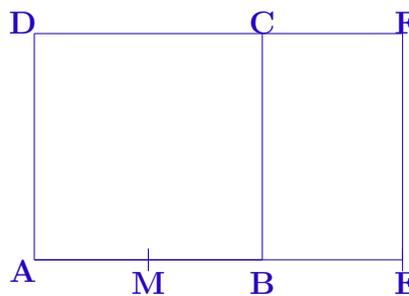
- 5) Em seguida, tomamos por  $E$  o ponto de interseção entre a circunferência e semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ . (Figura 11).
- 6) Logo em seguida vamos traçar uma reta paralela a  $\overline{BC}$  passando por  $E$ . Posteriormente prolongamos o lado  $\overline{DC}$ , gerando o ponto  $F$ . (Figura 12).

Figura 11 – Retângulo de Ouro - Passo 5



Fonte: A autora.

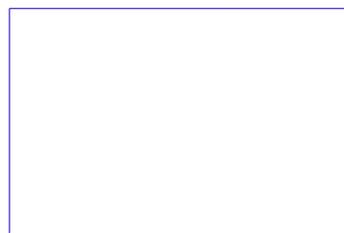
Figura 12 – Retângulo de Ouro - Passo 6



Fonte: A autora.

E desse modo obtemos um **retângulo de ouro**, como mostrado na Figura 13.

Figura 13 – Retângulo de Ouro



Fonte: A autora.

De fato, o retângulo construído é um retângulo de ouro, e podemos constatar isso devido à prova dada a seguir.

*Demonstração.* Como mostrado no passo 1, construiu-se um quadrado **ABCD** com medida de lado igual a  $x$ . No passo 2, foi marcado o ponto médio de  $\overline{AB}$ , ou seja,  $AM = MB = \frac{x}{2}$ . Passando para o passo 3, conectamos o ponto  $M$  ao vértice  $C$  do quadrado, formando o segmento  $\overline{MC}$  e o triângulo retângulo  $MBC$ .

Seguindo para o passo 4, construímos uma circunferência com centro  $M$  e raio  $\overline{MC}$ . Nesse caso, o raio é a hipotenusa do triângulo retângulo  $MBC$ . Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$MC^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow MC^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow MC = \sqrt{\frac{5x^2}{4}} \Rightarrow MC = \frac{\sqrt{5}x}{2}$$

No passo 5, encontramos o ponto  $E$  (interseção da circunferência e semi-reta  $\overline{AB}$ ). Sendo assim,  $\overline{ME}$  também é raio da circunferência, logo  $ME = \frac{\sqrt{5}x}{2}$ .

No passo 6, completamos o retângulo de ouro. A razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo é dada por  $\frac{AE}{EF}$ .

Porém,

$$AE = AM + ME = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}x}{2} = \frac{x(1 + \sqrt{5})}{2}$$

e  $EF = x$ . Desse modo,

$$\frac{AE}{EF} = \frac{x \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Logo, o retângulo **AEFD** é um Retângulo de Ouro. □

## 2.3 A Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea na Natureza

Esta seção se baseou nas seções 2.7 e 3.1 de (SILVA, 2015).

### 2.3.1 Espiral Áurea

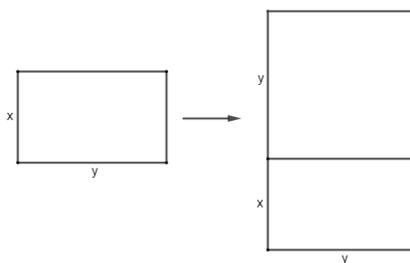
Uma interessante propriedade de um retângulo de ouro é que se anexarmos um quadrado ao lado maior, conforme ilustrado na Figura 14, obtemos um novo retângulo de ouro. De fato, a razão entre o lado maior e o menor neste novo retângulo é

$$\frac{x + y}{y} = 1 + \frac{x}{y} = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi.$$

O processo acima pode ser repetido indefinidamente e a cada passo um novo retângulo de ouro é adicionado. Agora se para cada um dos quadrados que aparecerem neste processo incluirmos um arco de circunferência, conforme ilustrado na Figura 15, obtemos uma curva denominada *espiral áurea*.

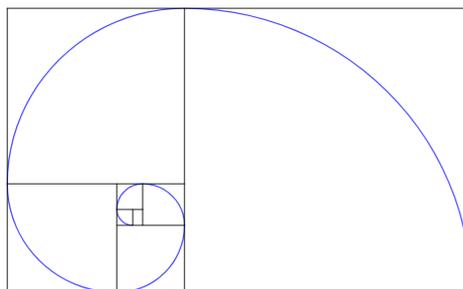
Essa espiral está presente em vários elementos na natureza, como por exemplo: a proporção Áurea se reflete desde a organização dos ossos (tanto de humanos como de

Figura 14 – Retângulos de Ouro



Fonte: A autora

Figura 15 – Espiral Áurea



Fonte: A autora

outros animais), na formação de veias e nervos nos corpos de mamíferos, na disposição das pétalas e sementes de flores, nos galhos das árvores, na geometria dos cristais, na galáxia, nas proporções de compostos químicos e até nas moléculas de DNA. As figuras 16, 17 e 18 apresentam alguns exemplos de onde aparece a espiral de Fibonacci.

Figura 16 – Arranjo das sementes do girassol



Fonte:BLUE, Vicente. A geometria sagrada, a flor da vida e a linguagem da luz. - Brasília Nova Era, 2016. Disponível em <<https://radionovaerabrasilia.wordpress.com/category/geometria-sagrada/>>

A Sequência de Fibonacci também está presente na quantidade de pétalas de algumas flores. Por exemplo, o lírio branco possui 1 pétala, a Coroa-de-Cristo possui 2 pétalas, o trílio possui 3 pétalas, a flor roxa possui 5 pétalas, algumas margaridas têm 8 pétalas e o girassol com 13 pétalas. A quantidade de pétalas representam números de Fibonacci. Veja na Figura 19.

Figura 17 – Nossa galáxia



Fonte: NUNES, Anderson Lupo. A Sequência de Fibonacci no Templo de Salomão - Biblioteca Fernando Pessoa, 2013. Disponível em: <<https://bibliot3ca.com/a-sequencia-de-fibonacci-no-templo-de-salomao/>>

Figura 18 – Concha do animal marinho Nautilus



Fonte: LAMB, Robert. Como os números de Fibonacci são expressos na natureza? - Universo Racionalista, 2015. Disponível em: <<https://universoracionalista.org/como-os-numeros-de-fibonacci-sao-expressos-na-natureza/>>

Além disso, o crescimento dos galhos de algumas plantas também acompanham a sequência, como *Achillea ptarmica* (veja Figura 20).

## 2.4 Propriedades da Sequência de Fibonacci

A presente seção se baseou principalmente na seção 1.3 de (SILVA, 2015).

**Teorema 3.** *A soma dos  $n$  primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por:*

$$S_n = F_{n+2} - 1. \quad (2.6)$$

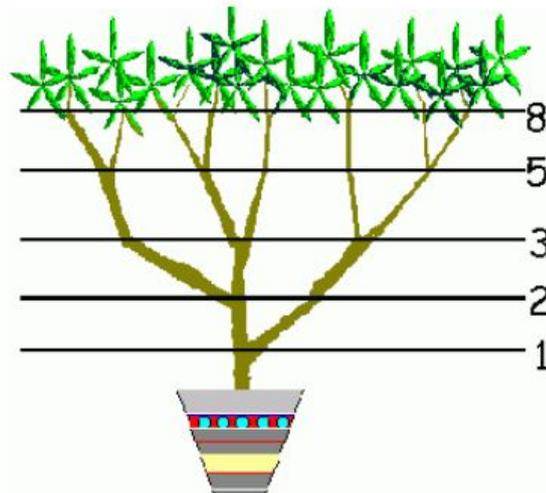
*Demonstração.* Pela definição da sequência de Fibonacci, temos:

Figura 19 – Sequência de Fibonacci nas flores



Fonte: GARCÍA, José Emílio López. Una sucesión muy áurea. El Rincón Matemático de Sherlock221, 11 de julho de 2020

Figura 20 – Achillea ptarmica



Fonte: SILVA, Reginaldo Leôncio. Um passeio pela sequência de Fibonacci e o número de ouro. Doc Player, 22 de abril de 2015.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_3 - F_2 \\
 F_2 &= F_4 - F_3 \\
 F_3 &= F_5 - F_4 \\
 &\vdots \\
 F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\
 F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}
 \end{aligned}$$

Fazendo a soma de todos os termos que estão a esquerda nas igualdades acima e considerando as próprias igualdades em si, obtemos a seguinte relação:

$$S_n = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Formalizaremos a dedução apresentada acima fazendo uma demonstração utilizando indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , temos:  $S_1 = F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$ .

Vamos admitir como hipótese que  $S_q = F_{q+2} - 1$ , disso

$$S_{q+1} = S_q + F_{q+1} = F_{q+2} - 1 + F_{q+1} = F_{q+3} - 1 = F_{(q+2)+1} - 1,$$

ou seja,

$$S_{q+1} = F_{(q+1)+2} - 1. \quad (2.7)$$

□

**Teorema 4.** *A soma dos  $n$  primeiros termos de índice ímpar da sequência de Fibonacci é igual a  $F_{2n}$ , isto é,*

$$S_n^i = F_{2n}, \quad (2.8)$$

em que  $S_n^i = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}$ .

*Demonstração.* Pela definição da sequência de Fibonacci, temos:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1 \\ F_3 &= F_4 - F_2 \\ F_5 &= F_6 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Somando as igualdades e cancelando os termos comuns em ambos os lados, obtemos

$$S_n^i = F_1 - F_2 + F_{2n} = F_{2n}.$$

Para formalizar a dedução acima, utilizaremos o método da indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , temos  $S_1^i = F_1 = 1$ .

Vamos admitir como hipótese que  $S_q^i = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2q-1} = F_{2q}$ , para  $q \geq 1$ , e vamos mostrar que é válido para  $n = q + 1$ . Então,

$$\begin{aligned} S_{q+1}^i &= F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2(q+1)-1} = (F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2q-1}) + F_{2q+2-1} \\ &= F_{2q} + F_{2q+1} = F_{2q+2} = F_{2(q+1)}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.** *A soma dos  $n$  primeiros termos de índice par da sequência de Fibonacci é dada por:*

$$S_n^p = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1. \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Podemos então escrever:

$$S_n^p = S_{2n} - S_n^i.$$

Logo, pelos teoremas 3 e 4, temos que:

$$\begin{aligned} S_n^p &= (F_{2n+2} - 1) - (F_{2n}) \\ S_n^p &= F_{2n+1} + F_{2n} - 1 - F_{2n} \\ S_n^p &= F_{2n+1} - 1. \end{aligned}$$

Para formalizar a dedução acima, iremos utilizar indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , temos  $S_1^p = F_2 = F_{2 \cdot 1 + 1} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$ . Vamos admitir como hipótese que:

$$S_q^p = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2q} = F_{2q+1} - 1, \quad \text{para } q \geq 1,$$

e vamos mostrar que vale para  $n = q + 1$ , assim temos:

$$\begin{aligned} S_{q+1}^p &= F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2(q+1)} \\ &= (F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2q+2}). \\ &= (F_{2q+1} - 1) + F_{2q+2} = (F_{2q+1} + F_{2q+2}) - 1 = F_{2q+3} - 1 = F_{2(q+1)+1} - 1. \end{aligned}$$

Portanto, podemos ver que a propriedade é válida. □

**Teorema 6.** *Dois números consecutivos na sequência de Fibonacci são relativamente primos entre si, ou seja,  $\text{mdc}(F_n, F_{n-1}) = 1$  para todo  $n$  natural maior ou igual que 1.*

*Demonstração.* Mostraremos este resultado por indução. Testando para  $F_1$  e  $F_2$ , podemos perceber que o Teorema 6 é válido, pois  $\text{mdc}(F_1, F_2) = \text{mdc}(1, 1) = 1$ .

Suponha que o resultado seja válido para algum  $n$ . Temos, pelo Algoritmo de Euclides, que:

$$\text{mdc}(F_{n+2}, F_{n+1}) = \text{mdc}(F_{n+2} - F_{n+1}, F_{n+1}) = \text{mdc}(F_n, F_{n+1}).$$

No entanto, por hipótese de indução temos que  $\text{mdc}(F_{n+1}, F_n) = 1$ , logo o resultado é válido. □

## 2.5 Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é um triângulo infinito composto por números binomiais  $\binom{n}{k}$ . Na sua forma em triângulo retângulo, mostrada na Figura 22,  $n$  representa o número

Figura 21 – Triângulo de Pascal

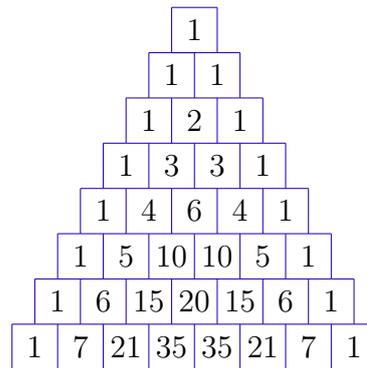


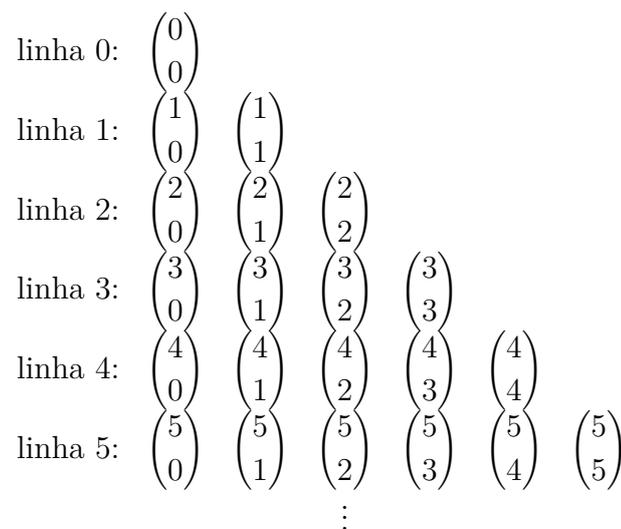
Figura 9

Fonte: A autora.

da linha e  $k$  representa o número da coluna. Também podemos dispor os números em um triângulo isósceles, como mostrado na Figura 21, que é uma representação mais simétrica.

A primeira linha e a primeira coluna são contadas como linha zero e coluna zero. Podemos usar quantas linhas forem necessárias, no entanto, vamos construí-lo aqui de forma limitada. Na linha zero teremos o número binomial  $\binom{0}{0}$ . Na linha 1, temos dois números binomiais, onde  $n$  é 1, e  $k$  segue a ordem dos números naturais, indo até 1. na linha 2 vamos ter três números binomiais, com  $n = 2$  e  $k = 0, 1, 2$ , respectivamente. Desse modo, podemos concluir que na linha 3, vamos ter  $n + 1$  números binomiais, com  $n = 3$  e  $k$  variando de 0 a  $n$ . Vejamos a representação descrita na Figura 22.

Figura 22 – Construção do Triângulo de Pascal



Fonte: A autora.

Agora basta substituir os binômios de Newton por seus respectivos valores numéricos, utilizando a seguinte fórmula:



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \quad (2.11)$$

**Exemplo 6.** Temos que:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 = \binom{5}{3}.$$

De acordo com a Figura 24, a soma das diagonais secundárias representadas no Triângulo de Pascal resultam em um número de Fibonacci, ou seja:

$$D_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-k}{k}. \quad (2.12)$$

Temos também que  $k$  é o maior inteiro tal que  $k \leq \frac{n}{2}$ , isto é:

$$k = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par.} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}.$$

Se  $n = 0$  ou  $n = 1$ , temos imediatamente  $D_0 = D_1 = 1$ . Vamos mostrar que vale a relação de recorrência para a sequência definida. Iremos considerar  $D_n$  como em 2.12 e analisar separadamente os casos de  $n$  par e  $n$  ímpar.

Sendo  $n$  par, podemos escrever  $n = 2q$ , obtendo

$$D_n = D_{2q} = \binom{2q}{0} + \binom{2q-1}{1} + \dots + \binom{q+1}{q-1} + \binom{q}{q},$$

$$D_{n+1} = D_{2q+1} = \binom{2q+1}{0} + \binom{2q}{1} + \binom{2q-1}{2} + \dots + \binom{q+2}{q-1} + \binom{q+1}{q}$$

e

$$D_{n+2} = D_{2q+2} = \binom{2q+2}{0} + \binom{2q+1}{1} + \dots + \binom{q+2}{q} + \binom{q+1}{q+1}.$$

Disto, observamos que

$$\begin{aligned} D_n + D_{n+1} &= \binom{2q}{0} + \binom{2q-1}{1} + \dots + \binom{q+1}{q-1} + \binom{q}{q} \\ &\quad + \binom{2q+1}{0} + \binom{2q}{1} + \binom{2q-1}{2} + \dots + \binom{q+1}{q} \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} D_n + D_{n+1} &= \binom{2q+1}{0} + \binom{2q+1}{1} + \binom{2q}{2} + \dots + \binom{q+2}{q} + \binom{q}{q} \\ &= \binom{2q+2}{0} + \binom{2q+1}{1} + \dots + \binom{q+2}{q} + \binom{q+1}{q+1} \\ &= D_{n+2}. \end{aligned}$$

Sendo  $n$  ímpar, podemos escrever  $n = 2q - 1$ , obtemos:

$$D_n = D_{2q-1} = \binom{2q-1}{0} + \binom{2q-2}{1} + \binom{2q-3}{2} + \dots + \binom{q+1}{q-2} + \binom{q}{q-1},$$

$$D_{n+1} = D_{2q} = \binom{2q}{0} + \binom{2q-1}{1} + \binom{2q-2}{2} + \dots + \binom{q+2}{q-2} + \binom{q+1}{q-1} + \binom{q}{q}$$

e

$$D_{n+2} = D_{2q+1} = \binom{2q+1}{0} + \binom{2q}{1} + \binom{2q-1}{2} + \dots + \binom{q+2}{q-1} + \binom{q+1}{q}.$$

Disto, observamos que

$$\begin{aligned} D_n + D_{n+1} &= \binom{2q-1}{0} + \binom{2q-2}{1} + \dots + \binom{q+1}{q-2} + \binom{q}{q-1} \\ &\quad + \binom{2q}{0} + \binom{2q-1}{1} + \binom{2q-2}{2} + \dots + \binom{q+1}{q-1} + \binom{q}{q} \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} D_n + D_{n+1} &= \binom{2q}{0} + \binom{2q}{1} + \binom{2q-1}{2} + \dots + \binom{q+2}{q-1} + \binom{q+1}{q} \\ &= \binom{2q+1}{0} + \binom{2q}{1} + \binom{2q-1}{2} + \dots + \binom{q+1}{q} \\ &= D_{n+2}. \end{aligned}$$

Note que em ambos os casos, temos sempre que uma diagonal secundária é igual a soma das duas imediatamente anteriores, como desejávamos.

## 2.6 As Frações Contínuas e o Número de Ouro

Vamos apresentar o conceito de frações contínuas a partir de um exemplo importante para nós: o número de ouro. Vimos que o número de ouro é raiz positiva da equação quadrática:

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (2.13)$$

Porém, iremos visualizá-la de um jeito diferente. Algo que podemos notar é que 0 não é raiz da Equação 2.13, sendo assim, vamos dividir esta equação por  $x$ , e reescrevê-la por

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Substituindo o valor do próprio  $x$  na equação, especificamente no denominador do lado direito, obtemos

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Repetindo este processo indefinidamente, chegamos em

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}. \quad (2.14)$$

Analisando a sucessão das frações obtidas, obtemos uma sequência de aproximações, como

- $1 + \frac{1}{1} = 2.$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1,5.$
- $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1,666\dots,$

que são exatamente as razões obtidas em (2.3) na Seção 2.3. Vimos também, na Seção 2.6, que a solução positiva da Equação 2.13 é

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

A seguir vamos apresentar uma classe especial de números obtidos através de equações quadráticas similares à dada em (2.13).

**Definição 8.** A família dos **números metálicos**<sup>2</sup> é formada pelas raízes positivas de equações quadráticas da forma:

$$x^2 - px - q = 0, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Como as soluções da Equação 2.15 são:

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2},$$

temos que a Equação 2.15 dá origem a um único número metálico  $x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ , que é a raiz positiva, o qual denotamos por  $\sigma_{p,q}$ .

Alguns números metálicos possuem nomes especiais, relacionados à metais. Além do famoso número de Ouro, há o número de Prata, de Bronze, de Cobre, de Níquel e de Platina, conforme exposto na Tabela 2.

Tabela 2 – Números Metálicos

$p$	$q$	Símbolo	Nome	Valor
1	1	$\phi$	Número de Ouro	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
2	1	$\sigma_{2,1}$	Número de Prata	$1 + \sqrt{2}$
3	1	$\sigma_{3,1}$	Número de Bronze	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$
1	2	$\sigma_{1,2}$	Número de Cobre	$\frac{2}{2}$
1	3	$\sigma_{1,3}$	Número de Níquel	$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$
2	2	$\sigma_{2,2}$	Número de Platina	$3 + \sqrt{13}$

A expressão obtida para o número de ouro em (2.14) é o que chamamos por fração contínua, cuja definição apresentamos a seguir.

**Definição 9.** Toda expressão da seguinte forma,

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \dots}}}, \quad (2.16)$$

é chamada de fração contínua, na qual  $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  são números complexos. Em que  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  são os quocientes parciais da fração contínua. Entretanto, nesta monografia iremos trabalhar apenas com frações contínuas simples, que têm a forma:

<sup>2</sup> A Definição 8 foi estabelecida pela Dra Vera W. Spinadel, professora Titular Emérita da Universidade de Buenos Aires.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}. \quad (2.17)$$

Simplificando a escrita podemos representar a fração contínua dada em (2.17) por

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots].$$

**Teorema 8.** *Qualquer número metálico da forma  $\sigma_{p,1}$  possui expansão em fração contínua puramente periódica com período igual a  $p$ .*

*Demonstração.* Seja  $\sigma_{p,1}$  um número metálico, ou seja,  $\sigma_{p,1}$  é a raiz positiva da equação  $x^2 - px - 1 = 0$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_{p,1}^2 - p\sigma_{p,1} - 1 &= 0. \\ \Rightarrow \sigma_{p,1}^2 &= p\sigma_{p,1} + 1. \\ \Rightarrow \sigma_{p,1} &= p + \frac{1}{\sigma_{p,1}}. \\ \Rightarrow \sigma_{p,1} &= p + \frac{1}{p + \frac{1}{\sigma_{p,1}}}. \\ \Rightarrow \sigma_{p,1} &= p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{\sigma_{p,1}}}}. \end{aligned}$$

Repetindo esse processo continuamente, encontramos  $\sigma_{p,1} = [p, p, p, p, \dots]$ . Nesse caso podemos simplesmente escrever  $\sigma_{p,1} = [\overline{p}]$ , representando sua notação em fração contínua.

□

Como o número de Ouro é o número metálico  $\sigma_{1,1}$  temos que sua expansão em fração contínua é  $\phi = [1, 1, 1, 1, \dots] = [\overline{1}]$ .

## 3 Sequências definidas por recorrências

Vimos em (2.1) que os elementos da sequência de Fibonacci, a partir do terceiro, são definidos por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Este tipo de relação entre os elementos de uma sequência é conhecida por recorrência, cuja definição formal apresentaremos a seguir.

**Definição 10.** *Uma relação de recorrência é uma regra que permite determinar um termo qualquer de uma sequência em função de seus termos imediatamente anteriores. Podemos representá-la da seguinte forma:*

$$a_{n+1} = f(a_1, a_2, \dots, a_n, n), \quad (3.1)$$

**Exemplo 7.** *Veremos aqui dois exemplos de sequências e suas respectivas relações de recorrência.*

- *Sequência dos números pares positivos: (2, 4, 6, 8, ...).*

*Sua relação de recorrência pode ser expressada por  $a_{n+1} = a_n + 2$ , pois basta pegarmos o termo anterior e somarmos 2 para obtermos o próximo.*

- *Sequência dos números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, ...).*

*Podemos notar que sua relação de recorrência também pode ser dada por  $a_{n+1} = a_n + 2$ , pois somando 2 unidades ao termo anterior, obtemos o seguinte.*

*Pode-se perceber que, uma mesma relação de recorrência pode ser usada para duas ou mais sequências diferentes. Portanto, para evitar esta ambiguidade, deve-se informar o primeiro termo ou os primeiros termos. Diante disso, na sequência dos números pares positivos temos  $a_1 = 2$  e na sequência dos números ímpares temos  $a_1 = 1$ .*

### 3.1 Classificação

Podemos classificar as recorrências de várias maneiras, das quais, apresentaremos aqui algumas delas. A primeira delas, estabelecida na Definição 11 abaixo, está relacionada com a quantidade de elementos precedentes aos quais são necessários para se obter o próximo.

**Definição 11.** Seja  $a_{n+1} = f(a_1, a_2, \dots, a_n, n)$  uma relação de recorrência. Dizemos que essa recorrência é de ordem  $k$  se a relação  $f$  que a define depender somente dos  $k$  termos imediatamente antecessores, ou seja,

$$a_{n+1} = f(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n, n).$$

Destacaremos duas classes de recorrências classificadas pela sua ordem, as de primeira e segunda ordem:

- (a) Uma recorrência é de *primeira ordem* quando cada termo depende exclusivamente do termo exatamente anterior a ele, ou seja, quando  $a_{n+1}$  está em função de  $a_n$ , ou seja,  $a_{n+1} = f(a_n, n)$ .
- (b) Uma recorrência é de *segunda ordem* se cada termo depender de dois termos exatamente anteriores a ele, ou seja, se  $a_{n+1}$  estiver somente em função de  $a_n$  e  $a_{n-1}$ , isto é,  $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, n)$ .

**Exemplo 8.** Vejamos as equações de recorrência abaixo:

- A progressão aritmética dada por  $a_{n+1} = a_n + 4$  é uma recorrência de primeira ordem, pois  $a_{n+1}$  depende somente de  $a_n$ .
- A progressão geométrica dada por  $a_{n+1} = 6a_n$  também é uma recorrência de primeira ordem, pois  $a_{n+1}$  depende somente de  $a_n$ .

Agora, observando as equações de recorrência abaixo, podemos perceber que

- a sequência de Fibonacci definida por  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ , é uma recorrência de segunda ordem, pois  $a_n$  depende de seus dois termos imediatamente anteriores;
- a recorrência  $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$  também é de segunda ordem, pois  $a_n$  depende de seus dois termos imediatamente anteriores.

As duas próximas classificações a serem apresentadas são inspiradas no conceito de linearidade, visto no curso de Introdução à Álgebra Linear.

**Definição 12.** Uma relação de recorrência é dita *linear* quando a função que relaciona um termo aos seus anteriores é de primeiro grau nas variáveis  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Caso contrário, a recorrência é dita *não linear*.

**Exemplo 9.** Vejamos os exemplos abaixo:

- A equação de recorrência definida por  $a_{n+1} = (a_n)^2 + 1$  não é linear, pois a função que a define,  $f(x) = x^2 + 1$ , não é de 1º grau.
- A equação de recorrência definida por  $a_{n+1} = 14a_n - 2a_{n-1}$  é linear, pois a função que a define é de 1º grau.

**Definição 13.** Uma relação de recorrência é dita homogênea se não houver nenhum termo independente dos termos da sequência. A equação homogênea é definida por  $a_{n+1} = h(n)a_n$ . Caso contrário, a equação diz-se não-homogênea.

**Exemplo 10.** Considerando as recorrências:

- $a_{n+1} = 4a_n$ , é homogênea, pois não existe nenhum termo independente de dos termos da sequência;
- $a_{n+1} = a_n + 2n$ , pode-se dizer que ela é não-homogênea, pois há um termo independente dos termos da sequência:  $2n$ .

A seguir, veremos como resolver algumas classes de recorrência, o que por sua vez quer dizer que vamos encontrar uma fórmula fechada ou termo geral, que nos permitirá calcular qualquer termo da recorrência sem precisar conhecer seus termos imediatamente anteriores.

## 3.2 Recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

Vamos considerar a recorrência homogênea linear de primeira ordem com coeficiente constante  $\beta$ ,  $a_n = \beta a_{n-1}$ , com  $\beta \neq 0$ . Desse modo, podemos escrever os passos da recursão proveniente desta, que é

$$\begin{aligned} a_2 &= \beta a_1 \\ a_3 &= \beta a_2 \\ &\vdots \\ a_n &= \beta a_{n-1}. \end{aligned}$$

Fazendo o produto de todos os termos que estão a esquerda nas igualdades acima e considerando as próprias igualdades em si, obtemos a seguinte relação:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = \beta a_1 \cdot \beta a_2 \cdot \beta a_3 \cdot \dots \cdot \beta a_{n-1} = \beta^{n-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1},$$

o que pode ser reescrita por

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} (a_n - a_1 \beta^{n-1}) = 0. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) implica que

$$a_2 \dots a_{n-1} = 0 \quad \text{ou} \quad (a_n - a_1 \beta^{n-1}) = 0. \quad (3.3)$$

Caso  $a_1 \neq 0$ , teremos então  $a_n - a_1 \beta^{n-1} = 0$ , ou seja,

$$a_n = a_1 \cdot \beta^n. \quad (3.4)$$

E este é o formato da solução geral para recorrências lineares de primeira ordem homogêneas com coeficientes constantes.

**Exemplo 11.** *Vamos considerar o seguinte problema:*

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, & n \geq 1 \\ a_1 = 7. \end{cases}$$

*Desse modo, por (3.4), vemos que a solução é:*

$$a_n = 7 \cdot 2^n.$$

A sequência  $a_n = 7 \cdot 2^n$  é uma solução para a relação de recorrência dada por  $a_n = 2a_{n-1}$ . Porém, podemos notar que a sequência  $b_n = 9 \cdot 2^n$  é outra solução para a recorrência  $a_n = 2a_{n-1}$ . Pois, como vimos anteriormente, duas sequências diferentes podem ter relações de recorrência iguais. No entanto,  $a_n$  é a *única* sequência que é solução de  $a_n = 2a_{n-1}$  que satisfaz a condição  $a_1 = 7$ .

Iremos agora considerar a recorrência não-homogênea do tipo

$$a_{n+1} = a_n + g(n), \quad (3.5)$$

onde  $g(n)$  é uma função não nula. Deste modo, podemos escrever seu processo recursivo abaixo:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + g(1) \\ a_3 &= a_2 + g(2) \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + g(n-1). \end{aligned}$$

Fazendo a soma de todos os termos que estão a esquerda nas igualdades acima e considerando as próprias igualdades em si, obtemos a seguinte relação:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + g(1) + a_2 + g(2) + a_3 + g(3) + \dots + a_{n-1} + g(n-1).$$

Cancelando os termos iguais em ambos os lados, ficamos com:

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k). \quad (3.6)$$

E este é o formato da solução geral para recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas.

**Observação 2.** Para determinarmos o termo geral da sequência solução  $a_n$ , precisamos ser capazes de determinarmos efetivamente uma fórmula fechada para o somatório dado em (3.6). Em alguns casos, como soma de termos de progressões aritméticas ou geométricas, somos capazes de obter uma fórmula para o somatório, mas na maioria dos casos trata-se de um problema bastante complicado de se resolver.

**Exemplo 12.** Resolver o seguinte problema envolvendo recorrências

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2^n \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Note que, tomando  $g(n) = 2^n$ , temos por (3.6) que a solução deste problema é

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k) = 1 + (2^1 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

### 3.3 Recorrências lineares de segunda ordem

Uma recorrência linear de segunda ordem é do tipo

$$f(n)a_{n+2} + g(n)a_{n+1} + h(n)a_n + k(n) = 0, \quad (3.7)$$

em que  $f, g, h$  e  $k$  são funções que têm domínio nos naturais, tais que  $f(n)$  e  $h(n)$  nunca se anulam.

Estudaremos apenas os casos em que temos  $k(n) = 0$  e nas quais  $f(n)$ ,  $g(n)$  e  $h(n)$  são constantes, as chamadas **recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes**, ou seja, recorrências da forma

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \quad (3.8)$$

na qual  $q \neq 0$ , caso contrário, seria uma recorrência de primeira ordem.

Vamos supor que a solução do tipo que encontramos para recorrências de primeira ordem  $a_n = a_1 \cdot \beta^n$ , também sirva como solução para (3.8). Deste modo, temos

$$a_1\beta^{n+2} + pa_1\beta^{n+1} + qa_1\beta^n = 0. \quad (3.9)$$

Queremos obter a solução não trivial, então  $a_1 \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ . Neste caso, podemos dividir a Equação 3.9 por  $a_1\beta^n$ , resultando em

$$\beta^2 + p\beta + q = 0,$$

ou seja,  $\beta$  é raiz quadrática na variável  $r$ :

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (3.10)$$

A Equação 3.10 é chamada de *equação característica* da recorrência dada em 3.8. Observe que como  $q$  é não nulo, então 0 (zero) não é raiz da equação.

A seguir, veremos alguns teoremas e exemplos que visam obter a solução das equações de recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, a partir das raízes da equação característica.

**Teorema 9.** *Sendo  $r_1$  e  $r_2$  as raízes de  $r^2 + pr + q = 0$ , então a solução da recorrência é da forma*

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n \quad (3.11)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes reais.

*Demonstração.* Substituindo  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  na recorrência  $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= (C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}) + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) \\ &= C_1 r_1^n \cdot (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 13.** *Vamos resolver a equação de recorrência da sequência de Fibonacci, dada por*

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = 1 \\ F_2 = 1. \end{cases}$$

*Lembrando que, como se trata de uma recorrência de segunda ordem, precisa-se de dois valores iniciais. Neste caso,  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 1$ .*

*Sendo assim, sua equação característica é dada por  $r^2 - r - 1$  e suas raízes são*

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

então

$$F_n = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para satisfazer os valores iniciais, temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ 1 = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2. \end{cases}$$

Note que obtemos um sistema linear 2 por 2 nos elementos  $C_1$  e  $C_2$ , e resolvendo-o temos que:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad e \quad C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad (3.12)$$

e essa é a fórmula fechada para a solução de recorrência da sequência de Fibonacci.

Aqui vale destacar um fato interessante: o lado direito da Equação (3.12) é natural para todo  $n \geq 1$ .

A seguir, vamos apresentar alguns problemas interessantes cujas resoluções passam por relações de recorrência.

### 3.4 Torres de Hanói

O jogo conhecido como Torres de Hanói é construído a partir de 3 hastes e um número  $n$  de discos com raios distintos e todos perfurados em seu centro. Inicialmente, todos os discos estão dispostos em uma única torre, de modo que nenhum disco menor fique abaixo de um maior. O objetivo do jogo é mover todos os discos de uma haste para outra e as regras são: deve-se mover apenas um disco de cada vez e nunca colocar um disco maior sobre um menor.

Iremos utilizar este jogo para descobrirmos qual o número mínimo de movimentos que utilizaremos ao passar todos os discos de uma haste para outra, seguindo suas regras.

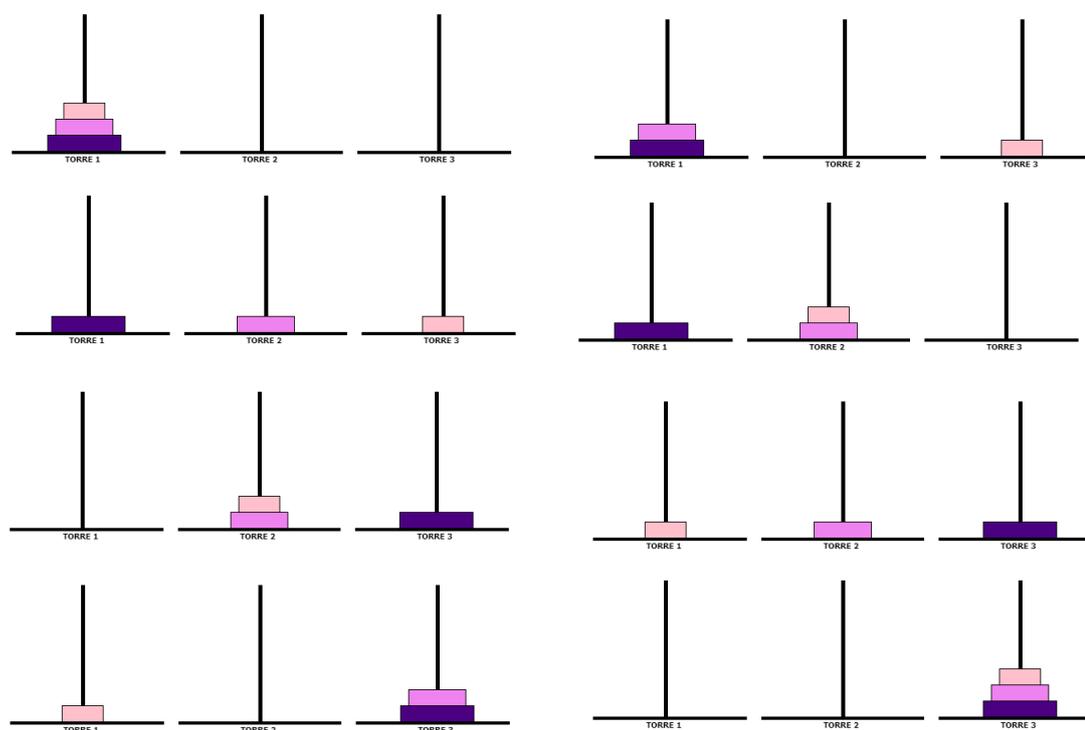
Primeiramente, se temos um disco, basta movê-lo para outra haste, gastando apenas 1 movimento.

Agora, com dois discos, teremos no mínimo 3 movimentos: o primeiro para retirar o menor disco do topo da torre e colocá-lo em uma haste diferente; o segundo para transferir o maior disco para a haste que ainda está vazia (lembrando que não podemos colocá-lo

logo acima do disco de menor tamanho), e o terceiro para enfim colocar o disco menor sobre o maior.

Se temos três discos, vamos deslocar primeiramente os dois discos de cima, que são os menores. Sabemos que, para deslocar 2 discos o número mínimo de movimentos é 3, feito isso iremos deslocar o último disco para outra haste, gastando mais 1 movimento. Novamente devemos mover os dois discos menores para cima do maior, gastando 3 movimentos, totalizando  $3 + 1 + 3 = 7$  movimentos. Podemos ver a sequência de movimentos descritos, na Figura 25.

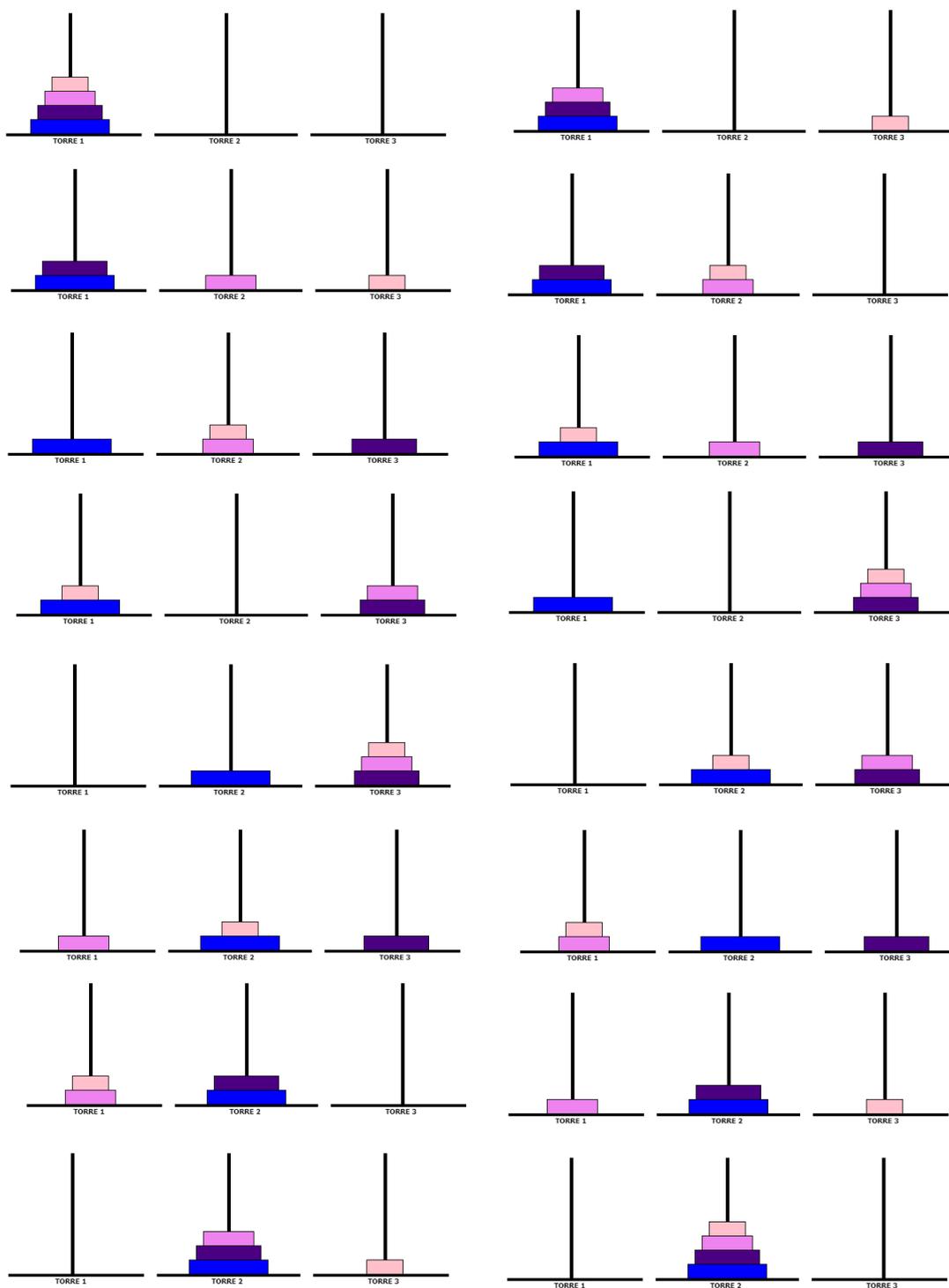
Figura 25 – Sequência de movimentos mínimos para 3 discos



Fonte: Torre de Hanói. Só Matemática. Disponível em <https://www.somatematica.com.br/jogos/hanoi/>

Para calcular o número mínimo de movimentos com o quatro discos, iremos fazer do mesmo modo feito anteriormente para 3 discos. Vamos mover os 3 discos de cima, gastando 7 movimentos. Posteriormente, vamos gastar mais 1 movimento para mover o maior disco de haste e por fim gastaremos mais 7 movimentos para mover os três menores para cima do maior, formando a torre, totalizando  $7 + 1 + 7 = 15$  movimentos (Figura 26).

Figura 26 – Sequência de movimentos mínimos para 4 discos



Fonte: Torre de Hanói. Só Matemática. Disponível em <https://www.somatematica.com.br/jogos/hanoi/>

A partir daí, podemos perceber que temos uma recorrência, onde precisamos do número de movimentos gastos com  $n$  discos para descobrir os movimentos que serão gastos com  $n + 1$  discos. Suponha que  $a_n$  seja a quantidade mínima de movimentos necessários para deslocar  $n$  discos de uma haste a outra. A ideia é sempre deslocar os  $n - 1$  discos

menores para outra haste, deslocar o maior disco gastando 1 movimento e por fim deslocar os  $n - 1$  discos restantes para cima do maior, nos dando um total de  $a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$  movimentos mínimos possíveis. Ou seja, a relação de recorrência é definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1. \end{cases}$$

Dito isto, para  $n = 5$ , temos  $a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$  movimentos. Para  $n = 6$ , temos  $a_6 = 2a_5 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$  movimentos. Desse modo obtemos a seguinte sequência:

$$(1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots, a_n, a_{n+1} = 2a_n + 1, \dots).$$

Podemos verificar que a relação de recorrência  $a_n = 2a_{n-1} + 1$  é intuitiva, vejamos

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = 2a_{n-2} + 1 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow a_{n-2} = 2a_{n-3} + 1 \quad (3.15)$$

⋮

Substituindo (3.14) em (3.13), temos

$$a_n = 2(2a_{n-2} + 1) + 1$$

$$\Rightarrow a_n = 2^2 \cdot a_{n-2} + 3. \quad (3.16)$$

Novamente, substituindo (3.15) em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 4(2a_{n-3} + 1) + 3 \\ \Rightarrow a_n &= 2^3 a_{n-3} + 7 \end{aligned}$$

E assim segue-se sucessivamente. Observando a sequência  $(a_n)$  e fazendo várias substituições, após  $k$  vezes, a relação de recorrência terá a seguinte forma:

$$a_n = 2^k \cdot a_{n-k} + 2^k - 1.$$

Quando  $k = n - 1$ , e sabendo que  $a_1 = 1$ , temos

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

E esta é a fórmula fechada para a relação de recorrência do problema das Torres de Hanói.

### 3.5 Um problema com dominós

Usando peças de dominó, de quantas formas diferentes é possível cobrir um tabuleiro  $2 \times n$ ? Para resolver este problema, vamos começar primeiramente com um tabuleiro  $2 \times 1$ , conforme representado na Figura 27.

Figura 27 – Dominós - tabuleiro  $2 \times 1$



Fonte: A autora.

Note que temos apenas uma maneira de preenchê-lo, colocando o dominó na vertical. Agora com um tabuleiro  $2 \times 2$ , temos duas formas: dois dominós verticais ou dois na horizontal, conforme representado na Figura 28.

Figura 28 – Dominós - tabuleiro  $2 \times 2$



Fonte: A autora.

Para o tabuleiro  $2 \times 3$ , temos 3 formas de preencher o tabuleiro, que são: três dominós na vertical; dois na horizontal e um na vertical; um na vertical e dois na horizontal, conforme indicado na Figura 29.

Figura 29 – Dominós - tabuleiro  $2 \times 3$

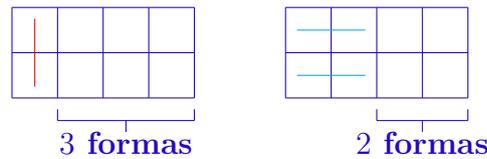


Fonte: A autora.

Assim, chegamos em um ponto que presumiríamos o número de maneiras para preencher um tabuleiro  $2 \times 4$ , no qual pensaríamos que seriam 4 formas, devido à sequência obtida até aqui, porém não é esse o resultado. Primeiramente temos duas maneiras de começar a distribuir os dominós: começando com um dominó na vertical ou dois na horizontal, tais cenários estão descritos na Figura 30. Se começarmos com um dominó na vertical, nos sobra um tabuleiro  $2 \times 3$ , e desse já sabemos que temos 3 formas de cobri-lo. Se começarmos com dois dominós na horizontal, nos sobra um tabuleiro  $2 \times 2$ , e também já sabemos que para este temos 2 formas de cobri-lo. No total, temos  $3 + 2 = 5$  formas de cobrir um tabuleiro  $2 \times 4$  com dominós.

Para um tabuleiro  $2 \times n$  suponha que existam  $a_n$  formas de preenchê-lo. Note que para preenchê-lo temos duas formas de começar a distribuir as peças no tabuleiro (veja

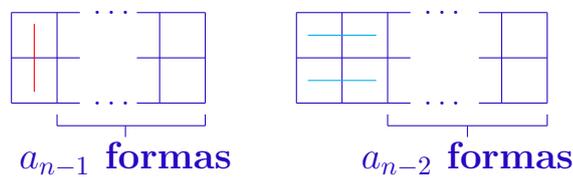
Figura 30 – Dominós - tabuleiro 2 x 4



Fonte: A autora.

Figura 31: a primeira forma é começar com um dominó na vertical e nos restam preencher nesse caso um tabuleiro  $2 \times (n - 1)$ , o qual pode ser feito de  $a_{n-1}$  formas; a segunda maneira é começar com dois dominós na horizontal e nos restam preencher um tabuleiro  $2 \times (n - 2)$ , o qual pode ser feito de  $a_{n-2}$  formas.

Figura 31 – Dominós - tabuleiro 2 x n



Fonte: A autora.

Desse modo, sua fórmula de recorrência será:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Vale destacar que a recorrência obtida aqui é a mesma da sequência de Fibonacci, o que os difere são as condições iniciais  $a_1$  e  $a_2$ .

Sendo assim, de modo análogo ao que foi feito para resolver a recorrência da sequência de Fibonacci, sabemos que a equação característica é a mesma, dada por  $r^2 - r - 1$ , na qual suas raízes são  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Sabendo que  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 2$ , temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ 2 = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{cases},$$

cuja solução é  $C_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$  e  $C_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$ .

Logo, podemos concluir que a fórmula fechada para a relação de recorrência do problema dos dominós em um tabuleiro  $2 \times n$  é a seguinte

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

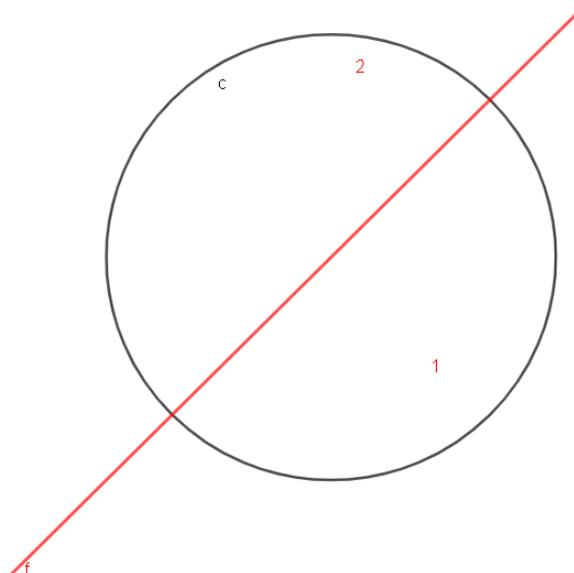
## 3.6 Pizza de Steiner

Em 1826 o alemão Jacob Steiner propôs e resolveu o seguinte problema:

"Qual é o maior número de regiões em que se pode dividir um plano com  $n$  retas?" (MORGADO; CARVALHO, 2013)

Vamos pensar em um plano  $\alpha$  como se fosse uma grande pizza e vamos denotar por  $n$  o número de retas. Inicialmente, cortaremos o plano com uma única reta  $f$  (vejamos na Figura 32), e é conhecido que uma reta divide o plano em dois semi-planos.

Figura 32 – Pizza de Steiner ( $n = 1$ )



Fonte: A autora, Geogebra Classic

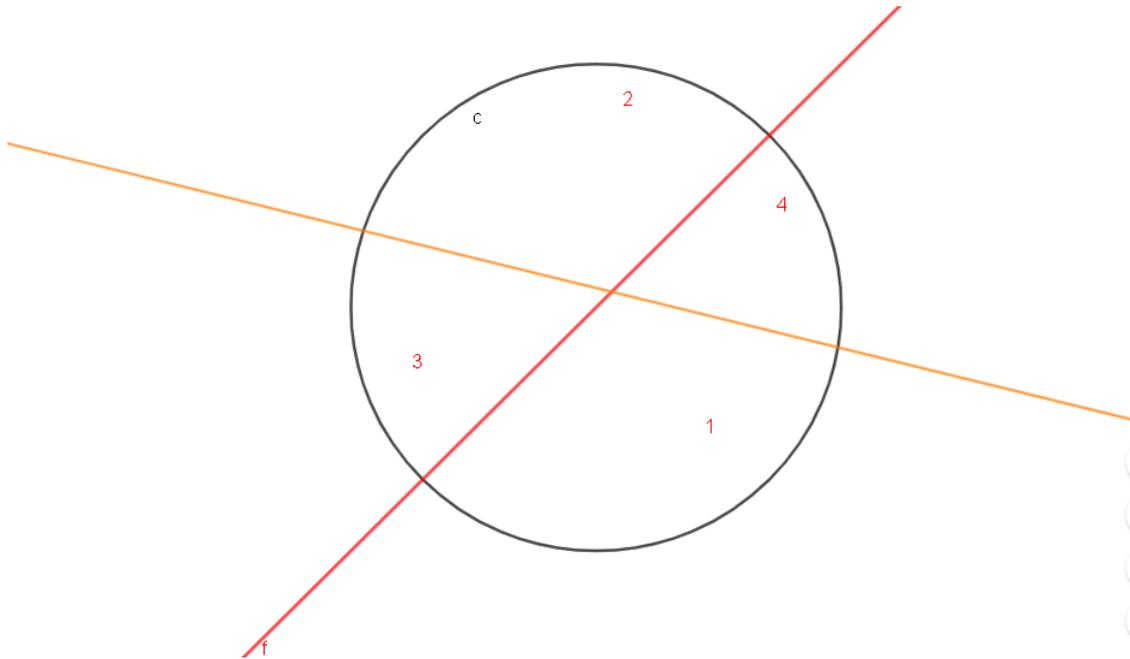
Vamos cortar novamente o plano, porém agora temos algumas opções. A nova reta  $s$  pode ser paralela ou concorrente à reta  $f$ , mas como queremos o número máximo de regiões, nossa nova reta terá que ser concorrente à primeira reta, conforme podemos observar a representação na Figura 33.

Ficamos assim, com uma quantidade máxima de 4 regiões. Novamente vamos cortar o plano, porém agora fazendo algumas observações. Para obtermos o número máximo de subdivisões, a  $(n + 1)$ -ésima reta (corte), deve interceptar todos os outros cortes e além disso, cada intersecção deve ser de no máximo duas retas ou reta e circunferência. Dessa maneira, introduzindo uma reta  $t$  de modo a obter o número máximo de regiões, ficamos com a representação na Figura 34.

E conseqüentemente obtemos 7 regiões. Fazendo as mesmas observações, vamos traçar uma quarta reta  $u$ .

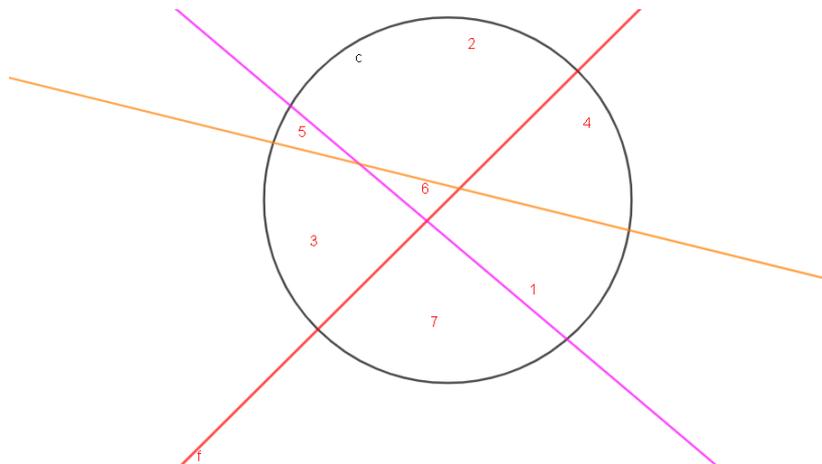
Por conseguinte, conseguimos um número máximo de 11 regiões no plano  $\alpha$ . Faremos agora, uma tabela representando o número  $n$  de retas que cortam o plano e a quantidade máxima de regiões, que vamos denotar por  $a_n$ , que obtemos em função de  $n$ .

Figura 33 – Pizza de Steiner ( $n = 2$ )



Fonte: A autora, Geogebra Classic

Figura 34 – Pizza de Steiner ( $n = 3$ )



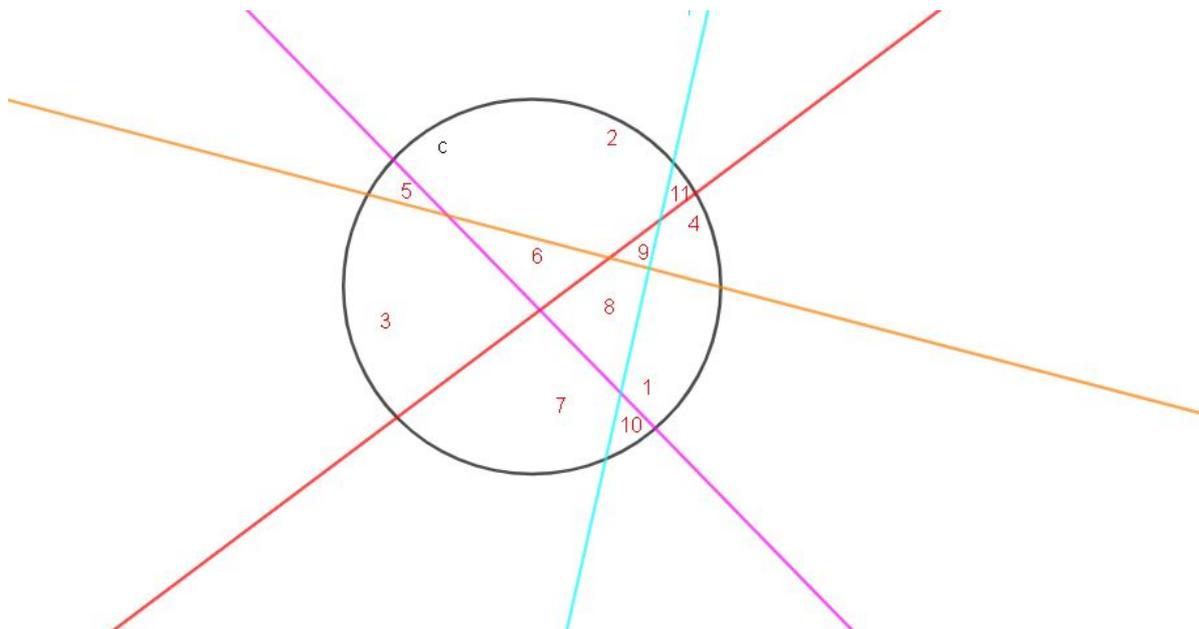
Fonte: A autora, Geogebra Classic

Observando a Tabela 3, podemos perceber a recorrência, ou seja, podemos notar que o próximo termo será o número de retas  $n$  mais a quantidade máxima anterior de regiões. Podemos concluir que com 5 retas teremos então  $5 + 11 = 16$  regiões.

Por fim, podemos definir a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n, \quad n > 1. \end{cases}$$

Para resolver essa recorrência notemos que ela é da forma apresentada em (3.5)

Figura 35 – Pizza de Steiner ( $n = 4$ )

Fonte: A autora, Geogebra Classic

Tabela 3 – Pizza de Steiner

$n$	$a_n$
1	2
2	4
3	7
4	11

cuja solução é da forma (3.6), ou seja

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + \sum_{i=1}^n i \\
 &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.
 \end{aligned}$$

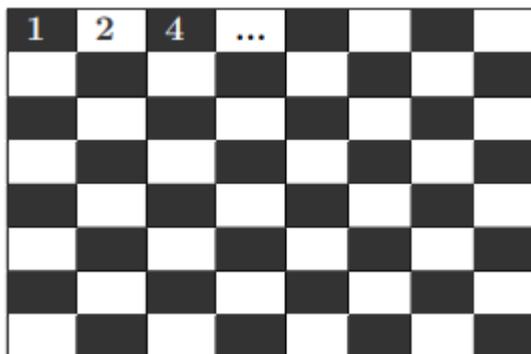
Note que para  $n = 5$ ,  $a_5 = \frac{5^2 + 5 + 2}{2} = 16$ .

### 3.7 Lenda do Jogo de Xadrez

A criação do jogo de xadrez se deu por volta do século VI na Índia. Segundo a lenda, Sissa Ben Dahir teria criado o jogo para animar o rei, visto que ele havia acabado de perder uma batalha naquela época. Como recompensa, o inventor pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 grãos de trigo pela terceira casa e assim por diante, até alcançar as 64 casas, sendo a quantidade de grãos de trigo dobrada a cada uma delas. A pergunta que surge é: deve o rei ou não dar

a recompensa pedida, e para isso temos que calcular quantos grãos de trigo Sissa recebeu como recompensa. (ÁVILA, 1994)

Figura 36 – Tabuleiro de Xadrez



Fonte: A autora.

Podemos notar que se trata de um recorrência linear de primeira ordem. Vimos anteriormente, no Exemplo 12 que a solução desta recorrência corresponde à soma dos primeiros  $n$  termos de uma Progressão Geométrica, cujo primeiro termo é 1 e sua razão é 2:

$$a_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow a_n = 2^n - 1.$$

Ou seja, a quantidade de grãos de trigo é por  $a_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ .

Ora, o rei chegou à conclusão que seria impossível atender o pedido de Sissa, devido à magnitude da quantidade de trigo. Ele percebeu que em todo o mundo conhecido na época, não havia trigo o suficiente para pagá-lo.

Vamos analisar os dados de hoje, segundo a CNN Brasil, a produção de trigo no país chegou à 7,6 milhões de toneladas em 2021, o que equivale a 152 000 000 000 000 grãos de trigo, considerando que cada grão pese aproximadamente 50 mg, ou seja, temos  $15,2 \times 10^{13}$  grãos. Dividindo este número pelo número de grãos de trigo que o Brasil produziu até 2021, temos

$$\frac{18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615}{152\ 000\ 000\ 000\ 000} \approx 121\ 360.$$

Isso significa que seriam necessários aproximadamente 121360 anos de produção brasileira de trigo, no nível da safra de 2021, para atender ao pedido de Sissa.

Indo um pouco mais além, vamos considerar a produção mundial de trigo até 2021. Segundo o Canal Rural, em dezembro de 2021, a produção de trigo somava 769,6 milhões de toneladas ou  $769,6 \times 10^{15}$  mg, o que equivale a  $15\ 392\ 000\ 000\ 000\ 000 = 153,92 \times 10^{14}$  grãos. Ou seja, seriam necessários aproximadamente 1198 anos de produção mundial de trigo, no nível de hoje, para atender à demanda de Sissa. Sendo um pouco mais realista e

considerando a produção de trigo verdadeira, teríamos que recuar muito tempo no passado e ainda sim todo o trigo cultivado nos últimos 10 000 anos ainda não seria suficiente para atender este pedido.

## Referências

- ALBUQUERQUE, A. d. C. *Resolução de Problemas de Contagem Usando Recorrências Lineares*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís/MA, 2019.
- AMORIM, L. M. *Relações de Recorrência*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2014.
- ARAÚJO, J. J. V. *As Frações Contínuas e os Números Metálicos*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso de Pós-Graduação) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa/PB, 2015.
- CASTRO, F. J. *Matemática Discreta: Tópicos de recorrências lineares e suas aplicações*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa/PB, 2016.
- FARIAS, B. M. *Sequência de Fibonacci e o Número Áureo*. Dissertação (Monografia de Graduação) — Universidade Estadual de Campinas, 2018.
- GREGIO, B. C. *Sequências de Números Reais e as famosas constantes matemáticas  $e$ ,  $\pi$  e  $\phi$* . Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2017.
- JUNIOR, D. d. O. A.; MATOS, F. A. *Pascal, Fibonacci e Geometria*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de São João Del Rei, 2016.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise Real vol.1*. 14. ed. Rio de Janeiro/RJ: IMPA, 2017. (Projeto Euclides).
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 1. ed. Rio de Janeiro/RJ: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).
- PEREIRA, L. d. C.; FERREIRA, M. V. *Sequência de Fibonacci: História, propriedades e relações com a razão Áurea*. Dissertação (Monografia de Graduação) — UNIFRA, 2008.
- SANTOS, F. H. *Funções de Fibonacci: Um estudo sobre a razão Áurea e a sequência de fibonacci*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió/AL, 2018.
- SILVA, R. L. *A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro: Contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2015.
- ÁVILA, G. O jogo de xadrez. *RPM 25. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP*, 1994.