

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS – ICEB
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - DEEMA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

LUANA MILAGRES FERNANDES

“SE A GENTE DOBRAR ESSE QUADRADINHO NO EIXO, OS PEDAÇOS VÃO COINCIDIR”: ponderações sobre as relações que alunas e alunos estabelecem com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas.

**OURO PRETO – MG
NOVEMBRO DE 2022**

LUANA MILAGRES FERNANDES

“SE A GENTE DOBRAR ESSE QUADRADINHO NO EIXO, OS PEDAÇOS VÃO COINCIDIR”: ponderações sobre as relações que alunas e alunos estabelecem com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas.

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito para a obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Augusto Deodato

OURO PRETO - MG
NOVEMBRO DE 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

F363" Fernandes, Luana Milagres.

"Se a gente dobrar esse quadradinho no eixo, os pedaços vão coincidir" [manuscrito]: ponderações sobre as relações que alunas e alunos estabelecem com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas. / Luana Milagres Fernandes. - 2022.
91 f.

Orientador: Prof. Dr. André Augusto Deodato.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Ensino de Geometria. 2. Simetria de reflexão. 3. Oficinas. 4. Ensino Fundamental. I. Deodato, André Augusto. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Luana Milagres Fernandes

"Se a gente dobrar esse quadradinho no eixo, os pedaços vão coincidir": ponderações sobre as relações que alunas e alunos estabelecem com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática

Aprovada em 03 de novembro de 2022

Membros da banca

Dr. André Augusto Deodato - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto

Dr.^a Marli Regina dos Santos - Universidade Federal de Ouro Preto

M.^a Roselene Alves Amâncio - Universidade Federal de Minas Gerais

André Augusto Deodato, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 01/12/2022



Documento assinado eletronicamente por **André Augusto Deodato, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 01/12/2022, às 14:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0409300** e o código CRC **F433AE9F**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.013953/2022-49

SEI nº 0409300

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus e aos meus pais, Elizabeth e Percival, por tanto amor, cuidado e dedicação. Essa conquista é nossa! Ao meu irmão, Lucas, por sempre enxergar potencial em mim. Ao Gabriel, por estar sempre ao meu lado, me apoiando e me fortalecendo em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. André Augusto Deodato, por todo ensinamento, por toda atenção e por não medir esforços para me ajudar na elaboração deste trabalho.

À Ana Flávia, minha querida amiga, por todo companheirismo e carinho, que me apoiou não só neste trabalho, como também na vida.

À Maurila, por fazer do seu lar, o meu lar. Por radiar alegria e me mostrar esse lado bom da vida. À minha tia Rosângela, por me inspirar, me incentivar e me guiar.

À professora Raiane Andery e aos alunos que participaram desse estudo.

Obrigada a todos! Sou imensamente grata!

RESUMO

O ensino de Geometria na Educação Básica, quando se tem o contexto brasileiro como foco, tem sido objeto de preocupação. Nesse cenário, em particular, notamos que existe demanda e espaço para a realização de investigações que focalizam a relação dos alunos com o conceito de simetria. Assim, valendo-nos desse ensejo que encontramos, no presente trabalho, buscamos investigar como alunas e alunos do 9º ano do Ensino Fundamental se relacionam com o conceito de simetria de reflexão, em uma sequência de oficinas. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa do tipo intervenção pedagógica. Nessa pesquisa, inicialmente, elaboramos uma sequência de três oficinas envolvendo o conceito de simetria de reflexão nas quais utilizamos recursos como a dobradura, o geoplano virtual, a malha quadriculada e espelhos planos. Em seguida, as aplicamos a um grupo de 36 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede estadual, localizada no município de Ouro Preto/MG. Assim, o material empírico foi produzido a partir do registro das oficinas em áudio, em fotografias e em diário de campo. Depois de analisarmos esse material, percebemos que alguns alunos compreenderam a partir da sobreposição de figuras, na oficina de dobraduras, que figuras simétricas por reflexão preservam suas medidas e suas formas. Percebemos também que os estudantes, ao utilizarem o geoplano virtual, trabalharam aspectos caros ao ensino de geometria e à apropriação do conceito de simetria, tais como: intuição, exploração, investigação, argumentação, entre outros. Além disso, na oficina dos espelhos, o engajamento dos estudantes e à referência ao letreiro da ambulância mostrou que eles podem valorizar aulas de Geometria nas quais conseguem estabelecer conexões com o cotidiano.

Palavras-chave: Ensino de Geometria; Simetria de reflexão; Oficinas; Sala de aula de Matemática; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The teaching of Geometry in Basic Education, when the Brazilian context is the focus, has been an object of concern. In this scenario, in particular, we noticed that there is demand and space for carrying out investigations that focus on the relationship between students and the concept of symmetry. Thus, taking advantage of this opportunity that we found, in the present work, we seek to investigate how students from the 9th year of Elementary School relate to the concept of reflection symmetry, in a sequence of workshops. Therefore, we carried out a qualitative research of the pedagogical intervention type. In this research, initially, we developed a sequence of three workshops involving the concept of reflection symmetry in which we used resources such as folding, the virtual geoplano, the checkered mesh and plane mirrors. Then, we applied them to a group of 36 students from the 9th year of Elementary School, from a state school, located in the municipality of Ouro Preto/MG. Thus, the empirical material was produced from the recording of the workshops in audio, photographs and in a field diary. After analyzing this material, we noticed that some students understood from the overlapping of figures, in the folding workshop, that symmetrical figures by reflection preserve their measurements and shapes. We also noticed that the students, when using the virtual geoplano, worked on aspects that are important to the teaching of geometry and to the appropriation of the concept of symmetry, such as: intuition, exploration, investigation, argumentation, among others. In addition, in the mirror workshop, the engagement of students and the reference to the ambulance sign showed that they can value Geometry classes in which they can establish connections with everyday life.

Keywords: Teaching Geometry; Reflection symmetry; Workshops; Mathematics classroom; Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Transformação geométrica	19
Figura 2: Isometria	20
Figura 3: Não é isometria	21
Figura 4: Eixos de simetria d triângulo equilátero.....	21
Figura 5: Reflexão do paralelogramo em relação à reta r	22
Figura 6: Simetria de reflexão	22
Figura 7: Transladando um quadrado	23
Figura 8: Simetria de translação.....	23
Figura 9: Rotação de centro O e amplitude 90°	24
Figura 10: Construindo um triângulo equilátero.....	36
Figura 11: Construindo um triângulo isósceles.....	37
Figura 12: Reconhecendo um triângulo escaleno	37
Figura 13: Interface do Geoplano virtual	39
Figura 14: Explorando simetria de reflexão A.....	39
Figura 15: Explorando simetria de reflexão B.....	40
Figura 16: Explorando simetria de reflexão C	40
Figura 17: Explorando simetria de reflexão D	41
Figura 18: Explorando simetria de reflexão E.....	42
Figura 19: Explorando simetria de reflexão F.....	42
Figura 20: Explorando simetria de reflexão G	43
Figura 21: Espelhos e simetria	44
Figura 22: Explorando eixos com espelhos.....	44
Figura 23: Explorando as diagonais do quadrado e do retângulo	45
Figura 24: Inversão da palavra simetria	46
Figura 25: Slide apresentado aos alunos	50
Figura 26: Inseto Picasso	52
Figura 27: Piso da escola	53
Figura 28: Construindo o triângulo equilátero.....	54
Figura 29: Construindo o triângulo isósceles.....	56
Figura 30: Encontrando eixos de simetria do triângulo escaleno	56
Figura 31: Encontrando eixos de simetria do triângulo isósceles.....	57
Figura 32: Encontrando eixos de simetria do triângulo equilátero.....	57

Figura 33: Primeira construção compartilhada com os discentes	60
Figura 34: Segunda Construção - criada para elucidar dúvida dos discentes	60
Figura 35: Terceira construção compartilhada com os discentes.....	61
Figura 36: Luca explicando a noção de eixo de simetria no quadro.....	62
Figura 37: Quarta construção compartilhada com os discentes.....	63
Figura 38: Destaque no quadro para ilustrar que a distância era igual	64
Figura 39: Quinta construção compartilhada com os discentes	65
Figura 40: Destaque no quadro para ilustrar que a distância era diferente	65
Figura 41: Atividade apresentada ao aluno João	66
Figura 42: Esboço de João.....	67
Figura 43: Registros produzidos para discorrer sobre a simetria dos triângulos.....	68
Figura 44: Atividade apresentada ao aluno José	69
Figura 45: Licencianda auxiliando José no uso do touchpad	69
Figura 46: Construção inicial de José	70
Figura 47: Construção final de José.....	70
Figura 48: Atividade apresentada aos alunos Sophia e João	71
Figura 49: Construção dos alunos.....	71
Figura 50: Aluno no quadro argumentando em defesa da ideia apresentada	72
Figura 51: Registro do uso do geoplano virtual nos celulares	73
Figura 52: Construções do grupo um	75
Figura 53: Construções do grupo dois	75
Figura 54: Construção do grupo três.....	76
Figura 55: Paralelogramo	77
Figura 56: Estudante em busca de eixo de simetria no paralelogramo.....	78
Figura 57: Aluno e o teste de uma hipótese.....	79
Figura 58: Teste de simetria nas diagonais.....	80
Figura 59: Discentes em busca de eixos de simetria em dois quadriláteros	80
Figura 60: Registro da atividade de uma aluna	81
Figura 61: Registro da Alice explorando o círculo.....	82
Figura 62: Nome escrito corretamente com uso do espelho	83
Figura 63: Nome escrito sem a inversão das letras	83
Figura 64: Ambulância	84

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Pesquisas selecionadas	27
Quadro 2: Cronograma	33
Quadro 3: Definição de polígono nos livros didáticos.....	49
Quadro 4: Organização das imagens proposta pelos estudantes	50

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1. CONSTRUINDO ENTENDIMENTOS PARA O CONCEITO DE SIMETRIA.....	18
1.1 Simetria de reflexão	21
1.2 Simetria de translação	23
1.3 Simetria de rotação	24
1.4 O conceito de simetria no âmbito da Matemática escolar.....	25
2. REVISÃO DE LITERATURA	27
3. METODOLOGIA	30
3.1 Percurso metodológico	31
4. APRESENTAÇÃO DAS TRÊS OFICINAS ELABORADAS	34
4.1 Oficina 1 – Construindo o conceito de simetria por meio de dobraduras.....	34
4.2 Oficina 2 – Explorando a simetria de reflexão no geoplano virtual.....	38
4.3 Oficina 3 – Explorando a simetria de reflexão por meio de espelhos e malha quadriculada	43
5. REFLEXÕES SOBRE A REALIZAÇÃO DAS OFICINAS	47
5.1 Desenvolvimento e análise da oficina 1	47
5.2 Desenvolvimento e análise da oficina 2	59
5.3 Desenvolvimento e análise da oficina 3	76
CONSIDERAÇÕES FINAIS	86
REFERÊNCIAS.....	89

INTRODUÇÃO

Optei por, nesta monografia, refletir sobre questões relacionadas à Geometria, questões estas que foram surgindo durante a graduação, somadas as de minha trajetória como estudante da Educação Básica. Portanto, iniciarei este texto narrando parte de minha trajetória acadêmica, retomando algumas lembranças e experiências que me marcaram, contextualizando minha formação e meu interesse pelo tema deste trabalho.

Meu primeiro contato com a instituição escolar foi quando ingressei na Escola Municipal de Educação Infantil Suely. Tenho vagas lembranças da Educação Infantil e, dentre essas, algumas revelam que meu interesse pela Educação se iniciou logo na infância. Lembro-me do cheiro do giz de cera, da mesa redonda, dos fantoches, dos brinquedos espalhados pelo chão, do pátio todo desenhado de figuras geométricas com giz, do cheiro do mofo e principalmente de professoras muito amorosas. Refletindo sobre esse cenário, a partir da perspectiva que assumo hoje, considero que ele fez com que eu ‘olhasse’ para a profissão docente com respeito, gratidão e muita admiração.

Depois de concluídas as minhas vivências na Educação Infantil, passei a estudar na Escola Estadual José Leandro na qual cursei o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Frequentei essa instituição por doze anos, ou seja, durante mais da metade da minha vida estive nessa escola. Esse vínculo também impulsionou minha escolha pela profissão de professora. Considero relevante destacar que, entre as disciplinas do Ensino Fundamental, comecei a ter mais afinidade com a Matemática; nela eu tinha mais autonomia, me empenhava mais e sentia mais prazer em estudar o que era abordado.

Em 2012, quando cursava o 7º ano, conheci a ‘Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)¹’. Tive um bom desempenho na Olimpíada até o Ensino Médio e, por consequência, realizei em 2013, 2014 e 2015,

¹ A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas “é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação – MEC e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações – MCTI”. Disponível em: < <http://www.obmep.org.br> > Último acesso em 10/10/2022.

o Programa de Iniciação Científica (PIC)² da OBMEP no polo da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) tendo recebido bolsa de Iniciação Científica Júnior do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O curso me proporcionou grandes experiências e foi com ele que entrei mais profundamente em contato com a Matemática. Naquela época, considerava que o conhecimento matemático que construía nos encontros do PIC era bem mais complexo do que aquele que eu construía na escola e foi um desafio aprender toda aquela Matemática que, até então, desconhecia.

O conteúdo que mais me despertou interesse no PIC, foi a Geometria. Comecei a estudar, em especial, a Geometria Euclidiana Plana. Destaco que, inicialmente, de forma não axiomática e enfatizando as construções geométricas elementares. Entretanto, a medida em que o curso foi evoluindo, o método sintético de Euclides e as demonstrações começaram a ganhar importância. Conheci vários teoremas clássicos da geometria – alguns dos quais considero belos – que eram ausentes nos livros didáticos da escola.

Se, de um lado, essa experiência com a OBMEP estreitou minha relação com a Matemática, de outro, uma das minhas professoras de Matemática da época, não vinculada ao PIC, foi uma grande inspiração para a minha escolha profissional. Ela era determinada, organizada e uma excelente profissional. Era umas daquelas pessoas que eu olhava e pensava: *“Quando eu crescer, eu quero ser assim!”*. Em suas aulas, sempre procurava trabalhar com recursos didáticos, em particular, com material manipulável. Com o incentivo e a indicação dela, tive também algumas experiências ensinando Matemática a estudantes que demandavam aulas particulares.

Durante todo o Ensino Médio, eu me questionava sobre qual a profissão eu gostaria de seguir. A meu ver, ‘ser professora’ é um trabalho nobre, importante e de muita responsabilidade. Entretanto, a docência não é uma profissão que atrai, por vários motivos, dentre os quais destaco os baixos salários e a desvalorização social. Esse tema já é bastante debatido na literatura. Nessa direção, Cericato (2016), remete-se a Sella (2006) para afirmar que

² O Programa de Iniciação Científica Jr. “é um programa que propicia ao aluno premiado da OBMEP, entrar em contato com interessantes questões no ramo da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico”. Disponível em: < <http://www.obmep.org.br> > Último acesso em 10/10/2022.

(...) além de ter impacto imediato na motivação e na autoestima do profissional, o salário relaciona-se com o desprestígio social, na medida em que a função docente passa a ser considerada uma ocupação “de quem não conseguiu algo melhor”, principalmente em uma sociedade em que o *status* social é estabelecido em termos de poder econômico. A valorização social e financeira (implícita ou explícita) do trabalho do professor também tem ligação com a atratividade da carreira docente e, por consequência, com a qualidade da educação oferecida para a população (CERICATO, 2016, p.279).

Além de discutir como a docência se instituiu e como está configurada em nosso país, Cericato (2016) acrescenta:

Desse modo, o desafio está posto: além de superar as negativas representações vigentes sobre a docência e torná-la mais atrativa aos concluintes do ensino médio, é preciso criar estratégias para reter bons candidatos que possam educar com qualidade as futuras gerações (CERICATO, 2016, p.284).

A despeito de ter sido uma decisão difícil, por razões semelhantes a essas antes mencionadas, optei por realizar um curso de Licenciatura.

Em 2018, iniciei o curso de Licenciatura em Matemática na UFOP. No início, as pessoas do meu convívio me desmotivavam muito ao criticarem minha escolha de curso. Muitas me questionavam: “*Mas Matemática? Você é doida? Vai ser professora?*”. Tal situação, embora tenha, de certa maneira, me afetado, foi sendo superada e, no decorrer dos períodos e das experiências que o curso me proporcionou, percebi que eu realmente queria lecionar.

Dentre as áreas da Matemática, aquela com a qual mais me identifiquei na graduação, assim como tinha ocorrido na Educação Básica, foi a Geometria. Compete ressaltar também que na Licenciatura tive a oportunidade não só de cursar alguns componentes curriculares voltados para a Geometria, mas também de participar de Programas como o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)³ e o Programa de Residência Pedagógica (PRP)⁴. Tais

³ O PIBID “é uma iniciativa que integra a Política Nacional de Formação de Professores do Ministério da Educação e tem por finalidade fomentar a iniciação à docência, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação de docentes em nível superior e para a melhoria de qualidade da educação básica pública brasileira”. Disponível em: < <https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/pibid/pibid> > Último acesso em 10/10/2022.

⁴ O PRP “é um programa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que tem por finalidade fomentar projetos institucionais de residência pedagógica implementados por Instituições de Ensino Superior, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação

experiências provocaram em mim questionamentos sobre o ensino de Geometria, que foram ganhando dimensões maiores ao longo dos semestres, principalmente pelas vivências experimentadas nos projetos citados e nas disciplinas de prática de ensino e estágio supervisionado.

Quando chegou o momento de iniciar a minha monografia, já tinha certeza de que queria trabalhar com o ensino de Geometria. Comecei, então, a me perguntar sobre quais razões me fizeram escolher esse tema. Além das experiências relatadas até aqui, ao longo desses últimos tempos, ouvi relatos de professores de Matemática da Educação Básica apontando a Geometria como uma área cujos conteúdos relacionados são objeto de problemas de aprendizagem por parte dos estudantes. Observei também, ao longo das experiências vivenciadas nas escolas, durante a graduação, que nelas a Geometria foi pouco trabalhada. Quando presenciei alguma aula na qual conteúdos a ela relacionados foram ensinados, nos limites do que pude observar, pareceu-me que o processo ocorreu de forma estática e sem contextualização.

Em um dos estágios que cursei, ouvi alunos do 9º ano dizendo que Geometria era muito difícil e que não sabiam sobre ela 'nada'. Percebi que eles tinham dificuldade em construir os conceitos geométricos e visualizar suas representações. Essa rejeição dos alunos à Geometria me provocou, como professora em formação inicial, a de um lado, registrar essa situação e, de outro, com a intenção de enfrentar essa rejeição, a pensar em formas de tornar a aprendizagem desse conteúdo mais prazerosa.

Assim, esses fatores geraram muitas inquietações em mim, pois, acrescento, a Geometria é uma das áreas da Matemática que admiro muito e, talvez, um dos motivos pelo qual escolhi cursar Matemática. Quando fiz o convite para o meu orientador e contei que gostaria de trabalhar com o ensino de Geometria, o primeiro artigo cuja leitura ele indicou foi "Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais" (CALDATTO E PAVANELLO, 2015). Depois de ler esse texto, percebi que existia um contexto histórico que ajudava a entender essa precarização do ensino de Geometria e tive ainda mais certeza que queria trabalhar com esse tema.

Ao longo das leituras, percebi também que meu sentimento em relação ao ensino de Geometria era compartilhado por outros professores e já estava registrado na literatura da área. Nesse contexto, ressalto que, no Brasil, o ensino de geometria vem se constituindo, nas últimas décadas, como um desafio para os professores de Matemática. Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles, Lorenzato (1995), Pavanello (2004) e Caldatto e Pavanello (2015), confirmam essa realidade educacional que considero lamentável. Em suma, a leitura desses trabalhos foi ao encontro do que minha experiência revelou, ou seja, os problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de geometria ainda permanecem sendo presenciados.

Escolhida a área da Matemática com a qual trabalharia, passei a ponderar sobre qual seria o conteúdo matemático, dentre aqueles contemplados na Educação Básica, que elegeria para me aprofundar, nessa monografia. Comecei, então, a me debruçar com mais cuidado sobre os conteúdos abordados em uma coleção de livros didáticos utilizada nos anos finais do Ensino Fundamental (IMENES E LELLIS, 2012) e nas competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica estabelecidas na Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

Parece-me relevante destacar que observei que a coleção em questão trabalhava o conceito de simetria nos quatro livros (6° a 9° anos). Como não tive a oportunidade de estudar esse tema nem na Educação Básica, nem na graduação, tal situação gerou em mim ainda mais inquietações, surgindo então, a necessidade de me aprofundar nesse tema. Cabe destacar, também, que a abordagem de simetria está prevista na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), segundo a qual:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: **as transformações geométricas, sobretudo as simetrias**. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2017, p.271, grifo meu).

A escolha do conteúdo de simetria deu-se também pelo fato de ainda ser uma temática pouco explorada, segundo uma breve revisão de literatura que será

apontada no capítulo dois. Dessa forma, o fato de ter me deparado com poucas pesquisas na área sugere um campo de investigação a ser explorado, o que justifica também a escolha do tema. Assim, acabei decidindo desenvolver um trabalho por meio do qual pudesse estudar – e promover reflexão sobre – o conceito de simetria.

Assim, a Geometria, em geral, e o conceito de simetria, em particular, representam uma parte do conhecimento matemático de importância fundamental, com aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Entretanto, como relatei, ainda hoje são identificados problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem dessa área. Nesse sentido, propor uma abordagem diferenciada do ensino de Geometria, mais especificamente no ensino de simetria, surge como uma tentativa de mitigar as dificuldades dos alunos com relação a esse conteúdo. Sobre tal abordagem, cabe ressaltar que ela tem como inspiração autoras e autores que vislumbram a importância de um trabalho que valorize a manipulação, mas que não prescindam de uma reflexão sobre essa manipulação, ou seja, que possibilite uma ‘manipulação crítica’ (PAIS, 1996). Em termos mais específicos, para tanto, planejei e desenvolvi uma sequência de oficinas nas quais utilizei recursos didáticos (como dobraduras, geoplano virtual, espelhos e malha quadriculada) com vistas a contribuir com o desenvolvimento do conceito de simetria de reflexão dos alunos a partir da experimentação, exploração e da investigação.

Desse modo, este trabalho tem como principal objetivo compreender como alunas e alunos do 9º ano do Ensino Fundamental se relacionam com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas.

Para tanto, organizei minha monografia da seguinte forma: depois da introdução, no **capítulo um**, apresento o conceito de simetria sobre o qual me debrucei; já no **capítulo dois** realizo uma revisão de literatura para localizar o estudo no cenário do que já existe de produzido sobre o assunto; no **capítulo três**, caracterizo e fundamento minhas escolhas metodológicas, bem como apresento o percurso metodológico trilhado nesta monografia; no **capítulo quatro**, apresento três oficinas que elaborei; no **capítulo cinco**, com vistas a compreender como alunas e alunos se relacionam com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas, descrevo e analiso as vivências experimentadas nas três oficinas; por fim, encerro a monografia com as considerações finais seguida das referências.

1. CONSTRUINDO ENTENDIMENTOS PARA O CONCEITO DE SIMETRIA

O presente capítulo surge da necessidade de encontrarmos uma definição do conceito de simetria. Nessa busca, nos deparamos com definições que apresentamos nas três primeiras seções. Ressaltamos, todavia, que dada a intenção de refletir sobre esse conceito na sala de aula de Matemática da Educação Básica, na última seção do capítulo, recorreremos, sobretudo aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), para redimensionar esse conceito tendo em vista o contexto da Matemática escolar.

Desse modo, iniciamos ressaltando que, para se trabalhar com simetria, consideramos que alguns conceitos matemáticos são essenciais. Dentre eles, destacamos a transformação geométrica, ou, simplesmente, transformação no plano e a isometria.

Segundo Santos (2010, p.43) a simetria, sob o ponto de vista matemático, “está no campo da Geometria das transformações, ramo da Geometria que estuda as transformações que acontecem por meio de regras especiais que transformam pontos do plano em outros pontos do plano”.

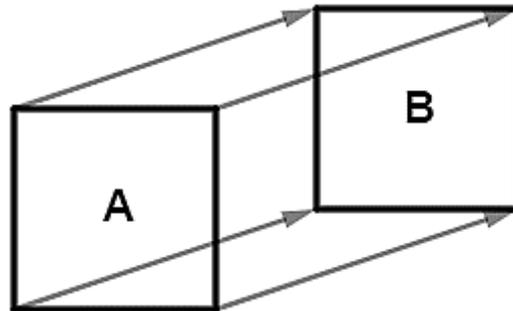
Conforme Bilac (2008, p.16) a palavra ‘transformação’, em sua acepção mais simples, “é algo que muda suas características, conservando sua essência”. Entretanto, quando esta definição é trazida para onde os corpos rígidos se movimentam, a autora acrescenta que “o entendimento pode ser considerado diverso, pois se considerarmos apenas um único objeto ele não se transforma, porém pode modificar a configuração de um ambiente quando alterada sua posição” (BILAC, 2008, p.16).

Por outro lado, com vista na perspectiva da Geometria, o termo ‘transformação’, ainda segundo a autora, “designa uma categoria de funções, com caráter algébrico, estabelecendo, assim, um elo entre a Geometria e a Álgebra” (BILAC, 2008, p. 16).

Uma transformação no plano é uma função, cujo domínio é o conjunto dos pontos do plano e cujo contradomínio também é o conjunto dos pontos do plano. Diz-se então que esta correspondência é uma “*transformação geométrica*” no plano, ou, simplesmente, uma “*transformação*” no plano (NASSER; SOUZA; PEREIRA, 2004, p.2).

Em outras palavras, em uma transformação geométrica, cada ponto da figura inicial é levado em um ponto da figura em que ela se transforma. No caso de um quadrado, por exemplo, cada vértice do quadrado A é associado a um vértice do quadrado B e o mesmo acontece com cada um dos outros pontos.

Figura 1: Transformação geométrica



Fonte: elaborado pela autora (2021)

Podemos dizer também que uma transformação no plano é um movimento de mudança de posição. Tais movimentos podem, ou não, manter a forma e o tamanho da figura a ser transformada.

As Transformações Geométricas trabalhadas no Ensino Fundamental, segundo Luz (2007), resumem-se a isométricas e a homotéticas. A primeira se refere às transformações que “conservarem as medidas das figuras (congruência), fazendo que as figuras apenas mudem de posição” (CROWE E THOMPSON, 1994). Enquanto, homotetia diz respeito à ampliação e à redução de imagens, conservando as propriedades de semelhanças das mesmas (SANTOS, 2010, p.44).

Neste trabalho, vamos tratar de transformações isométricas, ou seja, transformações em que há uma mudança de posição, porém preservam-se a forma e o tamanho da figura. As isometrias, ressaltamos, estão relacionadas à ideia de simetria.

Para Pasquini e Bortolossi (2016, p.13), os três conceitos-chave associados à definição de simetria como considerada atualmente são: o conceito de função (transformação), o conceito de isometria e o conceito de invariância. Apresentamos, a seguir, a definição de ‘simetria’ no plano, tal como é considerada por Pasquini, Bortolossi (2006):

Seja X um subconjunto não vazio do plano euclidiano R^2 . Dizemos que uma função $F: R^2 \rightarrow R^2$ é uma “simetria” do conjunto X se F satisfaz as duas condições seguintes.

1. F é uma *isometria*, isto é, F preserva distâncias. Mais precisamente, quaisquer que sejam os pontos P e Q em R^2 , a distância de P a Q (no domínio de F) é sempre igual a distância de $F(P)$ a $F(Q)$ (no contradomínio de F).
2. $F(X) = X$, isto é, X é invariante por F (a imagem do conjunto X pela função F é igual ao próprio conjunto X . (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2016, p.13)

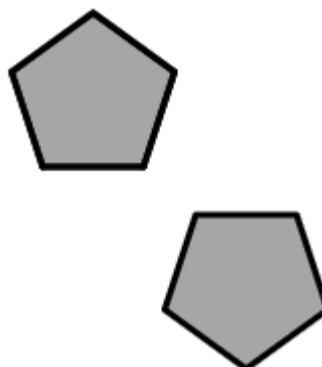
Vale destacar que vamos considerar tanto a simetria como propriedade de uma figura, como em duas figuras quando uma pode ser obtida a partir da outra por meio de isometria.

Conforme Nasser, Souza e Pereira (2004, p.2): “Quando se aplica uma transformação a uma figura de modo que ela possa ocupar outro lugar no plano, sem alterar sua forma e tamanho originais, dizemos que a transformação aplicada é uma isometria”. Isso significa que se uma figura geométrica sofrer uma transformação do tipo isométrica, as medidas de seus lados e de seus ângulos serão mantidas.

Segundo Bilac (2008), as isometrias são “transformações do plano que não distorcem as formas e tamanhos, por esse motivo elas são conhecidas, também, como movimentos rígidos”.

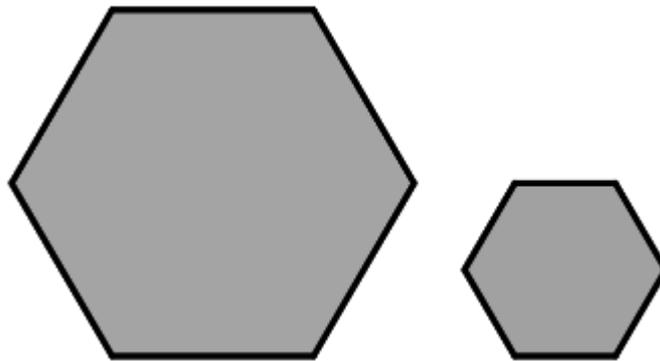
Na figura 2, está representado um movimento que mantém a forma e tamanho da figura original, logo uma isometria. Por sua vez, o movimento representado na figura 3, altera o tamanho da figura, portanto não permite que seja configurada uma isometria.

Figura 2: Isometria



Fonte: elaborado pela autora (2022)

Figura 3: Não é isometria



Fonte: elaborado pela autora (2022)

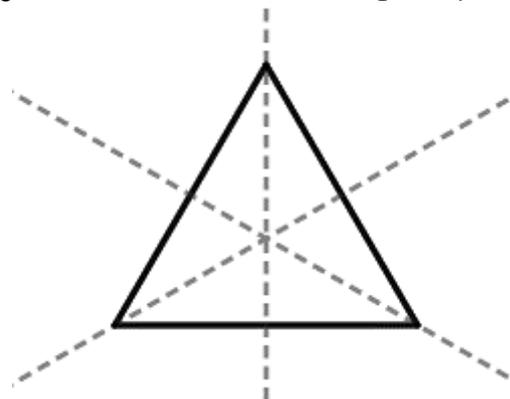
Assim, tendo, pois, apresentado delimitações conceituais que nos são caras, passamos a discorrer sobre três casos de simetria: simetria de reflexão, simetria de translação e simetria de rotação.

1.1 Simetria de reflexão

Antes de discorrermos sobre a simetria de reflexão, consideramos importante conceituar 'eixo de simetria', que é o eixo em relação ao qual uma figura é refletida. Eixo de simetria é uma reta que divide a figura em duas partes que podem coincidir exatamente. "É como se um espelho perpendicular ao plano que contém a figura fosse colocado sobre a reta, refletindo exatamente a figura do outro lado" (NASSER; SOUZA; PEREIRA, 2004, p.3). Cabe destacar ainda, que uma figura pode não apresentar nenhum eixo de simetria ou, não precisa apresentar, necessariamente, um único eixo de simetria.

Um triângulo equilátero, por exemplo, possui três eixos de simetria.

Figura 4: Eixos de simetria d triângulo equilátero

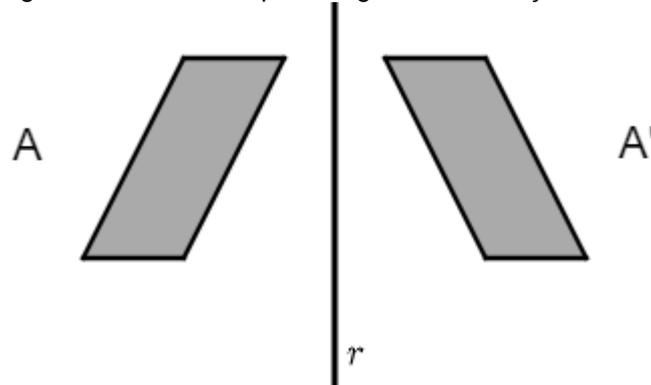


Fonte: elaborado pela autora (2021)

Os pontos que coincidem, quando a figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria, são chamados de correspondentes ou simétricos em relação ao eixo.

Vamos considerar, agora, uma transformação no plano, caracterizada por uma reta r desse plano, que a cada ponto do plano associa o seu simétrico em relação à reta r . No exemplo abaixo, foi aplicada uma reflexão à figura A (um paralelogramo) obtendo-se a nova figura A', congruente à original e simétrica em relação à reta r .

Figura 5: Reflexão do paralelogramo em relação à reta r



Fonte: elaborado pela autora (2021)

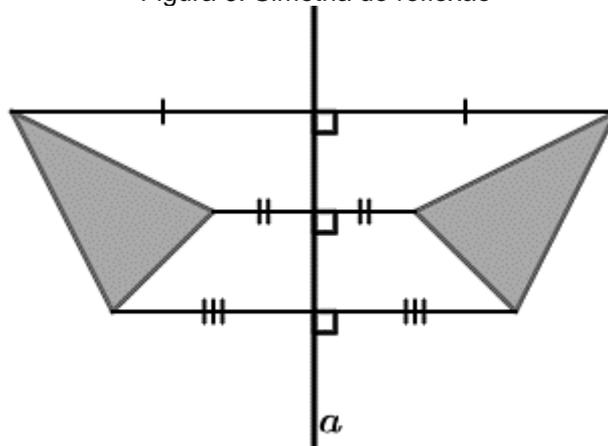
Uma reflexão em relação a uma reta r é também chamada de simetria de reflexão, ou, simplesmente, simetria axial em relação à r .

Nasser, Souza e Pereira (2004) definem a simetria de reflexão como:

Seja r uma reta. Uma figura é obtida de outra por uma reflexão de eixo r se:

- Cada ponto P da figura original está na mesma perpendicular a r que o ponto P' correspondente da figura refletida;
- P e P' distam igualmente de r e situam-se em semiplanos distintos em relação a r (NASSER; SOUZA; PEREIRA, 2004, p.4).

Figura 6: Simetria de reflexão

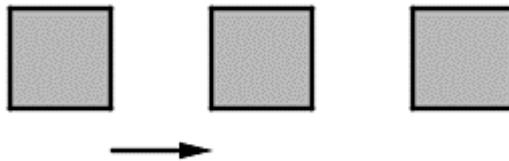


Fonte: elaborado pela autora (2021)

1.2 Simetria de translação

Na simetria por translação todos os pontos de uma figura se “deslocam” na mesma direção, no mesmo sentido e na mesma distância. No exemplo abaixo, ilustramos tal ideia por meio de um quadrado que foi repetido, deslizando na direção horizontal, sempre a distâncias iguais.

Figura 7: Transladando um quadrado



Fonte: elaborado pela autora (2021)

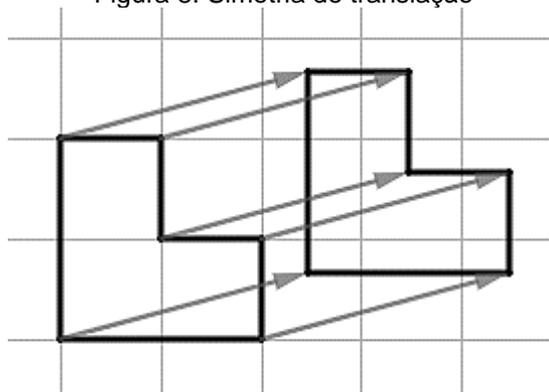
Assim, a simetria de translação ocorre quando uma imagem é deslocada observando-se uma distância, uma direção e um sentido, associados a um vetor, mantendo, também, a mesma forma e tamanho.

Nasser, Souza e Pereira (2004) definem a translação como:

Seja r uma reta. Uma figura é obtida de outra por uma translação de direção r se todos os pontos da figura original se deslocam paralelamente a r , no mesmo sentido, percorrendo a mesma distância (NASSER; SOUZA; PEREIRA, 2004, p.7).

Para definir uma translação devem ser fixados, portanto, a direção, o sentido e o comprimento de deslocamento. Essa transformação preserva os ângulos e os comprimentos das figuras geométricas.

Figura 8: Simetria de translação



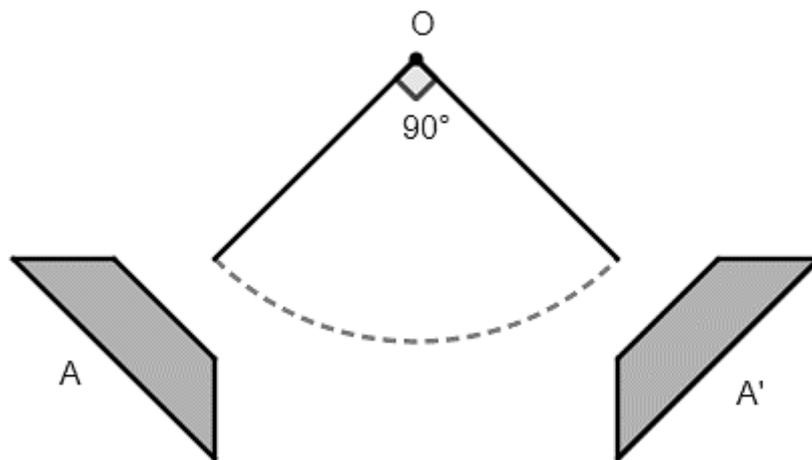
Fonte: elaborado pela autora (2022)

1.3 Simetria de rotação

Outro tipo de simetria muito comum é a de rotação. Segundo Bilac (2008, p.20), na simetria de rotação, “todos os pontos do plano movimentam-se girando a mesma medida de ângulo em torno de um ponto que se designa ponto central”.

No exemplo abaixo, o trapézio A “girou” no sentido anti-horário, descrevendo um ângulo de vértice O e amplitude 90° .

Figura 9: Rotação de centro O e amplitude 90°



Fonte: elaborado pela autora (2021)

Assim, a simetria de rotação ocorre quando uma imagem é girada a partir de um ponto (centro de rotação) e sob um determinado ângulo, permanecendo com forma e tamanho inalterados. O giro pode ser no sentido horário ou anti-horário e a distância dos pontos ao centro de rotação também se mantém constante.

Nasser, Souza e Pereira (2004) definem a rotação como:

Uma rotação de centro O e um ângulo α é uma transformação cuja imagem de uma figura é obtida girando-se cada um de seus pontos segundo o arco de circunferência de centro O, correspondente ao ângulo α , no sentido fixado que pode ser horário ou anti-horário (NASSER; SOUZA; PEREIRA, 2004, p.9).

O ponto O pode ser localizado fora da figura a ser girada, sobre seu contorno, ou no interior da figura.

1.4 O conceito de simetria no âmbito da Matemática escolar

Como se pôde perceber nas seções anteriores, caracterizamos o conceito de simetria tendo em vista muitos critérios típicos da Matemática acadêmica. Embora reconheçamos a relevância dessa caracterização, como o foco do nosso estudo é o conceito de simetria no Ensino Fundamental, apresentamos, a seguir, reflexões ancoradas, sobretudo nos PCN, que ajudam a entender a relevância de se trabalhar o conceito de simetria no – e formas de adaptá-lo ao – contexto da Matemática escolar.

Nas orientações didáticas, seção presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), o documento faz uma inferência sobre a importância dos estudos das transformações geométricas de uma figura no plano, preferencialmente nos anos finais do Ensino Fundamental.

Uma das razões apresentadas pelo documento para esse estudo é que se reconhece nos PCN a importância das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) para se construir um ponto de partida para a construção das noções de congruência (BRASIL, 1998, p.124). Além disso, as transformações que conservam propriedades métricas, de acordo com o documento, poderiam servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas.

Outra razão apresentada nos PCN é que as simetrias podem ser caracterizadas a partir do cotidiano. Assim, o documento afirma que estando em inúmeros objetos físicos, ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Afirma ainda que tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria nas representações planas desses objetos. Além disso, assevera que, no corpo humano, pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria, que a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele e que há eixos de simetria em diversas criações do homem (e da mulher), como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis.

Os PCN também ressaltam que as simetrias centrais e de rotação surgem em diversas situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados etc. Os exemplos de translação também seriam fáceis de encontrar: grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados etc.

No entanto, cabe ressaltar que os PCN recomendam que as isometrias tenham tratamento intuitivo e menos formal, possivelmente por estas funções não serem estudadas explicitamente no Ensino Fundamental.

Ressaltamos ainda, por fim, que o trabalho com simetria na Educação Básica pode se dar sem necessariamente uma definição formal do conceito, por exemplo, a partir de atividades envolvendo espelhos articulados, pavimentações, dentre outros (SANTOS, 2006).

2. REVISÃO DE LITERATURA

Uma vez apresentado nosso objetivo (na introdução) e o conceito sobre o qual pretendemos nos debruçar (no capítulo anterior), consideramos ser necessário realizar uma revisão de literatura para localizarmos nosso estudo no cenário do que já existe de produzido sobre o assunto. Para realizar a revisão de literatura, consultamos trabalhos no banco de teses e dissertações da Capes. Procuramos ainda pesquisar trabalhos que, de alguma forma, se aproximassem das questões e objetivos aqui tratados.

No referido repositório, utilizamos, como termos de busca: “Simetria” AND “Educação Matemática” AND “Reflexão”. Cabe destacar que utilizamos o termo “Reflexão” pois, dentre os diferentes tipos de simetria, abordaremos nas oficinas apenas a simetria de reflexão. Com essas palavras, encontramos treze dissertações e uma tese. Em seguida, realizamos uma leitura cuidadosa dos resumos delas. Assim, a partir dessa leitura, o número de trabalhos foi reduzido para cinco, sendo esse o total de trabalhos que compuseram essa revisão de literatura (Quadro 1).

Quadro 1: Pesquisas selecionadas

Autor (ano)	Dissertação/ Tese	Abordagem metodológica	Instrumentos/ técnicas de coleta	Participantes
Bilac (2008)	Dissertação	<i>Design Experiment</i>	Observação, notas de campo e registros em vídeos	Discentes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de Santo André – SP.
Silva (2010)	Dissertação	Qualitativa	Observação, diário de campo e atividades realizadas pelos alunos	Discentes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Guarulhos.
Santos (2012)	Dissertação	<i>Design Experiment</i>	Registros em foto e vídeos	Discentes, entre eles alunos surdos e ouvintes, do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de Barueri.
Valença (2014)	Dissertação	<i>Qualitativa</i>	Avaliação Diagnóstica e registros em vídeo	Grupo de professores de Matemática, com experiência em Educação a Distância.
Barros (2017)	Dissertação	Qualitativa	Observação, registros em fotos e diário de campo	Discentes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Araçatuba – SP.

Fonte: elaborado pela autora (2022)

Dessa forma, Silva (2010) buscou responder, em sua pesquisa, até que ponto a criação de uma abordagem didática que inclua a mediação tecnológica para o trabalho com simetria axial para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental pode auxiliar a construção do conhecimento deste tema específico e de que maneira os erros e dificuldades de aprendizagem, encontrados no processo de ensino e aprendizagem de simetria axial, podem ser utilizados como elementos para uma abordagem reconstrutiva do conhecimento, tendo por base uma estratégia pedagógica com uso de tecnologias. Para tal, Silva (2010), inicialmente, aplicou uma sequência de atividades realizadas no ambiente estático “papel e lápis” e, depois, uma sequência de atividades construída por intermédio do *software* de geometria dinâmica Geogebra.

Já Bilac (2008), buscou responder, em sua pesquisa, em que medida os recursos e ferramenta do *software* Cabri-Géomètre favorecem a aprendizagem das transformações geométricas, em especial a simetria axial e a de rotação, para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Segundo o autor, as construções geométricas que, para os alunos, tinham certa ‘rigidez’ no papel e lápis, adquiriram novos formatos na geometria dinâmica, incluindo processos de observação, experimentação, elaboração de conjecturas, dentre outros.

Barros (2017), buscou responder, em sua pesquisa, se o uso adequado de softwares simetrizadores, obras de arte e banco de questões sobre “Geometria básica”, através de sequências didáticas com o auxílio da arte, contribuem para o desenvolvimento de conceitos geométricos, em especial a simetria, na revitalização do ensino de Geometria, para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Já Santos (2012), buscou investigar, em seu trabalho, como alunos surdos e ouvintes expressam conceitos sobre simetria de reflexão a partir de interações com um micromundo (ambientes dinâmicos que possibilitam a interação do aluno com o computador) matemático.

Por fim, Valença (2014) elaborou e aplicou uma sequência de atividades envolvendo a construção de um logotipo, explorando a ideia e propriedade da simetria de reflexão, em uma situação colaborativa com compartilhamento do *software* de Geometria dinâmica Tabulae.

Em síntese, a leitura desses cinco trabalhos nos mostrou que há pontos em comum entre eles. O primeiro ponto é o reconhecimento da importância do ensino das transformações geométricas, das isometrias e das simetrias no Ensino

Fundamental. Além disso, outro ponto comum, observado nas pesquisas, é a possibilidade do uso de *softwares* no desenvolvimento de conceitos geométricos.

Nessa direção, cabe destacar que a BNCC (2017) propõe o uso de *software* de geometria dinâmica quando estabelece que “o estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de geometria dinâmica” (BRASIL, 2017, p.272). Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e conceitualização das simetrias, entretanto, “esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização” (BRASIL, 2017, p.276).

Portanto, a revisão de literatura realizada neste capítulo colaborou com este trabalho no sentido de permitir a identificação de indícios de que alguns temas relacionados às simetrias já foram explorados anteriormente, bem como revelar a importância de uma investigação em Educação Matemática no sentido de fazer avançar o conhecimento deste importante conteúdo.

3. METODOLOGIA

Nesse capítulo, primeiramente, caracterizamos e fundamentamos nossas escolhas metodológicas. Depois disso, apresentamos o percurso metodológico percorrido na investigação relatada nesta monografia.

Em relação à natureza deste estudo, consideramos que se trata de uma pesquisa qualitativa. Isso porque o delineamento deste trabalho encontra proximidades com a descrição de Minayo (2002, p.21), segundo a qual:

A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (MINAYO, 2002, p.21).

Além disso, compartilhamos com Borba (2004, p.3) a compreensão de que:

Dessa forma, quando falo de pesquisa qualitativa, estou falando de uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento. Como já dizia Paulo Freire: a escolha da pergunta de pesquisa já é em si um ato embebecido de subjetividade (BORBA, 2004, p.3).

Sendo assim, dentro do amplo cenário das pesquisas qualitativas, dados os procedimentos que adotamos nesta investigação, torna-se imperativo ressaltar que nosso estudo se aproxima, mais especificamente das pesquisas do tipo intervenção pedagógica. Compete elucidar que essa nossa afirmação se vale do entendimento de Damiani et al (2013), segundo os quais, pesquisas do tipo intervenção pedagógica:

são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências (DAMIANI et al, 2013, p.58).

Cabe frisar que, no texto do qual tal fragmento foi selecionado, os autores trazem elementos para defender o uso de pesquisas do tipo intervenção pedagógica

e para defender sua potencial importância para a área da educação. Segundo eles, essa importância é apontada também por Robson (1995), “por serem realizadas sobre e com pessoas, fora do ambiente protegido de um laboratório” (DAMIANI et al, 2013, p. 58).

Além disso, para a produção do material empírico sobre o qual nossa análise incidu – caracterizado logo a seguir –, lançamos mão de alguns instrumentos, quais sejam: gravações em áudio, fotografias, o diário de campo e o acervo de atividades produzidas pelos discentes. Além do registro em áudio das falas dos discentes que participaram da investigação, recorreremos também às fotografias. Neto (2002, p. 63) afirma que “esse registro visual amplia o conhecimento do estudo porque nos proporciona documentar momentos ou situações que ilustram o cotidiano vivenciado”. Cabe destacar que para realizar as gravações em áudio e para registro das fotografias, uma vez que a licencianda autora desta monografia estava envolvida na realização de oficinas envolvendo simetria, convidamos uma discente do curso de Matemática, que nos auxiliou com esse registro. Já sobre o diário de campo, que também foi um instrumento utilizado, Neto (2002) complementa:

Como o próprio nome já diz, esse diário é um instrumento ao qual recorreremos em qualquer momento da rotina do trabalho que estamos realizando. Ele, na verdade, é um “amigo silencioso” que não pode ser subestimado quanto à sua importância. Nele diariamente podemos colocar nossas percepções, angústias, questionamentos e informações que não são obtidas através da utilização de outras técnicas (NETO, 2002, p.63).

Por fim, o material empírico analisado também foi composto de atividades produzidas pelos discentes durante a realização de três oficinas que serão caracterizadas, posteriormente, neste trabalho.

Fundamentadas as opções metodológicas, em termos teóricos, e caracterizados os instrumentos utilizados para a produção do material empírico que será objeto de nossa análise, passamos a apresentar o percurso seguido neste trabalho.

3.1 Percorso metodológico

Nesse trabalho, intencionamos trazer reflexões em torno da seguinte questão de investigação: Como alunas e alunos se relacionam com o conceito de simetria de

reflexão em uma sequência de oficinas? A partir dessa pergunta, enunciamos como nosso objetivo compreender como alunas e alunos do 9º ano do Ensino Fundamental se relacionam com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas.

Assim, para alcançar o referido objetivo, inicialmente, realizamos uma revisão bibliográfica acerca do ensino-aprendizagem de “Geometria”, mais especificamente do conteúdo de “simetria” na Educação Básica. Após essa etapa, elaboramos uma sequência de oficinas, a fim de produzirmos um material que visava ajudar os discentes a compreenderem um importante conceito da Geometria, qual seja: simetria de reflexão.

Em seguida, apresentamos a ideia de aplicar as oficinas em uma escola pública estadual de Ouro Preto, em uma das turmas de uma professora com quem já tínhamos realizado trabalhos anteriores. Cabe destacar que realizamos um convite oral a essa professora, a qual não apenas demonstrou concordância como também nos orientou sobre qual de suas turmas considerava ser a mais viável para desenvolver as oficinas. Segundo ela, pensando no contexto de pandemia da COVID-19, vivenciada por toda a comunidade escolar em 2020 e em 2021, e nas consequências que essa experiência gerou aos alunos, o melhor seria trabalhar as oficinas com os estudantes do 9º ano, que concluíram o 7º e 8º ano no ensino remoto. Posteriormente ao convite, foram aplicadas as oficinas.

Assim, fizeram parte deste estudo trinta e seis alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede estadual, localizada no município de Ouro Preto. A escola funciona de segunda a sexta-feira, sendo que, no turno da manhã atende alunos do 6º ao 9º ano e, no turno da tarde, do 1º ao 5º ano. Os discentes estão distribuídos em doze turmas de 6º ao 9º ano e em quinze turmas de 1º ao 5º ano, além da sala de recursos que oferece o Atendimento Educacional Especializado (AEE).

O cronograma da pesquisa foi projetado para aplicação, em três semanas. As oficinas foram definidas para ocorrerem no dia 19 de maio e nos dias 02 e 09 de junho de 2022, no horário das aulas de Matemática da turma. A realização das oficinas seguiu o roteiro do cronograma (quadro 2) para os três encontros pré-definidos, no qual cada encontro, com dois tempos de aula, compreendeu cerca de uma hora e quarenta minutos por encontro semanal.

Quadro 2: Cronograma

Encontro	Data	Oficina
1º	19/05/2022	Aplicação da oficina 1: Construindo o conceito de simetria por meio de dobraduras.
2º	02/06/2022	Aplicação da oficina 2: Explorando a simetria de reflexão no geoplano virtual.
3º	09/06/2022	Aplicação da oficina 3: Explorando a simetria de reflexão por meio de espelhos e malha quadriculada.

Fonte: elaborado pela autora (2022)

Assim, nos próximos capítulos, apresentamos as oficinas elaboradas seguidas de reflexões sobre a aplicação dessas oficinas com os alunos do 9º ano.

4. APRESENTAÇÃO DAS TRÊS OFICINAS ELABORADAS

A sequência de oficinas, apresentada a seguir, foi pensada para ser realizada nos anos finais do Ensino Fundamental e, a nosso ver, dialoga com a seguinte habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetria de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros (BRASIL, 2018, p.309).

4.1 Oficina 1 – Construindo o conceito de simetria por meio de dobraduras

Objetivos:

- Identificar simetrias em figuras presentes na natureza e em objetos construídos pela mulher e pelo homem;
- Reconhecer, em figuras, eixos de simetria;
- Construir triângulos por meio de dobradura no papel e explorar quantos e quais são os eixos de simetria de cada um desses triângulos.

Material e recursos:

Slides, uma folha de papel-ofício, régua, tesoura e lápis.

Desenvolvimento:

No momento inicial, o objetivo é trabalhar o conceito de simetria, tomando como ponto de partida as noções intuitivas dos estudantes para chegar, por meio de diferentes atividades, ao conceito referido.

Ao observarmos o mundo ao nosso redor, é comum perceber que muitas pessoas diferenciam imagens simétricas de assimétricas, mesmo sem explicitar o que exatamente entendem por esses conceitos. A ideia é, a partir do conhecimento prévio dos estudantes, construir com eles a noção de simetria, no âmbito da Matemática Escolar.

A expectativa é iniciar, propondo aos alunos algumas perguntas, tais como: “Vocês conhecem a palavra ‘simetria’? O que vocês entendem por simetria?”. Em seguida, trazer algumas imagens e/ou objetos e solicitar aos discentes que as separem em dois grupos, um grupo com as imagens que consideram simétricas e o outro grupo com as imagens que consideram assimétricas.

Depois disso, a intenção é propor um debate norteado pela ideia de que existe simetria no mundo em que vivemos, caracterizando alguns exemplos que consideramos ‘espetaculares’ e que são encontrados nas formas da natureza. Esse momento oferecerá ensejo para mostrar que, muitas vezes, as referidas formas não possuem uma simetria geometricamente ‘exata’, mas, mesmo assim, não só ajudam a entender o conceito como também revelam uma harmonia estética, a nosso ver, impressionante.

Cabe destacar também que a simetria do mundo natural, muitas vezes, tem inspirado mulheres e homens em suas criações e construções, em diversas civilizações. Simetrias também são encontradas em produções do campo das Artes, da Arquitetura e em objetos da nossa vida comum. Portanto, a intenção é, durante a discussão, mostrar aos alunos imagens e/ou objetos de simetrias presentes na natureza, nas construções, na Arte e em objetos usados em nossas vidas cotidianas.

Nesse processo, nos valeremos da ideia de que é possível caracterizar um procedimento para identificar a existência de simetria. O procedimento em questão é o seguinte: para verificar se uma figura plana apresenta simetria, o discente pode traçar uma linha reta que divide a imagem em duas partes de modo que dobrando a figura nessa linha, as duas partes se sobreponham e coincidam. Se essa linha reta existir, a figura apresenta simetria e a linha é uma representação possível para um eixo de simetria da figura. Cabe destacar ainda, que uma figura pode não apresentar nenhum eixo de simetria ou, não precisa apresentar, necessariamente, um único eixo de simetria, como será caracterizado durante a oficina.

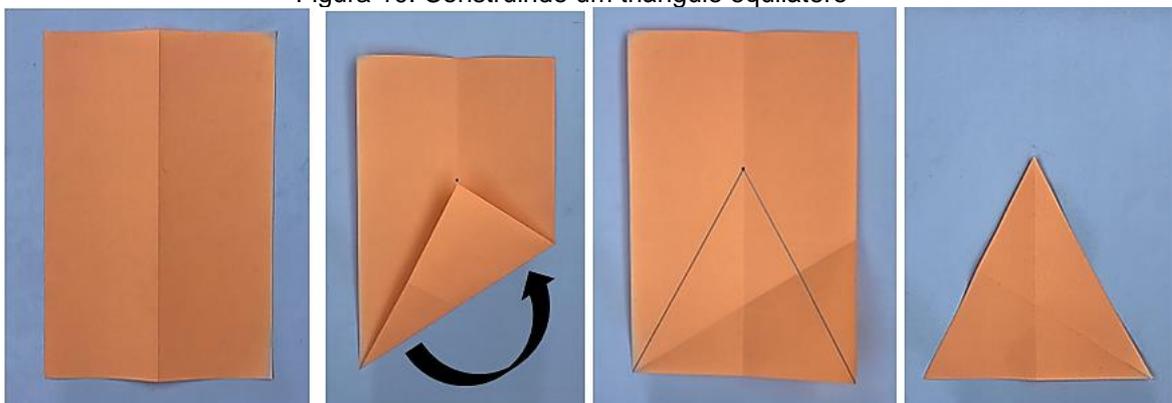
Veremos que uma figura plana pode apresentar simetria, no entanto, essa ideia não fica restrita apenas a uma figura. A questão é que podemos identificar simetria entre duas figuras, sendo, pois, uma simétrica à outra. Ressaltamos que, a respeito de simetrias, elas podem ser de diferentes tipos. Dentre esses diferentes tipos de simetria, abordaremos nas oficinas apenas a simetria de reflexão de modo a limitar o conteúdo matemático sobre o qual nos debruçaremos, optando pelo aprofundamento das asserções, em detrimento de caracterizar enormes quantidades de informações superficialmente.

No segundo momento da oficina, o objetivo é trabalhar com dobraduras⁵. A intenção dessa oficina é proporcionar que o aluno experimente e reflita sobre o processo que envolve as dobraduras, indo além de um papel passivo em que o discente apenas siga instruções e execute-as.

A ideia inicial é orientar os estudantes para construírem um triângulo equilátero (figura 10). Para tal, recomendaremos que cada uma e cada um, delas e deles, pegue a folha, dobre o lado maior ao meio e recorte. Daremos destaque para o fato de que a folha foi dividida em dois retângulos congruentes.

Prosseguindo, orientaremos que peguem um dos retângulos e dobrem o lado menor ao meio e, em seguida, que dobrem a folha de modo que uma das pontas do lado menor do retângulo encontre a marca e assinalem um ponto. Recomendaremos também que, com o auxílio de uma régua, risquem os outros dois lados do triângulo. Daremos destaque para o fato de que o lado do triângulo é igual ao lado menor do retângulo.

Figura 10: Construindo um triângulo equilátero

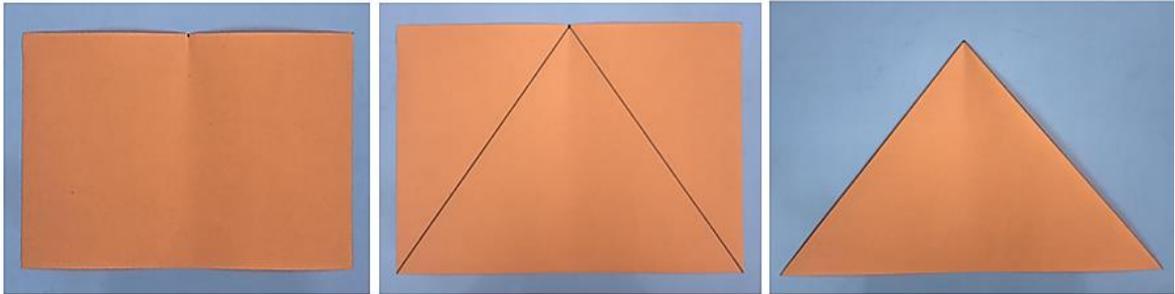


Fonte: elaborado pela autora (2021)

Após a construção do triângulo equilátero, orientaremos os discentes para construírem um triângulo isósceles (figura 11). Para isso, recomendaremos que peguem o outro retângulo e que, juntando os dois ângulos retos, façam uma 'marquinha' (com leveza), para indicar o ponto médio do lado maior. Em seguida, recomendaremos também que, com o auxílio de uma régua, risquem os dois lados do triângulo. Daremos destaque para o fato de que a base do triângulo é igual ao lado maior do retângulo.

⁵ Vale destacar que essa atividade foi inspirada em uma tarefa encontrada no livro de Imenes e Lellis (2012), a qual visava encontrar eixos de simetria do quadrado por meio de dobradura.

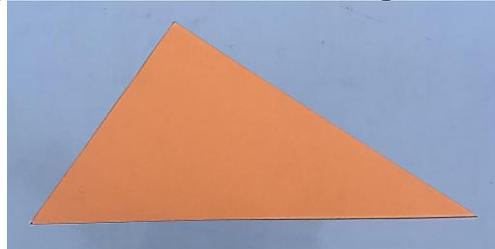
Figura 11: Construindo um triângulo isósceles



Fonte: elaborado pela autora (2021)

O nosso próximo passo seria construir um triângulo escaleno (figura 12). Entretanto, os triângulos que sobraram da dobradura anterior são escalenos. Logo, recomendamos aos discentes que separem um deles para a nossa atividade.

Figura 12: Reconhecendo um triângulo escaleno



Fonte: elaborado pela autora (2021)

A intenção é, após a construção dos triângulos, propor as três seguintes atividades.

Atividade 1

A proposta dessa atividade é que os discentes encontrem os eixos de simetria do triângulo escaleno. Para isso, a ideia é propor aos discentes que façam dobraduras para encontrar os eixos de simetria do triângulo escaleno, caso tenha, e, em seguida, iniciar uma discussão norteada pelas seguintes perguntas: “O triângulo escaleno tem eixos de simetria? Se sim, quantos?”

Atividade 2

A proposta dessa atividade é que os discentes encontrem os eixos de simetria do triângulo isósceles. Para isso, a ideia é propor aos discentes que façam dobraduras para encontrar os eixos de simetria do triângulo isósceles, caso tenha, e, em

seguida, iniciar uma discussão norteada pelas seguintes perguntas: “O triângulo isósceles tem eixos de simetria? Se sim, quantos?”

Atividade 3

A proposta dessa atividade é que os discentes encontrem os eixos de simetria do triângulo equilátero. Para isso, a ideia é propor aos discentes que façam dobraduras para encontrar os eixos de simetria do triângulo equilátero, caso tenha, e, em seguida, iniciar uma discussão norteada pelas seguintes perguntas: “O triângulo equilátero tem eixos de simetria? Se sim, quantos?”.

4.2 Oficina 2 – Explorando a simetria de reflexão no geoplano virtual

Objetivos:

- Identificar, nas figuras simétricas, a simetria de reflexão;
- Construir figuras simétricas a partir da transformação por reflexão.

Materiais e recursos:

Slides e geoplano virtual.

Desenvolvimento:

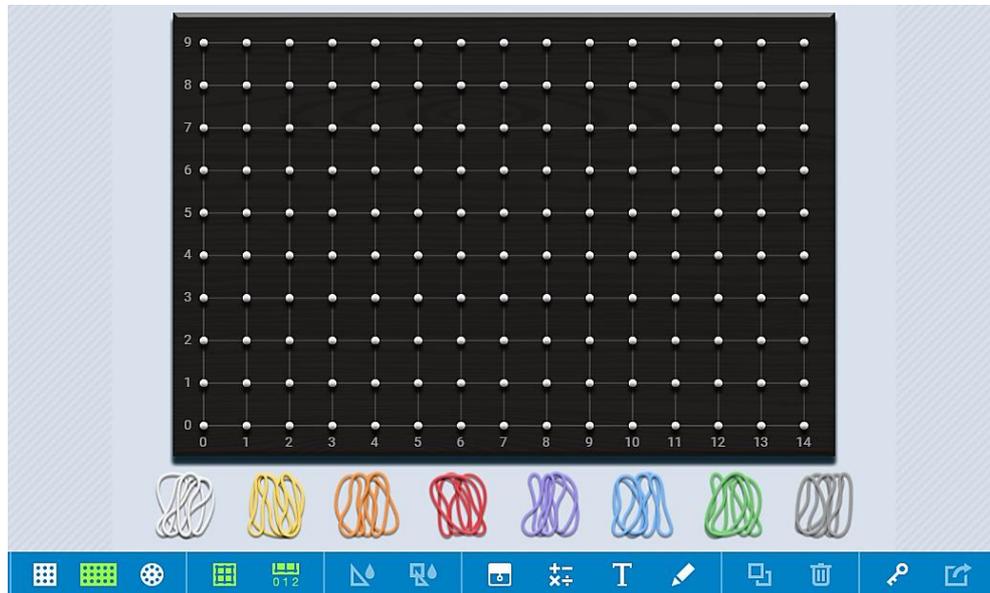
A ideia dessa oficina é explorar a simetria de reflexão no geoplano virtual⁶. A experimentação em um ambiente como o do geoplano virtual pode possibilitar a manipulação, desenvolver a criatividade, pode, inclusive, ser de fácil manuseio para alunos, sobretudo, para aqueles que tenham familiaridade com o uso de recursos tecnológicos. Ao nosso ver, os alunos, especialmente os que demonstram mais ‘domínio’ do ambiente virtual, podem construir suas figuras com facilidade, podendo manipulá-las, modificá-las, movê-las e removê-las a qualquer momento.

Cabe explicitar que consideraremos que a distância entre dois pontos consecutivos (horizontalmente e verticalmente), no geoplano virtual, é uma unidade de comprimento e que cada quadradinho, formado por quatro dessas unidades,

⁶ Vale destacar que a licencianda conheceu o *software* na disciplina de estágio supervisionado apresentado pelo professor-orientador, o que a inspirou a criar, por meio dele, atividades que abordassem o conceito de ‘simetria’.

representa uma unidade de área. Assim sendo, pode-se estudar o conceito de simetria de figuras planas com esse recurso.

Figura 13: Interface do Geoplano virtual



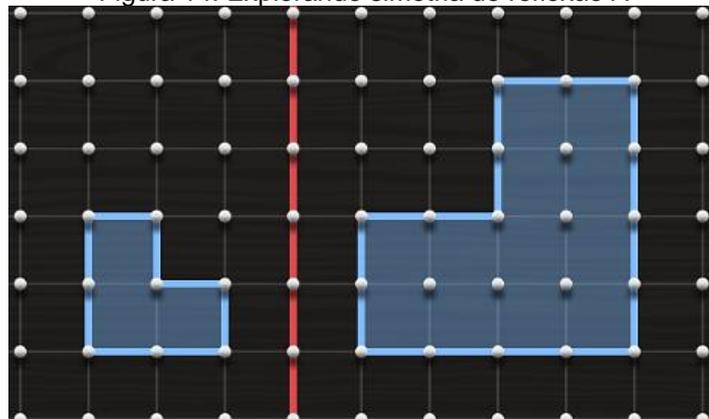
Fonte: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

A intenção é, após a construção das figuras no geoplano virtual, propor as quatro atividades apresentadas a seguir.

Atividade 1

A proposta dessa atividade é trabalhar com contraexemplo. Para isso, a expectativa é iniciar a atividade propondo aos estudantes que observem a figura 14 no geoplano virtual.

Figura 14: Explorando simetria de reflexão A

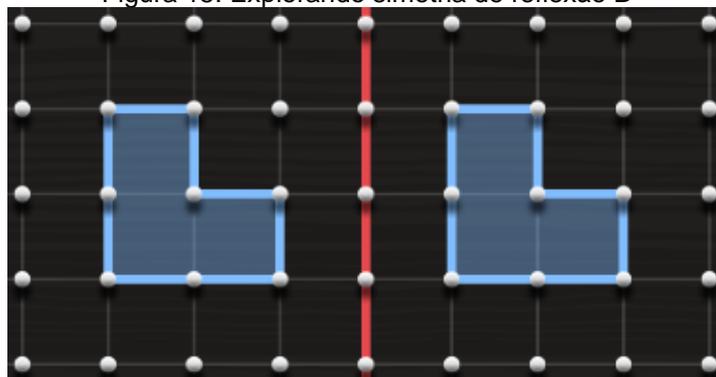


Fonte: elaborado pela autora (2021)

Depois disso, a ideia é ‘provocar’ os discentes, a partir de uma discussão norteadora por perguntas, como: “Elas têm a mesma forma? E o mesmo tamanho? Compare a posição que essas duas figuras se encontram em relação à linha vermelha. Se dobrássemos a malha na linha vermelha, as duas partes da figura se sobreporiam e coincidiriam?”

Em seguida, propor aos discentes que observem a figura 15 no geoplano virtual.

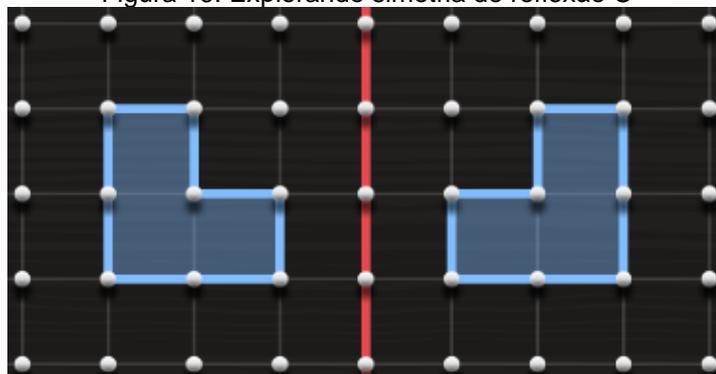
Figura 15: Explorando simetria de reflexão B



Fonte: elaborado pela autora (2021)

Novamente, a ideia é ‘provocar’ os discentes, a partir de uma discussão norteadora por perguntas, como: “Elas têm a mesma forma? E o mesmo tamanho? Compare a posição que essas duas figuras se encontram em relação à linha vermelha. O que você observa? Uma figura é o reflexo da outra em relação à linha vermelha?”

Figura 16: Explorando simetria de reflexão C



Fonte: elaborado pela autora (2021)

Se dobrássemos a malha na linha vermelha, veríamos que as duas imagens da

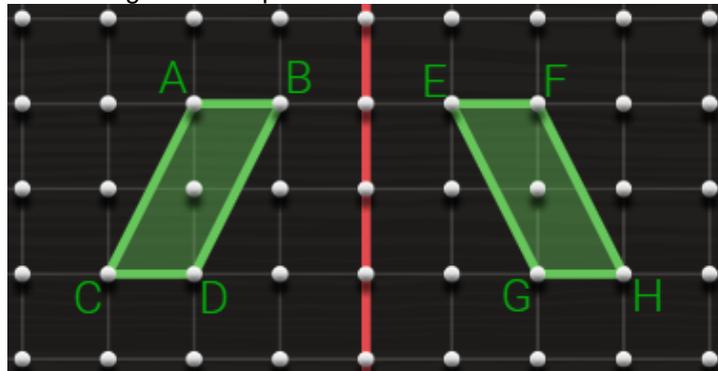
figura 16 se sobreporiam e coincidiriam. Assim, podemos perceber que uma imagem é reflexo da outra em relação à linha vermelha.

Quando duas imagens são o reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há simetria de reflexão e a linha é seu eixo de reflexão ou ainda que as figuras são simétricas. Os pontos que coincidem quando a figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria são chamados de correspondentes ou simétricos em relação ao eixo.

Atividade 2

A proposta dessa atividade é iniciar apresentando a figura 17 no geoplano virtual e, em seguida, propor aos discentes que reflitam e respondam às seguintes perguntas: “Se dobrássemos a malha na linha vermelha, as duas figuras se sobreporiam e coincidiriam? Qual a distância do vértice A à linha vermelha? Qual a distância do vértice F à linha vermelha?”

Figura 17: Explorando simetria de reflexão D



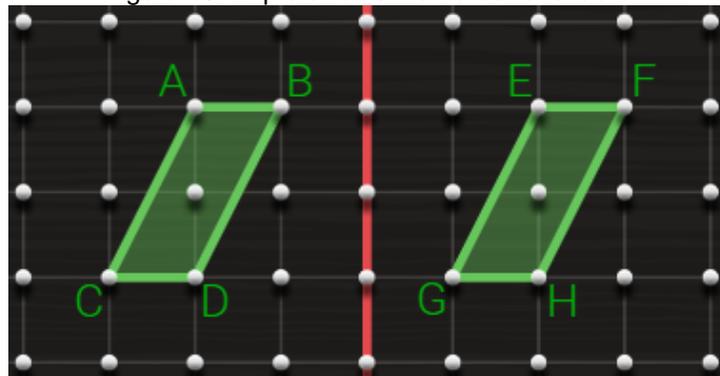
Fonte: elaborado pela autora (2021)

A proposta dessa atividade é que os estudantes localizem os vértices correspondentes e reflitam que todos os vértices correspondentes estão a uma mesma distância da linha vermelha. Portanto, a ideia é continuar a discussão norteada pelas seguintes perguntas: “Qual a distância do vértice B à linha vermelha? Qual a distância do vértice E à linha vermelha? Qual a distância do vértice C à linha vermelha? Qual a distância do vértice H à linha vermelha? Qual a distância do vértice D à linha vermelha? Qual a distância do vértice G à linha vermelha? O que podemos concluir em relação à distância dos vértices

correspondentes à linha vermelha?”.

Fazendo o mesmo exercício na figura 18 (apresentada abaixo), daremos destaque para o fato de que os vértices correspondentes dela não estão a uma mesma distância da linha vermelha e, conseqüentemente, se dobrássemos a malha na linha vermelha, as duas figuras não se sobreporiam e não coincidiriam.

Figura 18: Explorando simetria de reflexão E



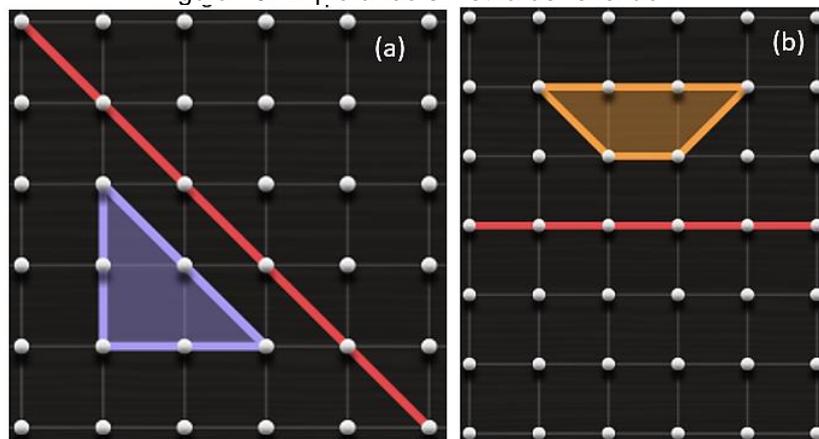
Fonte: elaborado pela autora (2021)

Portanto, diferentemente da simetria de reflexão, na figura 18 uma imagem não é o reflexo da outra, ou seja, elas não são simétricas por reflexão.

Atividade 3

A proposta dessa atividade é que os discentes desenhem o reflexo de cada figura abaixo em relação aos eixos de simetria traçados.

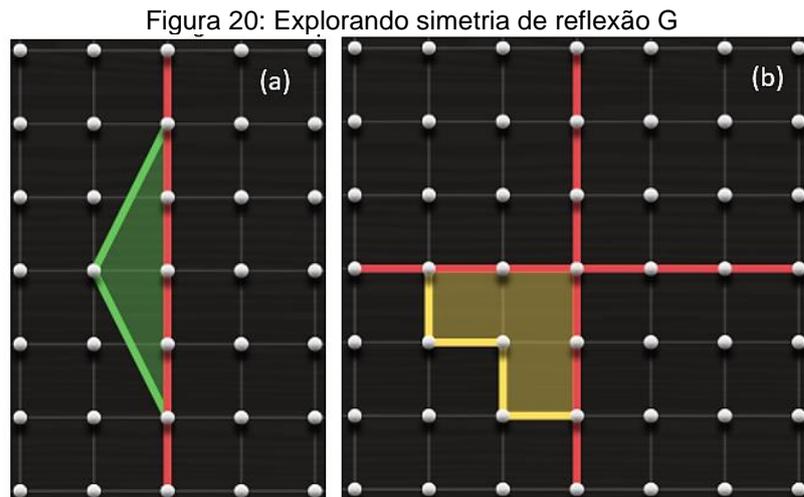
Figura 19: Explorando simetria de reflexão F



Fonte: elaborado pela autora (2021)

Atividade 4

Em cada item abaixo aparece parte de uma figura e as retas vermelhas representam eixos de simetria. A proposta dessa atividade é que os discentes completem as figuras refletindo as partes da figura em relação aos eixos de simetria.



Fonte: elaborado pela autora (2021)

4.3 Oficina 3 – Explorando a simetria de reflexão por meio de espelhos e malha quadriculada

Objetivos:

- Explorar a simetria de reflexão utilizando malha quadriculada e espelhos.

Material e recursos:

Malha quadriculada, espelhos e lápis.

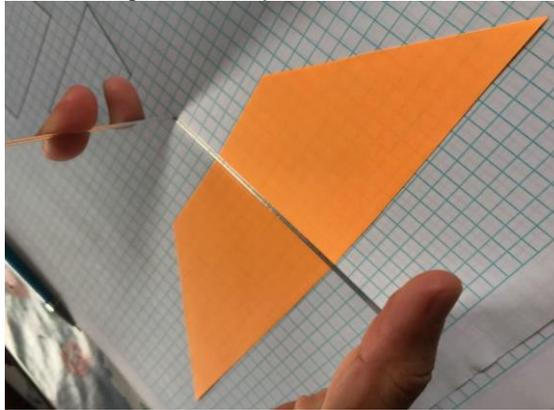
Desenvolvimento:

Essa oficina propõe o estudo de simetria com espelhos planos e malha quadriculada. Inicialmente, utilizaremos o espelho para ajudar os estudantes na identificação de eixos de simetria.

Como vimos nas oficinas anteriores, eixo de simetria de uma figura plana é uma linha reta que divide a figura em duas partes de modo que dobrando a figura nessa linha, as duas partes sobrepostas sejam coincidentes. Neste contexto, consideramos o espelho uma ferramenta útil para ajudar os alunos na identificação de simetrias e para dar mais materialidade para as suas observações. Colocando-o perpendicularmente em cima de uma imagem, como mostra a figura 21, é possível

identificar pistas sobre a existência de algum eixo de simetria, que será a linha formada entre o espelho e a figura.

Figura 21: Espelhos e simetria



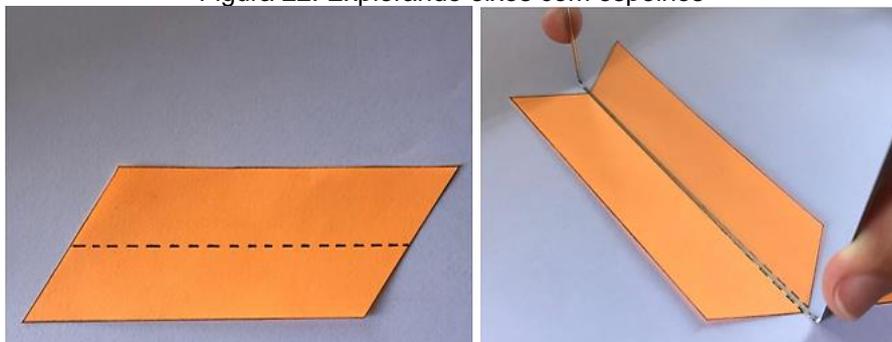
Fonte: elaborado pela autora (2022)

A expectativa é iniciar apresentando um exemplo aos discentes e, em seguida, propor as três atividades seguintes.

Atividade 1

Inicialmente, será entregue aos discentes um espelho e uma figura plana com uma linha pontilhada desenhada. A expectativa é que os estudantes coloquem o espelho perpendicular à linha, como mostra a figura 22, e observem se a imagem que se forma completa a original. A ideia desse exemplo é deixar os alunos se adaptarem com o material e, em seguida, explorar outras figuras.

Figura 22: Explorando eixos com espelhos

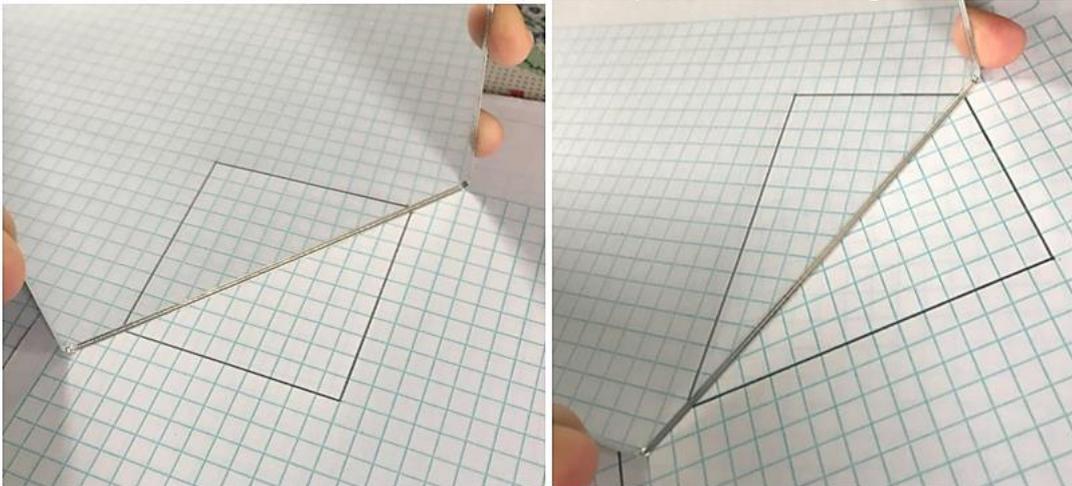


Fonte: elaborado pelos autores (2022)

Atividade 2

No segundo momento da oficina, o objetivo é que os alunos usem, também, a malha quadriculada. Inicialmente, solicitaremos aos discentes que desenhem, na malha quadriculada, um quadrado de dimensões 10 cm por 10 cm e um retângulo de dimensões 14 cm por 8 cm e, em seguida, que coloquem o espelho perpendicular a uma das diagonais do quadrado e observem o que acontece. Logo após, recomendaremos que repitam o mesmo procedimento no retângulo e iniciaremos uma discussão norteada pelas seguintes perguntas: “O que vocês observaram? O que aconteceu de diferente quando colocaram o espelho perpendicular à diagonal do retângulo? O que podemos concluir?”.

Figura 23: Explorando as diagonais do quadrado e do retângulo



Fonte: elaborado pela autora (2022)

Após a discussão, a ideia é solicitar aos estudantes que risquem, com o auxílio de uma régua, as diagonais das duas figuras e, utilizando outra cor, risquem os eixos de simetria, caso tenham. Em seguida, sistematizar fazendo as seguintes perguntas aos discentes: “O quadrado tem eixo de simetria? Se sim, quantos e quais? O retângulo tem eixo de simetria? Se sim, quantos e quais?”.

Atividade 3

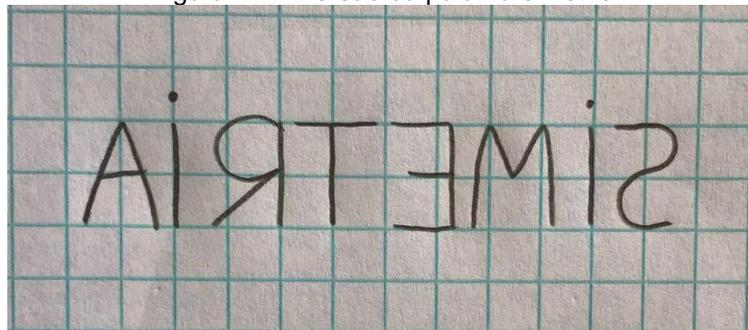
No último momento da oficina, a ideia é propor aos discentes uma atividade⁷, individual, que os faça refletirem durante a execução. Solicitaremos que escrevam o seu nome na malha quadriculada de modo que consigam ler corretamente a

⁷ Vale destacar que essa atividade foi inspirada em Vieira, Paulo e Allevato (2011).

palavra escrita por meio do espelho. Nessa atividade, espera-se que os alunos percebam a inversão provocada pela simetria de reflexão, já discutida nas atividades iniciais e oficinas anteriores, e associem a palavra que deveria ser escrita na malha quadriculada.

Nessa atividade, na qual vamos explorar a simetria de reflexão relacionada à imagem refletida em um espelho, a ideia é, após a execução da atividade, criar um diálogo entre os alunos a respeito de como deveria ser escrito o nome de tal modo que o reflexo esteja legível.

Figura 24: Inversão da palavra simetria



Fonte: Elaborado pela autora (2022)

5. REFLEXÕES SOBRE A REALIZAÇÃO DAS OFICINAS

Depois de elaboradas as oficinas anteriormente caracterizadas, entramos em contato com uma professora que atua em Ouro Preto, na rede estadual, e, com sua aquiescência, realizamos três oficinas em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. Dessa forma, com vistas a compreender como alunas e alunos se relacionam com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas, passamos a descrever e analisar as vivências experimentadas nas três oficinas.

5.1 Desenvolvimento e análise da oficina 1

A primeira oficina realizada com os alunos abordava o conceito de simetria de reflexão, tomando como ponto de partida as noções intuitivas dos estudantes. Com ela, nossa intenção foi, por meio das discussões e atividades, contribuir para os estudantes desenvolverem aspectos do conceito referido. Para tanto, inicialmente, organizamos⁸ uma projeção de slides, nos apresentamos e caracterizamos a proposta das oficinas aos alunos, buscando despertar neles interesse e curiosidade.

Em seguida, perguntamos aos alunos: “Vocês conhecem a palavra simetria?”. Vários deles responderam que “sim”, entretanto, alguns responderam que “não”. Dando sequência, questionamos aqueles que responderam que sim: “O que vocês entendem por simetria?”. Iniciou-se, então, uma discussão entre os estudantes, na qual, foram produzidas respostas, como: “algo simétrico”, “igual”, “alguma coisa igual?”, “não sei”.

Nesse momento surgiram vários ‘burburinhos’. Os alunos começaram a observar a sala tentando encontrar algo que os ajudasse a responder a nossa pergunta. Um estudante apontou para a lousa e disse: “o quadro é simétrico”. A partir dessa afirmação, alguns alunos começaram a expor as suas opiniões, ao mesmo tempo. Percebemos que alguns deles concordaram com a afirmação do colega, outros discordaram; houve, ainda, quem buscasse exemplos de objetos que considerava como simétricos.

⁸ Utilizaremos o plural com vistas a produzir um texto que contemple as reflexões coletivas da licencianda e de seu orientador. A despeito disso, explicitamos que a vivência empírica foi experimentada exclusivamente pela licencianda.

Consideramos relevante destacar que, quando o aluno fez menção ao quadro como exemplo de simetria, pareceu-nos que ele – uma vez que as lousas da escola eram quadriculadas – estava pensando no formato (retangular) da lousa ou do quadriculado que preenchia a área ocupada pela lousa. Na tentativa de compreender o raciocínio do estudante, perguntamos a ele: “Por que o quadro é um exemplo de simetria?”. Ele, então, respondeu: “Ele tá certinho”. Tal afirmação, a nosso ver, sugere que o discente apresentava uma compreensão de simetria associada à noção de ‘formas geométricas harmoniosas’. Mais especificamente, em conversa com os estudantes, tivemos a impressão de que parte deles adjetivava como harmônico aquilo que é ‘idêntico’. Além disso, alguns deles pareciam compreender que tal característica era típica de figuras simétricas.

Outros exemplos das noções de simetria dos discentes foram surgindo durante o debate que se instalou. Alguns deles começaram a mencionar figuras geométricas típicas da Matemática Escolar nas quais reconheciam simetria, por exemplo, um estudante mencionou: “o quadrado [e o] triângulo, professora!”.

Antes de questionar aos alunos o motivo pelo qual consideravam o quadrado e o triângulo como figuras simétricas, um discente gritou: “Falaaaa José⁹!!!”. José – que aparentava vergonha de expor sua opinião –, então, começou a ser incentivado pelos colegas a se expressar. Cabe destacar, que a professora da turma, ao final da aula, quando conversamos sobre o desenvolvimento da oficina, relatou que José, recentemente, tinha sido diagnosticado como aluno com Transtorno do Espectro Autista (TEA).

Após o incentivo, José disse para a turma: “simetria é... é uma figura que tem todos os lados iguais”. Solicitamos, então, que os discentes apresentassem um exemplo de figura plana cujos lados são todos iguais. Muitos alunos mencionaram o quadrado como exemplo, entretanto, José respondeu: “o círculo¹⁰” – resposta essa que nos deixou reflexivos sobre os possíveis motivos pelos quais o aluno havia entendido o círculo como uma figura de ‘lados’ iguais.

Ainda sobre essa resposta, percebemos que a fala do aluno evidencia a importância de realização de atividades nas aulas de Matemática – como aquelas apresentadas por Amâncio (2013) – por meio das quais os alunos possam ponderar

⁹ Para garantir sigilo em relação às informações pessoais dos estudantes, utilizamos nomes fictícios no texto.

¹⁰ nosso ver, o estudante se referia à circunferência.

sobre se uma determinada figura é um polígono ou um não-polígono. Sobre essa questão, cabe acrescentar que os livros didáticos apresentam diferentes definições para o conceito de polígono, como se pode verificar no quadro abaixo.

Quadro 3: Definição de polígono nos livros didáticos

Coleção	Definição
Praticando Matemática – Andrini e Vasconcellos (2012, p.152)	Polígono é uma figura geométrica plana limitada por segmentos de retas, chamados lados do polígono.
Matemática: Imenes e Lellis - Imenes e Lellis (2012, p.90)	As formas que têm apenas contornos retos são polígonos. O contorno de um polígono é feito por trechos retos (segmentos de reta), ligados um a um pelos extremos, até que o último segmento se una ao primeiro. Assim, obtemos uma figura fechada, com uma única região interior.
A Conquista da Matemática – Júnior e Castrucci (2018, p.168)	Polígono é uma figura plana formada por uma linha fechada simples, composta apenas de segmentos de reta, reunida com a sua região interna.

Fonte: elaborado pela autora (2022)

Compete ressaltar ainda que, a despeito de a circunferência ser (ou não) um polígono, o estudante que afirmou isso – e que havia respondido que “simetria é uma figura que tem todos os lados iguais” – apresentou um exemplo de figura simétrica, qual seja, o círculo (circunferência).

Antes que pudéssemos realizar uma mediação acerca dessa afirmação do aluno, muito em função do engajamento que os discentes apresentavam na realização da oficina, eles iniciaram outro diálogo.

Apontando para a janela, um deles disse: “a janela é simétrica”. Logo em seguida, os pares do discente ponderaram, apresentando críticas enunciadas em frases como “mas ela é meio torta, né?” ou “ahhh não, ela é meio torta”. Nesse momento, os estudantes compartilharam vários outros exemplos de objetos e figuras que consideravam simétricas, mas, em decorrência das ponderações acerca daquilo que o grupo entendia como ‘imperfeições’ nos exemplos, os proponentes das ideias, em muitos casos, manifestaram incômodo consigo próprios, refletiram sobre as críticas recebidas e, em diversos casos, concordaram com os critérios dos pares para a eventual ‘não simetria’ dos exemplos que propuseram.

Depois disso, valendo-nos desse ambiente que se mostrou propício ao debate, perguntamos aos alunos: “E por assimetria, o que vocês entendem?”. Os estudantes, então, produziram diferentes respostas, dentre as quais destacamos:

“Acho que é algo que não é igual”, “algo que os lados não são iguais”, “pra mim, assimetria é o oposto de simetria”.

Assim, uma vez iniciada essa discussão, apresentamos um slide com seis imagens e solicitamos aos alunos que as observassem e as separassem em dois grupos, um dos quais com as imagens que consideravam simétricas e o outro com as imagens que consideravam assimétricas.

Figura 25: Slide apresentado aos alunos



Fonte: adaptado pela autora (2022)

Após refletirem e negociarem, eles separaram as imagens da seguinte forma:

Quadro 4: Organização das imagens proposta pelos estudantes

Simétricas	Assimétricas
Pedras hexagonais (1), Jardim Botânico de Curitiba (2) e Geometric Symmetry (3)	Museu Vitra Design da Alemanha (4), Baldgreis (5) e Mosaico de fragmentos de azulejo (6)

Fonte: elaboração dos autores (2022)

Assim, iniciamos uma discussão, dando espaço para os alunos justificarem o motivo pelo qual classificaram a imagem como simétrica ou como assimétrica. As duas primeiras imagens sobre as quais os estudantes produziram justificativa foram a primeira e a sexta. Acerca da primeira (pedras hexagonais), os alunos observaram que havia um padrão de vários hexágonos congruentes, justificando assim o fato de ser simétrica. Já sobre a sexta imagem (mosaico de fragmentos de azulejo), os estudantes a classificaram como assimétrica e, para justificarem, se basearam em afirmações do tipo: “são figuras completamente diferentes”, “estranhas”.

Em seguida, classificaram a segunda imagem (Jardim Botânico de Curitiba) como simétrica sob a defesa de que ela seria “certinha”. Cabe acrescentar que José,

durante a discussão, afirmou: “Se a gente dividir ela pela metade, as duas partes seriam quase a mesma coisa, só que em lados opostos”. Conjecturamos, a partir dessa fala, que quando o aluno mencionou, anteriormente, o círculo como exemplo, talvez, já estivesse lançando mão desse raciocínio de dividir pela metade’ para verificar se ‘as duas partes seriam quase a mesma coisa, só que em lados opostos”, ou seja, pareceu-nos que ele já estivesse com algum nível de elaboração sobre ‘eixos de simetria’.

Depois disso, os discentes explicaram que consideraram a quarta imagem (Museu Vitra Design da Alemanha) assimétrica por diferentes razões, dentre as quais destacamos: “por causa do formato dele, tem os lados diferentes” ou porque “ele é meio dividido em partes estranhas”. Eles também afirmaram que a terceira imagem (obra “Geometric Symmetry” de Jason Galles) foi classificada como simétrica porque “se cortar ao meio vai ficar igualzinho” ou ainda pois “dá pra cortar não só ao meio, mas na diagonal também”. A nosso ver, essa argumentação pareceu ter sofrido, de alguma forma, influência da explicação proposta anteriormente pelo estudante José.

A última imagem sobre a qual os alunos ponderaram foi a quinta (obra “Baldgreis” de Paul Klee) e, eles a classificaram, inicialmente, como simétrica tendo um dos estudantes justificado “se cortar ao meio as partes ficam iguais”. Entretanto, ao contrário do que notamos nos debates anteriores, essa justificativa não produziu consenso. Logo após a fala desse estudante, outros discentes, ponderaram: “não concordo” ou “os olhos, as sobrancelhas não são iguais” e, posto esse contraponto, o grupo, a classificou como assimétrica.

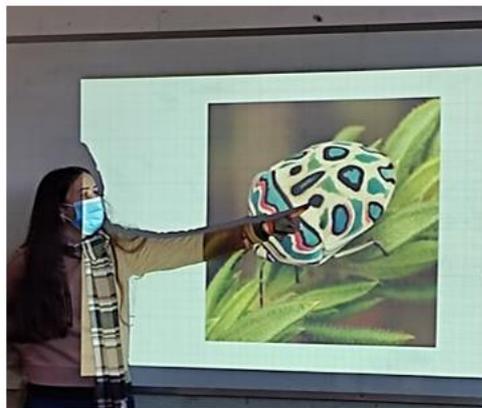
Após essa atividade, iniciamos uma discussão sobre a simetria no mundo em que vivemos. Compete ressaltar que, partindo das noções intuitivas dos discentes, fomos, verbalmente, trazendo elementos para ampliação do conceito de simetria, por exemplo, ponderamos sobre o fato que, as vezes, apesar de uma imagem não possuir uma simetria geometricamente ‘exata’, ela não só é adjetivada como simétrica, como também é reconhecida por suas ‘formas harmônicas’.

Assim, começamos a refletir sobre várias imagens que foram projetadas nos slides. Dentre elas, as primeiras que ganharam destaque entre os alunos foram as borboletas. Eles observaram que as asas eram ‘iguais’. Nesse momento, percebemos que os discentes também começaram a utilizar a sobreposição para

argumentar que a figura era simétrica, por exemplo, eles mencionaram que uma asa da borboleta, se dobrada, encaixava-se na outra.

Outra imagem em cuja análise os alunos pareceram impressionados, foi o inseto “*Sphaerocoris annulus*” (figura 26). Eles, então, observaram o padrão nos formatos e nas cores. Nesse debate, notamos que houve ensejo para ponderação se as cores se relacionam (ou não) com a noção de simetria. Acerca desse olhar para uma eventual relação entre as cores e simetria, Fonseca (2013, p.36) afirma: “A ideia básica para que se possa considerar a simetria de figuras com cores é definir o conceito de imagem gráfica”. O mesmo autor acrescenta que *imagem gráfica* é “um par ordenado (A, λ) em que A denota uma figura geométrica e λ é uma função de atributos” e que uma função de atributos “pode ser construída como uma função definida no plano euclidiano que associa a cada ponto um triplo ordenado de números que representam os percentuais de determinadas cores básicas na composição da cor do ponto”.

Figura 26: Inseto Picasso



Fonte: acervo da autora (2022)

Em seguida, começamos a discutir sobre as simetrias que também são encontradas em produções do campo das artes, da arquitetura e em objetos da nossa vida cotidiana. Uma das imagens que fez sucesso entre os alunos foi a igreja de São Francisco de Assis, localizada em Ouro Preto, cidade em que muitos deles residem. Esse exemplo, cabe destacar, foi o ensejo para que os alunos comessem a caracterizar várias obras e construções de Ouro Preto as quais consideravam simétricas.

A nosso ver, esse episódio, ainda que de modo incipiente, ilustra a importância de um trabalho que envolva contextualização. Por um lado, o Parecer 7

de 2010 do CNE (BRASIL, 2010, p. 7) – apontado na BNCC como um de seus marcos legais –, assevera que a criação de um ‘ambiente propício à aprendizagem’ requer, dentre outros “(...) contextualização dos conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e socialmente significativa”. Por outro lado, a noção de ‘contextualização’ demanda atenção já que tem sido utilizada, em muitos casos, de modo pouco rigoroso, como afirmam Reis e Nehring (2017).

Ainda com vistas a ponderar sobre simetria em imagens ‘familiares’ aos estudantes, trouxemos uma fotografia do piso da escola. Enquanto discutíamos sobre a simetria e o padrão ali presente, um aluno relatou: “lembra o piso da casa da minha vó”. Nesse momento, os alunos se voltaram para memórias afetivas e não só surgiram exemplos de pisos simétricos, mas também de utensílios e objetos da casa das avós.

Figura 27: Piso da escola



Fonte: acervo da autora (2022)

Com a intenção de encaminhar para uma conclusão desse momento de debates, mostramos aos alunos alguns tecidos simétricos. Os estudantes observaram padrão nos desenhos, nas cores e na repetição de figuras que consideraram “iguais” ou “congruentes”. Nesse momento, afirmamos que podem existir figuras que são simétricas umas em relação a outras.

Em síntese, esse momento inicial da oficina, para nós, revelou que a percepção intuitiva de figuras simétricas dos estudantes estava relacionada com os adjetivos “harmônicas” e “idênticas”. Essas características foram sendo usadas por eles para expressar o que compreendiam como simetria e, na medida em que a

oficina transcorria e, a partir de algumas mediações que foram propostas, eles começaram a justificar que para as figuras serem simétricas, elas deveriam se sobrepor. Portanto, nessa experiência, reconhecemos um movimento de produção de conhecimento matemático no qual os estudantes, partindo da exploração intuitiva, puderam ampliar suas ideias matemáticas relativas às características da simetria e, mais especificamente, a de simetria de reflexão.

Iniciamos, então, o segundo momento da oficina, que tinha o objetivo de trabalhar com eixos de simetria usando dobraduras, tentando identificar todos os possíveis eixos de simetria dos triângulos. Para tanto, informamos aos estudantes que um método para verificar se uma figura plana apresentava simetria, consistia em traçar uma linha reta que dividisse a imagem em duas partes de modo que dobrando a figura nessa linha, as duas partes sobrepostas sejam coincidentes. Concluímos, afirmando que, se essa linha reta existisse, a figura apresentaria simetria e a linha seria uma representação possível para um eixo de simetria da figura. Ponderamos também para o fato de que uma figura plana poderia apresentar simetria e, no entanto, essa ideia não ficava restrita a apenas uma figura, ou seja, era possível identificar simetria entre duas figuras distintas, sendo, pois, uma simétrica à outra.

Destacamos também que, a respeito de simetrias, elas poderiam ser de diferentes tipos. Dentre esses diferentes tipos de simetria, abordaríamos nas oficinas apenas a simetria de reflexão. Para prosseguir para as dobraduras, distribuímos folhas coloridas para os alunos. A primeira figura construída foi o triângulo equilátero.

Figura 28: Construindo o triângulo equilátero



Fonte: acervo da autora (2022)

Acerca do trabalho com as dobraduras, vale destacar que, por um lado, os estudantes pareceram empolgados com a atividade, por outro, alguns discentes evidenciaram dificuldades em realizar as referidas dobraduras. Para atenuar tais dificuldades, quando um estudante manifestava dúvida, parávamos a construção para ajudá-lo. Cabe destacar que os alunos que já haviam compreendido as etapas da dobradura mostraram-se disponíveis e, também, ajudaram aqueles que estavam com dificuldades.

Acerca do uso de material concreto, nosso pensamento se alinha com o de Fiorentini e Miorim (1990, p.5), segundo os quais:

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender' mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. (...). Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando (...). O material ou o jogo pode ser fundamental para que isto ocorra. Neste sentido, o material mais adequado, nem sempre, será o visualmente mais bonito e nem o já construído. Muitas vezes, durante a construção de um material o aluno tem a oportunidade de aprender matemática de forma mais efetiva (FIORENTINI E MIORIM, 1990, p.5).

Entretanto, concordamos também com esses autores no sentido de que, “em outros momentos, o mais importante não será o material, mas sim, a discussão e resolução de uma situação problema ligada ao contexto do aluno, ou ainda, à discussão e utilização de um raciocínio mais abstrato” (FIORENTINI E MIORIM, 1990, p.5).

Em seguida, construímos o triângulo isósceles e, utilizamos os triângulos que sobraram dessa dobradura para conversar sobre os escalenos. Orientamos, então, que os estudantes separassem um deles para a nossa atividade. Com os três triângulos construídos, prosseguimos para a nossa próxima discussão.

Figura 29: Construindo o triângulo isósceles



Fonte: acervo da autora (2022)

Nessa etapa, propusemos aos alunos que fizessem dobraduras no triângulo escaleno para encontrar os eixos de simetria, caso tivessem. Após refletirem um pouco, os discentes chegaram a um consenso e responderam: “não tem (eixos de simetria)”. As principais justificativas que identificamos, foram: “o triângulo escaleno tem lados diferentes”, “qualquer dobradura que a gente faça não dá certo”, “não fica igual”, “a sobreposição não coincide”.

Figura 30: Encontrando eixos de simetria do triângulo escaleno



Fonte: acervo da autora (2022)

Depois de refletirmos sobre o triângulo escaleno, solicitamos que pensassem o mesmo para o triângulo isósceles. A partir dessa demanda, as e os estudantes tentaram realizar dobraduras de várias maneiras e, após refletirem, enunciaram as seguintes respostas: “tem eixo”, “um eixo”, “quando dobramos no eixo, forma outros dois triângulos iguais”.

Figura 31: Encontrando eixos de simetria do triângulo isósceles



Fonte: acervo da autora (2022)

Por último, os estudantes começaram a realizar dobraduras para encontrar os eixos de simetria do triângulo equilátero. Inicialmente, alguns alunos responderam: “dois eixos”. Depois dessa resposta e de um pouco mais de tempo experimentando outras possibilidades, alguns alunos encontraram um terceiro eixo e afirmaram: “eu achei três”, “são três”.

Figura 32: Encontrando eixos de simetria do triângulo equilátero



Fonte: acervo da autora (2022)

Por fim, com a intenção de realizar uma síntese da atividade, perguntamos aos alunos: “o que podemos concluir com essa atividade?” e, após refletirem, entre as respostas que apareceram, destacamos: “tipo, nem toda figura tem eixo de simetria [aponta para o triângulo escaleno], e pode ter pode ter figura que tem um

eixo [aponta para o triângulo isósceles], dois [aponta para o triângulo equilátero] ... ou mais eixos”.

A nosso ver, esse trabalho envolvendo eixos de simetrias foi especialmente importante, pois, no início da oficina, entre as figuras geométricas que os alunos consideravam simétricas, o quadrado e o triângulo foram mencionados com frequência. Isso nos sugere que, alguns alunos, ao pensarem em um triângulo, visualizam um triângulo ‘certinho’ (equilátero), esquecendo, portanto, que existem triângulos escalenos, por exemplo. Isso se relaciona com o desenho e as imagens mentais, que são dois dos quatro elementos que intervêm no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, conforme teoria proposta por Pais (1996).

Sobre o desenho, Amâncio e Gazire (2020) destacam:

Entende-se que um conceito geométrico pode ser representado por uma infinidade de desenhos, mas na prática, há uma predominância de algumas figuras particulares, encontradas com frequência em livros, cadernos ou desenhadas na lousa pelo professor. Segundo Pais (2000), há uma espécie de tradição dessas formas particulares de representação (AMÂNCIO, GAZIRE, 2020, p.174).

Já sobre as imagens mentais, as autoras ainda acrescentam:

Pais (1996) relata que não é fácil definir imagem mental, mas considera que “uma pessoa tem uma dessas imagens quando ela é capaz de enunciar de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos.” (PAIS, 1996, p.70). Para o autor, a formação das imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos. Cada pessoa possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. É importante que, ao longo da escolaridade, o conjunto das imagens mentais seja enriquecido nos aspectos quantitativo e qualitativo (AMÂNCIO, GAZIRE, 2020, p.174).

A nosso ver, quando os alunos fizeram as dobraduras, puderam compreender que nem todo triângulo é simétrico, ou seja, nem todo triângulo possui eixos de simetria. Puderam ainda experimentar, na prática, que apesar dos triângulos isósceles e equiláteros apresentarem, respectivamente, dois e três eixos, os triângulos escalenos não têm eixos de simetria.

Em síntese, esse momento final da oficina, para nós, revelou que o conceito de simetria e de eixo de simetria foi, no decorrer das atividades, compreendido, ainda que de modo incipiente por, pelo menos, parte dos discentes. As dobraduras, conjecturamos, talvez tenham contribuído para eles compreenderem que o fato de

as figuras se sobreporem indicava que figuras simétricas preservam suas medidas e sua forma.

5.2 Desenvolvimento e análise da oficina 2

Por meio da segunda oficina, exploramos o conceito de simetria de reflexão fazendo uso do geoplano virtual. Com ela, nossa intenção foi, por meio das discussões e da experimentação, contribuir com os discentes de modo que eles pudessem desenvolver seus entendimentos sobre simetria de reflexão. Para tanto, inicialmente, recapitulamos os pontos principais da oficina anterior realizando uma síntese.

Em seguida, apresentamos a proposta da oficina e explicamos que nosso desejo era que todos tivessem um computador individual para realizar a atividade. Entretanto, devido às limitações de ordem material, ou seja, dada a impossibilidade de disponibilizar um computador por aluno, a oficina seria dividida em dois momentos, o primeiro no qual, juntos, exploraríamos o geoplano por meio da projeção da tela do computador pessoal da licencianda e o segundo momento, no qual exploraríamos, individualmente, nos próprios celulares.

Depois disso, perguntamos aos alunos: “você conhece o geoplano?”. Todos os alunos responderam que “não”. Comentamos, então, acerca da existência tanto do geoplano físico como do virtual e, em seguida, por meio da projeção, apresentamos a interface do *geoboard*¹¹ (geoplano virtual). Nessa etapa, discorreremos sobre as ferramentas e combinamos não só que a distância entre dois pontos consecutivos seria adotada como unidade de comprimento, mas também que assumiríamos o espaço ocupado pelo quadradinho, delimitado por quatro dessas unidades, como unidade de área.

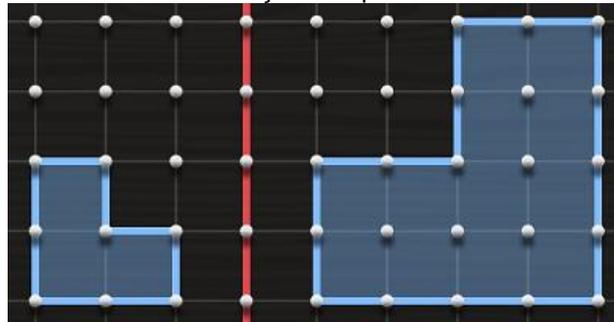
Cabe ressaltar que um dos recursos do *geoboard* é a possibilidade de compartilhar (ou armazenar) um trabalho nele produzido salvando-o como imagem, criando um código de 8 (oito) caracteres ou gerando um link. Valendo-nos desse recurso, construímos com antecedência as figuras das primeiras atividades e, no

¹¹ O site do aplicativo o apresenta como “...uma ferramenta para explorar uma variedade de tópicos matemáticos introduzidos nas séries fundamental e média. Os alunos esticam faixas ao redor dos pinos para formar segmentos de linha e polígonos e fazer descobertas sobre perímetro, área, ângulos, congruência, frações e muito mais”. Disponível em: < <https://www.mathlearningcenter.org/apps/geoboard> > Último acesso em: 10/10/2022.

momento da oficina, usamos os códigos de 8 (oito) caracteres para compartilhá-las com os discentes por meio da projeção.

Assim, demos início a atividade 1 (um). Nela, após os discentes observarem a primeira construção (figura 33), perguntamos: “Elas têm a mesma forma?”. Um aluno respondeu: “têm a mesma forma e tamanhos diferentes”. A próxima pergunta planejada seria sobre o tamanho, entretanto, como os estudantes anteciparam a questão, não foi necessário realizá-la.

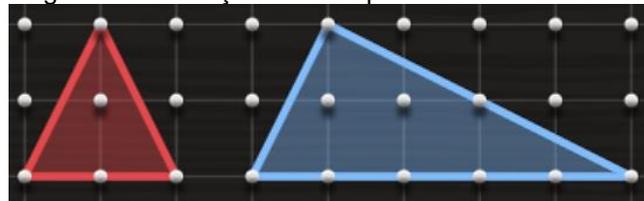
Figura 33: Primeira construção compartilhada com os discentes



Fonte: elaborado pela autora (2022)

Durante tal discussão, com o objetivo de sanar as dificuldades que alguns alunos apresentaram em responder à pergunta, abrimos uma nova tela do geoplano e construímos (figura 34) dois triângulos, sendo um deles isósceles e o outro escaleno. A partir da construção, questionamos: “Eles têm o mesmo formato?”. Os alunos, por sua vez, produziram respostas como: “Não, as medidas são diferentes” e “os ângulos também”.

Figura 34: Segunda Construção - criada para elucidar dúvida dos discentes



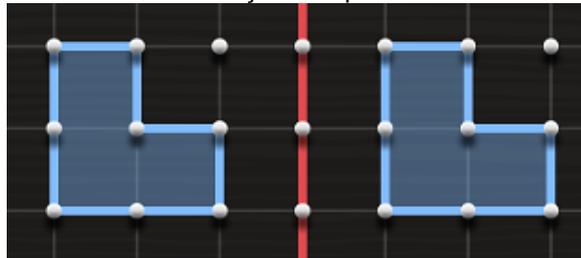
Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Elucidada a dúvida dos estudantes, retomamos a discussão sobre a primeira construção (figura 33) com a seguinte pergunta: “Compare a posição que essas duas figuras se encontram em relação à linha vermelha. Se dobrássemos a malha na linha vermelha, as duas partes da figura se sobreporiam e coincidiriam?”. Após refletirem, alguns alunos responderam: “ia sobrepor uma parte”, “ia sobrepor, mas

não ia ficar igual”, “ia sobrepor, mas não ia ser um eixo”. Perguntamos, então, “Por que não é um eixo?”. Alguns discentes responderam: “Porque não é igual”, “não é simétrico, a sobreposição não coincide”.

Em seguida, propusemos aos discentes que observassem uma nova construção (figura 35) no geoplano virtual. Novamente, ‘provocamos’ os discentes, a partir de uma discussão norteada por perguntas, como: “Elas têm a mesma forma? E o mesmo tamanho?”. Os alunos responderem afirmativamente.

Figura 35: Terceira construção compartilhada com os discentes



Fonte: elaborado pela autora (2021)

Depois disso, perguntamos: “Compare a posição que essas duas figuras se encontram em relação à linha vermelha. O que você observa? Uma figura é o reflexo da outra em relação à linha vermelha?” Inicialmente, alguns alunos responderam que “sim”. Entretanto, o discente Luca, pensando na sobreposição, foi ao quadro e mostrou que não coincidiria. Luca propôs mudanças que, a seu ver, precisariam ser realizadas para que a linha vermelha fosse um eixo de simetria. Após projetar as alterações propostas pelo discente, ele (figura 36) destacou: “ter o mesmo formato e o mesmo tamanho não garante que é eixo de simetria”. Em resposta, seus pares comentaram: “faz sentido”, “nossa, verdadee!”.

Assim, o grupo presente concluiu, então, que se dobrássemos a malha na linha vermelha, veríamos que as duas imagens da figura (36) se sobreporiam e coincidiriam, ou seja, estabeleceu-se como entendimento que uma imagem era reflexo da outra em relação à linha vermelha.

Figura 36: Luca explicando a noção de eixo de simetria no quadro



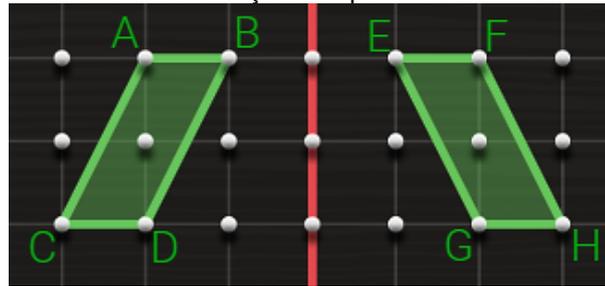
Fonte: acervo da autora (2022)

Acerca das possibilidades pedagógicas do geoplano, concordamos com Fioreze et al (2013, p.268) segundo os quais “O uso dos recursos digitais para a aprendizagem dos conceitos de Matemática abre um leque de possibilidades para o planejamento das atividades do professor”. Nesse sentido, com vistas ao desenvolvimento do trabalho com simetria, destacamos que o mesmo viabiliza a duplicação de figuras e depois permite que a mesma seja movida, refletida e girada. Assim, por exemplo, após duplicar uma figura, o aluno pode movê-la e sobrepô-la à outra figura para verificar se são duas figuras simétricas. Entretanto, na oficina, não usamos, inicialmente, essa opção uma vez que nos concentramos na movimentação dos ‘elásticos’, ou seja, deixamos os estudantes moverem os ‘elásticos’ (virtuais) realizando as alterações necessárias.

Cabe acrescentar que aproveitamos a discussão anterior para destacar que se duas imagens são o reflexo uma da outra e se esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há simetria de reflexão e a linha é seu eixo de reflexão ou ainda que as figuras são simétricas.

Logo após essa síntese, apresentamos uma nova construção (figura 37) no geoplano e perguntamos aos alunos: “Se dobrássemos a malha na linha vermelha, as duas figuras se sobreporia e coincidiriam?”. Um discente respondeu: “sim... as figuras estão espelhadas”.

Figura 37: Quarta construção compartilhada com os discentes



Fonte: elaborado pela autora (2022)

Em seguida, iniciamos uma discussão tendo como referência a figura (37) com objetivo de levar os discentes a localizarem os vértices correspondentes dos quadriláteros ABDC e FEGH e a ponderarem sobre a relação desses vértices com a noção de simetria. Para isso, destacamos novamente a distância entre dois pontos consecutivos seria adotada como unidade de comprimento e, em seguida, perguntamos aos alunos: “Qual a distância do vértice A à linha vermelha?”. Nesse momento, José respondeu: “seriam dois traços... duas unidades”. Os alunos demonstraram concordar com a afirmação do colega. Iniciou-se, então, um diálogo com os alunos, cujo excerto está transcrito abaixo:

Licencianda: E qual é a distância do vértice F à linha vermelha?

Alunos¹²: Duas unidades também.

Licencianda: E a distância do vértice B ao eixo?

Alunos: Uma unidade.

Licencianda: E a distância do vértice E à linha vermelha?

Alunos: Uma também.

Licencianda: E a distância do vértice D à linha vermelha?

João: Quatro... Não... Três?

José: Duas... duas. Do ponto D até o eixo?

João: A porque conta é assim [faz um gesto na horizontal com a mão], né fessora?

Licencianda: Queremos a distância do ponto D até o eixo.

João: Ahh, é duas mesmo.

Licencianda: E a distância do vértice G à linha vermelha?

Alunos: Duas.

Licencianda: E a distância do vértice C à linha vermelha?

Alunos: Três unidades.

Luca: Ambos têm distância igual... É... No, no eixo de simetria.

Transcrição de diálogo durante a oficina em 02/06/2022

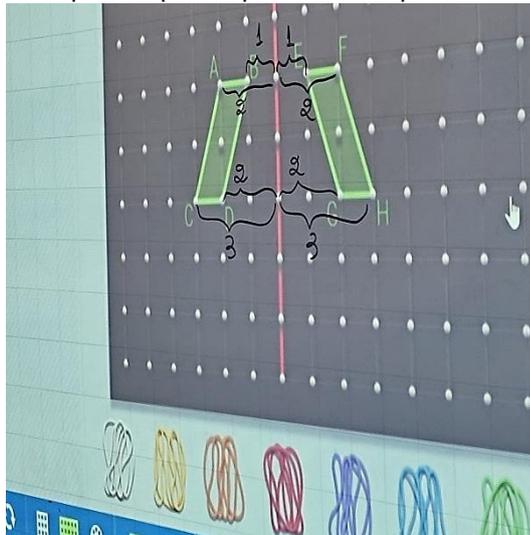
Após a afirmação do Luca, alguns alunos concluíram que a distância do

¹² Nos referimos a ‘alunos’ pois foram vários alunos que responderam, em coro, “duas unidades também”. Entretanto, vale ressaltar que nem todos os alunos responderam à questão.

vértice H até o eixo também era três unidades de comprimento e, para refletir e encaminhar para uma conclusão, perguntamos aos alunos: “O que podemos concluir em relação à distância dos vértices correspondentes à linha vermelha? O que você tinha falado Luca?”. Luca, então, explicou para a turma que “a distância dos pontos é igual... A distância do ponto C e do ponto H até o eixo são três unidades de comprimento... Os pontos que estão a uma mesma distância do eixo vão se sobreporem quando dobrarmos a figura no eixo”.

Aproveitamos o momento para destacar que os pontos que coincidem quando a figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria são chamados de correspondentes ou simétricos em relação ao eixo. Na ocasião, realizamos alguns destaques no quadro sobre a projeção (figura 38). Parte dos discentes concluiu, então, que os pontos A e F são correspondentes, que o ponto E é correspondente do B, que C e H são pontos correspondentes e, por último, os pontos D e G.

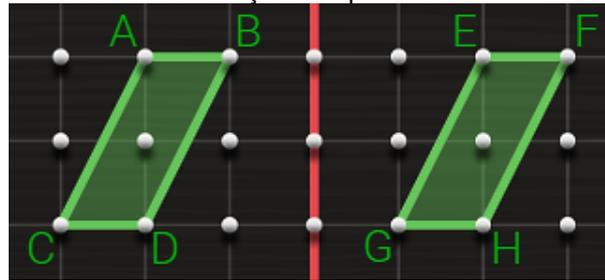
Figura 38: Destaque no quadro para ilustrar que a distância era igual



Fonte: acervo da autora (2022)

Com vistas a dar prosseguimento à oficina, apresentamos a figura (39) e perguntamos aos discentes: “essas figuras são simétricas por reflexão?”. Iniciou-se, então, uma discussão entre os discentes, na qual, foram produzidas diversas respostas, dentre as quais destacamos: “não”, “elas estão do mesmo lado”, “uma delas não está invertida”, “olha fessora, porque do ponto B ao eixo tem uma unidade e do ponto E ao eixo tem dois”, “Do ponto A ao eixo também professora, que está há duas unidades do eixo, mas o ponto F está há três unidades (figura 39)”.

Figura 39: Quinta construção compartilhada com os discentes

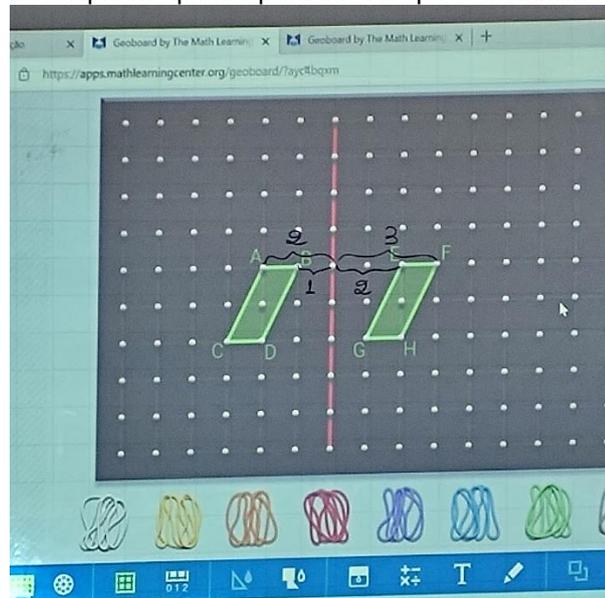


Fonte: elaborado pela autora (2022)

A partir do debate que se estabeleceu a partir das respostas antes destacadas, alguns alunos mencionaram que os vértices correspondentes não estavam a uma mesma distância da linha vermelha e, conseqüentemente, se dobrássemos a malha na linha vermelha, as duas figuras não se sobreporiam e não coincidiriam, concluindo, então, que uma imagem não era o reflexo da outra, ou seja, que elas não seriam simétricas por reflexão¹³.

Assim, para evidenciar que a distância dos vértices dos dois quadriláteros à linha vermelha era diferente, realizamos, no quadro, sobre a projeção, alguns destaques como se pode verificar na figura (40).

Figura 40: Destaque no quadro para ilustrar que a distância era diferente

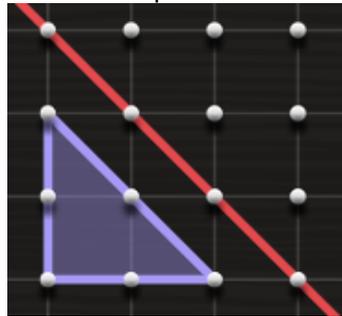


Fonte: acervo da autora (2022)

¹³ Cabe destacar que até o momento das oficinas, os estudantes não possuíam contato com outros tipos de simetria e que, no contexto da aula, a ideia de simetria construída limitava-se à simetria de reflexão. Cabe ressaltar ainda que as imagens que aparecem na figura 40, embora não simétricas por reflexão, são simétricas a partir de uma translação.

Para a atividade que se sucedeu, solicitamos que algum estudante se voluntariasse para realizá-la no quadro. Então, diversos discentes se dispuseram e para resolver tal questão, eles se organizaram, entraram em consenso sobre quem seria a/o primeiro e indicaram assim o aluno João. Em seguida, apresentamos a figura (41) ao discente voluntário e propusemos que ele construísse, com a ajuda de seus pares, uma figura simétrica à figura roxa em relação ao eixo de simetria traçado.

Figura 41: Atividade apresentada ao aluno João



Fonte: elaborado pela autora (2022)

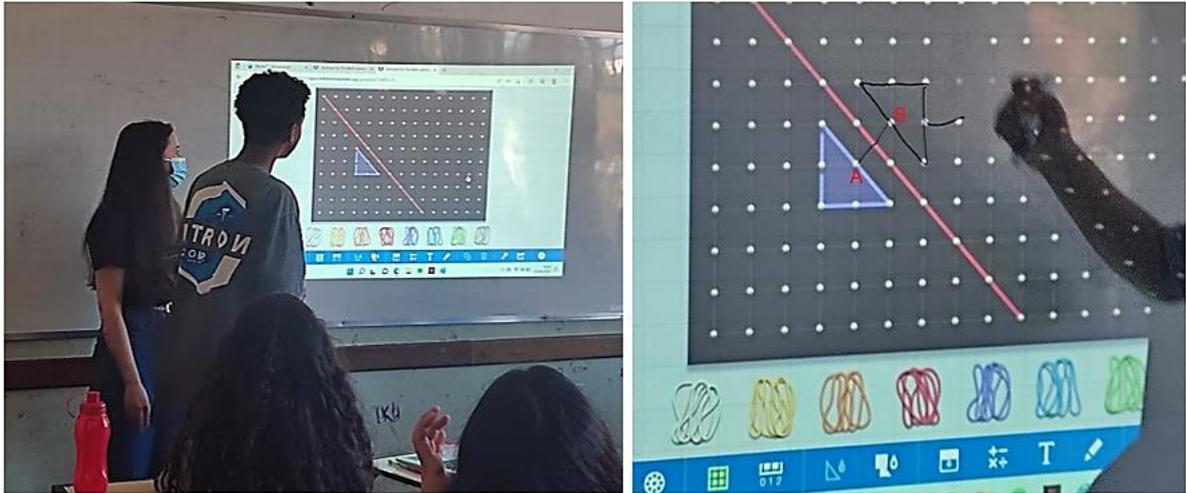
Tão logo a atividade foi proposta, parte dos alunos começou a ponderar sobre o fato de que os vértices da nova figura (correspondentes aos do triângulo roxo) precisavam estar a uma mesma distância do eixo (linha vermelha). Nesse momento, alguns estudantes apresentaram dificuldade em dizer qual era a distância dos vértices do triângulo original até o eixo. A nosso ver, o conceito de *configuração geométrica* (PAIS, 2000) ajuda a entender essa dificuldade. Assim como o autor:

Entendemos por configuração geométrica um desenho com as seguintes características: ilustra um conceito ou uma propriedade, possui fortes condicionantes de equilíbrio e trata-se de um desenho encontrado com relativa frequência no contexto do ensino e da aprendizagem escolar. Há uma espécie de tradição, influenciada tanto pelo senso comum como pelos saberes escolares, de preservação dessa forma particular de representação (...) em todos os casos envolvendo uma configuração, a fixação de uma posição particular pode tornar-se em um obstáculo adicional para a expansão da aprendizagem do conceito correspondente (PAIS, 2000, p.4-5)

No nosso caso, em particular, consideramos que as dúvidas dos alunos, ainda que em parte, tenham relação com o fato de o eixo não ter sido apresentado nas posições canônicas (horizontal e vertical), posições essas comumente encontradas nos problemas e exercícios envolvendo simetria.

Nesse contexto de dúvidas e ponderações, João desenhou (figura 42) com o pincel um esboço da figura que ele e parte dos colegas queriam construir no geoplano.

Figura 42: Esboço de João



Fonte: acervo da autora (2022)

Assim, tendo o esboço de João como referência, perguntamos aos alunos se poderíamos considerar qualquer “distância” entre o ponto A e o eixo de simetria. A partir das trocas que estabelecemos, acordamos que não se poderia considerar “qualquer” linha para caracterizar a distância, mas, que a linha indicativa da distância precisava ser perpendicular ao eixo.

Esse acordo que foi por nós mediado se valeu das ideias que encontramos em Nasser, Souza e Pereira (2004, p.3), segundo os quais, quando refletimos uma figura, “os pontos que coincidem quando a figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria são chamados de correspondentes ou simétricos em relação ao eixo”. Os autores ainda acrescentam:

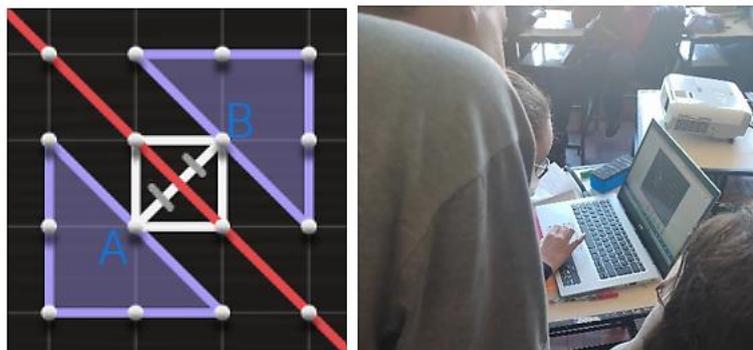
- A linha que une cada par de pontos simétricos é perpendicular ao eixo de simetria;
 - Dois pontos simétricos estão à mesma distância (perpendicular) do eixo de simetria.
- Estas condições são essenciais para a identificação de eixos de simetria. Portanto, devem ser fixadas por meio de diversos exercícios. (NASSER; SOUZA; PEREIRA, 2004, p.3).

A partir dessa atividade e da pergunta que foi proposta, emergiu uma discussão relacionada com a dificuldade dos alunos em caracterizar as distâncias dos pontos do triângulo até o eixo de simetria. Pensando nisso, mediamos uma

discussão com vistas a produzir entendimentos acerca de características da relação da linha que une os pontos A e B com o eixo de simetria.

Além disso, outra discussão se instalou quando, a partir do que havíamos conversado, começamos a refletir se a distância do ponto A até o eixo de simetria era igual a distância do ponto B ao eixo. Alguns alunos comentaram: “sim, é a mesma”, “é meio...”. João acrescentou: “é metade, tipo, se a gente dobrar esse quadradinho (figura 43) no eixo, os pedaços vão coincidir”. Para enriquecer o debate, demos destaque à argumentação de alguns alunos que, para justificar o fato de as distâncias serem iguais, apoiaram-se no quadrado que João construiu no geoplano, quando perceberam que linha que ligava A e B era a diagonal¹⁴ do mencionado quadrado.

Figura 43: Registros produzidos para discorrer sobre a simetria dos triângulos

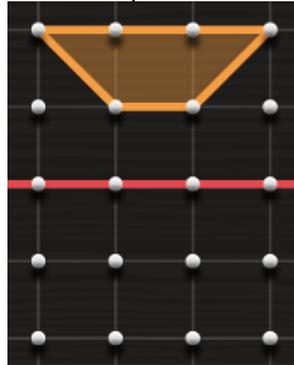


Fonte: acervo dos autores (2022)

Depois que João voltou para seu lugar, outro voluntário, o discente José foi até o quadro. O estudante, então, foi desafiado, com a ajuda dos colegas, a construir uma figura simétrica à figura laranja em relação ao eixo de simetria traçado (figura 44).

¹⁴ Na oficina três, que será apresentada adiante, essa ideia de que as diagonais do quadrado são eixos de simetria, será abordada com mais detalhe.

Figura 44: Atividade apresentada ao aluno José



Fonte: elaborado pela autora (2022)

Acerca de José, antes mesmo de o estudante ponderar sobre a simetria, notamos que, nessa atividade, ele sentiu dificuldade em mover os elásticos usando o touchpad¹⁵, razão pela qual foi preciso auxiliá-lo (figura 45).

Figura 45: Licencianda auxiliando José no uso do touchpad



Fonte: acervo da autora (2022)

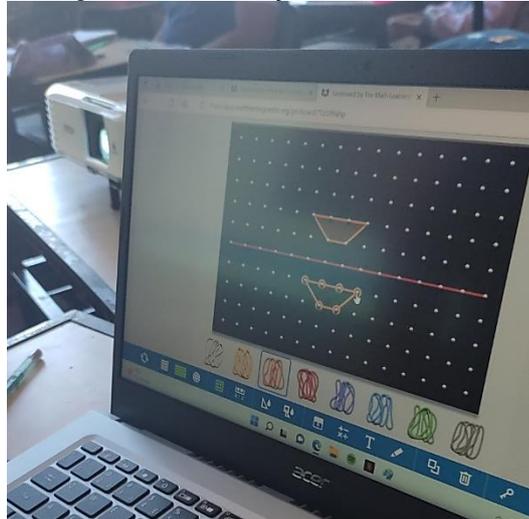
Após algumas tentativas, o discente conseguiu construir a figura, entretanto, consideramos que uma alternativa que poderia ter nos ajudado na gestão do tempo seria ter levado um mouse 'típico' para a oficina, pois o manuseio poderia ter sido mais fácil para os alunos que não estão familiarizados com notebooks e/ou outros equipamentos semelhantes.

Ainda em relação à atividade realizada por José, notamos que, inicialmente, o aluno construiu um trapézio idêntico (porém deslocado abaixo do eixo), como

¹⁵ Mouse do notebook.

registrado na figura (46), no entanto, antes de concluir, comentou: “preciso inverter a figura”.

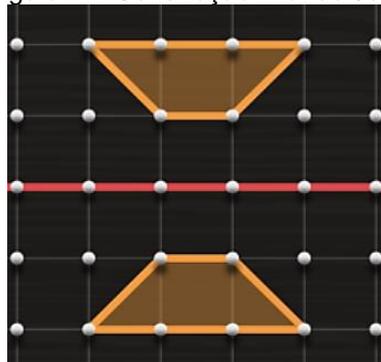
Figura 46: Construção inicial de José



Fonte: acervo da autora (2022)

Após fazer as alterações (figura 47), discutimos com os estudantes se os trapézios (figura 47) eram simétricos em relação ao eixo de simetria proposto. Para argumentar em defesa de que tais trapézios eram simétricos, os alunos mostraram que as distâncias dos pontos correspondentes até o eixo de simetria eram iguais.

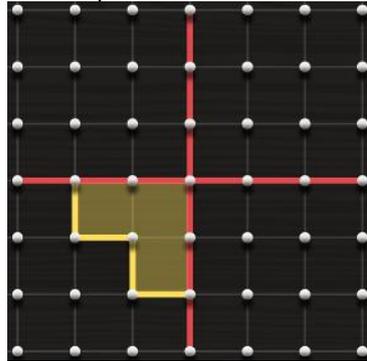
Figura 47: Construção final de José



Fonte: Acervo da autora (2022)

Na sequência da oficina, foi proposta uma atividade por meio da qual esperava-se que os discentes completassem a imagem (figura 48) refletindo as partes da figura em relação aos eixos de simetria dados. Para isso, enquanto um aluno guiava a construção no quadro a partir das sugestões de seus pares, outro discente realizava a construção no geoplano, pelo computador.

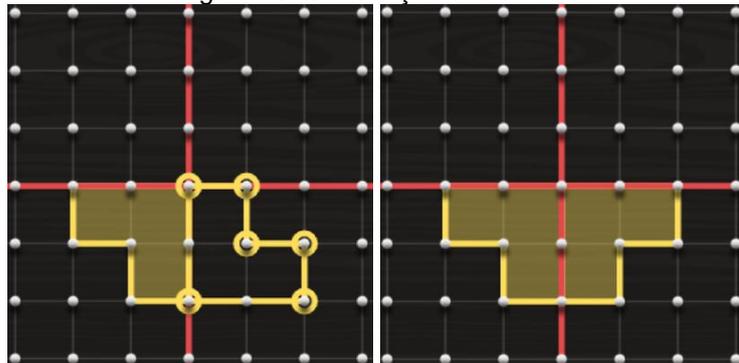
Figura 48: Atividade apresentada aos alunos Sophia e João



Fonte: elaborado pela autora (2022)

Inicialmente, Sophia realizou a construção (a) da figura (49) e alguns estudantes comentaram: “Tá ao contrário, Sophia!”, “precisa inverter a sua construção”, “tá quase lá...”. Sophia, concordando com as sugestões de seus pares, realizou algumas movimentações com o elástico (virtual) e chegou ao resultado da construção (b) da figura (49). Nesse momento, os alunos festejaram junto à Sophia, enunciando, em coro, um som que expressava felicidade pela conquista da aluna: “Aeeehhh...”. Cabe destacar que, momentos como esse, no qual estudantes comemoravam a “vitória” de um ou de uma colega após realizarem a construção considerada correta, aconteceram várias vezes durante a aplicação das oficinas. A nosso ver, esse acolhimento coletivo por parte dos próprios estudantes foi fundamental para que os alunos não ficassem desestimulados quando cometiam algum ‘erro’.

Figura 49: Construção dos alunos

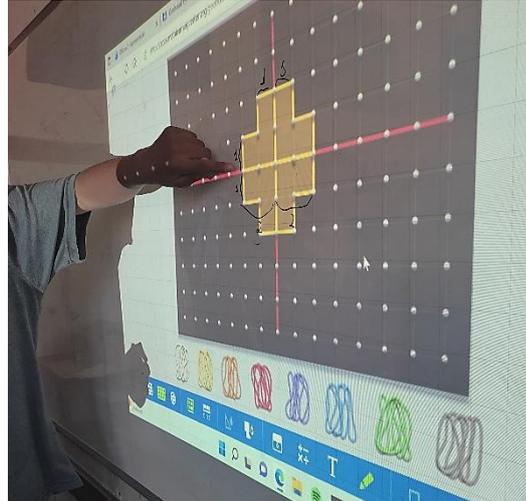


Fonte: elaborado pelos discentes (2022)

Ainda, prosseguindo na realização da atividade, outra aluna se voluntariou para completar o restante da figura. Novamente, após a construção, os alunos festejaram: “Aeeehhh [palmas]”, “Uhuuuul”, “Muito bom”. Após concluída a construção, alguns discentes foram ao quadro (figura 50) para justificarem o motivo

pelo qual a construção que fizeram estaria correta. Inicialmente, simularam com gestos que, ao dobrarmos a imagem nos eixos, as quatro partes das figuras coincidiriam. Em seguida, para consolidarem essa afirmação, verificaram, como mostra a figura (50), que as distâncias dos vértices correspondentes até o eixo eram iguais.

Figura 50: Aluno no quadro argumentando em defesa da ideia apresentada



Fonte: acervo da autora (2022)

Essa disposição dos alunos em ir ao quadro, em debater as ideias entre si, em discutir a adequação ou não da construção realizada, notada nas oficinas um e dois, nos mostrou, de um lado, o que nos pareceu uma potencialidade do geoplano virtual. Referimo-nos ao fato de essa ferramenta, além de possibilitar que as figuras fossem construídas e movidas com facilidade, possibilitava aos alunos vislumbrarem, por meio da malha quadriculada formada pelos pontos, que as distâncias entre os pontos correspondentes eram iguais. De outro lado, também nos mostrou que a dobradura realizada na oficina um, criou ensejo para argumentação sobre as distâncias dos pontos correspondentes. A questão é que notamos que os alunos gesticularam simulando uma 'dobradura' imaginária, assim como as que fizemos nos triângulos, ao tentarem visualizar como ficaria a sobreposição se dobrassem a imagem no eixo de simetria, para justificar a simetria de reflexão.

Essa defesa tanto das dobraduras quanto do uso do geoplano virtual encontra respaldo em Nasser, Souza e Pereira (2004) que ressaltam:

Para a realização das atividades propostas em sala de aula, é recomendado o uso de instrumentos de desenho, papel transparente e para dobrar ou

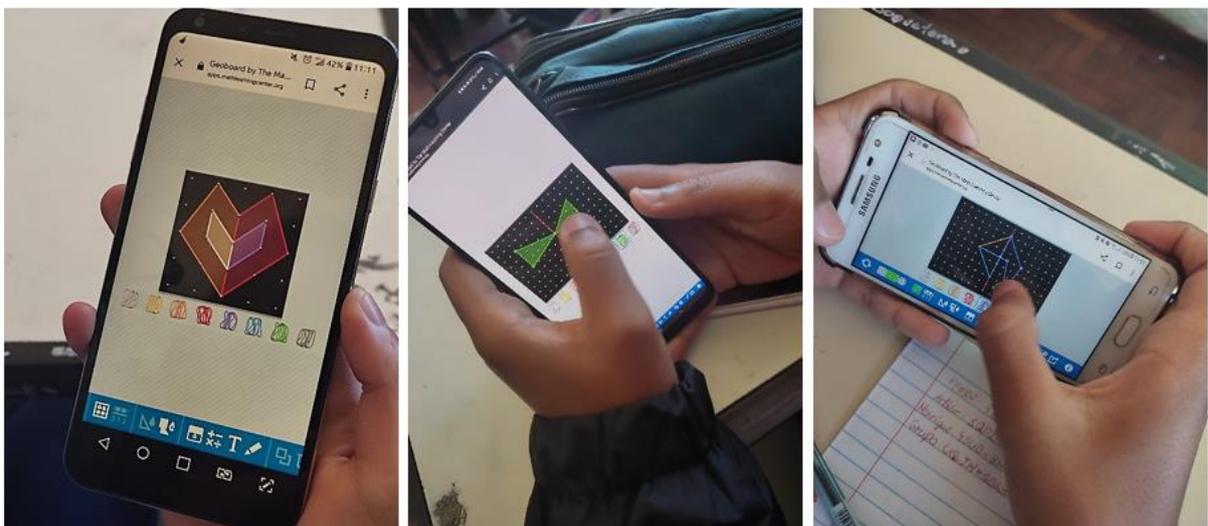
recortar. Não se deve, no entanto, deixar de considerar a possibilidade cada vez maior de o professor usar o computador em sala de aula. Os softwares de geometria dinâmica são um excelente recurso para que os alunos possam construir os conteúdos de geometria. Mas este recurso não substitui os outros mencionados (NASSER; SOUZA; PEREIRA, 2004, p.2).

Concluída essa primeira parte da oficina, solicitamos aos alunos que acessassem o geoplano virtual nos próprios celulares. Dos 36 alunos presentes, 5 (cinco) alunos não tinham acesso à internet e/ou não tinham um celular para uso no momento. Esses alunos usaram o notebook da licencianda para explorar o geoplano virtual. Após acessarem o geoplano, propusemos que realizassem uma construção 'livre' desde que respeitadas as duas seguintes regras: i) deveriam usar quaisquer funcionalidades do geoplano virtual; ii) a construção deveria envolver simetria de reflexão.

Os estudantes, então, não apenas concordaram com a proposta como também fizeram desse, um momento de muita descontração, no qual realizaram as mais variadas construções. Além dos registros em fotos, salvamos as construções para que, posteriormente, pudéssemos realizar uma análise mais cuidadosa das produções dos discentes.

A seguir, compartilhamos algumas imagens (figura 51) dos alunos explorando o geoplano na sala de aula.

Figura 51: Registro do uso do geoplano virtual nos celulares



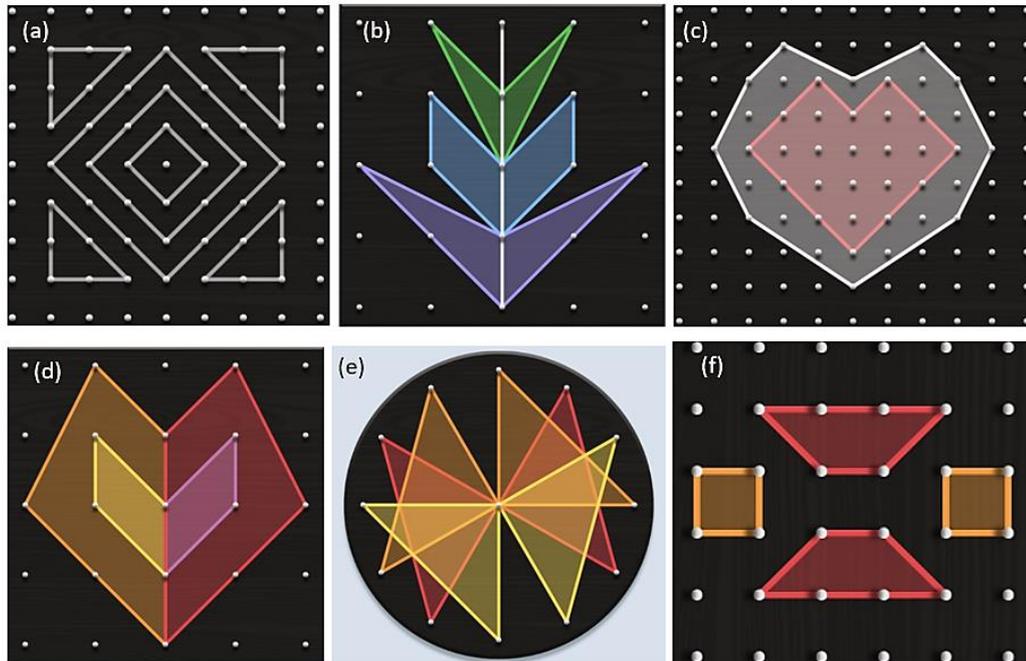


Fonte: acervo da autora (2022)

Para a análise dessas construções, separamos as imagens em três grupos. No primeiro, colocamos as construções que, a nosso ver, respeitaram o conceito de simetria de reflexão. No segundo, colocamos as imagens nas quais reconhecemos uma certa compreensão de simetria de reflexão, mas que, por algum detalhe, evidenciaram algum equívoco que consideramos 'sutil'. Por último, no grupo três, colocamos uma imagem na qual não conseguimos identificar simetria de reflexão.

A seguir, na figura (52), compartilhamos algumas construções do grupo um. Nessas construções, observamos que os alunos exploraram vários recursos do geoplano, usando malhas, cores e figuras distintas. Observamos também que alguns discentes, construíram figuras que apresentavam mais de um eixo de simetria, como as construções (a), (e) e (f) da figura (52). Outros, optaram por construir figuras com um eixo de simetria apenas, como as construções (b), (c) e (d) da figura (52).

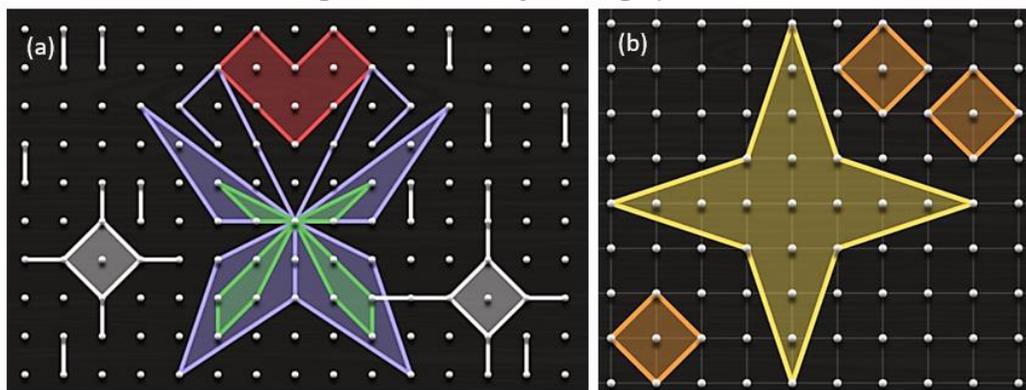
Figura 52: Construções do grupo um



Fonte: acervo da autora (2022)

Já na figura (53), estão algumas construções do grupo dois. Na construção (a) da figura (53), reconhecemos que o aluno ou a aluna tinha uma certa compreensão de simetria de reflexão, pois teria um eixo de simetria caso fossem feitas pequenas alterações nos elásticos. O mesmo ocorre na construção (b), que inclusive, a depender das alterações, teria mais de um eixo de simetria.

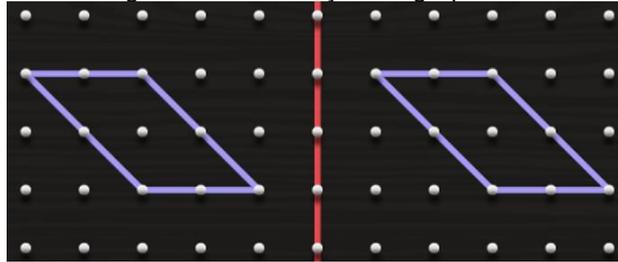
Figura 53: Construções do grupo dois



Fonte: acervo da autora (2022)

Apenas a construção da figura (54) foi para o grupo três. Nela, o discente, apesar de construir figuras simétricas por translação, não respeitou o critério da simetria de reflexão.

Figura 54: Construção do grupo três



Fonte: acervo da autora (2022)

Em síntese, para nós, as discussões construídas nessa oficina, revelaram que alguns aspectos do conceito de simetria de reflexão, no decorrer das atividades, foram sendo apreendidos pelos discentes. Por exemplo, durante o uso do geoplano, os alunos foram instigados a observar que figuras simétricas mantêm inalteradas as distâncias entre seus pontos e o eixo de simetria.

Ainda sobre essa oficina recorreremos a Pais (1996) para ressaltar a importância de uma ‘manipulação crítica’ dos objetos. Assim como o autor, entendemos que:

Devido a sua natureza particular e concreta, esses objetos permitem uma relativa facilidade de manipulação no transcorrer de atividades visando a aprendizagem. Entretanto, faz-se necessário salientar que esta manipulação não pode limitar-se a uma simples atividade lúdica. Não se trata, aqui, da manipulação de objetos defendida na educação pré-escolar cuja finalidade não está voltada diretamente para uma aprendizagem formal. O significado que lhe é conferido é análogo à *experiência raciocinada* descrita por BROUCHE (1989), o qual associa necessariamente à manipulação física do objeto uma atividade intelectual que estabeleça uma relação dialética efetiva entre teoria e prática (PAIS, 1996, p.67).

Assim, em suma, vimos que a oficina dois revelou que, ao utilizarem o geoplano virtual, os estudantes trabalharam aspectos caros ao ensino de geometria, tais como: intuição, exploração, investigação, argumentação, dentre outros. Sendo assim, consideramos que o modo que o geoplano virtual foi utilizado, contribuiu com o desenvolvimento dos estudantes no sentido de se apropriarem de aspectos relacionados ao conceito de simetria de reflexão, avançando analiticamente na sua compreensão. Assim, caminharam de uma ideia intuitiva e puderam sistematizar propriedades geométricas envolvidas.

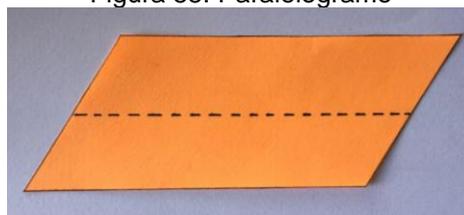
5.3 Desenvolvimento e análise da oficina 3

Por meio da terceira oficina, exploramos o conceito de simetria de reflexão com o uso de espelhos planos e da malha quadriculada. Com ela, nossa intenção foi, a partir das discussões e dos recursos citados acima, contribuir com os discentes de modo que eles pudessem desenvolver seus entendimentos sobre simetria de reflexão. Para tanto, inicialmente, recapitulamos os pontos principais das duas oficinas anteriores realizando uma síntese.

Antes de tudo, apresentamos um trapézio isósceles, à guisa de exemplo, e perguntamos aos alunos: “Que figura é essa?”. Alguns estudantes responderam: “trapézio”. Dando sequência, acrescentamos: “Olhando para o trapézio, vocês conseguem dizer se ele tem eixo de simetria?”. Após observarem a figura por alguns instantes, alguns discentes responderam: “sim”, “no meio”. Posicionamos, então, o espelho perpendicularmente ao eixo apresentado pelos discentes e perguntamos: “O que vocês observam?”. Dentre as respostas, uma se destacou: “está refletindo a realidade”. A aluna, em questão, observou que a imagem refletida no espelho era igual à imagem que se encontrava ‘atrás’ do espelho.

Em seguida, os alunos foram divididos em trios e entregamos, para cada grupo, um espelho e uma figura plana (figura 55) com uma linha pontilhada desenhada nela. Solicitamos, então, que colocassem o espelho perpendicularmente à linha e observassem se a imagem que se formava completava a original.

Figura 55: Paralelogramo

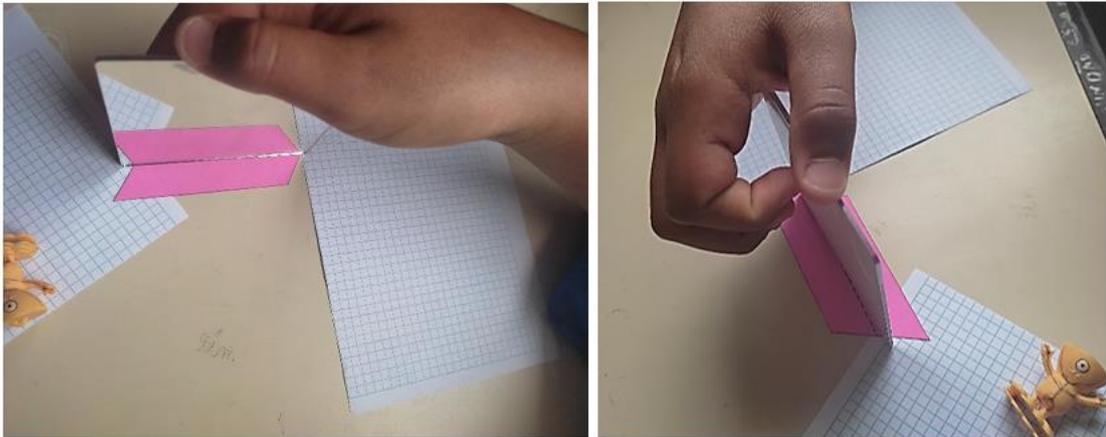


Fonte: acervo da autora (2022)

Vale destacar que alguns alunos, nesse momento, não só analisaram a linha pontilhada que propusemos como também começaram a movimentar o espelho sobre o paralelogramo com o intuito de encontrar eixos de simetria. Após a experimentação, uma estudante comentou: “O paralelogramo não tem eixo de simetria”. Curiosos sobre o que o restante da turma pensava sobre isso, perguntando aos discentes: “Alguém conseguiu encontrar algum eixo de simetria no paralelogramo?”. Os alunos responderam que “não”. Perguntamos, então, aos discentes: “Agora voltando ao problema inicial, a linha pontilhada é eixo de

simetria?”. Novamente, registramos diversas respostas dos alunos, dentre as quais destacamos: “não”, “a parte espelhada está diferente”, “não forma o paralelogramo”.

Figura 56: Estudante em busca de eixo de simetria no paralelogramo



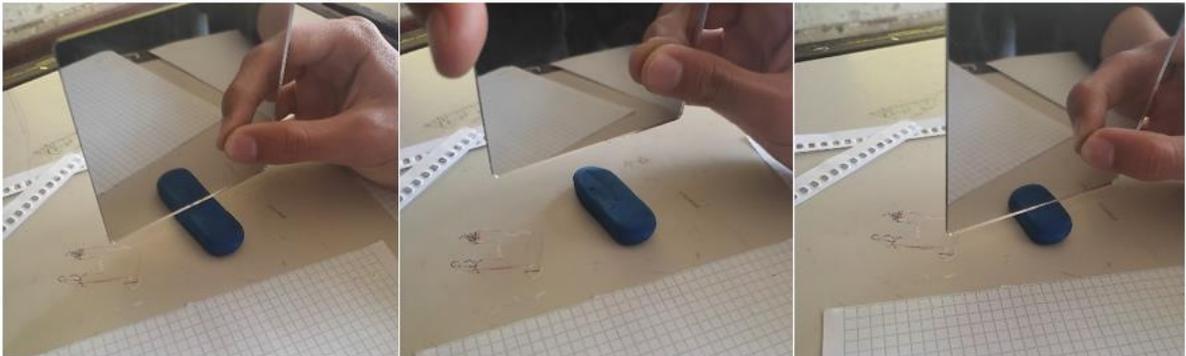
Fonte: acervo da autora (2022)

Nessa atividade, ao contrário do exemplo anterior, os discentes observaram que a imagem refletida no espelho era diferente do que se encontrava ‘atrás’ do espelho, ou seja, de acordo com eles, a imagem que se formava era diferente da de um paralelogramo, gerando, figura e imagem, algo distinto do paralelogramo original. Durante essa discussão, um aluno compartilhou com os colegas: “se dobrar não vai ficar igual”. Ele mostrou aos colegas que, ao dobrar o paralelogramo na linha pontilhada, as duas partes não coincidem. O aluno ainda acrescentou: “não vai ficar igual, fica sobrando dos dois lados”.

No segundo momento da oficina, o objetivo era que os alunos usassem, também, a malha quadriculada. Para isso, distribuimos as folhas para os alunos e solicitamos que desenhassem, na malha quadriculada, um quadrado de dimensões 10 cm por 10 cm e um retângulo de dimensões 14 cm por 8 cm. Após desenharem, propusemos que colocassem o espelho de modo perpendicular a uma das diagonais do quadrado e observassem o que estava acontecendo. Após alguns instantes, um discente comentou: “está refletindo a mesma coisa que tem do outro lado”. Iniciou-se, então, uma discussão entre os alunos, da qual, foram produzidas respostas como: “verdade”, “ficou igual ao quadrado”, “se tirar o espelho fica igual”, “a gente observou que a diagonal é eixo do quadrado”, “as diagonais são eixo de simetria, porque está refletindo o mesmo lado”, “percebemos que reflete a realidade, que reflete certinho, faz outro quadrado”.

Após as ponderações acima, um aluno comentou: “se mexermos no espelho vai formando uma forma nova, tem como mudar a forma dele”. Seu parceiro de grupo acrescentou: “tipo, tem pontos de simetria que se você mexer o espelho vai formando uma forma nova, sabe? A gente até testou na borracha”. Os alunos mostraram que a depender de onde colocavam o espelho, formava uma borracha maior ou menor como mostra a figura (57).

Figura 57: Aluno e o teste de uma hipótese

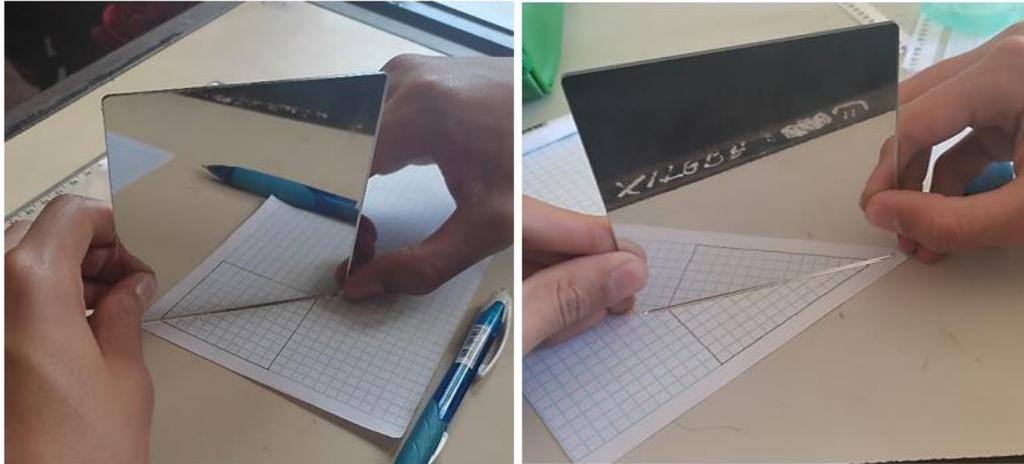


Fonte: acervo da autora (2022)

Abrimos um parêntese para realização de alguns destaques a partir dessas experimentações dos estudantes. Um deles é que temos a consciência de que as experimentações tem seu valor, a despeito de ‘não provarem’ a existência (ou não) dos eixos de simetria. Afinal, concordamos com Pais (1996, p.73) sobre ser “... necessário destacar ainda que as demonstrações, mesmo em se tratando de um raciocínio lógico e intelectual, tem sua formalização precedida de ensaios intuitivos e/ou experimentais que acabam não aparecendo em sua redação final”.

Realizado o parêntese, destacamos que, no prosseguimento da oficina em questão, recomendamos que os discentes repetissem o mesmo procedimento no retângulo e iniciamos uma discussão norteada pelas seguintes perguntas: “O que vocês observaram? O que aconteceu de diferente quando colocaram o espelho perpendicular à diagonal do retângulo? O que podemos concluir?”.

Figura 58: Teste de simetria nas diagonais

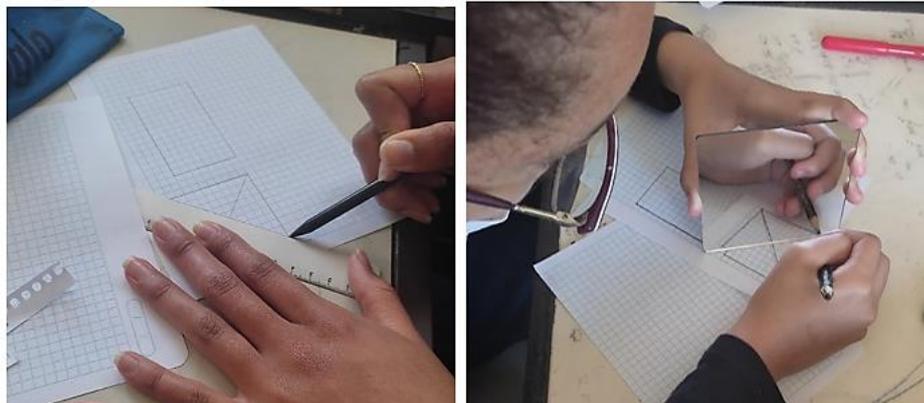


Fonte: acervo da autora (2022)

Após colocarem o espelho perpendicularmente a uma das diagonais do retângulo e observarem o que estava acontecendo, uma aluna comentou: “não forma um retângulo”. Iniciou-se, então, uma discussão entre os estudantes, na qual, foram produzidas respostas, como: “não dá certo”, “no espelho mostra uma coisa, só que na realidade é diferente”, “é diferente da realidade, aí tá simétrico, mas atrás do espelho não é igual”, “A diagonal não é eixo de simetria então, né?”. Nesse momento, os alunos observaram que a imagem que se formava quando colocávamos o espelho de modo perpendicular à diagonal, era a de um quadrilátero, mas que esse quadrilátero não era um retângulo.

Cabe ressaltar que alguns alunos, durante a atividade, movimentaram o espelho pelo retângulo e pelo quadrado na tentativa de encontrar eixos de simetria. Propusemos, então, que encontrassem os eixos dos dois quadriláteros e os representassem na folha.

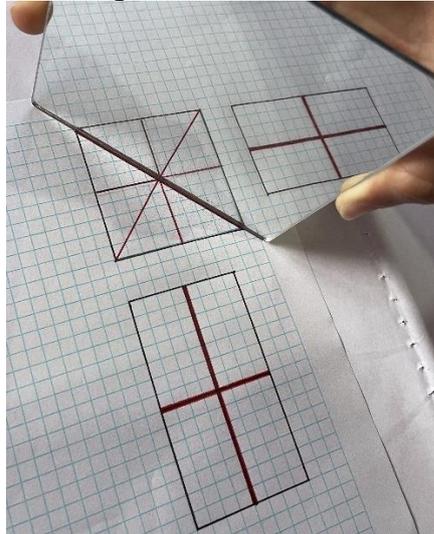
Figura 59: Discentes em busca de eixos de simetria em dois quadriláteros



Fonte: acervo da autora (2022)

Após concluírem a atividade, perguntamos aos alunos: “O quadrado tem quantos eixos de simetria? E o retângulo?”. Discutindo entre si, parte dos discentes concluiu que o quadrado tem quatro eixos de simetria e que o retângulo tem somente dois. Cabe ressaltar, todavia, que outra parte não chegou a essa conclusão. Em relação aos alunos que conseguiram chegar ao resultado esperado acerca da quantidade de eixos de simetria, uma justificativa apresentada nos chamou a atenção, qual seja, um discente afirmou que o quadrado tem dois eixos de simetria a mais que o retângulo porque é uma figura regular, ou seja, porque tem os quatro lados iguais com a mesma medida e todos os ângulos internos congruentes.

Figura 60: Registro da atividade de uma aluna



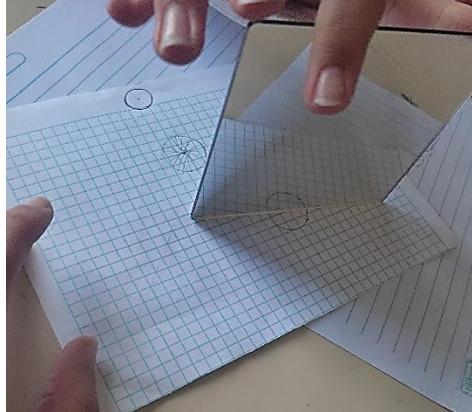
Fonte: acervo da autora (2022)

Vale destacar também que, nessa oficina, surgiram novamente questionamento sobre o círculo. Enquanto os alunos realizavam a atividade acima, uma discente chamou a licencianda até a sua mesa para compartilhar uma ideia. Iniciou-se, então, um diálogo cujo excerto está transcrito abaixo:

Alice: Quando você pega um círculo... Óh vou fazer... [pausa para desenhar o círculo] ... Quando você ‘negoça’ o círculo... Coloca o espelho nele e fica girando... Fica igual sempre...
Licencianda: Então você acha que o círculo tem muitos eixos de simetria?
Alice: Uhum, porque tem lado... Lado inifinito, né? Você vai girando, girando, fica tudo igual...
Licencianda: O espelho está passando por onde?
Alice: Pelo meio, pelo centro do círculo.

Transcrição de diálogo durante a oficina em 09/06/2022

Figura 61: Registro da Alice explorando o círculo



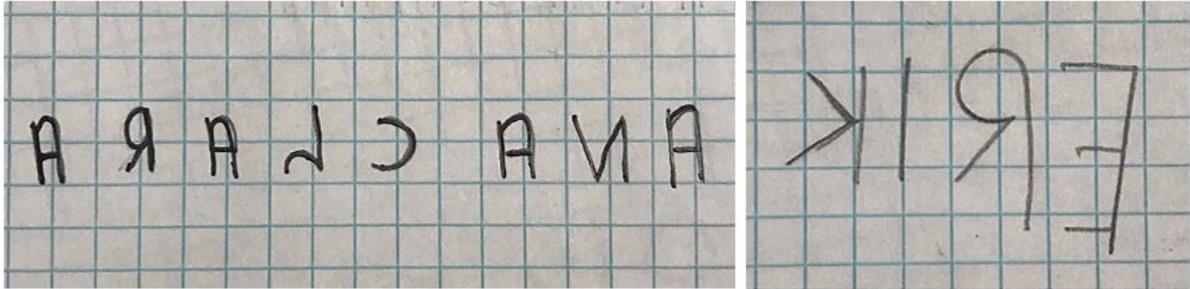
Fonte: acervo da autora (2022)

Torna-se imperativo informar que não exploramos a questão do círculo, nem atribuímos juízo do tipo ‘certo ou errado’, à afirmação da aluna. Com as oficinas, nossa intenção era criar um ambiente no qual as e os alunos, não só se sentissem à vontade para experimentar bem como pudessem propor e testar suas hipóteses.

No último momento da oficina, solicitamos aos discentes que escrevessem o próprio nome, com letra de forma, na malha quadriculada de modo que conseguissem ler corretamente a palavra escrita com auxílio do espelho. Após realizarem a atividade, os alunos compartilharam uns com os outros o resultado e conferiram por meio do espelho se tinham alcançado o objetivo. Curiosos sobre o que os alunos pensaram para reproduzir a atividade, perguntamos aos discentes: “O que foi preciso fazer?”. Iniciou-se, então, uma discussão entre os alunos na qual foram produzidas respostas como: “Escrever de trás para frente...”, “teve que inverter as letras também”, “tem letra que não precisam ser invertidas, né? O I... o A... o M...”.

Cabe ressaltar que essas respostas sugerem que parte dos discentes tenha compreendido a inversão provocada pela simetria de reflexão ao reconhecerem que algumas letras não precisavam ser invertidas (*Tem letras que não precisam ser invertidas, né?*). Consideramos, que para afirmações mais definitivas sobre isso, seria necessário realizar uma apreciação mais a longo prazo e com instrumentos mais minuciosos. De toda forma, destacamos na figura (62), atividades realizadas acertadamente pelos estudantes.

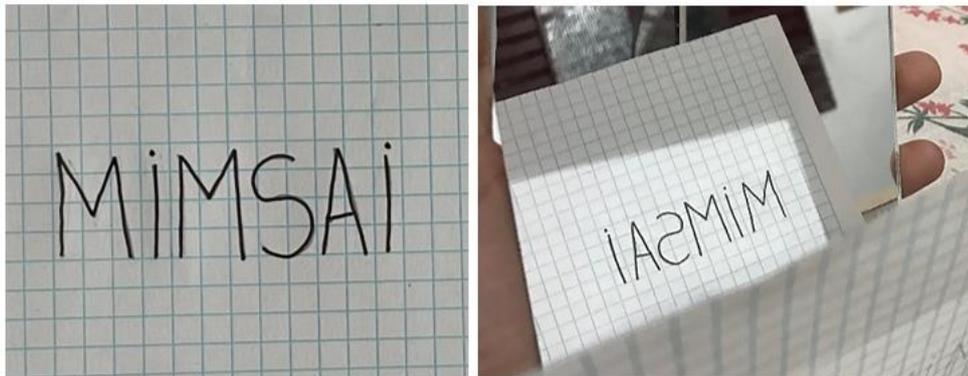
Figura 62: Nome escrito corretamente com uso do espelho



Fonte: acervo da autora (2022)

Identificamos ainda estudantes que cometeram equívoco ao escrever o nome. Por exemplo, na figura (63), apresentamos a atividade de uma aluna que escreveu o nome de trás para frente, mas não realizou a inversão das letras. Coincidentemente, as letras M, I e A não precisavam ser invertidas, então, quando olhava pelo espelho, somente a letra S evidenciava um problema.

Figura 63: Nome escrito sem a inversão das letras



Fonte: acervo da autora (2022)

Cabe acrescentar que foi nesse momento de debate, de contrastar as próprias respostas com as dos pares, que os discentes que haviam escrito o nome de trás para frente sem fazer a inversão das letras, começaram a se corrigir. Do nosso ponto de vista, isso pode indicar que começaram a compreender o equívoco. Pode também evidenciar que tendo notado que o nome não apareceu ‘como queriam’, encontraram um modo de fazê-lo, o que, conjecturamos, pode ser indício de que compreenderam, em alguma medida, a ideia de simetria.

Ainda durante o diálogo, perguntamos aos discentes: “Alguém sabe dizer por que isso é útil?”. Um aluno, nos surpreendendo, respondeu: “ambulância, ambulância é escrito assim”. Questionamos o motivo e outra aluna respondeu: “pra olhar no retrovisor”.

Acerca dessa situação apresentada pelos alunos, consideramos que por meio dela, os discentes mostraram aos demais colegas uma aplicação da simetria de reflexão no nosso cotidiano. Percebemos que eles também ficaram admirados com esse exemplo, vendo na Geometria, em nossa interpretação, uma importância que aparentemente não reconheciam antes.

Figura 64: Ambulância



Fonte: Google imagens (2022)

Ainda acerca dessa situação, parece-nos relevante compartilhar uma curiosidade. Antes de ela ocorrer, como já mencionado nesta monografia, solicitamos aos alunos que escrevessem o nome de tal forma que a leitura fosse legível através do espelho. O curioso é que a atividade que nos inspirou, destacada abaixo, relacionava-se exatamente com o contexto dos letreiros encontrados em ambulâncias.

O Corpo de Bombeiros da cidade A renovou sua frota de ambulâncias. Para facilitar a identificação dos veículos nas ruas da cidade, o chefe da corporação pediu para que fosse pintada na parte frontal das ambulâncias a palavra RESGATE. Dessa forma, qualquer motorista poderia identificar o veículo oficial através do espelho retrovisor de seu carro. De que maneira a palavra RESGATE deve ser pintada nas ambulâncias para que o motorista do carro à frente consiga ler corretamente a palavra pintada através de seu espelho retrovisor? (VIEIRA; PAULO; ALLEVATO, 2011, p.625).

Cabe acrescentar, tendo como referência o engajamento dos alunos nessas oficinas, bem como a surpresa que evidenciaram com o exemplo da ambulância que, a nosso ver, a/o discente pode valorizar mais o que está sendo ensinado a ele quando, em detrimento de ter contato com a Geometria exclusivamente a partir de fórmulas com significado pouco evidente, consegue estabelecer conexões com o seu cotidiano e quando atribui sentido pessoal para conceitos da Geometria, tendo como referência aspectos da vida 'fora da escola'.

A geometria está por toda parte”, desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la... Mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as idéias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria. (LORENZATO, 1995, p.5)

Em síntese, vimos na malha quadriculada e no espelho, uma maneira de contribuir com a concepção de simetria de reflexão dos discentes a partir da experimentação e da investigação. Cabe destacar ainda, por fim, que esse processo foi marcado pela participação efetiva dos alunos interagindo entre si e com a licencianda e também que as explorações realizadas coletivamente levaram a percepções, testes, erros e tentativa de acertos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou investigar como alunas e alunos do 9º ano do Ensino Fundamental se relacionam com o conceito de simetria de reflexão em uma sequência de oficinas.

Para tanto, inicialmente, realizamos uma revisão de literatura com vistas a localizar nosso trabalho no cenário do que já existe de produzido, dentro daquilo que conseguimos acessar, sobre o assunto. Cabe ressaltar que, além dessa localização, esse processo também contribuiu para aprofundarmos nossos estudos com a intenção de desenvolver uma sequência de oficinas que pudessem colaborar com o desenvolvimento dos processos de aprendizagem dos discentes que delas participassem.

Na investigação, depois dessa fase de estudo, elaboramos oficinas que foram detalhadamente construídas com vistas a promover engajamento dos estudantes. Vale destacar que uma preocupação era proporcionar aos alunos atividades que contemplassem não só ponderações sobre figuras simétricas a partir de exemplos, mas também que o fizessem com contraexemplos. Compete ainda destacar que em todas as oficinas, as propriedades relacionadas à congruência e conservação de distância foram abordadas, mesmo que, em certos momentos, de forma implícita.

Assim sendo, cabe realçar que produzimos uma sequência de três oficinas. A primeira abordou o conceito de simetria de reflexão, tomando como ponto de partida as noções intuitivas dos estudantes e, em seguida, promoveu o trabalho com eixos de simetria com auxílio de dobraduras. A partir da realização dessa oficina, evidenciamos a importância de se trabalhar com uma diversidade de figuras, em tamanhos, formatos e posições diferentes, assim como propõe Pais (1996).

A segunda oficina explorou o conceito de simetria de reflexão fazendo o uso do geoplano virtual. Nela, evidenciamos que o geoplano virtual pode facilitar a chance de desenhar com praticidade e precisão. Notamos também que ele pode permitir não só a movimentação e modificação das representações obtidas, como também a alteração da sua posição, de suas formas e medidas. Cabe elucidar sobre o uso do geoplano que, embora tenhamos ciência que não seja o bastante inserir esse recurso para melhorar a qualidade do ensino, defendemos que não se possa negar as diferenças que ele causa no ambiente trabalhado, sobretudo, se comparando ao ambiente estático. Nesse sentido, observamos que o geoplano

virtual possibilitou aos alunos concluírem, por meio da malha quadriculada, que as distâncias entre os pontos correspondentes em figuras simétricas são iguais, o que, a nosso ver, pode ser bem mais bem complicado em construções a mão livre. Além disso, consideramos que uma contribuição importante do nosso estudo foi apresentar, aos alunos, um recurso didático que desconheciam, qual seja, o geoplano virtual.

Já na última oficina, exploramos o conceito de simetria de reflexão com o uso de espelhos planos e da malha quadriculada. Essa oficina provocou, aparentemente, nos alunos, o desejo de não só levantar conjecturas, mas também de testá-las, como evidenciado nas reflexões trazidas pelos estudantes no exemplo da borracha e no exemplo dos eixos de simetria do círculo. Compete ressaltar que o uso do celular nessa oficina, demandado pela falta de computadores individuais, jogou luz em um aspecto sobre o qual não nos debruçamos, mas que, para o futuro, reconhecemos que pode ser abordado. Referimo-nos ao fato de um possível desdobramento do estudo realizado nesta monografia seja pensar o *Mobile Learning* no ensino de Geometria.

Cabe ainda destacar que nas três oficinas, o esforço envidado para criar um ambiente que valorizasse a participação dos alunos, pareceu contribuir para os discentes não se sentirem intimidados durante as discussões que emergiram de modo que, elas e eles parecerem confortáveis, inclusive, diante das compreensões e reelaborações que o coletivo, no ambiente investigativo, permitiu.

Assim, pois, sintetizo meu percurso monográfico e caminho para o fim deste texto, não sem antes contrastar minhas reminiscências com as experiências vivenciadas. Quando iniciei minha monografia, tinha muitas expectativas, inseguranças, muita vontade de entrar na sala de aula, ter contato com os alunos e colocar em prática as orientações recebidas durante a graduação. Mas, ao entrar na sala de aula para realizar as oficinas, me deparei com situações inesperadas e percebi que não existe nem manual nem uma 'receita pronta' para essas situações. Aprendi, na prática, que ser professora é estar preparada para lidar com diversas e inesperadas situações sem ter fórmula mágica.

Observei em minha prática que os alunos, por meio do uso de recursos manipulativos, puderam levantar hipóteses e tirar conclusões utilizando a imaginação. Observei também que as questões preparadas e estimuladas pelo

professor podem favorecer uma observação mais qualificada de características das figuras geométricas propostas.

Em outros termos, a experiência vivenciada me mostrou que o professor pode levantar questões que estimulem os alunos a, nas aulas de geometria, partirem de tarefas intuitivas e manipulativas para pensarem sobre as características (semelhanças e diferenças) das figuras geométricas. A experiência me mostrou ainda que os recursos podem auxiliar o desenvolvimento do aluno na caracterização, conceituação e identificação das figuras geométricas a partir da manipulação. Sobre isso, acredito que um diferencial das oficinas se relacionou com minha ação como mediadora, sem ter a intenção de 'depositar' conteúdo.

Por fim, acredito que os resultados obtidos, ao serem desenvolvidas as oficinas, tenham sido bastante satisfatórios. Realizo tal afirmação tendo em vista que os alunos tiveram a oportunidade de refletir sobre esse conceito, verificando sua presença em diversas situações e contextos, podendo se apropriar de um conhecimento sistematizado matematicamente e tive a oportunidade de aprender juntos com eles, refletindo sobre a minha prática.

REFERÊNCIAS

- AMÂNCIO, Roselene Alves; GAZIRE, Eliane Sheide. Atividades Experimentais e teóricas: um caminho trilhado por estudantes do quinto ano no estudo dos quadriláteros. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.11, n.6, p. 171-191, 2020.
- AMÂNCIO, Roselene Alves. **O desenvolvimento do pensamento geométrico: Trabalhando polígonos, especialmente quadriláteros**. 2013, 178 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo horizonte, 2013.
- ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. Coleção do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. 3ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.
- BARROS, Priscila Bezerra Zioto. **A arte na Matemática: contribuições para o ensino de geometria**. 2017. 206 p. Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2017.
- BILAC, C. U. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do cabri-géomètre**. 2008. 194 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.
- BORBA, Marcelo C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: **Anais da 27ª reunião anual da Anped**. Caxambu, MG: ANPEd, 2004.
- BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução nº 7, de 14 de dezembro de 2010. **Fixa Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. Diário Oficial da União, Brasília, 15 de dezembro de 2010. Seção 1, p. 34.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática**. Brasília, DF, 1998. 148p.
- BRASIL, MEC. **Base nacional comum curricular**. Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2017.
- CALDATTO, Marlova Estela; PAVANELLO, Regina Maria. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v.24, n. 1, p. 103-128, 2015.
- CERICATO, Itale Luciane. A profissão docente em análise no Brasil: uma revisão bibliográfica. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v.97, p. 273-289, 2016.
- DAMIANI, Magda Floriana et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de educação**, n.45, p.57-67, 2013.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo: SBM/SP, ano 4, n. 7, 1990.

FIOREZE, Leandra Anversa et al. Análise da construção dos conceitos de proporcionalidade com a utilização do software geoplano virtual. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 19, p. 267-278, 2013.

FONSECA, Cláudio Roberto Cavalcanti da. **Conceito de simetria em livros didáticos de matemática para o ensino fundamental**. 2013, 90 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática: Imenes & Lellis**. Coleção do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**. Coleção do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. 4ª ed. São Paulo: FTD, 2018.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, n.4, 1995.

MINAYO, Maria Cecília de Souza et al. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**, v. 21, p. 9-29. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

NASSER, Lilian; SOUZA, Geneci A de Souza; PEREIRA, José Alexandre Pereira. Explorando a geometria do ensino fundamental por meio de reflexões, translações e rotações. In: **VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, v.8, 2004, Recife. Anais... 19p. Recife: UFPE, 2004.

PAIS, Luiz Carlos. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. **Reunião da ANPED**, v. 23, p. 24, 2000.

PAIS, Luis Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. São Paulo: **Zetetiké**, v. 4, n. 6, p. 45-63, 1996.

PASQUINI, Regina Célia Guapo; BORTOLOSSI, Humberto José. O que é simetria? Diferentes usos da palavra ao longo da História da Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v.3, n.9, p. 6-17, 2016.

REIS, Ana Queli Mafalda; NEHRING, Cátia Maria. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 19, n. 2, p.339-364, 2017.

SANTOS, Heliel Ferreira dos. **Simetria e reflexão: investigações em uma escola inclusiva**. 2012. 132 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

SANTOS, Luciana Ferreira dos. **Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino da simetria e das artes visuais em livros didáticos de matemática para séries iniciais do ensino fundamental**. 2010. 216 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SANTOS, Marli Regina dos. **Pavimentações do Plano: Um Estudo com Professores de Matemática e Arte**. 2006. 177 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SILVA, Júnior Teodoro da Silva. **O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias**. 2010. 148 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.

VALENÇA, Mirella Cysneiros Landim. **Simetria de reflexão: uma análise de mediações com geometria dinâmica a distância**. 2014. 134 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

VIEIRA, Gilberto; PAULO, Rosa Monteiro; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Simetria no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. **Bolema: Boletim de educação matemática**, v. 27, p. 613-630, 2013.