



**UFOP**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
Universidade Federal de Ouro Preto

Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil  
Curso de Graduação em Engenharia Civil

---



## **COMPARAÇÃO DAS CARGAS DE COLAPSO PLÁSTICO DE ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS DE AÇO**

Ney Alves Batista Junior

Ouro Preto

2022

COMPARAÇÃO DAS CARGAS DE COLAPSO PLÁSTICO DE ESTRUTURAS  
ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS DE AÇO

NEY ALVES BATISTA JUNIOR

Trabalho Final de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto.

Data da aprovação:

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. D.Sc. Jaime Florencio Martins – UFOP

Ouro Preto

2022



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Ney Alves Batista Júnior**

### **Comparação das Cargas de Colapso Plástico de Estruturas Isostáticas e Hiperestáticas de Aço**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil

Aprovada em 27 de outubro de 2022

#### Membros da banca

[Doutor] - Jaime Florencio Martins - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)  
[Doutor] - Geraldo Donizetti de Paula - (Universidade Federal de Ouro Preto)  
[Engenheiro Civil] - Fernando Antonio Borges Campos - (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Jaime Florencio Martins], orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 09/11/2022



Documento assinado eletronicamente por **Jaime Florencio Martins, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/11/2022, às 17:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0424996** e o código CRC **1A8C0930**.

É necessário sempre acreditar que um sonho é possível,  
Que o céu é o limite e você é imbatível.  
Que o tempo ruim vai passar é só uma fase.

*Racionais MC's*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço imensamente aos meus pais, Ney e Maria, nossos corações pulsam juntos; e a cada passo e a cada linha vocês se fazem presentes. Às minhas tias, Marina (*in memoriam*) e Marisa (*in memoriam*) pelo cuidado e incentivo, - mesmo quando não acreditava. Vocês estarão sempre em meu pensamento. Ao Professor doutor Jaime Martins, um ser humano especial e atencioso com todos seus alunos.

## RESUMO

A metodologia construtiva atual se faz usual com estruturas redundantes estruturalmente para garantir segurança extra aos que a utilizarão. Na engenharia civil, se mostra significativo quantificar o ganho de resistência a cada grau de redundância estática e assim compará-los com a mesma estrutura isostática, visto que muitas vezes no dimensionamento considera-se tal situação. Devido a obras futuras e possíveis tensões geradas por retração, fluência e temperatura, é importante quantificar a resistência final de maneira teórica. Com este objetivo, o método de deslocamento e o programa FTOOL são usados para a construção dos diagramas de momento fletor e aplicá-los ao Método do Equilíbrio. O método do trabalho também foi usado para calcular as cargas de colapso plástico, bem como um comparativo entre os métodos também é nosso objetivo. Dessa maneira, pode-se calcular o percentual de aumento de resistência final para estruturas hiperestáticas, variando dessa maneira as suas seções, cargas e graus de hiperestaticidade.

Palavras-chave: Rótulas Plásticas, Hiperestaticidade, Resistência, Colapso, Aço.

## **ABSTRACT**

The current constructive methodology is usual with structurally redundant structures to guarantee extra security to those who will use them. In civil engineering, we will try to quantify the resistance gain at each hyperstatic degree and compare them with the same isostatic structure, since their design often considers such a situation. Due to future works and possible stresses generated by shrinkage, creep and temperature, we will be able to quantify the final strength theoretically. We will use the displacement method and the Ftool program to make the bending moment diagrams and apply them to the Equilibrium Method and the Displacement Method. In addition to the Tresca and Von Mises criteria for the final determination of the resistance. In this way, we will conclude the final strength increase percentage for hyperstatic structures by varying their hyperstatic sections, loads, and degrees.

**Keywords:** Plastic Kneecaps, Hyperstaticity, Resistance, Collapse, Steel.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Flecha de deformação na rótula plástica	13
Figura 2: Variação da tensão na seção transversal	14
Figura 3 : Diagrama tensão x deformação típica do aço	15
Figura 4: Rotulação plástica em viga de aço estrutural.	16
Figura 5: Curva característica de vigas hiperestáticas	17
Figura 6 : Momento de plastificação 1	18
Figura 7: Momento de plastificação 2.	18
Figura 8: Momento de plastificação 3.	20
Figura 9: Momento de colapso	21
Figura 10: Modelo estrutural genérico	22
Figura 11: Diagrama de momento fletor genérico	22
Figura 12: Carga aplicada e seu DMF	22
Figura 13: Nova configuração estrutural	23
Figura 15: Modelo estrutural - Segundo exemplo	25
Figura 16: Estrutura com cargas genéricas	27
Figura 17: Diagrama de momento fletor genérico	27
Figura: 18: DMF carga aplicada	27
Figura 19: novo DMF pós-formação da rótula	28
Figura 20: Estrutura simples isostática	29
Figura 21: DMF isostática	30
Figura 22: Carga distribuída bi engastada	31
Figura 23: DMF carga distribuída	32
Figura 24: estrutura pós-rotulação	32
Figura 25: DMF pós-rotulação	33
Figura 26: DMF estrutura isostática	34
Figura 27: Pórtico Hiperestático	36
Figura 28: DMF pórtico	36
Figura 29: Pórtico – 1ª Rótula	37
Figura 30: DMF pós-rotulação	38
Figura 31 – Estrutura pós-2ª rotulação	38
Figura 32: DMF Pós-2ª rótula	39



Figura 33: Pórtico simples – 1 grau hiperestático	41
Figura 34: Diagrama de Momento Fletor do Pórtico	41
Figura 35: Diagrama de Momento Fletor após 1ª rótula	42
Figura 36 : Pórtico isostático genérico	43
Figura 37 : DMF - Pórtico isostático	43

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: DMF- Acréscimo de carga	24
Tabela 2: Resistência de acordo com o grau de hiperestaticidade	25
Tabela 3: DMF variação de carga	28
Tabela 4: Acréscimo de resistência	30
Tabela 5: DMF – Variação de carga	33
Tabela 6: Acréscimo de resistência	35
Tabela 7: Acréscimo de carga e variação dos momentos fletores	40
Tabela 8: Acréscimo de resistência	45

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
<b>1 Objetivo</b> .....	<b>12</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>12</b>
<b>2.1 Embasamento teórico</b> .....	<b>12</b>
<b>3. METODOLOGIA</b> .....	<b>13</b>
<b>3.1 Rótula Plastica em vigas isostáticas</b> .....	<b>13</b>
<b>3.2 Vigas Hiperestáticas</b> .....	<b>16</b>
<b>3.3 Método do Equilíbrio</b> .....	<b>17</b>
<b>3.4 Metodologia – Método do equilíbrio</b> .....	<b>21</b>
<b>1º Exemplo</b> .....	<b>21</b>
<b>3.4.1 Isostática</b> .....	<b>24</b>
<b>3.4.1 Aumentando o grau de Hiperestaticidade</b> .....	<b>25</b>
<b>3.5 2º Exemplo</b> .....	<b>26</b>
<b>3.6 Isostática</b> .....	<b>29</b>
<b>3.7 3º Exemplo</b> .....	<b>31</b>
<b>3.8. Isostática</b> .....	<b>34</b>
<b>3.8 4º Exemplo de aplicação</b> .....	<b>35</b>
<b>3.9 Pórtico isostático</b> .....	<b>43</b>
<b>4 CONCLUSÕES</b> .....	<b>45</b>

## INTRODUÇÃO

Devido à metodologia construtiva para se usar concreto e aço, amplamente difundida a partir do concreto armado e de estruturas de aço pré-moldadas que, como se sabe, estão em crescente ascensão (SANTOS, 2008). Neste trabalho, *Comparação das cargas de colapso plástico de estruturas isostáticas e hiperestáticas de aço*, constata-se que, em razão da facilidade e da segurança na execução, grande parte das construções postas em análise se caracterizam tanto pela hiperestaticidade, quanto pela redundância estrutural. Neste caso, como sabemos, esses elementos têm como finalidade garantir a estabilidade geral da estrutura.

Visto isso, para sofrerem deformações de acordo com o cálculo isostático muitas obras menores e até de grande porte são calculadas a partir da estimativa sobre estruturas verticais e horizontais de maneiras isostáticas. Assim sendo, o objetivo dessa pesquisa é calcular o ganho de resistência em sistemas hiperestáticos com as mesmas ações de cargas e vãos que em sistemas isostáticos, - a fim de quantificá-los. Dito isto, devido ao desgaste natural das peças estruturais, fluência, retração ou ainda obras adicionais nas estruturas, pode-se quantificar o que deve ser feito em relação à sua manutenção ou possíveis reforços estruturais para garantir a estabilidade global.

O software FTLOOL (1995), foi desenvolvido na PUC-Rio, pelo professor Marcelo Gattascom com recursos recebidos do CNPq. Atualmente, o responsável é o co-autor do projeto, o Engenheiro doutor Luiz Fernando Martha, que desde o ano de 1995 vem contribuindo de modo efetivo em torno das constantes melhorias do programa. Nesse trabalho, este programa teve um papel fundamental, pois atuou como um suporte (indispensável) para os desenhos esquemáticos e para a precisão dos resultados. Desse modo, verificou-se que, com uma interface usual e muito didática, o programa permite a inserção de estruturas e de componentes estruturais em duas dimensões (2D) (FTOOL, [s.d.])<sup>1</sup>. Dessa maneira, a teoria linear elástica permite aplicar e analisar vigas contínuas de concreto armado e aço, desde que ambas não estejam fissuradas. A lei de Hooke é aceitável, pois, sob cargas de serviço previamente calculadas, a maioria dessas vigas não apresentam o fenômeno da fissuração, isto por suas deflexões serem projetadas para que isso não ocorra. O maior valor da tensão para o qual a Lei

---

<sup>1</sup> Dessa forma, tornou-se possível a inserção de cargas à nossa estrutura, no exato ponto desejado. O programa, com algoritmo baseado em *The consideration of members with shear deformation (Timoshenko beams)*, introduced in version 3.00 of Ftool de forma discreta e numérica faz, o cálculo instantâneo dos diagramas referentes a estrutura, são exemplos: diagramas de momento, fletor e esforço cortante. Além de linhas de influência para cargas móveis. Desse modo, todos os diagramas de momento fletor (DMF) em seus resultados foram obtidos a partir disso. Disponível em: <https://www.ftool.com.br/Ftool/site/about>. Acesso em janeiro de 2022.

de Hooke pode ser utilizada para determinado material é conhecido como limite de proporcionalidade daquele material. No caso de materiais dúcteis, objeto deste trabalho, o limite de proporcionalidade quase coincide com o ponto de escoamento (BEER & JOHNSTON JR, 1982). Segundo Timoshenko & Gere (1982), eventualmente, as estruturas podem ficar submetidas a sobrecargas maiores do que as previstas ou também podem, neste caso, até mesmo ser projetadas para certo grau de deformação. Dito isto, após tal deformação, oriunda de sobrecargas maiores do que as que foram utilizadas para o dimensionamento linear, a estrutura se deforma e por esse motivo atinge o seu limite elástico. Quando este limite é atingido, na curva tensão deformação, inicia-se a fase plástica, aonde se partindo de uma sessão infinitesimal, conseguimos quantificar a tensão de plastificação total da seção (SUSSEKIND, 1977). Contudo, investigações como essa se fazem extremamente necessárias para que seja aproveitado o máximo que um elemento estrutural pode permitir. Gerando-se, assim, economia no dimensionamento e execução da estrutura.

## **1 Objetivo**

O presente trabalho, *Comparação das cargas de colapso plástico de estruturas isostáticas e hiperestáticas de aço* tem como objetivo geral discutir os problemas de análise estrutural no método das rótulas plásticas, apresentando uma formulação matemática que possibilite a quantificação; além disso, procura-se desenvolver e comparar os resultados de estruturas isostáticas e hiperestáticas com variações de suas propriedades e condições de contorno. Com vistas a atingir este objetivo geral, propõem-se os seguintes objetivos específicos:

- a) Apresentar, por meio dos exemplos propostos, a viabilidade de se construir e projetar estruturas hiperestáticas para um aumento no momento de plastificação final, logo, o momento de colapso de toda a estrutura;
- b) Servir como texto auxiliar básico em futuros trabalhos de estruturas em aço no regime plástico e no estudo da formação e propagação das rótulas plásticas.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 Embasamento teórico**

Neste trabalho, apresenta-se uma descrição e revisão quantitativa de cálculos teóricos com variações de seções, cargas e materiais sobre as principais características das vigas isostáticas e hiperestáticas, segundo a análises plástica e a consideração da redistribuição de momentos segundo as normas e estudos disponíveis na literatura.

Como análise linear, temos, por exemplo, a Lei de Hooke, que estabelece que “quando uma mola ou um corpo é deformado por alguma força externa, uma força elástica restauradora é exercida na mesma direção e no sentido oposto à força externa” (BEER & JOHNSTON JR., 1982). Caracterizando assim, a fase linear do diagrama tensão deformação amplamente estudada na engenharia de materiais.

Porém, quando partimos para o estudo da análise não linear, objetivo deste estudo e desta comparação, o estudo se torna mais complexo e incerto, visto que não temos como prever totalmente como o material irá reagir após uma certa tensão e sobrecarga superior à de escoamento.

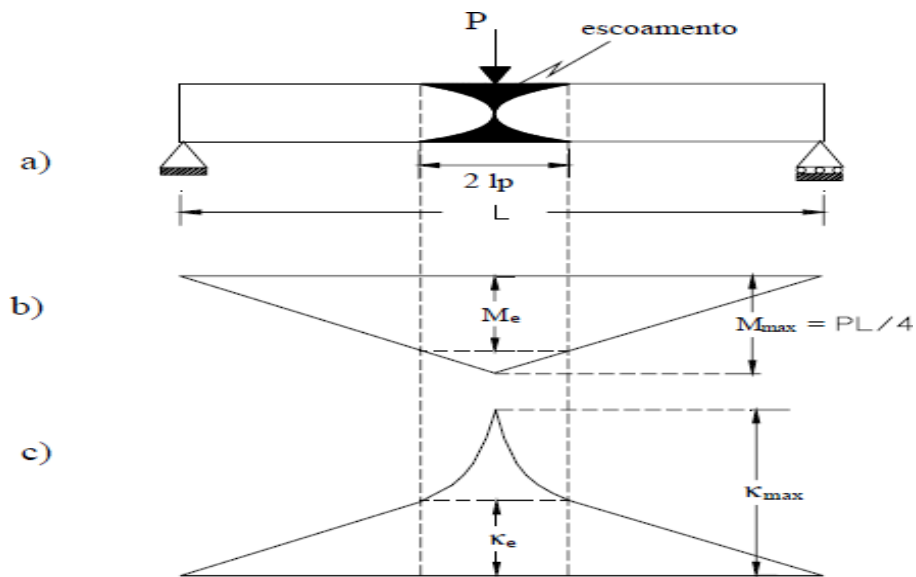
O estado plástico ou não linear é caracterizado pelo surgimento de deformações permanentes no material, irreversíveis quando a sobrecarga for retirada ou anulada. As deformações plásticas acontecem quando as tensões normais devido às cargas excedem o limite de escoamento do material. De modo geral, os trabalhos experimentais sobre rótulas plásticas envolvem esse tipo de comportamento não linear, com algumas frentes teóricas; como, o método das forças, o método dos deslocamentos para resolvermos as vigas hiperestáticas e determinarmos seus esforços internos e quantificar o momento em que as rótulas surgirão em nossas estruturas (DOUGHTY, 1988).

### **3. METODOLOGIA**

#### **3.1 Rótula Plástica em vigas isostáticas**

Nas vigas isostáticas, a estrutura entra em colapso quando a capacidade resistente da seção mais solicitada se esgota, atingindo seu limite de plastificação. Assim, nesse exato ponto de um plano da estrutura, começa a rotulação. Em uma ilustração deste conceito, em materiais elasto-plástico ideais, obtém-se o comportamento de uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga qualquer  $P$ , concentrada no meio do vão da viga, como mostrado na Figura 1 abaixo.

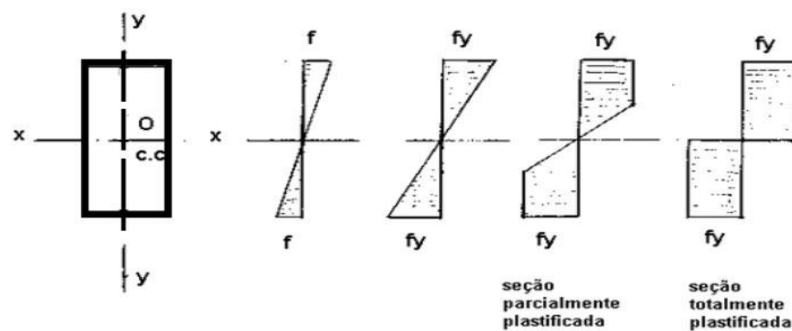
Figura 1: flecha de deformação na rótula plástica.



Fonte: 2 Revisão Bibliográfica 2.1. Introdução, p. 27.<sup>2</sup>

No caso dessa carga concentrada no meio do vão da viga isostática, o diagrama de momento fletor tem a forma triangular, com momento máximo igual ( $M_{\max}$ ) a  $(P.L)/4$ . Quando o momento máximo se iguala ao momento de plastificação ( $M_p$ ), forma-se uma rótula plástica, a qual pode se estender além dos limites da seção central. Para fins teóricos, consideramos apenas uma seção totalmente plastificada. Para melhor visualização, considerem a Figura 2 abaixo.

Figura 2: variação da tensão na seção transversal.



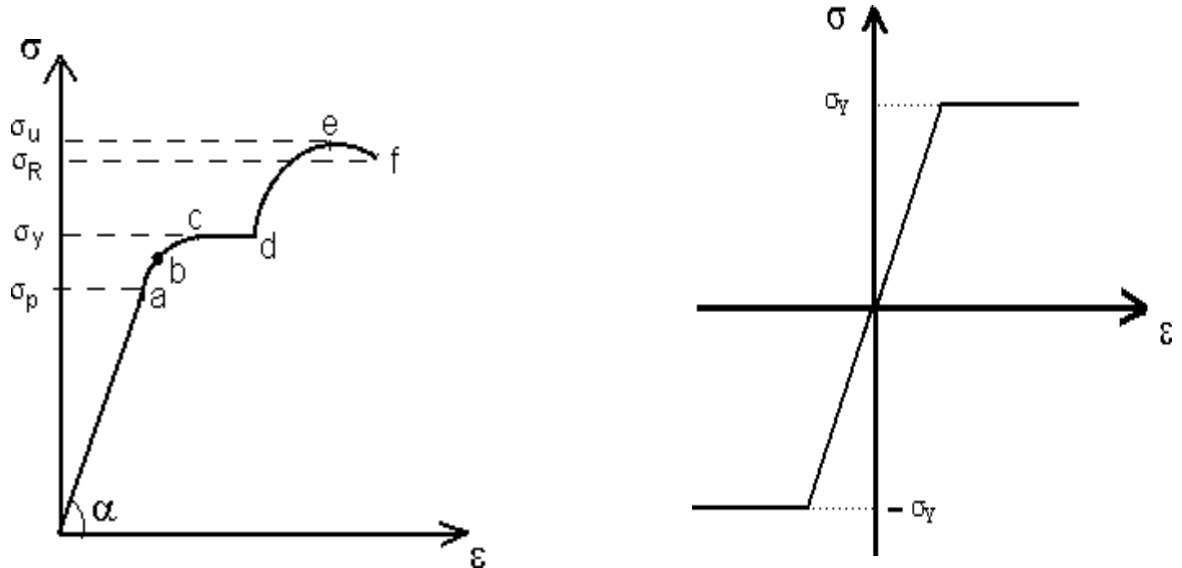
Fonte: o autor, 2022.

<sup>2</sup> 2 Revisão Bibliográfica 2.1. Introdução. [s.l: s.n.]. Disponível em: <[https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/3718/3718\\_3.PDF](https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/3718/3718_3.PDF)>. Acesso em: 14 out. 2022.

De uma resolução mais simples, conseguimos determinar com precisão o local onde irá se formar a rótula plástica de acordo com o diagrama de momento fletor e de curvatura. Utilizando as condições de equilíbrio da estática, conseguimos encontrar as resultantes e quantificar o momento de plastificação do elemento de acordo com suas características. A formação da primeira rótula plástica, em estruturas isostáticas, produz o seu colapso, pois a viga se rompe devido às rotações excessivas na seção, enquanto as partes a esquerda e direita da rotulação se comportam como corpo rígido e ainda estão no regime elástico. Causando, assim, a rotação relativa entre as duas partes sob a ação de um momento constante (figura 2).<sup>3</sup>

A Figura 3 mostra o diagrama tensão – deformação do aço doce (aço com baixo teor de carbono e é usado na construção civil). Na mesma Figura 3 está o diagrama tensão - deformação usado na Teoria da Plasticidade. Nesse diagrama simplificado a tensão de proporcionalidade coincide com a tensão de escoamento e não há o encruamento (endurecimento, ponto d). A tensão de escoamento à tração é considerada igual a tensão de escoamento à compressão.

Figura 3: diagrama tensão x deformação típica do aço.



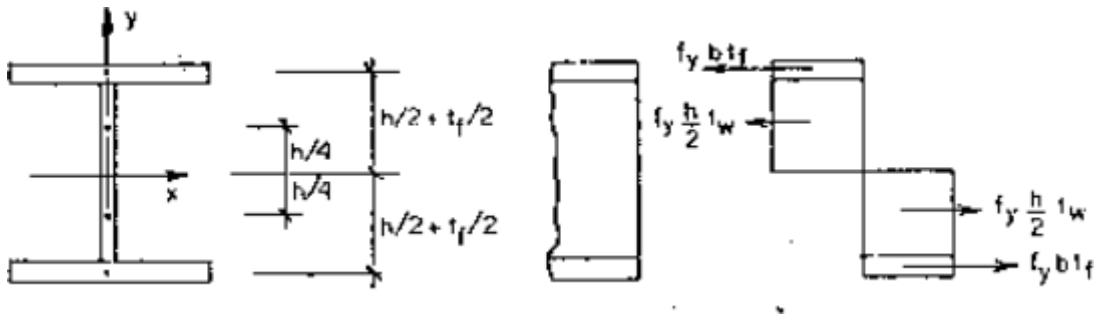
Fonte: TIMOSHENKO & GERE (1982)

<sup>3</sup> 2 Revisão Bibliográfica 2.1. Introdução. [s.l: s.n.], p. 26



Neste estudo, trabalha-se apenas com materiais dúcteis como o aço estrutural, cada vez mais difundido e utilizado por conta de especificações técnicas e garantias do fabricante. Esse material possui grande resistência, rapidez e velocidade para sua execução.

Figura 4: rotulação plástica em viga de aço estrutural.



Fonte: adaptado pelo autor, 2022.

### 3.2 Vigas Hiperestáticas

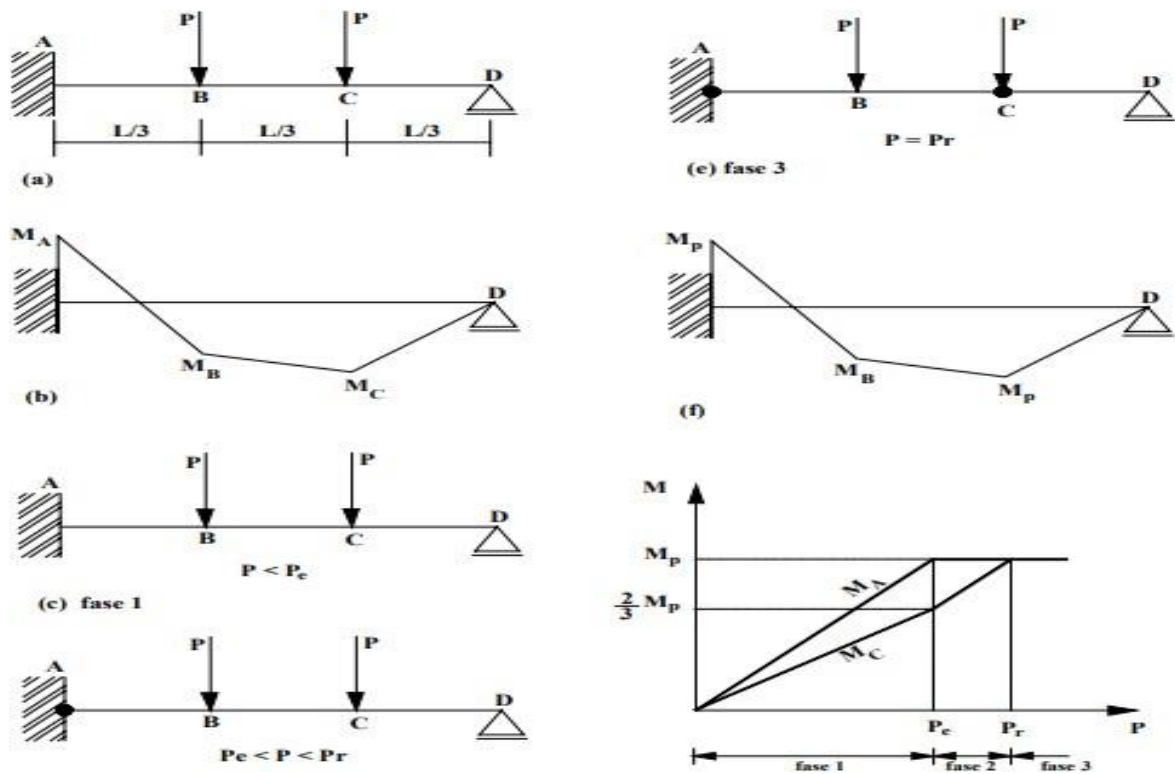
Em sua definição, na visão de análise estrutural, a hiperestaticidade se dá em uma estrutura onde temos mais reações de apoio ou mais restrições do que as leis naturais de equilíbrio; tornando-se assim, um sistema onde temos mais reações contrárias a sobrecarga solicitante, por consequência temos mais equações para soluções de equilíbrio do que incógnitas. Assim, temos a redundância estrutural (BEER & JOHNSTON JR., 1982).

Ao contrário das vigas isostáticas, ao atingirmos a máxima capacidade resistente de uma seção, esta não implicará necessariamente no colapso da estrutura. O colapso só ocorrerá quando todo o conjunto hiperestático, redundante estruturalmente, for transformado em um sistema instável, hipostático, após a formação de rótulas plásticas, diminuindo seu grau hiperestático. As rótulas que se formam com o aumento do carregamento, só poderão resistir determinados limites de projeto, condicionados pelos esforços solicitantes e os respectivos diagramas, o que irá condicionar a tensão limite e estado último<sup>4</sup>. Em resumo, geralmente, uma viga N vezes hiperestática terá a formação de N+1 rótulas plásticas, e só assim, entrará em colapso. Essa uma vez a mais é dada pelo fato de, em seu último estado, se tornar isostática<sup>5</sup>.

Figura 5: curva característica de vigas hiperestáticas.

<sup>4</sup> 2 Revisão Bibliográfica 2.1. Introdução. [s.l: s.n.], p.29.

<sup>5</sup> Ibidem, p. 29.



Fonte: 2 Revisão Bibliográfica 2.1. Introdução. [s.l: s.n.], p.30.

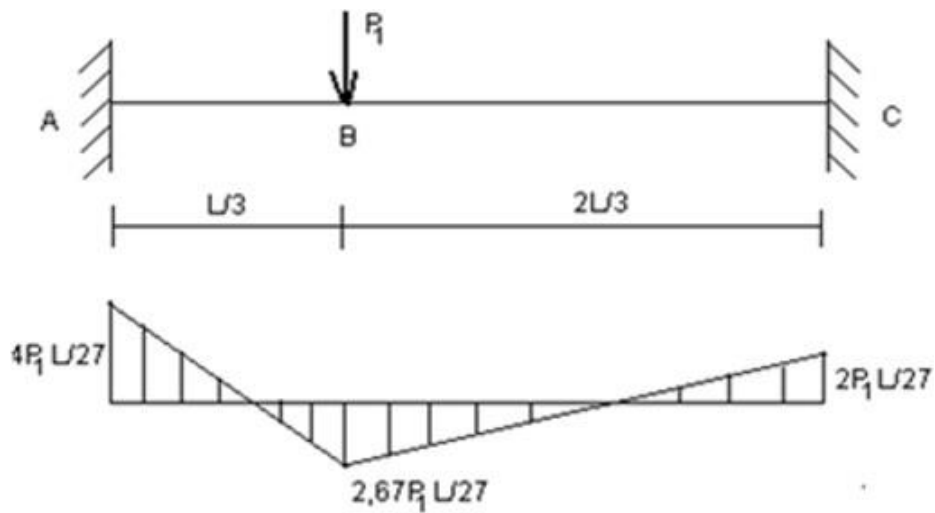
Na imagem acima, temos a distribuição de momentos em uma viga hiperestática, onde se tem que o momento no engaste A é o maior, resolvido pelo método das forças. Assim, o diagrama de momento pelo aumento da tensão  $P$ , resulta em uma linha com coeficiente angular maior na seção A., ou seja, a plastificação ocorrerá nesse ponto.

Sendo assim, após a plastificação completa da seção A, o apoio que em um primeiro instante era engaste se tornará do 2º gênero, gerando um novo diagrama de momento fletor.

### 3.3 Método do Equilíbrio

O método do equilíbrio pode ser usado para determinar a carga de colapso plástico de estruturas de barras. Neste método, admite-se a redistribuição dos momentos fletores após o surgimento de rótulas plásticas. Seja a viga hiperestática da Figura 6, por exemplo. A primeira rótula surgirá formada no engaste A, onde de acordo com o diagrama, temos o maior momento fletor. O primeiro passo é determinar o valor da força  $P$  necessária para a formação da rótula. Com isso, igualamos o momento fletor em A com o momento fletor de Plastificação  $M_p$ , em caso de estruturas de aço é pré-determinado pela empresa, e de concreto armado, devemos efetuar um estudo de acordo com o  $f_{ck}$ , taxa de armação e a resistências delas.

Figura 6: momento de plastificação.



Fonte: o autor, 2022.

Como mostrado na Figura 6, tem-se:

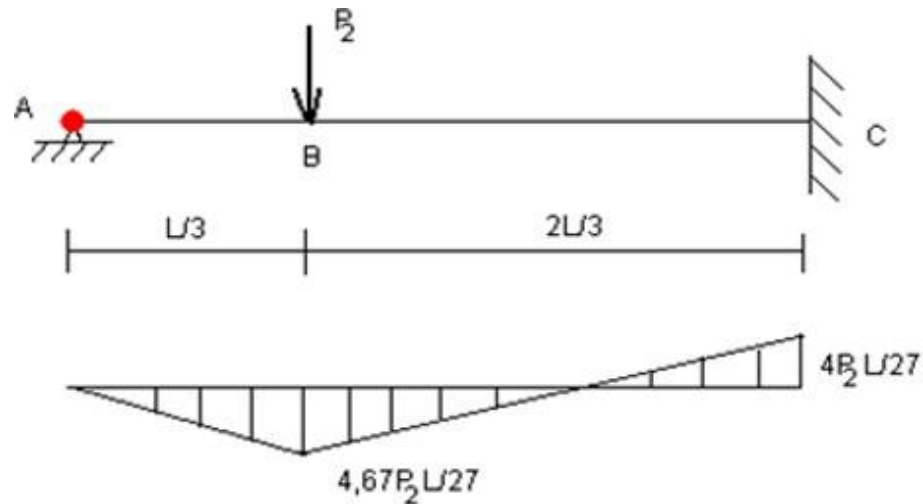
$$M_p = \frac{4 \cdot P_1 \cdot L}{27}$$

Onde, obtém-se o valor de  $P_1$ :

$$P_1 = \frac{27 M_p}{4L}$$

Como se pode ver, após a formação da primeira rótula plástica, calcula-se o valor de  $P_2$  que deve ser somada à força de  $P_1$  para a formação da segunda rótula plástica. Somam-se os efeitos para caracterizarmos o acréscimo de tensão suportado em nossa viga. Os novos diagramas de momento fletor hiperestáticos resultados de cálculos pelo método das forças, tem-se a nova redistribuição de momentos:

Figura 7: momento de plastificação 2.



Fonte: o autor, 2022.

Assim, com o novo diagrama, identificamos que a segunda rótula plástica se deu na seção B, onde tivemos o nosso maior momento fletor. Pela superposição de efeitos para a plastificação total da seção, somaremos o momento gerado pela força \$P\_1\$ e o momento gerado pela força \$P\_2\$, obtendo:

$$M_p = \frac{2,67 \cdot P_1 \cdot L}{27} + \frac{4,67 \cdot P_2 \cdot L}{27}$$

Colocando-se a expressão em função de \$P\_1\$:

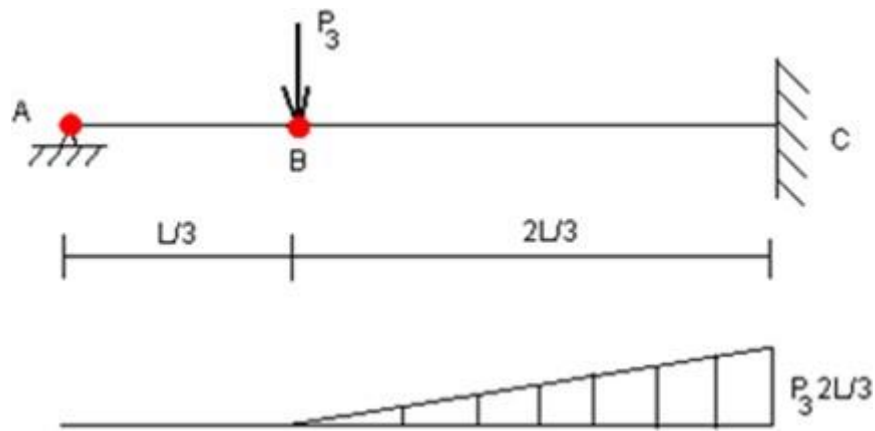
$$M_p = \frac{2,67 \cdot 27 \cdot M_p \cdot L}{27 \cdot 4L} + \frac{4,67 \cdot P_2 \cdot L}{27}$$

Onde retiramos a expressão em função de \$P\_2\$:

$$P_2 \leq \frac{1,92M_p}{L}$$

Interessante ressaltar que em todos os outros pontos da viga, o material está na fase elástica-linear. Assim, novamente, após a formação da rótula plástica em B, teremos uma nova redistribuição de momentos, a qual caracterizamos nossa última rótula plástica do sistema em questão.

Figura 8: momento de plastificação 3.



Fonte: o autor, 2022.

Para a formação da rótula em C, o momento fletor neste apoio deve ser igual ao momento de plastificação:

$$\frac{2P_1L}{27} \leq \frac{4P_2L}{27} \leq \frac{P_3 2L}{3} \leq M_p$$

Colocando-se na expressão acima os valores de  $P_1$  e  $P_2$ , tem-se:

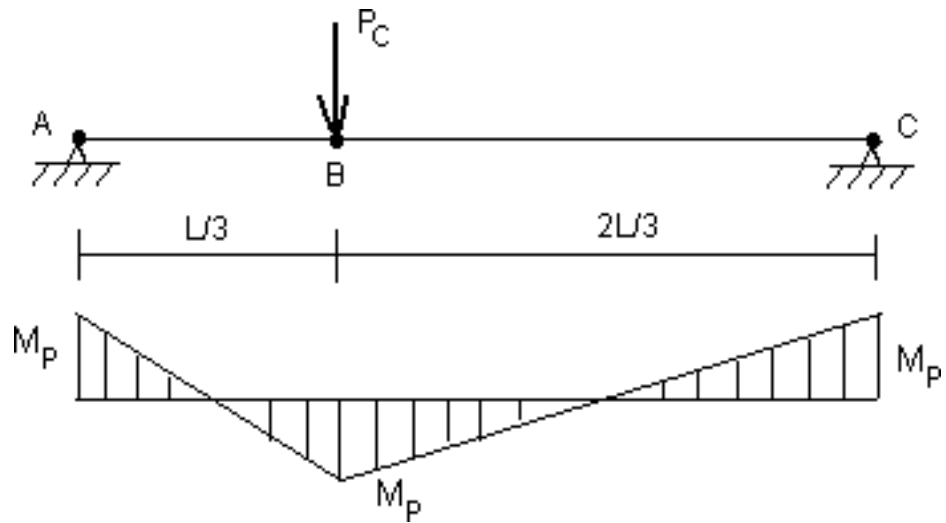
$$P_3 \leq \frac{0,323M_p}{L}$$

Após a formação da terceira rótula, tem-se o diagrama de momento dos fletores mostrado na Figura 8. Nesta situação, o material está plastificado nos pontos A, B e C. Depois da formação da terceira rótula ocorre o colapso da viga e a carga de colapso plástico é determinada somando-se as forças  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ :

Caracterizando-se, então, a sobrecarga e o acréscimo de carga suportada por uma viga hiperestática. Por conclusão, a carga de colapso é dada por:

$$P_c = \frac{8,99}{L} * M_p$$

Figura 9: momento de colapso



Fonte: o autor, 2022.

Com esse primeiro exemplo - prático e genérico, conseguimos propagar o conceito de rótulas em materiais dúcteis e gerar exemplos para tentarmos entender cada vez mais o funcionamento desse mecanismo e a quantificar a ideia de quanto será o acréscimo de solicitação em cada estrutura; isso de acordo com o seu momento de plastificação e também com o seu grau de hiperestaticidade. Neste primeiro exemplo de aplicação está mostrada a ordem de formação das rótulas plásticas. Esta é a única vantagem do método do equilíbrio quando comparado com o método do trabalho. Este último prevê a formação das três rótulas plásticas (em A, B e C), mas não fornece a ordem de formação.

### 3.4 Metodologia – Método do equilíbrio

#### 1º Exemplo

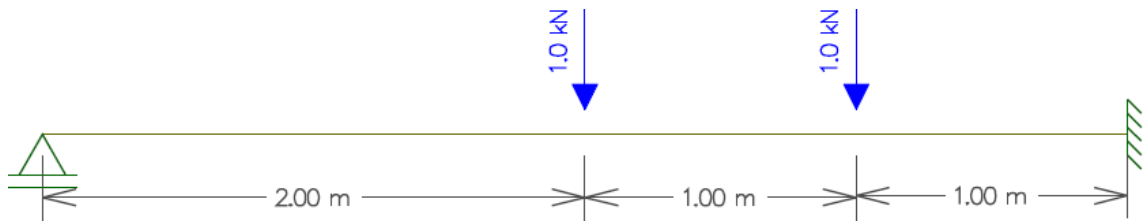
Como primeiro exemplo, temos uma viga engastada e com um apoio do primeiro gênero na outra extremidade, o que lhe classifica como hiperestática em 1 grau. Ou seja, ela aceita a formação de 1 rótula plástica, redistribuindo seus momentos, e deixando-a isostática. Na formação das 2 rótulas plásticas, a viga entrará em colapso, visto que se tornará hipostática.

Dados da viga – Perfil I – AÇO A36

$$\sigma_y = 250 \text{ MPa} \quad | \quad Z_x = 970 \text{ cm}^3 \quad | \quad W_x = 870 \text{ cm}^3 \quad |$$

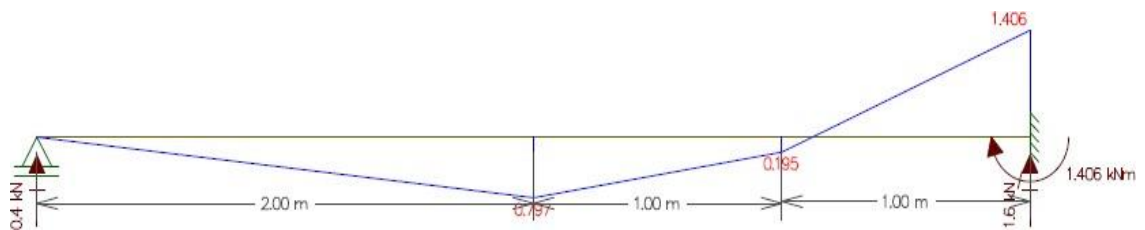
$$t_w = 6 \text{ mm} \quad | \quad t_f = 10 \text{ mm} \quad | \quad d = 400 \text{ mm} \quad | \quad b_f = 200 \text{ mm}$$

Figura 10: modelo estrutural genérico.



Fonte: o autor, 2022.

Figura 11: Diagrama de momento fletor genérico



Fonte: o autor, 2022.

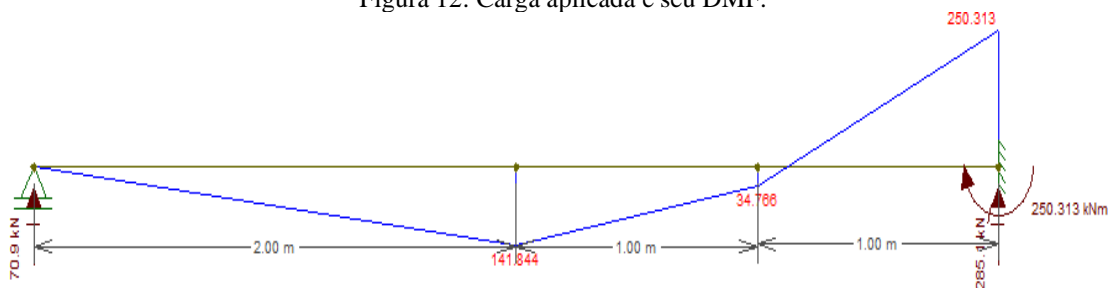
Pelo método do equilíbrio, temos:

$$M_p \quad \square \quad 1,406P_1 = \sigma_y * Z \quad 1,406P_1 = 250.10^6 * 970.10^{-6}$$

$$\square \quad YZ \quad P_1 = 172,5 \text{ kN}$$

Após a carga  $P$  unitária se elevar até  $P_1$ , teremos a formação da 1ª rótula plástica devido ao seu momento que resultará em uma rotação elevada. Substituindo  $P_1$  na carga, obtemos o seguinte Diagrama de Momento Fletor que irá plastificar a seção:

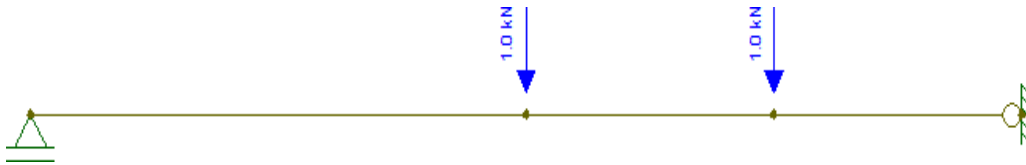
Figura 12: Carga aplicada e seu DMF.



Fonte: o autor, 2022.

Após a carga atingir o Momento de Plastificação da estrutura em questão, teremos a redistribuição de momentos referentes ainda a carga unitária para podermos estudar de forma genérica. Obtendo:

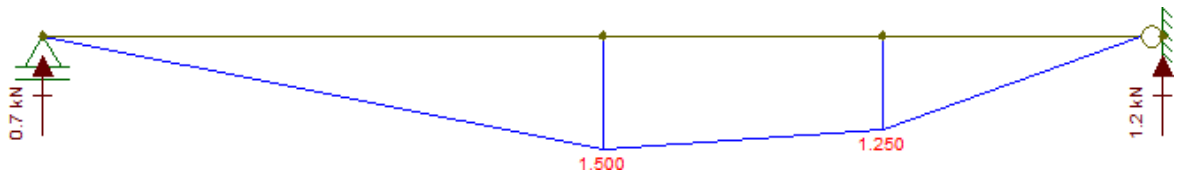
Figura 13: Nova configuração estrutural



Fonte: o autor, 2022.

E seu novo diagrama de momento fletor:

Figura 14: DMF após primeira rótula plástica.



Fonte: o autor, 2022.

Assim, devemos encontrar o acréscimo de carga, para o qual, gerará a 2ª rótula plástica.

Analisando, vemos que será no meio do nosso vão, onde temos o maior momento.

$$M_p \quad \square \quad 0,797P_1 + 1,5P_2 = \sigma Y * Z \quad 1,5P_2 =$$

$$\square YZ$$

$$(250.10^6 * 970.10^{-6}) - (0,797 * 172475)$$



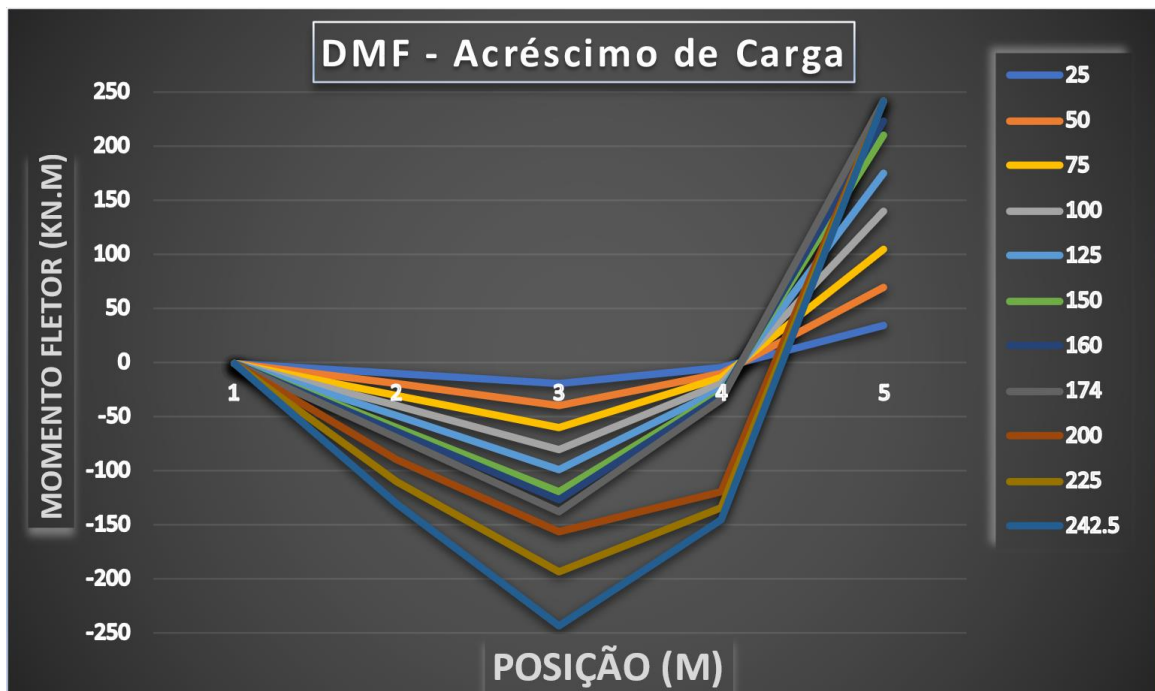
$$P_2 = 70,0 \text{ kN}$$

Assim, teremos que:  $P_c = P_1 + P_2$

$$P_c = 172,5 + 70,0 = 242,5 \text{ kN}$$

Simulando um acréscimo de carga progressivo de carga e simulando os momentos em uma tabela, obtemos o gráfico apresentado abaixo.

Tabela 1: DMF- Acréscimo de carga.



Fonte: o autor, 2022.

Esse gráfico demonstra como o momento fletor e a posição da viga reagem a cada acréscimo de carga. No ponto 4, vemos que quando se atinge a carga de plastificação, atingimos o limite de momento naquele ponto. Sendo assim, várias linhas se sobrepõem naquele ponto após acréscimos de carga, caracterizando a plastificação da seção. A variação contínua até que a segunda rótula seja formada na posição  $X = 2$  e encontre o momento de plastificação de 250 kN.m.

### 3.4.1 Isostática

Comparando a carga de colapso, utilizaremos da mesma teoria para resolução da mesma estrutura de maneira isostática. E seu diagrama é semelhante ao da figura 14. Ou seja, igual a hiperestática após a 1ª rotulação. Portanto, temos a seguinte equação:

$$M_p \leq \sigma_y Z \quad 1,5P_c = \sigma_y * Z \quad 1,5P_c = 250 \cdot 10^6 * 970 \cdot 10^{-6}$$

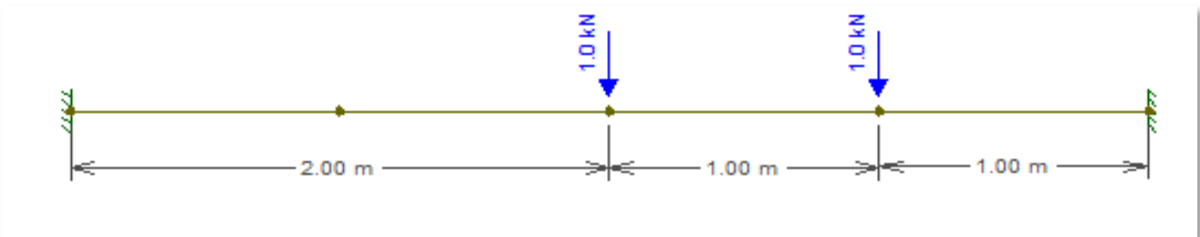
$$P_c = 161,67 \text{ kN}$$

Desse modo, em uma estrutura isostática temos o colapso assim que nossa estrutura tem sua primeira seção plastificada ou rotulada.

### 3.4.1 Aumentando o grau de Hiperestaticidade

Repetimos o mesmo processo para uma viga bi engastada com as mesmas cargas, como demonstrada abaixo.

Figura 15: modelo estrutural - Segundo exemplo



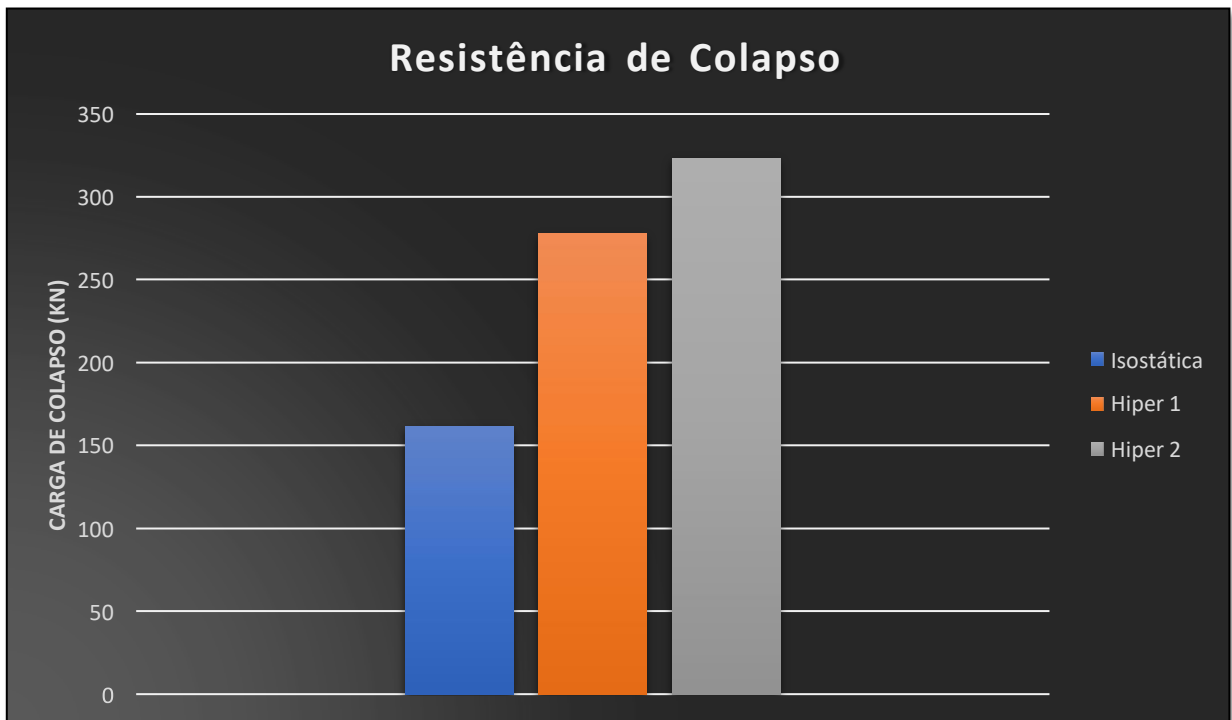
Fonte: o autor, 2022.

E efetuando toda a sequência do método do equilíbrio, obtemos:

$$P_c = 228,13 + 70,18 + 24,93 = 313,65 \text{ kN}$$

Colocando a progressão de resistência de acordo com o que aumentamos o grau de hiperestaticidade, temos:

Tabela 2: resistência de acordo com o grau de hiperestaticidade.



Fonte: o autor, 2022.

Um aumento de 72% na carga final de colapso de uma estrutura isostática para hiperestática em 1 grau. E, por fim, temos 94% a mais de aumento na carga de colapso final se compararmos a estrutura isostática com a estrutura 2 vezes hiperestática.

### 3.5 2º Exemplo

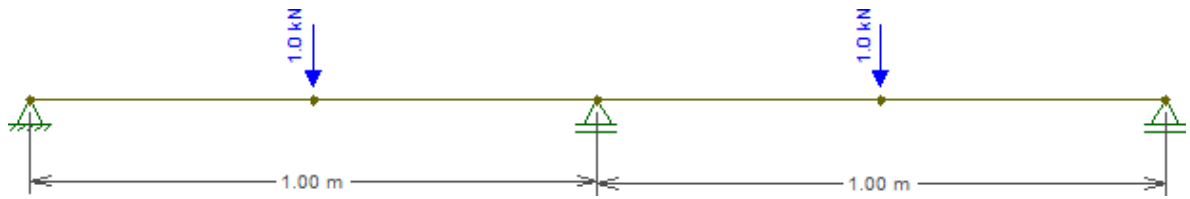
Como segundo exemplo, traz-se uma viga extremamente comum e usual em qualquer tipo de obra, uma estrutura contínua de comprimento elevado. Uma viga com amplo vão necessita de um apoio em seu vão central para conseguirmos diminuir o momento gerado e consequentemente a curvatura da seção. Classificada também como 1 grau de hiperestaticidade. A sequência de colapso da viga se dará na formação da sua segunda rótula plástica, onde se tornará hipostática.

Dados da viga – Perfil I – AÇO A36:

$$\sigma_y = 250\text{MPa} \mid Z_x = 970\text{cm}^3 \mid W_x = 870\text{cm}^3 \mid$$

$$t_w = 6 \text{ mm} \mid t_f = 10 \text{ mm} \quad \mid d = 400 \text{ mm} \mid b_f = 200 \text{ mm}$$

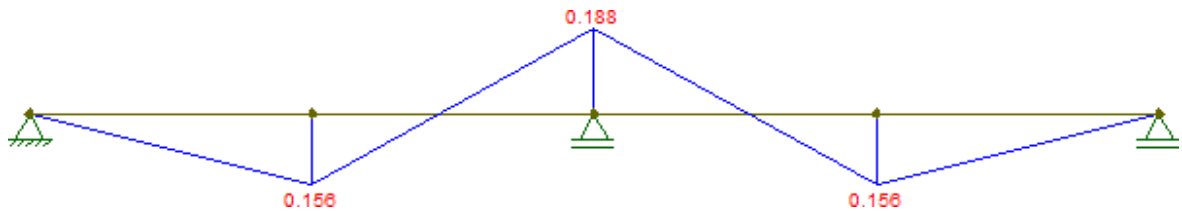
Figura 16: Estrutura com cargas genéricas.



Fonte: o autor, 2022.

A carga unitária se refere, novamente, a uma carga genérica para determinarmos seu diagrama de momento fletor.

Figura 17: diagrama de momento fletor genérico.



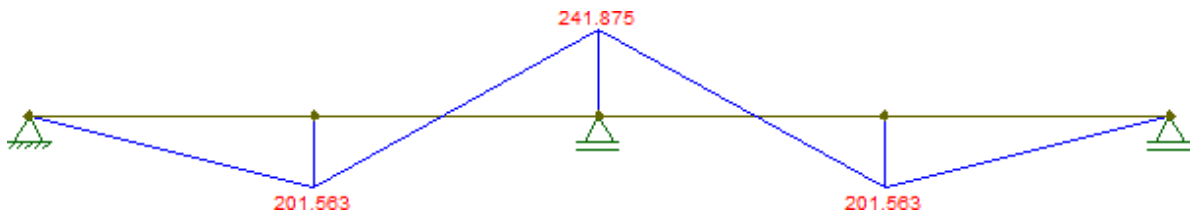
Fonte: o autor, 2022.

$$M_p \square \quad 0,188P_1 = \sigma_y * Z \quad 0,188P_1 = 250.10^6 * 970.10^{-6}$$

$$\square_y Z \quad P_1 = 1.289,9kN$$

Com essa carga, a seção do apoio central se plastificou completamente pela excessiva curvatura dada pelo limite de momento fletor do aço estabelecido pela Lei de Hooke. Figura 12: DMF carga aplicada

Figura 18: DMF carga aplicada.

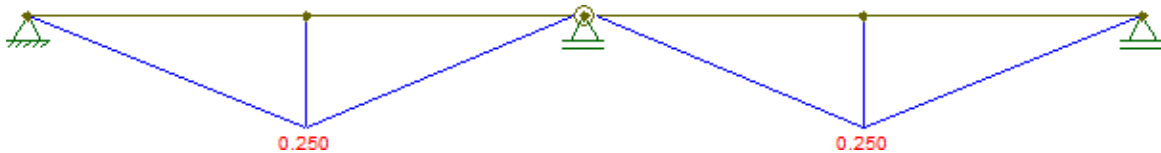


Fonte: o autor, 2022.

Observamos que o momento fletor gerado pela carga calculada é um pouco abaixo da carga de plastificação. O que se explica pela carga elevada em seu apoio central, gerando uma

curvatura excessiva, além da suportada pela dimensão da viga. Assim, temos uma viga com uma rótula em seu apoio central. Contudo, seu novo diagrama de momento para uma carga genérica  $P$  é apresentada abaixo:

Figura 19: novo DMF pós-formação da rótula.



Fonte: o autor, 2022.

Assim, após a rotulação, temos a redistribuição de momentos combinada com o diagrama anterior, explicado pela teoria do equilíbrio. Com isso, temos o equacionamento:

$$M_p \square \quad 0,156P_1 + 0,250 * P_2 = \sigma\gamma * Z$$

$$\square_Y Z$$

$$0,250P_2 = (\sigma\gamma * Z) - (0,156 * 1289900)$$

$$P_2 = 165.102,4 \text{ N}$$

$$P_2 = 165,1 \text{ kN}$$

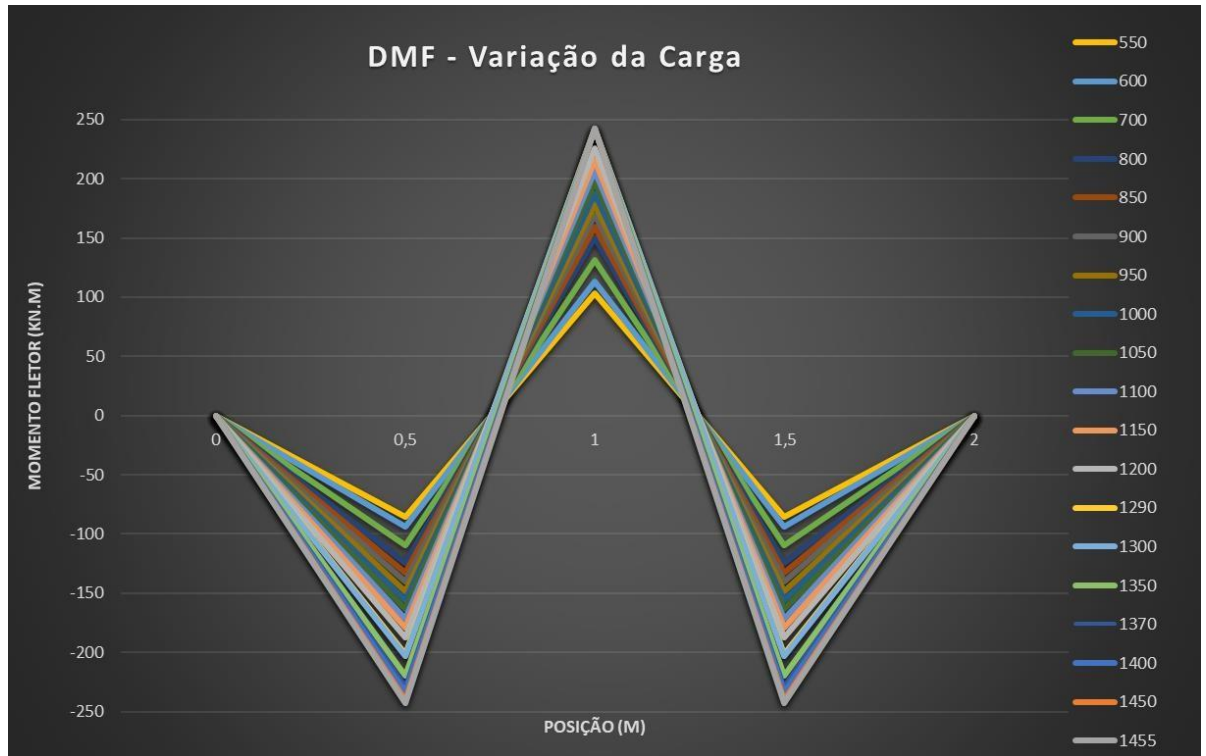
Temos que nossa carga de colapso será:

$$P_c = P_1 + P_2 = 1.289,9 \text{ kN} + 165,1 \text{ kN}$$

$$P_c = 1.455 \text{ kN}$$

Tabelando um acréscimo progressivo de carga e simulando os momentos em uma tabela de acordo com sua posição na estrutura, obtemos o gráfico apresentado abaixo.

Tabela 3: DMF variação de carga.



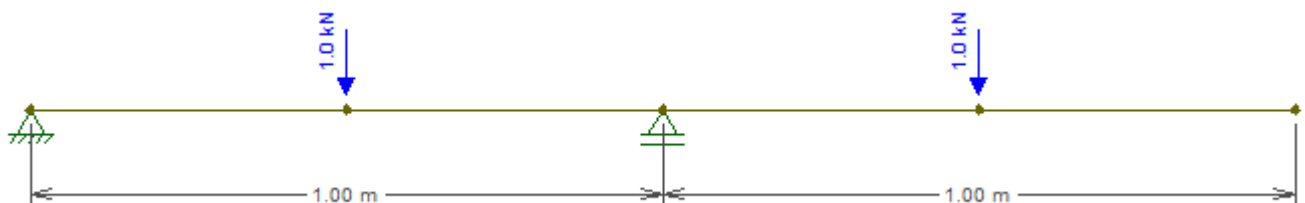
Fonte: autor, 2022.

O gráfico descreve o aumento gradual das cargas até atingirmos a plastificação da seção em 1 com a carga de 1455 kN. Após isso, temos o acréscimo de carga mantendo o momento na seção 1 constante e aumentando de maneira gradual nos pontos 0,5 e 1,5 até atingirmos a plastificação de ambas as seções de forma simultânea.

### 3.6 Isostática

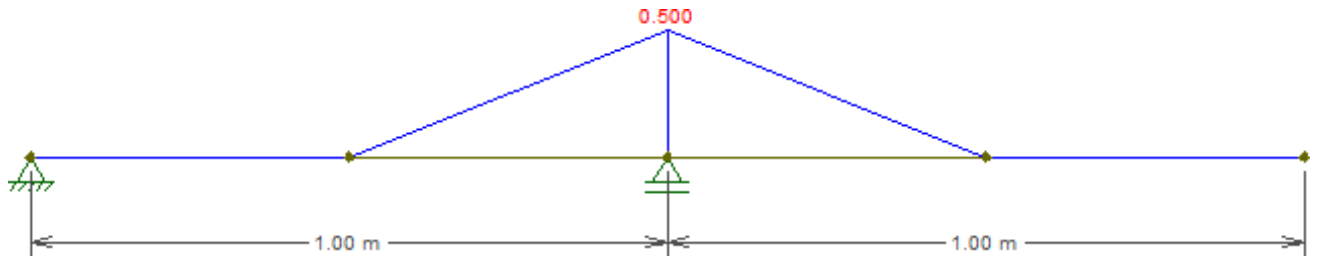
Comparando a carga de colapso, utilizaremos da mesma teoria para resolução da mesma estrutura de maneira isostática. Retiraremos um apoio de maneira arbitrária e veremos sua nova configuração.

Figura 20: Estrutura simples isostática.



Fonte: o autor, 2022.

Figura 21: DMF isostática.



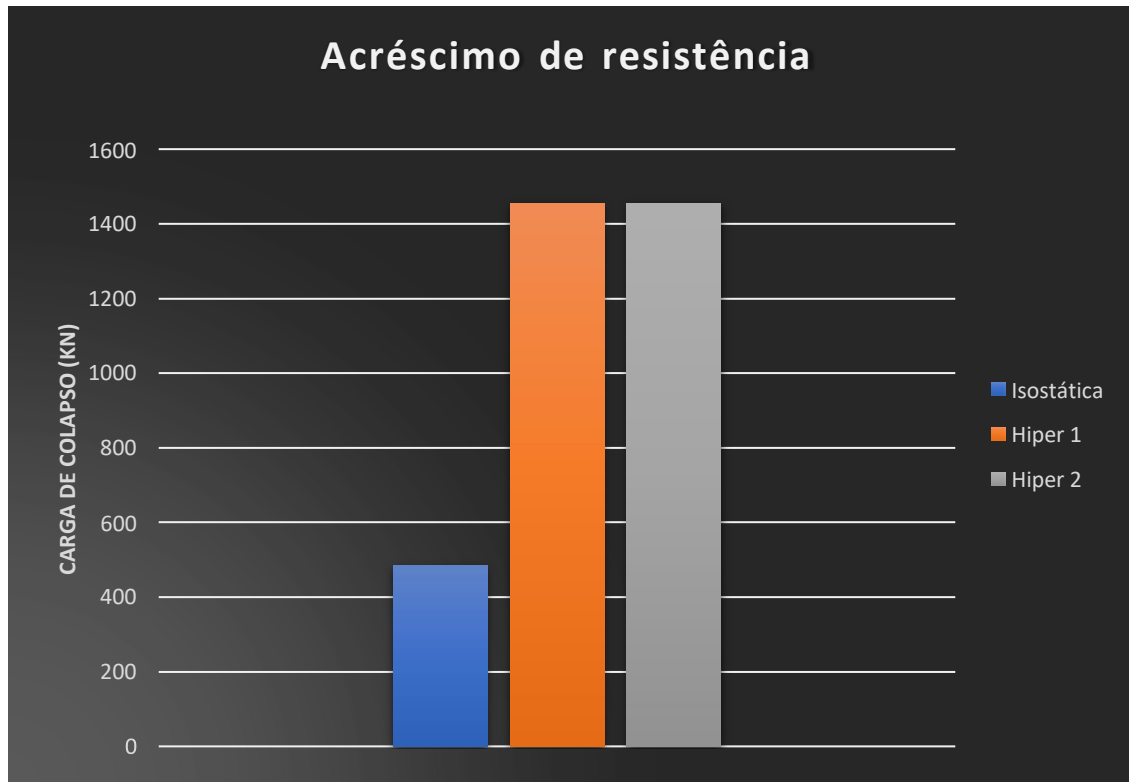
Fonte: o autor, 2022.

A partir disso, a figura 20 neste caso possui o diagrama de momento fletor descrito na figura 21. Com isso, pelo método do equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned}
 M_p &= 0,5P_c = \sigma_y Z & 0,5P_c &= 250 \cdot 10^6 * 970 \cdot 10^{-6} \\
 & & P_c &= 485,0 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Comparando a carga de colapso isostática, com a hiperestática em 1 grau, temos um aumento extremamente considerável de aproximadamente 271%.

Tabela 4: acréscimo de resistência.



Fonte: o autor, 2022.

A resistência aumentando 1 grau de hiperestaticidade, é a mesma da anterior, pois, pela simetria, nos locais de aplicação da carga genérica, teremos a formação de rótulas demaneira simultânea. Portanto, a mesma carga de colapso se dá com graus diferentes de hiperestaticidade nesse caso em particular de simetria.

### 3.7 3º Exemplo

Como terceiro exemplo de aplicação, temos uma viga bi engastada com vão de 4 metros e uma carga uniforme distribuída por toda a sua extensão. Como se pode verificar, ela é classificada como hiperestática de 2º grau; neste caso, pela sua simetria, esta viga admitirá a formação de 2 rótulasplásticas, sendo que na formação da 3ª rótula plástica caracteriza o colapso da estrutura.

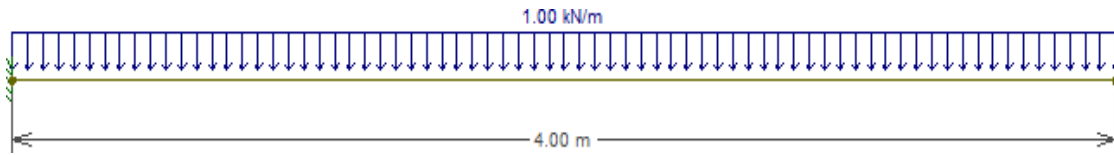
Dados da viga – Perfil I – AÇO A36:

$$\sigma_y = 250\text{MPa} \quad | \quad Z_x = 970\text{cm}^3 \quad | \quad W_x = 870\text{cm}^3 \quad |$$

$$t_w = 6 \text{ mm} \quad | \quad t_f = 10 \text{ mm} \quad | \quad d = 400 \text{ mm} \quad | \quad b_f = 200 \text{ mm}$$

Figura 22: Carga distribuída bi engastada.

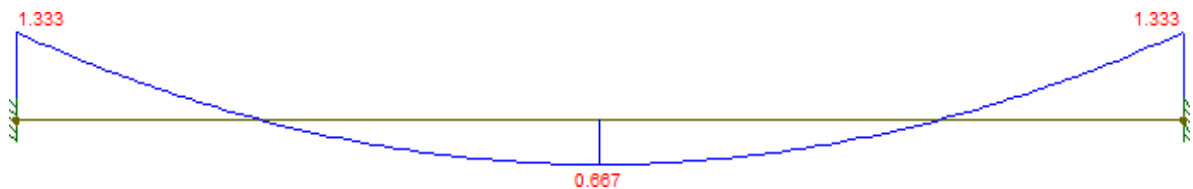




Fonte: o autor, 2022.

Definimos o material, bem como os dados da seção, para que de maneira genérica conseguíssemos determinar seu diagrama de momento fletor.

Figura 23: DMF carga distribuída



Fonte: o autor, 2022.

Com isso, nos deparamos com momentos iguais em ambos engastes da estrutura, gerando a formação de 2 rótulas simultâneas nessas seções. Com isso, temos que a carga distribuída para plastificação total das seções será:

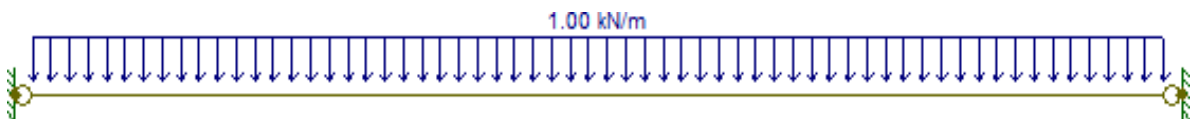
$$M_p = \sigma_y Z$$

$$1,333q_1 = \sigma_y * Z \quad 1,333q_1 = 250.10^6 * 970.10^{-6}$$

$$q_1 = 181,92 \frac{kN}{m}$$

Após elevarmos a carga distribuída até  $q_1$ , teremos nossa estrutura representada com 2 rótulas em seus engastes.

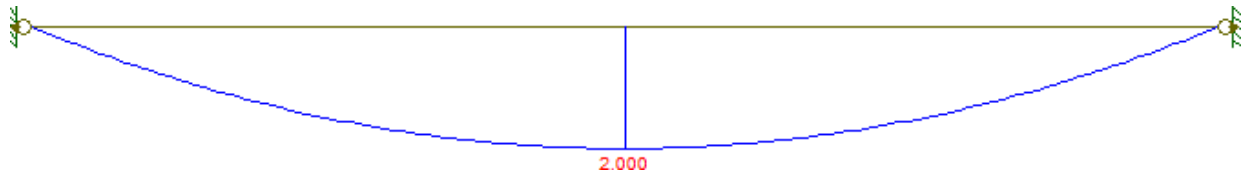
Figura 24: estrutura pós-rotulação



Fonte: o autor, 2022.

Com isso, teremos um novo diagrama de momento fletor, detalhado abaixo:

Figura 25: DMF pós-rotulação.



Fonte: o autor, 2022.

Com isso, percebemos que após a plastificação das seções, a viga, antes bi engastada, agora trabalha com uma viga isostática, sendo seu diagrama sendo definido por  $\frac{q_2 L^2}{8}$ , assim, de acordo com o método do equilíbrio, obtemos:

$$M_p \leq 0,667q_1 + 2,0q_2 = \sigma_y * Z \quad 2,0q_2 =$$

$$(250 \cdot 10^6 * 970 \cdot 10^{-6}) - (0,667 * 181920)$$

$$q_2 = 60,58 \frac{kN}{m}$$

Portanto, após o acréscimo de  $q_2$  à nossa carga  $q_1$  anteriormente calculada, teremos a formação da 3ª rótula plástica, atingindo o colapso. Portanto:

$$q_c = 242,50 \frac{kN}{m}$$

Tabela 5: DMF – Variação de carga.

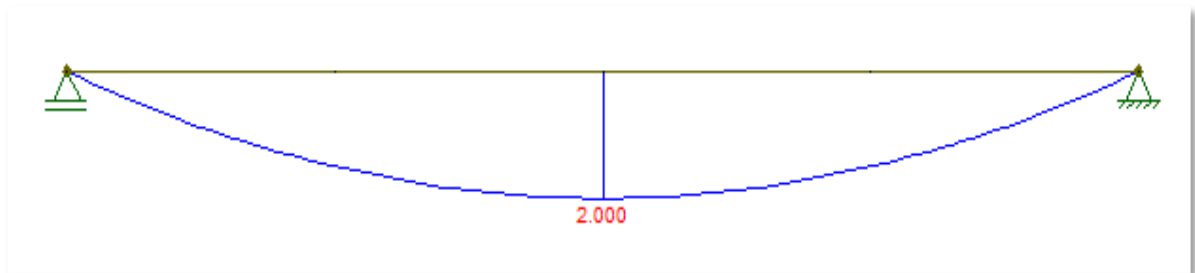


Fonte: o autor, 2022.

### 3.8. Isostática

Comparando a carga de colapso, utilizaremos da mesma teoria para resolução da mesma estrutura de maneira isostática. Retiraremos um apoio de maneira arbitrária e veremos sua nova configuração.

Figura 26: DMF estrutura isostática



Fonte: o autor, 2022.

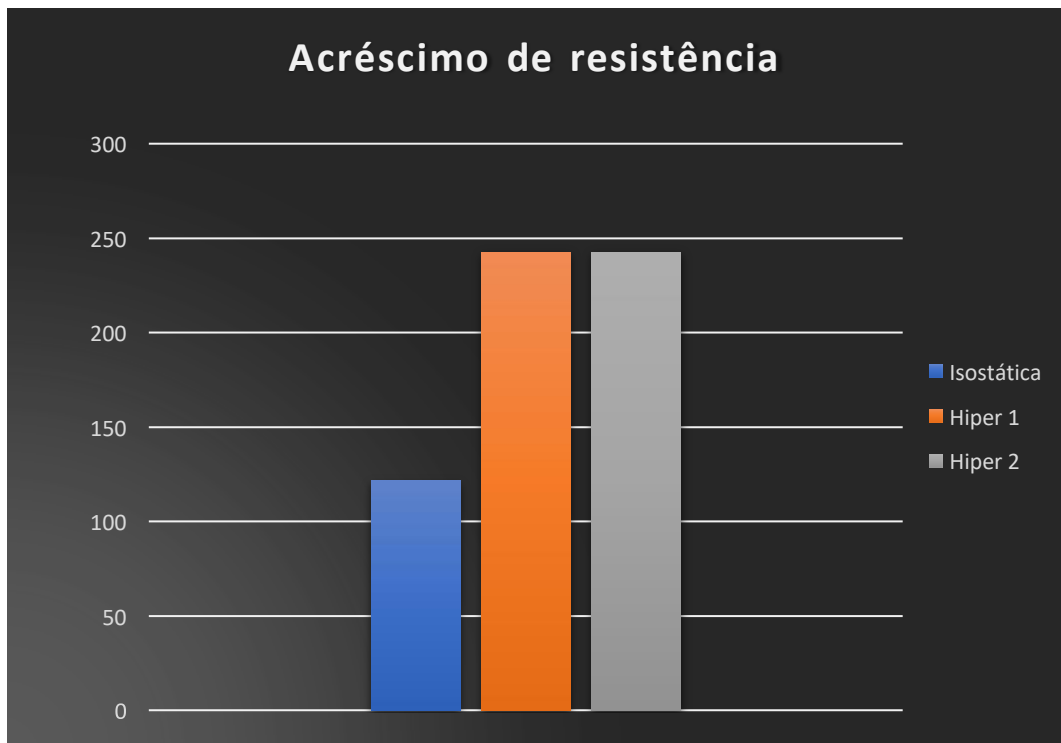
$$M_p \square \quad 2,0q_c = \sigma_y * Z \quad 2,0q_c = (250 \cdot 10^6 * 970 \cdot 10^{-6})$$

$$\square_y Z$$

$$q_c = 121,5 \frac{kN}{m}$$

Comparando a carga de colapso isostática, com a hiperestática em 2 graus, temos um aumento extremamente considerável de aproximadamente 100%, ou seja, dobrou sua resistência à carga de colapso.

Tabela 6: acréscimo de resistência.



Fonte: o autor, 2022.

### 3.8 4º Exemplo de aplicação

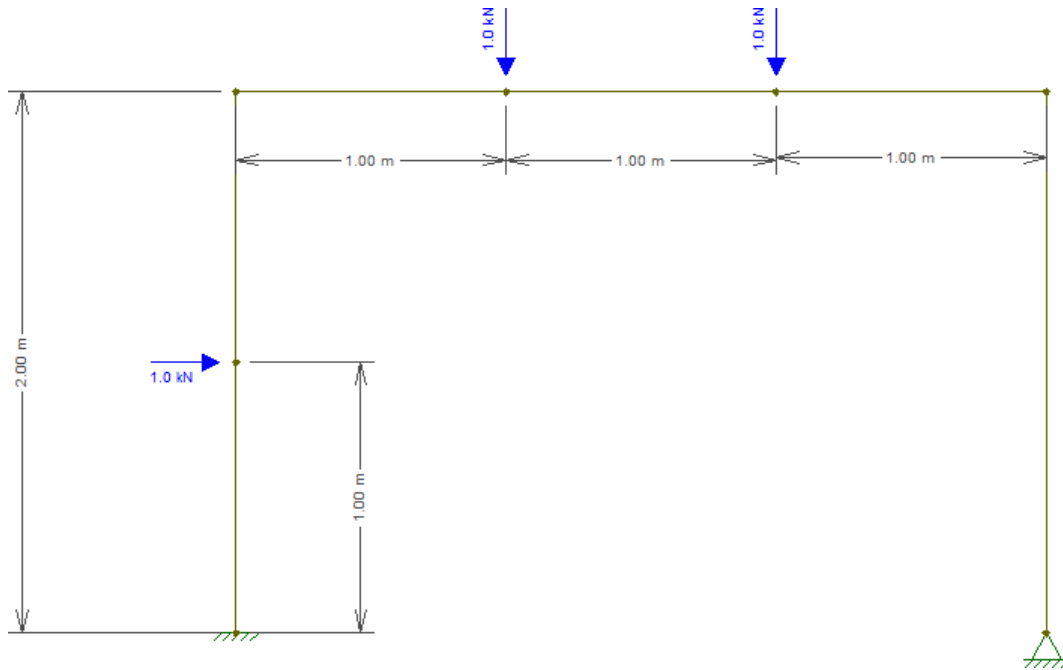
Como quarto exemplo de aplicação, temos um pórtico simples com vão principal de 3 metros e cargas concentradas inseridas de modo aleatório. Classificada como hiperestática de 2º grau, admitirá a formação de 2 rótulas plásticas, sendo que na formação da 3ª rótula plástica caracteriza o colapso da estrutura.

Dados da viga – Perfil I – AÇO A36:

$$\sigma_y = 250\text{mPa} \quad | \quad Z_x = 970\text{cm}^3 \quad | \quad W_x = 870\text{cm}^3 \quad |$$

$$t_w = 6 \text{ mm} \quad | \quad t_f = 10 \text{ mm} \quad | \quad d = 400 \text{ mm} \quad | \quad b_f = 200 \text{ mm}$$

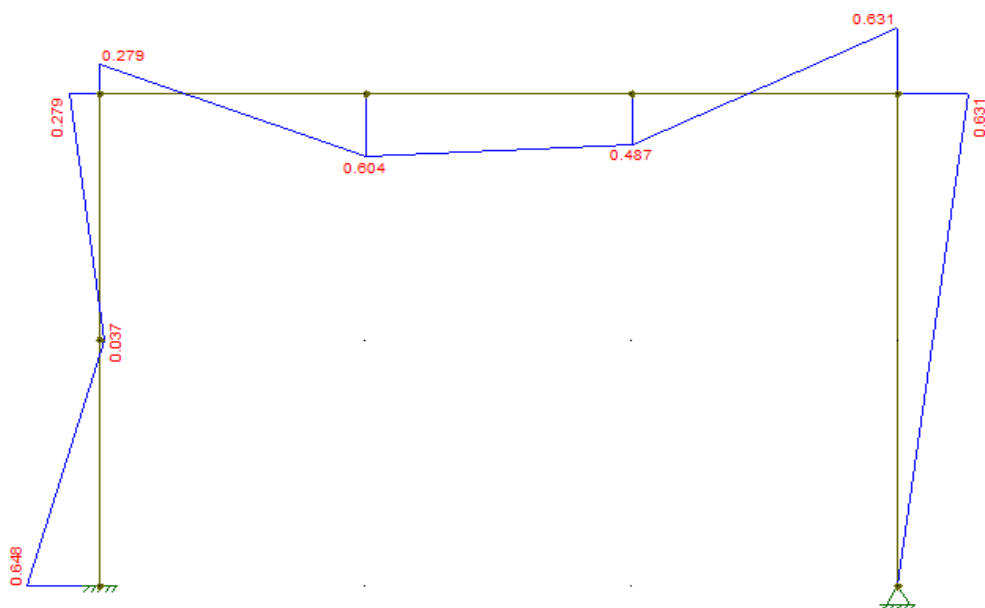
Figura 27: Pórtico 2 graus Hiperestático.



Fonte: o autor, 2022.

Assim, teremos nosso primeiro diagrama de momento fletor, descrito abaixo:

Figura 28: DMF pórtico



Fonte: o autor, 2022.

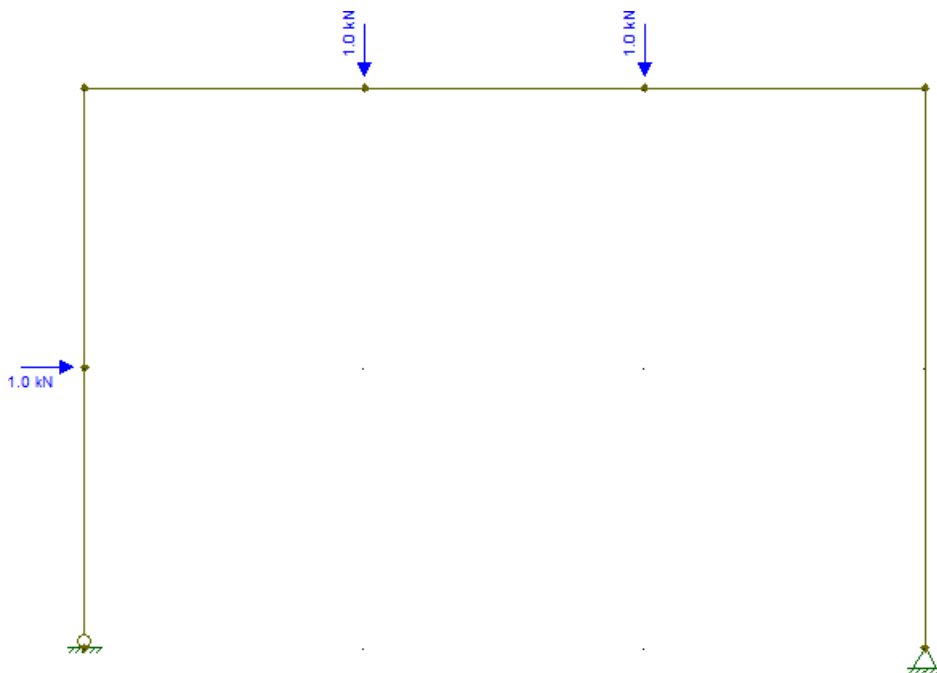
Definimos por convenção que nossa primeira rótula plástica será formada no nosso engaste, ponto da nossa estrutura que será a mais solicitada. Fazendo-se assim a plastificação de sua seção. Calculamos a carga de formação da 1ª rótula:

$$M_p \square \quad 0,648P_1 = \sigma_y * Z \quad 0,648P_1 = 250.10^6 * 970.10^{-6}$$

$$\square_Y Z \quad P_1 = 374,23kN$$

Assim, após atingirmos a carga de formação da nossa 1ª seção plastificada, nossa seção será rotulada, com uma nova configuração descrita abaixo:

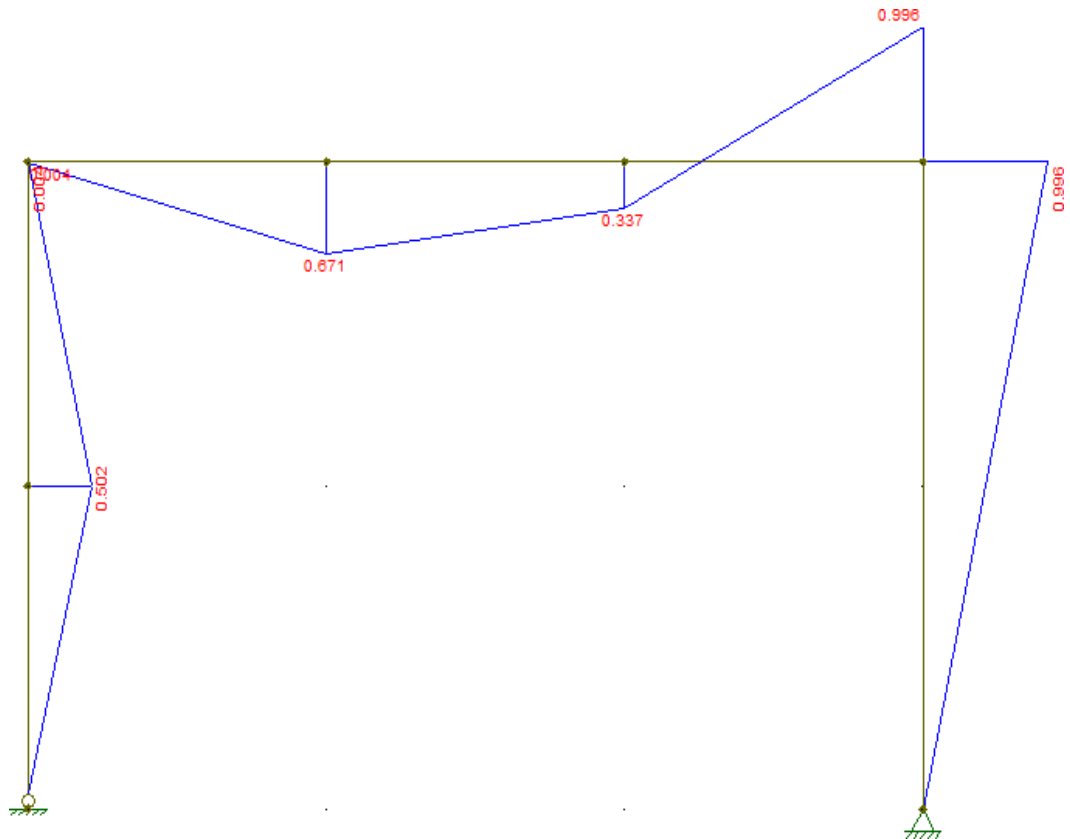
Figura 29: Pórtico – 1ª Rótula



Fonte: o autor, 2022.

Com seu novo diagrama de momento fletor:

Figura 30: DMF pós-rotulação.



Fonte: o autor, 2022.

Com isso, nossa seção superior a extrema direita será a mais solicitada pela redistribuição de momentos, gerando a 2ª seção plastificada, pelo acréscimo de tensão a  $P_1$ , calculada por:

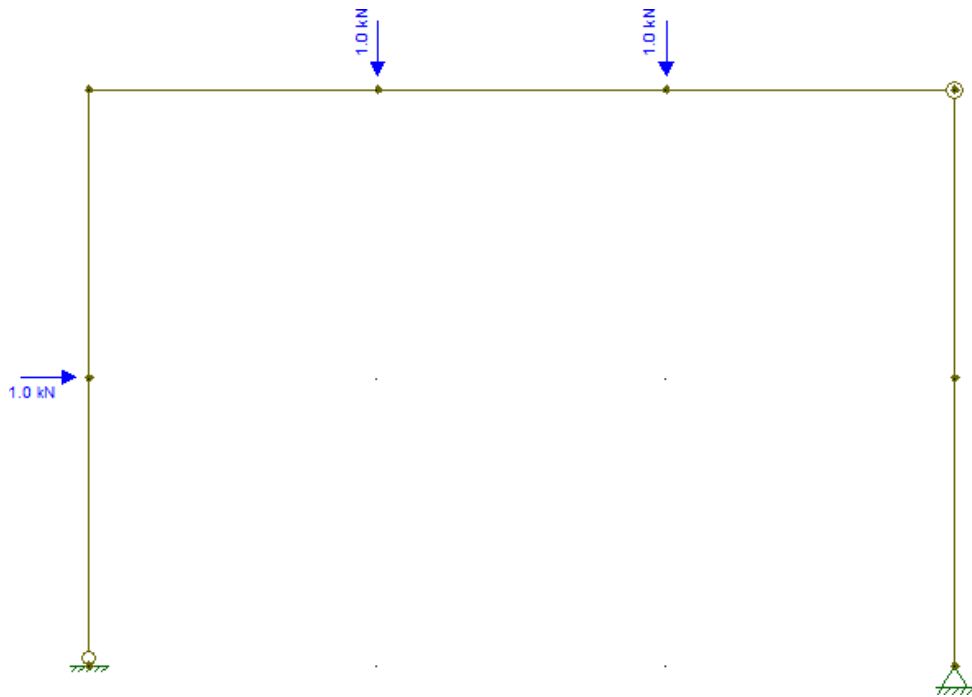
$$M_p \leq 0,631P_1 + 0,996P_2 = \sigma_y * Z$$

$$0,996P_2 = (\sigma_y * Z) - (0,631 * 374230)$$

$$P_2 = 6,40 \text{ kN}$$

Após a carga  $P_2$  inserida na carga  $P_1$ , teremos a nossa estrutura dessa nova forma:

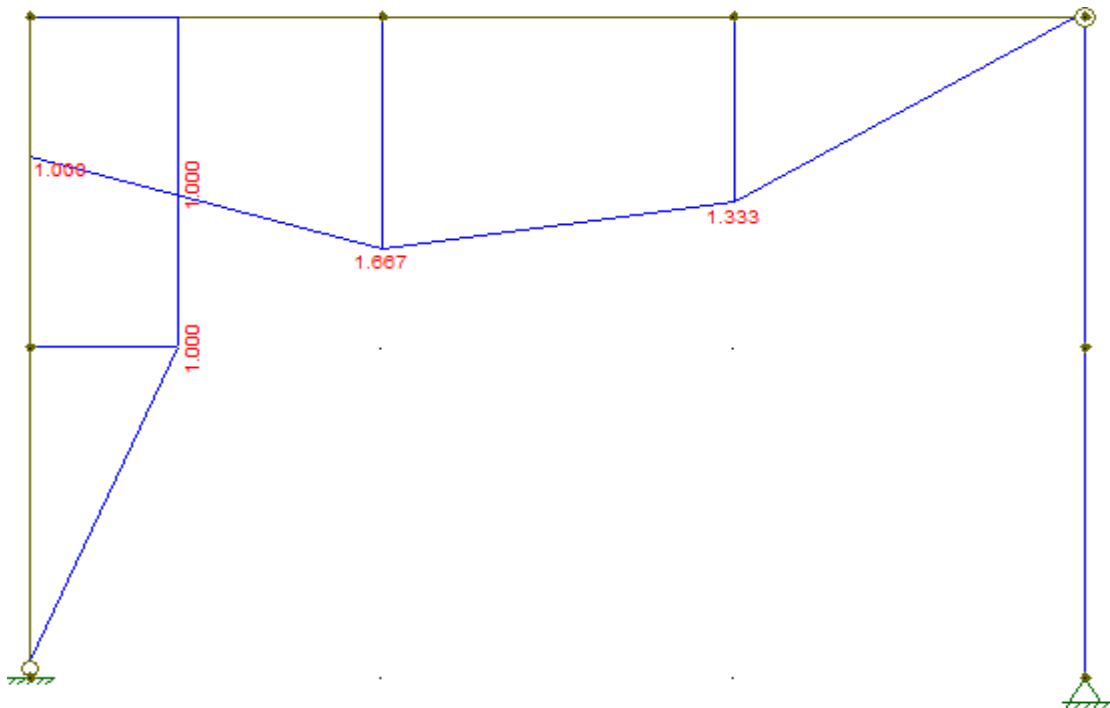
Figura 31 – Estrutura pós-2ª rotulação.



Fonte: o autor, 2022.

Com a nova distribuição de momentos:

Figura 32: DMF Pós-2ª rótula.



Fonte: o autor, 2022.



Portanto, a formação da nossa 3ª rótula plástica, conseqüentemente o colapso da nossa estrutura será formada no ponto X, tornando- a hipostática. Com o acréscimo de carga a  $P_1$  e  $P_2$ , calculado por:

$$M_p \leq \sum YZ$$

$$0,604P_1 + 0,671P_2 + 1,667P_3 = \sigma_y * Z \quad 1,667P_3 = (\sigma_y * Z) - (0,604 * 374230) - (0,671*6400)$$

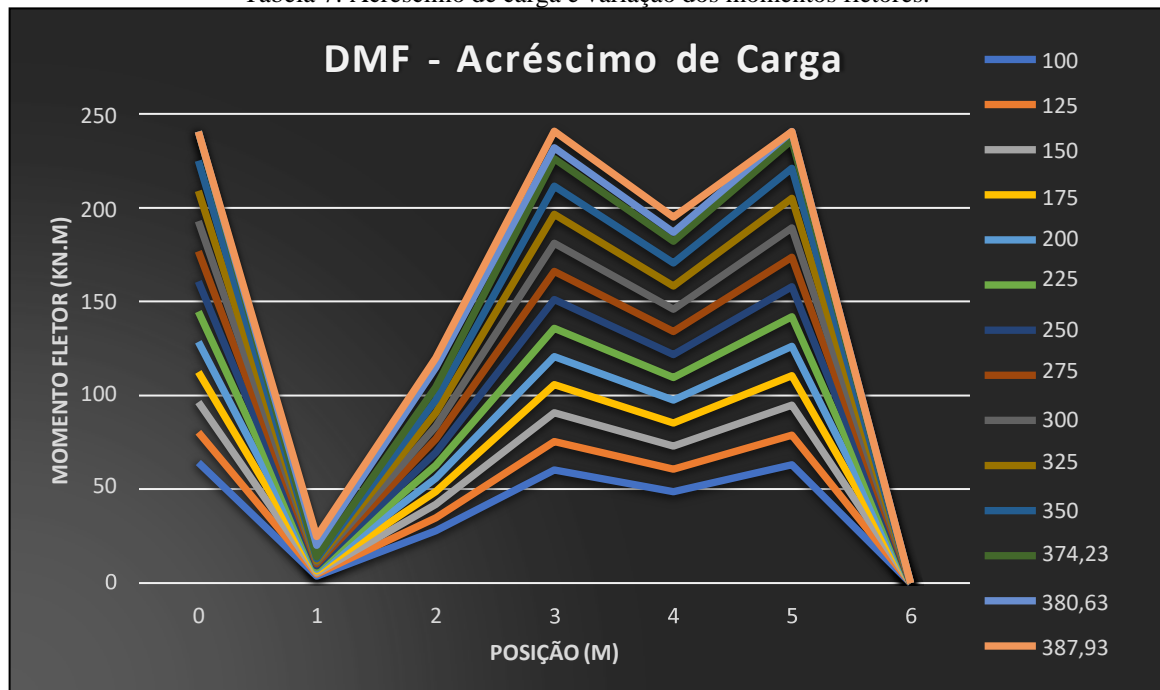
$$P_3 = 7,30 \text{ kN}$$

Portanto, a carga de colapso será a soma das 3 cargas formadoras das respectivas rótulas plásticas.

$$P_c = 374,23 + 6,40 + 7,30$$

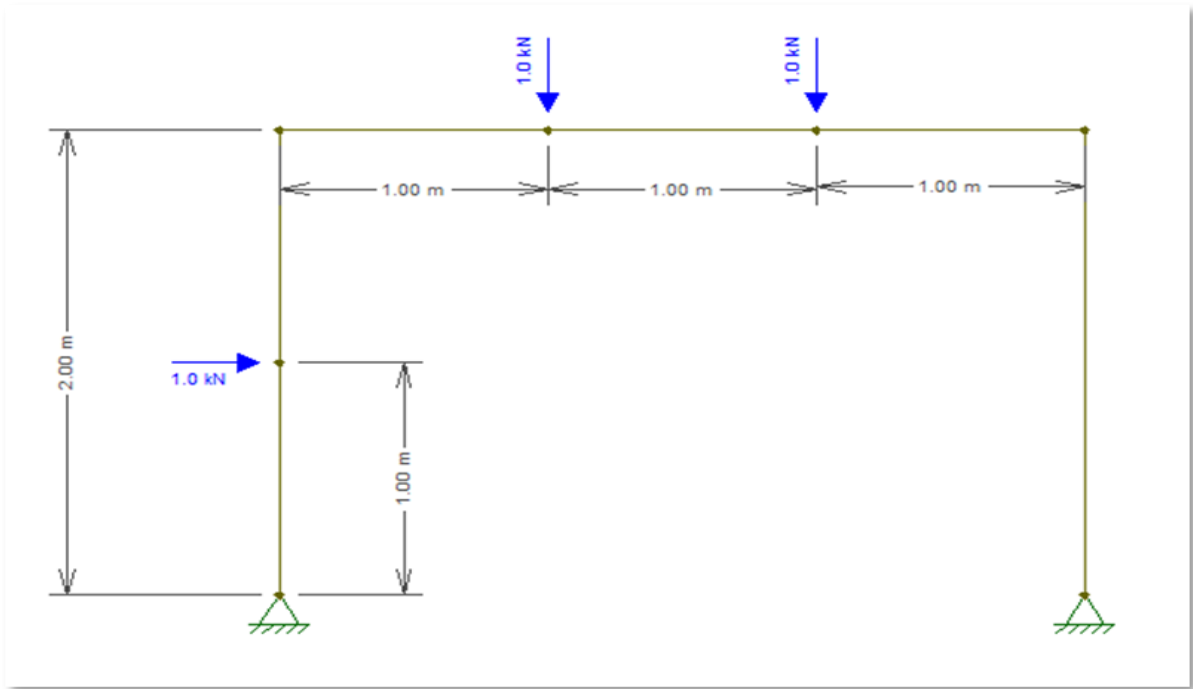
$$P_c = 387,93 \text{ kN}$$

Tabela 7: Acréscimo de carga e variação dos momentos fletores.



Fonte: o autor, 2022.

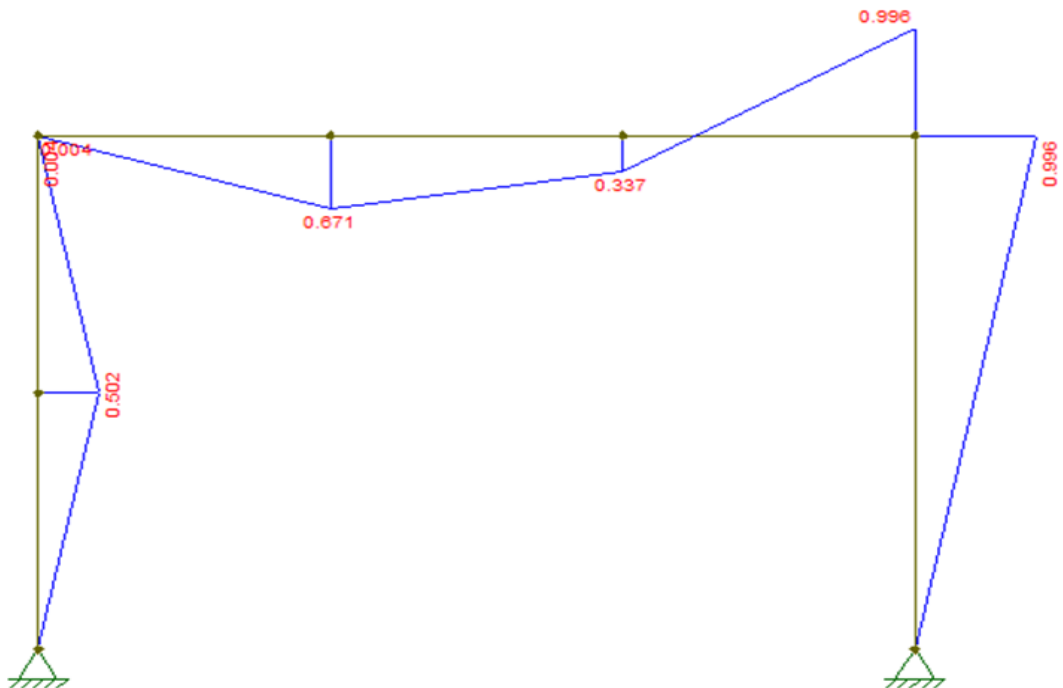
Figura 33: Pórtico simples – 1 grau hiperestático.



Fonte: o autor, 2022.

E seu respectivo diagrama de momento fletor, de acordo com a carga P1 aplicada.

Figura 34 – Diagrama de Momento Fletor do Pórtico.



Fonte: o autor, 2022.

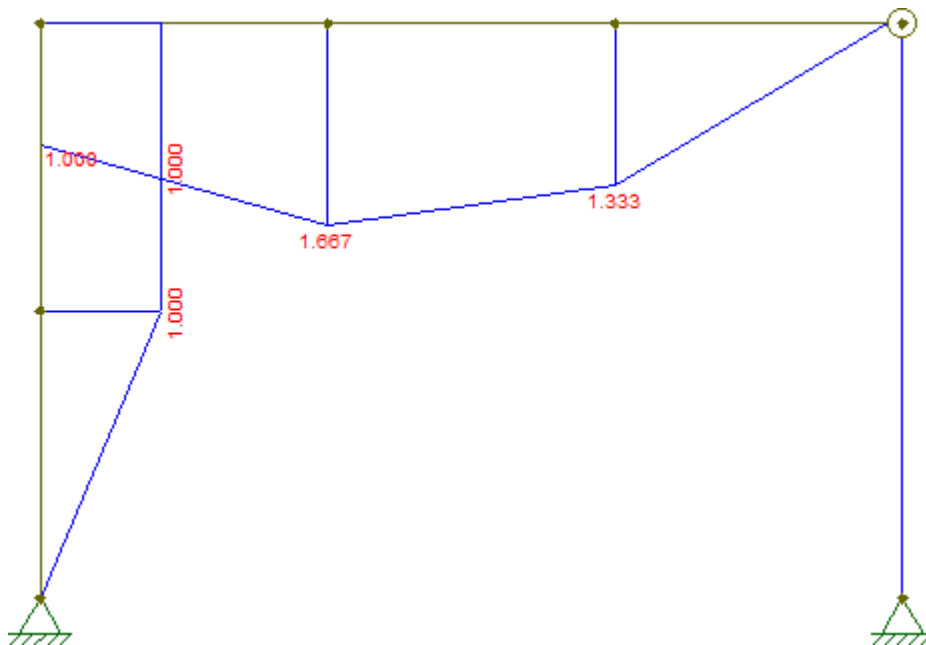
$$M_p = \sigma_Y Z$$

$$0,996P_1 = \sigma_Y * Z \quad 0,996P_1 = 250.10^6 * 970.10^{-6}$$

$$P_1 = 243,48 \text{ kN}$$

Como pode-se verificar, neste caso, atingindo a carga acima teremos a formação da nossa primeira rótula plástica, desse modo, evidencia-se o Diagrama de Momento fletor do pórtico que por sua vez será redistribuído a partir da mesma aplicação de carga:

Figura 35: Diagrama de Momento Fletor após 1ª rótula.



Fonte: o autor, 2022.

Com isso, comparando as duas estruturas definidas, temos o ponto em que se formará a 2ª rótula plástica.

$$M_p = \sigma_Y Z \quad 0,671P_1 + 1,667P_2 = \sigma_Y * Z$$

$$1,667P_2 = (\sigma_Y * Z) - (0,671 * 243480)$$

$$P_2 = 47,47 \text{ kN}$$

Com isso, formaremos nossa 2ª rótula plástica em nossa estrutura. Assim, irá caracterizá-la como hipostática, levando ao colapso estrutural. A carga teórica para tal fato será:

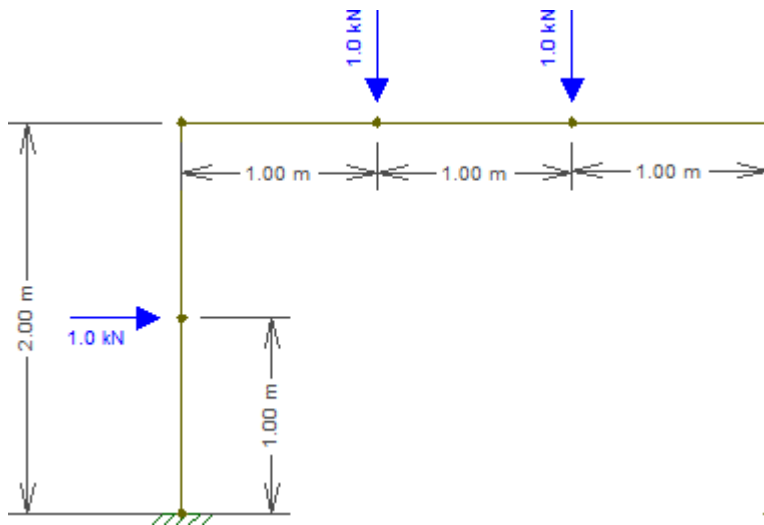
$$P_c = 243,48 + 47,47$$

$$P_c = 290,95 \text{ kN}$$

### 3.9 Pórtico isostático

Consideramos a mesma geometria e materiais descritos acima:

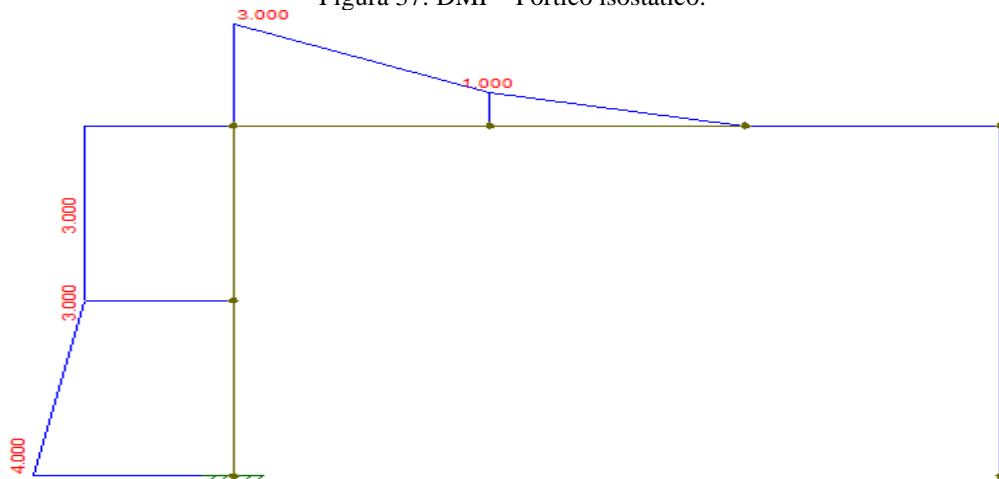
Figura 36: Pórtico isostático genérico.



Fonte: o autor, 2022.

Descrevemos o pórtico isostático, caracterizado como engastado e em balanço. E seu momento fletor é detalhado abaixo:

Figura 37: DMF - Pórtico isostático.



Fonte: o autor, 2022.

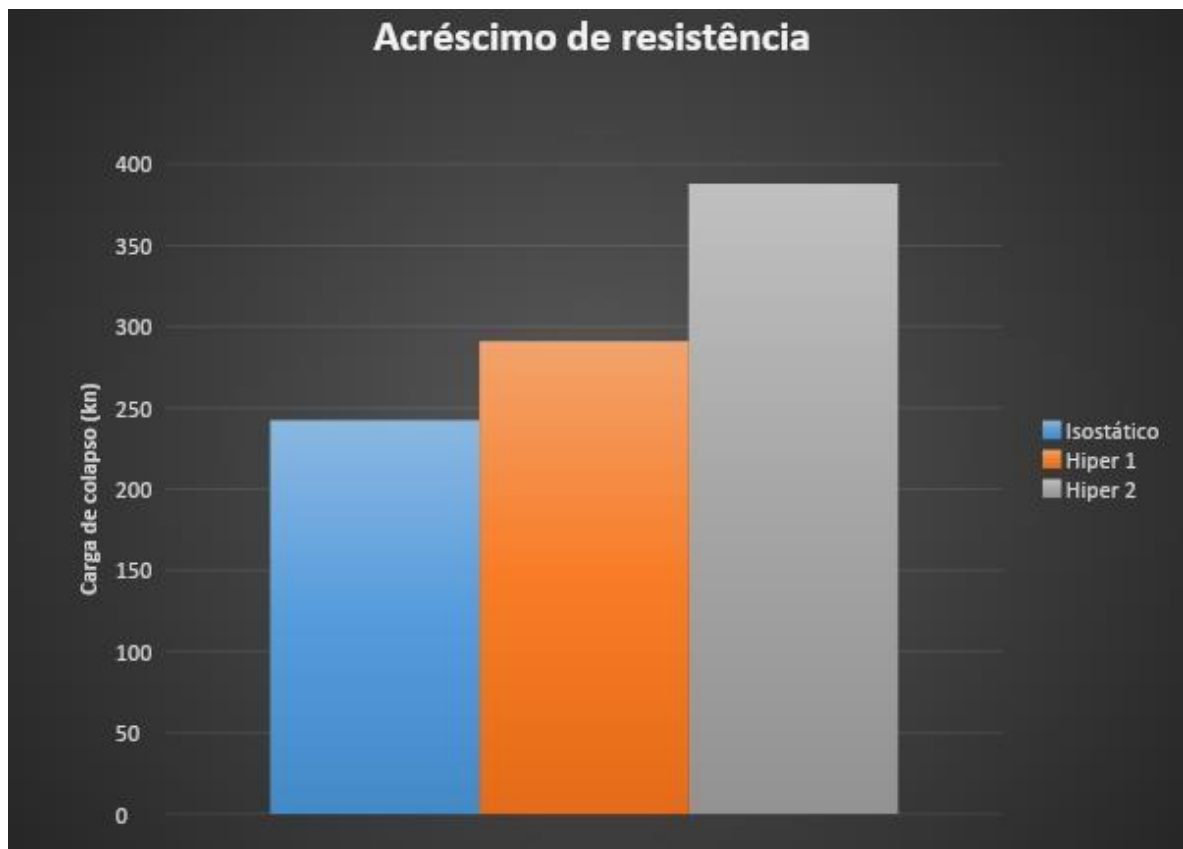
Assim, utilizamos o método do equilíbrio e obtemos:

$$M_p = \sigma_Y Z \quad 4,0P_c = \sigma_Y * Z \quad 4,0P_c = 250.10^6 * 970.10^{-6}$$

$$P_c = 242,5 \text{ kN}$$

Comparando a carga de colapso isostática, com a hiperestática em 2 graus, temos um aumento extremamente considerável de aproximadamente 100%, ou seja, dobrou sua resistência à carga de colapso.

Tabela 8 - Acréscimo de resistência.



Fonte: o autor, 2022.

Assim, conseguimos quantificar o ganho de resistência para cada grau de restrição que aumentamos. Quando aumentamos em 1 grau, tem um ganho de resistência em 20%. Se subirmos mais 1 grau, totalizando 2 graus, temos um ganho de 60%.

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, *Comparação das cargas de colapso plástico de estruturas isostáticas e hiperestáticas de aço*, foi desenvolvido um estudo quantitativo para estruturas metálicas hiperestáticas. Desse modo, tivemos em vista dinamizar e quantificar o ganho de resistência de acordo com o grau de restrição para o projeto pré-estabelecido, de acordo com a carga de serviço que definimos em projeto. Estabeleu-se um aço padrão, de seção padrão para poder-se variar outras características e propriedades estudadas. Tornando assim de fácil entendimento o ganho de resistência em estruturas básicas e que estão presentes no nosso dia a dia.

Além disso, foram inseridas rotinas gráficas de acordo com os diagramas de momento fletor desenvolvidos por cálculos numéricos e também do *software* FTOOL; provando que a seção, uma vez plastificada, seu momento fletor não tem acréscimo e que na seção próxima a ser plastificada, há um salto em seu diagrama, provando a redistribuição de momentos internos na estrutura e indicando onde será a próxima seção plastificada. Dentro deste estudo também podemos definir, onde em que, seções simétricas, o aumento em um grau de restrição, não aumenta a resistência necessariamente. Pois nesses tipos de estruturas, teremos a formação de rótulas duplas, ou seja, duas seções serão plastificadas de acordo com a mesma carga solicitante. Apenas com o aumento de uma restrição adicional será possível quantificar o ganho de resistência. Generalizando, com 1 grau de redundância estrutural temos, aproximadamente, um ganho de 20% na carga máxima, e com 2 graus, tal estrutura, chega a aproximadamente 60% de ganho em relação a mesma estrutura isostática. Sendo assim, através da metodologia das rótulas plásticas, podemos variar cada vez mais as informações para podermos economizar cada vez mais em nossas estruturas. Contudo, assim, confiarmos no diagrama tensão x deformação de cada aço e entender que as cargas posteriores naturais, como as sobrecargas ou fora do controle, como a retração e a fluência serão suportadas pela nossa estrutura. Frisando, sempre, que um bom projeto garante a economia e a segurança de toda estrutura

## REFERÊNCIAS

FREITAS, M D da S. **Estudo teórico-experimental da capacidade de rotação plástica em vigas de concreto armado**. Brasília, 1997. xxii, 130 f., il. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Universidade de Brasília, Brasília, 1997.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. Russell. **Resistência dos Materiais**. 3 ed. MAKRON Books, São Paulo, 1996.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Resistência dos Materiais**. McGraw-Hill, Porto Alegre, RS, 1982.

BEER, F. P.; E. JOHNSTON, Russell Jr., DEWOLF, John T.; MAZUREK, David. F. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. McGraw-Hill, 2008.

**FTOOL**. Disponível em: <<https://www.ftool.com.br/Ftool/site/about>>.

SANTOS, R. E. DOS. **A armação do concreto no Brasil: história da difusão da tecnologia do concreto armado e da construção de sua hegemonia**. Disponível em: [repositorio.ufmg.br/handle/1843/FAEC-84KQ4X](https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/FAEC-84KQ4X). Acesso em janeiro de 2022.

SUSSEKIND, J C. **Curso de Análise Estrutural – Vol. 2: Deformações em Estruturas e Método das Forças**. Editora Globo, Porto Alegre, 1977.

PFEIL, W.. **Estruturas de Aço – Vol. 2; Dimensionamento Prático**. Editora,

TIMOSHENKO, S. P. **Mecânica dos Sólidos – Vol.1; Mecânica Aplicada**. Editora LTC, Riode Janeiro, 1983.

TIMOSHENKO, S. P. & GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos – LTC Editora**. 1982.