



Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Departamento de Engenharia Elétrica



## **Trabalho de Conclusão de Curso**

# **Identificação e Seleção de Estruturas Utilizando Séries de Volterra e Funções de Base Ortonormal**

**Izamara Amancio de Araujo**

João Monlevade, MG  
2017

**Izamara Amancio de Araujo**

**Identificação e Seleção de Estruturas Utilizando  
Séries de Volterra e Funções de Base  
Ortonormal**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

**Universidade Federal de Ouro Preto  
João Monlevade  
2017**

A659i Araújo, Izamara Amancio.  
Identificação e seleção de estruturas utilizando séries de Volterra e funções de base ortonormal [manuscrito] / Izamara Amancio Araújo. - 2017.

69f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.  
Coorientador: Prof. Dr. Víctor C. da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia Elétrica. 2. Identificação de Sistemas. 3. Modelos matemáticos. 4. Sistemas não-lineares. I. Braga, Márcio Feliciano. II. Campos, Víctor C. da Silva. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 681.5

Catálogo: [ficha@sisbin.ufop.br](mailto:ficha@sisbin.ufop.br)



## ATA DE DEFESA

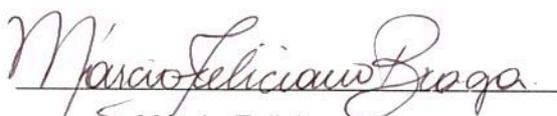
Aos 6 dias do mês de abril de 2017, às 16 horas, no bloco B deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pela formanda Izamara Amâncio de Araújo, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Márcio Feliciano Braga, Víctor Costa da Silva Campos, Anny Verly e Rodrigo Augusto Ricco.

A candidata apresentou a monografia intitulada: Identificação e Seleção de Estruturas Utilizando Séries de Volterra e Funções de Base Ortonormal. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela APROVAÇÃO da candidata, com a nota média 10,0, de acordo com a Tabela 1. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pela formanda.

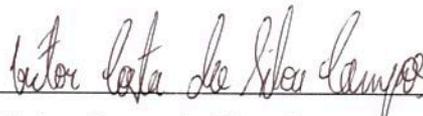
Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

Banca Examinadora	Nota
Márcio Feliciano Braga	10,0
Víctor Costa da Silva Campos	10,0
Anny Verly	10,0
Rodrigo Augusto Ricco	10,0
<b>Média</b>	<b>10,0</b>

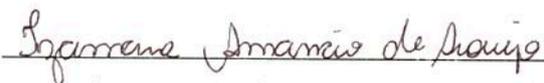
João Monlevade, 06 de abril de 2017.



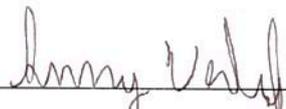
Márcio Feliciano Braga  
Professor Orientador



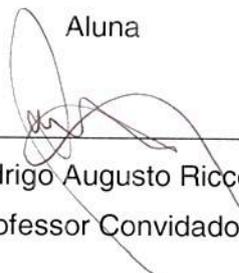
Víctor Costa da Silva Campos  
Professor Coorientador



Izamara Amâncio de Araújo  
Aluna



Anny Verly  
Professora Convidada



Rodrigo Augusto Ricco  
Professor Convidado



---

## ANEXO X - TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “Identificação e Seleção de Estruturas Utilizando Séries de Volterra e Funções de Base Ortonormal” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 06 de abril de 2017.

Isamara Jomarcio de Araujo  
Nome completo do(a) aluno(a)

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades, permitindo que tudo isso acontecesse ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Gostaria de agradecer imensamente a minha família por ter me apoiado nas horas difíceis, me encorajando a buscar meus sonhos. Agradeço aos meus pais pelo amor incondicional e todos os esforços que fizeram para que esta etapa fosse concluída. Agradeço em especial ao meu pai, Adaulto, por sempre acreditar em mim e me apoiar incondicionalmente nas minhas decisões e aventuras. À minha mãe, Izabel, por ter sempre uma palavra de apoio e carinho. À minha irmã, Izabella, por estar sempre presente me dando conselhos e sendo um exemplo a seguir. Ao meu namorado, Luiz Fernando, por estar ao meu lado durante todo esse momento universitário, celebrando as vitórias e chorando as derrotas, sendo paciente todo o tempo.

Um agradecimento especial é dedicado ao meu orientador, Márcio Braga, e coordenador, Víctor Campos, por gentilmente terem me ajudado e me guiado no decorrer deste trabalho, me dando todo o suporte necessário. Agradeço pelas valiosas críticas, sugestões e incentivos, sem as quais não conseguiria ter concluído essa etapa de estudos.

*"The first and best victory is to conquer self."*

*– Plato*

# Resumo

A identificação de sistemas é utilizada para obtenção de modelos matemáticos que descrevem a dinâmica do processo, em que as entradas e saídas são conhecidas e são provenientes de ensaios experimentais. Usualmente, utiliza-se a identificação quando não se tem conhecimento das leis físicas que regem o sistema ou o processo de obter essas equações físicas é complexo. Grande parte dos sistemas reais são não lineares, sendo que diversas classes de modelos para representar tais sistemas podem ser encontradas na literatura. Uma classe que apresenta propriedades interessantes para descrever sistemas não lineares com memória é o modelo de Volterra, objeto de estudo deste trabalho. Os modelos de Volterra são parametrizados por funções multidimensionais, os *kernels*. A principal desvantagem na utilização das séries de Volterra é a quantidade de parâmetros necessários para descrever o sistema. Tal desvantagem agrava-se ainda mais quando os sistemas a serem identificados possuem dinâmica lenta ou alta não linearidade. Visando minimizar esse obstáculo são utilizadas as funções de base ortonormal (FBO) para obter os *kernels* de Volterra. As FBO permitem empregar o conhecimento *a priori* do sistema na construção das bases, com isso a quantidade de parâmetros necessários para descrever o sistema pode ser reduzida. As principais bases utilizadas são as de Laguerre e Kautz. As funções de Laguerre utilizam polos reais na construção das bases, portanto são empregadas, especialmente, para descrever sistemas com dinâmicas amortecidas. As funções de Kautz melhor representam sistemas com dinâmicas subamortecidas, pois na construção das bases são utilizados polos complexos. A escolha adequada dos polos que parametrizam essas bases é um passo importante no processo de identificação, sendo assim é utilizado a estratégia de otimização *Simulated Annealing*, que visa minimizar uma função de custo e obter uma solução ótima ao final do processo. É apresentada a identificação de sistemas com *kernels* de segunda ordem simulados, utilizando-se o modelo de Volterra parametrizados por funções de Laguerre e Kautz. Apresentam-se análises comparativas que permitem avaliar como se comportam as saídas dos sistemas quando variam-se os polos e o número de funções utilizados na construção da base. Em seguida, realiza-se a identificação de um sistema real de um pequeno aquecedor elétrico com dissipação variável, em que os polos e a estrutura do sistema são desconhecidas. Utilizou-se o *Simulated Annealing* para obtenção dos melhores polos que representam o sistema. Os modelos obtidos são descritos por *kernels* simétricos e assimétricos de primeira, segunda e terceira ordem em associação a fim de definir a melhor estrutura para o sistema.

**Palavras-chave:** Identificação de sistemas, Sistemas não lineares, Séries de Volterra, Funções de base ortonormal, Bases de Laguerre, Bases de Kautz, *Simulated Annealing*.

# Abstract

System identification is used to obtain a mathematical model that describes the dynamics of a system, where the inputs and outputs are known, which are provided by experimental data. Usually, identification is used when there is no knowledge about the system's physics or the process to obtain the physical equations is complex. The majority of real systems is nonlinear, due to that several model classes to represent such systems can be found in the literature. A class that shows interesting properties to describe nonlinear systems with memory is the Volterra model, object of study in this paper. The Volterra models are parameterized by multidimensional functions, named as kernels. The main disadvantage in using Volterra series is the high numbers of parameters necessary to describe the system. Such disadvantage aggravates even more when the systems being identified have slow dynamic or high order of nonlinearity. Aiming to minimize these obstacles, the orthonormal basis function (OBF) will be used to obtain the Volterra kernels. The OBF allow the use of *a priori* knowledge of the systems to build the basis, then the number of parameters necessary to describe the systems can be reduced. The main basis that are used in the literature are Laguerre and Kautz. The Laguerre functions use real poles to build the basis, therefore they are employed, especially, to describe systems with damped dynamics. The Kautz functions better represent systems with underdamped dynamics, because complex poles are used in the basis construction. The right choice of the poles, that parameterize the basis, is an important step in the identification process. Thus, in this work, it is used the optimization strategy Simulated Annealing, that aims to minimize a cost function and to find the optimum solution at the end of the process. A simulated second order system identification, in which Volterra models are parameterized by Laguerre and Kautz functions, is presented. Comparative analyses allow to evaluate how the input and output of the systems behave when the poles and the number of functions used to build the basis vary. Subsequently, a real system of an small electric heater with variable dissipation is identified, where the poles and structure of the system are unknown. The Simulated Annealing algorithm is used to obtain the best poles that represent the system. The obtained models are described by symmetric and asymmetric kernels of first, second and third order in association is employed to define the best structure of the system.

**Keywords:** Systems Identification, Nonlinear Systems, Volterra Series, Orthonormal Basis Function, Laguerre Basis, Kautz Basis, Simulated Annealing.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Pseudo-código do algoritmo <i>Simulated Annealing</i> . . . . .	14
Figura 2 – <i>Kernel</i> de segunda ordem com dinâmica dominante e igual em todas as direções para o sistema com polos reais. . . . .	17
Figura 3 – Entrada e saída do sistema de segunda ordem simétrico com polos reais.	18
Figura 4 – Identificação utilizando polo ótimo $0,7$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	19
Figura 5 – Validação da identificação utilizando polo ótimo $0,7$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	19
Figura 6 – Identificação utilizando polo não ótimo $0,3$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.	20
Figura 7 – Validação da identificação utilizando polo não ótimo $0,3$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	20
Figura 8 – Identificação utilizando polo não ótimo $0,3$ e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.	21
Figura 9 – Validação da identificação utilizando polo não ótimo $0,3$ e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	21
Figura 10 – Identificação utilizando polos ótimos $0,7 \pm 0i$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . .	22
Figura 11 – Validação da identificação utilizando polos ótimos $0,7 \pm 0i$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	22
Figura 12 – Identificação utilizando polos não ótimos $0,3 \pm 0,2i$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.	23

Figura 13 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos $0,3 \pm 0,2i$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	23
Figura 14 – Identificação utilizando polos não ótimos $0,3 \pm 0,2i$ e 10 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	24
Figura 15 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos $0,3 \pm 0,2i$ e 10 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	24
Figura 16 – <i>Kernel</i> de segunda ordem com dinâmicas dominantes iguais em todas as direções. . . . .	26
Figura 17 – Entrada e saída do sistema de segunda ordem simétrico com polos complexos. . . . .	26
Figura 18 – Identificação utilizando polo ótimo $0,0352$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . .	27
Figura 19 – Validação da identificação utilizando polo ótimo $0,0352$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	27
Figura 20 – Identificação utilizando polo ótimo $0,0352$ e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	28
Figura 21 – Validação da identificação utilizando polo ótimo $0,0352$ e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	28
Figura 22 – Identificação utilizando polos ótimos $0,3 \pm 0,8i$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	29
Figura 23 – Validação da identificação utilizando polos ótimos $0,3 \pm 0,8i$ e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	29

Figura 24 – Identificação utilizando polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	30
Figura 25 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	30
Figura 26 – Identificação utilizando polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	31
Figura 27 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e 10 funções. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	31
Figura 28 – <i>Kernel</i> de segunda ordem com dinâmicas dominantes diferentes em todas as direções. . . . .	33
Figura 29 – Entrada e saída do sistema de segunda ordem assimétrico. . . . .	33
Figura 30 – Identificação utilizando os polos ótimos $0,3 \pm 0,8i$ de uma única direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	34
Figura 31 – Validação da identificação utilizando os polos ótimos $0,3 \pm 0,8i$ de uma única direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	34
Figura 32 – Identificação utilizando polos ótimos $0,3611 \pm 0,5327i$ e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	35
Figura 33 – Validação da identificação utilizando polos ótimos $0,3611 \pm 0,5327i$ e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	35
Figura 34 – Identificação utilizando polos ótimos $0,3 \pm 0,8i$ e $0,6 \pm 0i$ em ambas direções e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	36
Figura 35 – Validação da identificação utilizando polos ótimos $0,3 \pm 0,8i$ e $0,6 \pm 0i$ em ambas direções e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	37
Figura 36 – Identificação utilizando diferentes polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e $0,5 \pm 0i$ para cada direção e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	37

Figura 37 – Validação da identificação utilizando diferentes polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e $0,5 \pm 0i$ para cada direção e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	38
Figura 38 – Identificação utilizando diferentes polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e $0,5 + 0i$ para cada direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	38
Figura 39 – Validação da identificação utilizando diferentes polos não ótimos $0,4 \pm 0,7i$ e $0,5 + 0i$ para cada direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	39
Figura 40 – Fluxograma do <i>Simulated Annealing</i> para obtenção dos melhores polos que parametrizam as bases de Kautz. . . . .	42
Figura 41 – Entrada e saída do sistema de um aquecedor elétrico com dissipação variável. . . . .	43
Figura 42 – Identificação utilizando os polos $0,7292 \pm 0,0014i$ e $0,6797 \pm 0,3372i$ e 2 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	43
Figura 43 – Validação da identificação utilizando os polos $0,7292 \pm 0,0014i$ e $0,6797 \pm 0,3372i$ e 2 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	44
Figura 44 – Identificação utilizando os polos $0,7292 \pm 0,0014i$ e $0,6797 \pm 0,3372i$ e 10 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	45
Figura 45 – Validação da identificação utilizando os polos $0,7292 \pm 0,0014i$ e $0,6797 \pm 0,3372i$ e 10 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	45
Figura 46 – Identificação utilizando os polos $0,7358 \pm 0,0171i$ ; $0,6629 \pm 0,0414i$ e $0,7442 \pm 0,1615i$ e 2 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	46
Figura 47 – Validação da identificação utilizando os polos $0,7358 \pm 0,0171i$ ; $0,6629 \pm 0,0414i$ e $0,7442 \pm 0,1615i$ e 2 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	46

Figura 48 – Identificação utilizando os polos $0,7358 \pm 0,0171i$ ; $0,6629 \pm 0,0414i$ e $0,7442 \pm 0,1615i$ e 6 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	47
Figura 49 – Validação da identificação utilizando os polos $0,7358 \pm 0,0171i$ ; $0,6629 \pm 0,0414i$ e $0,7442 \pm 0,1615i$ e 6 funções na base, parametrizada por <i>kernels</i> assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema. . . . .	48

# Lista de tabelas

Tabela 1	– Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Laguerre e Kautz utilizadas e polos escolhidos para o sistema simétrico (3.6) com polos em 0,7 e 0,1. . . . .	25
Tabela 2	– Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Kautz e Laguerre utilizadas e polos escolhidos para o sistema simétrico (3.11) com polos em $0,3 \pm 0,8i$ . . . . .	32
Tabela 3	– Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Kautz utilizadas e polos escolhidos para o sistema assimétrico (3.14) com polos em $0,3 \pm 0,8i$ ; 0,7 e 0,1. . . . .	36
Tabela 4	– Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Kautz utilizadas e polos escolhidos para o sistema (3.14) com polos em $0,3 \pm 0,8i$ ; 0,7 e 0,1. . . . .	39
Tabela 5	– Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções utilizando os polos $0,7292 \pm 0,0014i$ e $0,6797 \pm 0,3372i$ . . . . .	44
Tabela 6	– Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções utilizando os polos $0,7358 \pm 0,0171i$ ; $0,6629 \pm 0,0414i$ e $0,7442 \pm 0,1615i$ . . . . .	47

# Lista de símbolos

$k$	Instante temporal
$u(k)$	Entrada do sistema
$y(k)$	Saída do sistema
$h$	<i>Kernel</i> da série de Volterra
$h_0$	Possível nível DC inserido no sistema
$\eta$	Grau da resposta ao impulso
$\delta$	Escalar que representa o período de tempo a partir do qual a contribuição do <i>kernel</i> pode ser desprezada
$\alpha_{i_\eta}$	Coefficientes da série de Volterra
$\phi$	Conjunto de funções ortonormais
$\Psi$	Funções de Laguerre e Kautz
$M$	Número de funções na base
$p$	Polo da função de Laguerre
$n$	Número de funções na base
$\beta, \bar{\beta}$	Polos da função de Kautz
$\Delta$	Diferença entre a solução atual e nova solução da função custo no algoritmo <i>Simulated Annealing</i>
$T$	Parâmetro de controle que corresponde a temperatura do material
$S$	Função de custo
$N_d$	Número de dados de entrada e saída disponíveis
$\hat{y}(k)$	Saída estimada do sistema

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS</b>	<b>5</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelos de Volterra</b>	<b>5</b>
<b>2.3</b>	<b>Base de funções ortonormais</b>	<b>8</b>
2.3.1	Funções de Laguerre	8
2.3.2	Funções de Kautz	10
<b>2.4</b>	<b>Técnica de Seleção Ótima de Polos</b>	<b>12</b>
2.4.1	Simulated Annealing	13
<b>3</b>	<b>ESTRATÉGIAS DE IDENTIFICAÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>3.2</b>	<b>Sistema Simétrico com Polos Reais</b>	<b>16</b>
<b>3.3</b>	<b>Sistema Simétrico com Polos Complexos</b>	<b>25</b>
<b>3.4</b>	<b>Sistema Assimétrico</b>	<b>32</b>
3.4.1	Identificação do Sistema Assimétrico Utilizando <i>Kernels</i> Simétricos	34
3.4.2	Identificação do Sistema Assimétrico Utilizando <i>Kernels</i> Assimétricos	36
<b>4</b>	<b>ESTUDO DE CASO</b>	<b>40</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>40</b>
<b>4.2</b>	<b>Identificação do Sistema de um Aquecedor Elétrico com Dissipação Variável</b>	<b>40</b>
4.2.1	Identificação Utilizando <i>Kernels</i> Simétricos	43
4.2.2	Identificação Utilizando <i>Kernels</i> Assimétricos	45
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>49</b>
<b>5.1</b>	<b>Conclusão</b>	<b>49</b>
<b>5.2</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>51</b>

# 1 Introdução

A existência de modelos para descrever situações está presente em toda parte. Em vários processos do dia a dia, podemos encontrar ações baseadas em modelos, como, por exemplo, quando tocamos um instrumento musical seguimos uma sequência de notas musicais para obter o resultado desejado, que é a melodia. Os modelos são úteis para conhecer, analisar, estimar e controlar processos. Na engenharia, encontrar bons modelos é uma importante ferramenta para se obter a dinâmica dos sistemas identificados (AGUIRRE, 2007). Nesse sentido, a modelagem consiste em encontrar um modelo matemático que represente as características do sistema real. Quando se emprega a técnica da modelagem matemática, existem algumas restrições na obtenção adequada do conjunto de equações que descrevem o modelo, pois é preciso conhecer a física ou a natureza do processo e utilizar tal conhecimento na representação matemática que melhor descreva o sistema (RAGHUNATHAN, 1993).

As técnicas de modelagem podem ser classificadas em três diferentes categorias com base no conhecimento do sistema: modelagem caixa-branca, modelagem caixa-preta e modelagem caixa-cinza. A modelagem caixa-branca é realizada quando se tem total conhecimento do comportamento físico do problema. São utilizadas equações físicas conhecidas para modelar o sistema. As limitações deste método ocorrem quando se tem sistemas muito complexos, ou o conhecimento do sistema físico é limitado. Desse modo a modelagem caixa-branca passa a ser complexa, demorada, ou em alguns casos, impossível de ser utilizada (PUCCIARELLI; BARRETO; SERRA, 2005). Na modelagem caixa-preta, não se tem nenhum conhecimento físico do problema e toda modelagem é feita baseando-se nos sinais de entrada e saída observadas do sistema, o que pode gerar modelos sem significado físico (CORRÊA; AGUIRRE, 2004). A modelagem caixa-cinza pode ser entendida como uma mescla da modelagem caixa-branca e caixa-preta, a qual contém informações tanto provenientes das equações físicas do processo, quanto da análise da entrada e saída do sistema. Sendo assim, informações de ambas as técnicas devem estar corretas e coerentes para o modelo identificado ser correto (CORRÊA; AGUIRRE, 2004).

Uma técnica que pode ser utilizada para realizar a modelagem caixa-preta é a identificação de sistemas, uma vez que a identificação de sistemas é necessariamente proveniente de dados experimentais, onde as entradas e saídas são analisadas gerando um modelo matemático ou gráfico do sistema (LJUNG, 1987). Deste modo, o processo de identificação também é conhecido como identificação caixa-preta. A identificação é principalmente utilizada para identificar sistemas que não se tem conhecimento físico dos mesmos ou quando o processo de obter as equações físicas é demorado ou muito difícil. Pode-se citar diversas áreas em que a identificação é utilizada, como por exemplo: na modulação autonômica da frequência cardíaca (CHON et al., 1997); em sistemas

transcríticos de compressão de vapor (RASMUSSEN; ALLEYNE; MUSSER, 2005); em atuadores pneumáticos inteligentes (OSMAN et al., 2012), etc.

Segundo Aguirre (2007), o processo de identificação pode ser constituído de cinco etapas principais: coleta dos dados, escolha da representação matemática adequada, determinação da estrutura do modelo, estimação dos parâmetros e validação do modelo.

A identificação pode ser empregada em sistemas lineares ou não lineares, sendo que grande parte dos sistemas reais são sistemas não lineares. A identificação desse tipo de sistema gera várias possibilidades de descrever um único sistema. Identificar sistemas não lineares utilizando uma aproximação linear é possível, porém existem algumas desvantagens, entre elas, a perda de informações do sistema, uma vez que a aproximação linear é realizada em torno de um único ponto (ponto de equilíbrio). Os sistemas não lineares podem ser representados por diversas classes de modelos, tais como: redes neurais (KABIR et al., 2010); funções de base radial (ERFANIAN, 1998); Wavelets (PAN, 1998); funções racionais e funções polinomiais (GERMANI; MANES, 2008); séries de Volterra (BRAGA et al., 2011).

Para o presente trabalho foi escolhido o modelo de Volterra para representar os sistemas não lineares, pois as séries de Volterra conseguem descrever modelos de sistemas não lineares com memória (RUGH, 1981), além de representar respostas ao impulso, baseadas em filtro FIR (Finite Impulse Response). Entretanto, os modelos de Volterra apresentam uma grande desvantagem na quantidade de parâmetros necessários para descrever sistemas não lineares que dependem da saída (BRAGA et al., 2011). A fim de minimizar o problema serão utilizadas as funções de base ortonormais (FBO), em que se realiza a expansão em torno de um polo, o qual pode ser real ou complexo. Quando a dinâmica do sistema é essencialmente representada por polos reais, utilizam-se as funções de Laguerre, enquanto que as funções de Kautz representam melhor sistemas descritos por polos complexos conjugados (WILLIAMSON, 2001). Adicionalmente, quando FBO são utilizadas conjuntamente com a série de Volterra, pode-se reduzir o número de parâmetros para descrever o modelo, especialmente se os polos utilizados para parametrizar as funções são numericamente próximos dos polos do sistema real (ISAKSSON; RÖNNOW, 2007).

As séries de Volterra e funções de base ortonormal estão presentes em diversos trabalhos na literatura. Na eletrônica podem ser vistos em sistemas de amplificador de potência como em Isaksson e Rönnow (2007) e Tehrani et al. (2008). Na química podem estar presentes na modelagem da planta de um reator tanque agitado contínuo, em Oliveira, Amaral e Latawiec (2003) ou em processos de oxidação atrazina (BIBES et al., 2005). Também pode-se encontrar aplicações na biologia para descrever sistemas *smooth pursuit*, que são sistemas neuromusculares complexos que regulam movimentos de perseguição oculares suaves, a fim de manter o alvo no campo visual (JANSSON; MEDVEDEV, 2014).

Os polos utilizados para parametrizar as bases das FBO muitas vezes são desconhecidos. No entanto, existem diversas técnicas que podem ser utilizadas para seleção dos polos

ótimos, como por exemplo a busca exata (gradientes) (BRAGA et al., 2011), programação quadrática (SILVA, 2011), inteligência computacional (meta-heurísticas) (OROSKI et al., 2014), entre outras.

## 1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é realizar a identificação de sistemas reais, em que os polos e a estrutura do sistema são desconhecidos, utilizando séries de Volterra e funções de base ortonormal (Laguerre e Kautz). Apresenta-se uma técnica de seleção para escolha dos polos que parametrizam as FBO. Primeiramente, mostra-se como a seleção pode ser feita de forma aleatória, o que implica em um grande número de funções na base para atingir o erro mínimo desejável. A técnica escolhida para seleção dos polos ótimos foi o *Simulated Annealing* (KIRKPATRICK et al., 1983), pois trata de uma estratégia de otimização que utiliza uma técnica de inteligência computacional, o algoritmo visa minimizar uma função de custo a partir de um estado inicial aleatório e obter uma solução ótima ao final do processo.

## 1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho possui a seguinte estrutura:

O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução da modelagem e suas técnicas, bem como da identificação de sistemas. Cita algumas classes de modelos que são comumente utilizados na identificação de sistemas não lineares. Descreve a classe de modelo escolhido, modelo de Volterra, discutindo suas vantagens e desvantagens e justificando a utilização das funções de base ortonormal, assim como uma sucinta descrição desse tipo de função é realizada. O mesmo capítulo é finalizado apontando o objetivo do presente trabalho.

O Capítulo 2 descreve os fundamentos básicos dos modelos de Volterra e das funções de base ortonormal. As séries de Volterra são apresentadas, mostrando como são parametrizadas e suas principais propriedades. As séries de Volterra podem ser escritas no modelo truncada, sendo assim, é indicado como esse processo é realizado. Propriedades das FBO também são mostrados, juntamente com a representação das séries de Volterra utilizando FBO. As principais bases, Laguerre e Kautz, utilizadas para descrever esses tipos de funções são apresentadas, além de como deve ser feita a escolha do seus polos e números de função na base. Para a escolha adequada dos polos é utilizada a estratégia de otimização *Simulated Annealing*, sendo assim, é descrito o seu algoritmo e princípio de funcionamento.

No Capítulo 3 é realizada a identificação de sistemas simulados de segunda ordem, simétrico e assimétrico, com polos reais e complexos, utilizando as séries de Volterra parametrizadas por funções de Laguerre e Kautz. Como os polos dos sistemas são conhe-

cidos, são utilizados polos ótimos e não ótimos no processo de identificação, alterando o número de funções na base para garantir a saída desejada. Para o sistema assimétrico utilizam-se *kernels* simétricos e assimétricos na identificação. Em seguida, é realizada uma análise comparativa dos resultados obtidos.

No Capítulo 4 é feito um estudo de caso de um sistema de um pequeno aquecedor elétrico com dissipação variável. Utiliza-se o *Simulated Annealing* para obtenção dos melhores polos que parametrizam as bases de Kautz. São usados *kernels* simétricos e assimétricos de primeira e segunda ordem no processo de identificação. Analisam-se os resultados encontrados e defini-se o melhor modelo de Volterra para o sistema em questão.

O Capítulo 5 discute as conclusões do uso da série de Volterra parametrizada por funções de Laguerre e Kautz na identificação de sistemas simulados e sistemas reais. A eficiência do *Simulated Annealing* para obtenção dos polos também é analisada.

## 2 Fundamentos dos Modelos de Volterra, Funções Ortonormais e Técnicas de Seleção de Polos

### 2.1 Introdução

A identificação de sistemas não lineares utilizando a série de Volterra vem sendo amplamente utilizada na literatura. As séries de Volterra têm a propriedade de descrever sistemas não lineares com memória, no entanto possuem a desvantagem de utilizar muitos parâmetros para descrever o sistema. Visando minimizar esse obstáculo é utilizado as funções de base ortonormal que utilizam conhecimento *a priori* do sistema na construção das bases. As principais bases utilizadas para descrever funções ortonormal são as bases de Laguerre e Kautz, que são parametrizadas por polos. A escolha dos polos interfere diretamente na quantidade de funções que são utilizadas na obtenção do modelo. Neste trabalho, para realizar a escolha adequada dos polos ótimos será utilizada uma estratégia de otimização, *Simulated Annealing*, que, a partir de um conjunto de polos iniciais, converge para os polos ótimos. Neste capítulo, são apresentadas as principais propriedades das séries de Volterra, bem como seu modelo matemático. Apresenta-se, também, como as FBO são utilizadas para descrever o modelo de Volterra por meio das bases de Laguerre e Kautz, cujos modelos matemáticos também são apresentados. Além disso, uma breve descrição da técnica de otimização *Simulated Annealing* é apresentada.

### 2.2 Modelos de Volterra

Os modelos de Volterra são usados para descrever sistemas não lineares, pois são uma expansão funcional entrada-saída dessa classe de sistemas. Por serem lineares nos parâmetros, as séries de Volterra possuem propriedades interessantes. Nesse sentido, é possível utilizar técnicas de estimação de parâmetros convencionais como os mínimos quadrados. Ademais, elas são uma extensão não linear natural para a resposta ao impulso de um modelo linear (SERETIS; ZAFIRIOU, 1997). Por meio, das séries de Volterra pode-se gerar uma representação idêntica à saída do sistema, uma vez que pode-se utilizar uma representação de dimensão infinita. Segundo Ogunfunmi (2007), as séries de Volterra, no domínio discreto, são dadas por

$$\begin{aligned}
y(k) = h_0 + \sum_{\tau_1=0}^{\infty} h_1(\tau_1)u(k-\tau_1) + \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \sum_{\tau_2=0}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)u(k-\tau_1)u(k-\tau_2) + \\
+ \dots + \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\tau_\eta=0}^{\infty} h_\eta(\tau_1, \dots, \tau_\eta)u(k-\tau_1)\dots u(k-\tau_\eta), \quad (2.1)
\end{aligned}$$

em que  $u(k)$  e  $y(k)$  são a entrada e saída do sistema, respectivamente. Os termos  $h_1(\tau_1), \dots, h_\eta(\tau_1, \dots, \tau_\eta)$  representam os *kernels* da série de Volterra e  $h_0$  é um possível nível DC inserido no sistema. O termo  $\eta$  representa o grau da resposta ao impulso.

Os modelos de Volterra são constituídos por *kernels*, que são funções multidimensionais, além de ser um modelo não paramétrico. As séries de Volterra representam uma generalização não linear do somatório da convolução linear, em que sua saída é a convolução de sua resposta ao impulso com a entrada do sistema, caracterizando um sistema linear e invariante no tempo (DOYLE III; PEARSON; OGUNNAIKE, 2002).

Os *kernels* possuem as seguintes propriedades (EYKHOFF, 1972):

$$\lim_{\tau_i \rightarrow \infty} h_\eta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\eta) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, \eta, \quad (2.2a)$$

$$h_\eta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\eta) = 0 \quad \forall \tau_i < 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, \eta. \quad (2.2b)$$

A primeira propriedade permite o truncamento da série. Essa propriedade é proveniente da utilização de um sistema estável na identificação. Uma das formas de definir os sistemas estáveis é analisar a contribuição de uma certa excitação na entrada em um dado instante, caso essa contribuição diminua com o tempo até deixar de contribuir significativamente na saída, esse é um sistema estável ou um sistema com *fading memory* (BOYD; CHUA, 1985). Para realizar o truncamento, deve-se analisar quais *kernels* oferecem pouca contribuição para resposta e então supor  $h_\eta(\tau_1, \dots, \tau_\eta) = 0$  para  $\tau_i > \delta_\eta$  ( $\forall i \in \{1 \dots \eta\}$ ) em que  $\delta_\eta$  é um escalar que representa o período de tempo a partir do qual a contribuição do *kernel*  $h_\eta$  pode ser desprezada (BRAGA et al., 2011).

Outra propriedade importante dos *kernels*, destacada em (2.2b), é a utilização de sistemas causais. Um sistema é dito causal se a saída depender somente de entradas presentes e/ou passadas, ou seja, não depender de entradas futuras. Na prática, só existem sistemas do tipo causal, pois não é possível ter acesso a informações futuras (DOYLE III; PEARSON; OGUNNAIKE, 2002; OGUNFUNMI, 2007).

Os *kernels* sempre podem ser simétricos, caso não sejam, estes podem ser escritos de maneira simétrica, sendo essa outra propriedade dos *kernels*. A simetrização é útil para diminuir a quantidade de parâmetros necessários para representar o sistema, pois é necessário estimar somente metade dos termos utilizados na representação do sistema (EYKHOFF, 1972).

A principal desvantagem do uso das séries de Volterra é a quantidade de parâmetros necessários para representar o sistema, uma vez que necessita de muitos coeficientes para representar os *kernels* que descrevem o modelo. Essa situação se agrava ao aumentar a não linearidade do sistema ou se o sistema possuir uma dinâmica lenta (SILVEIRA et al., 2013). Uma alternativa para minimizar esse problema, é a utilização das funções de base ortonormais (FBO) para obter os *kernels*, dado que, as FBO tem como propriedade incorporar conhecimentos *a priori* da dinâmica dominante do sistema no processo de parametrização (OLIVEIRA; AMARAL; LATAWIEC, 2003).

As FBO utilizam o conhecimento *a priori* por meio dos polos que são utilizados na construção das bases, que são parâmetros de projeto e devem ser escolhidos de forma adequada. Uma boa escolha dos polos e das bases faz com que o número de funções necessária para estimar a saída do sistema diminua drasticamente, portanto existe uma relação de custo entre a escolha dos polos e o número de termos na base. Para polos ótimos, próximos aos polos do sistema original, são necessário poucos elementos na base. No entanto, se forem utilizados muitos termos na base é possível obter uma boa representação da saída sem a utilização dos polos ótimos (REGINATO; OLIVEIRA, 2007). Outra vantagem das FBO é o fato de serem lineares nos parâmetros, portanto os coeficientes podem ser obtidos por meio de uma solução analítica simples (SERETIS; ZAFIRIOU, 1997). A redução do modelo de Volterra por meio das FBO implica em limitar as classes de sistemas não lineares que podem ser representados por Volterra, devido a necessidade dos *kernels* serem estavelmente separáveis. Note que sistemas do tipo *fading memory* possuem essa característica (SERETIS; ZAFIRIOU, 1997).

De acordo com Braga et al. (2011), a equação de Volterra utilizando as FBO é dada por

$$y(k) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{\eta}=0}^{\infty} h_{\eta}(\tau_1, \dots, \tau_{\eta}) \prod_{l=1}^{\eta} u(k - \tau_l). \quad (2.3)$$

Os *kernels*  $h_{\eta}$  podem ser definidos, segundo Doyle III, Pearson e Ogunnaike (2002), como

$$h_{\eta}(k_1, \dots, k_{\eta}) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{\eta}=1}^{\infty} \alpha_{i_1, \dots, i_{\eta}} \prod_{l=1}^{\eta} \phi_{l, i_l}(k_l), \quad (2.4)$$

em que  $\alpha_{i_{\eta}}$  são os coeficientes da série de Volterra e podem ser obtidos por meio de algoritmos de mínimos quadrados (AGUIRRE, 2007), devido a propriedade de linearidade dos parâmetros e  $\phi_{l, i_l}(k_l)$  é um conjunto de funções ortonormais.

Nos *kernels* de Volterra, pode-se realizar o truncamento, definindo o número de funções na base que são suficientes para descrever a saída do sistema (DOYLE III; PEARSON; OGUNNAIKE, 2002),

$$\tilde{h}_{\eta}(k_1, \dots, k_{\eta}) = \sum_{i_1=1}^{M_{i_1}} \dots \sum_{i_{\eta}=1}^{M_{i_{\eta}}} \alpha_{i_1, \dots, i_{\eta}} \prod_{l=1}^{\eta} \phi_{l, i_l}(k_l) \quad (2.5)$$

em que  $M_{i_\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, \eta$ , é o número de funções que serão utilizadas na construção das bases.

A escolha da base adequada dependerá do conhecimento *a priori*, pois como descrito, quanto mais próximo os polos da base estiverem dos polos reais do sistema, menos funções na base são necessárias. Também é possível fazer o truncamento do número de *kernels* que são utilizados.

O modelo de Volterra pode ser truncado em uma ordem finita  $N$ , desde que sua entrada  $u(k)$  obedeça algumas restrições, tais como,  $|u(k)| < 1$  e  $u(k) = 0$  para  $k < 0$  (EYKHOFF, 1972). Substituindo a equação (2.5) em (2.3), obtém-se a saída do sistema

$$\tilde{y}(k) = \sum_{\eta=1}^N \left[ \sum_{i_1=1}^{M_{i_1}} \dots \sum_{i_\eta=1}^{M_{i_\eta}} \alpha_{i_1, \dots, i_\eta} \prod_{l=1}^{\eta} \left( \sum_{\tau_l=0}^k \psi_{l, i_l}(\tau_l) u(k - \tau_l) \right) \right]. \quad (2.6)$$

Além disso, a filtragem da entrada  $u(k)$  pelas bases de funções ortonormais  $\phi_{l, i_l}$  pode ser definida como

$$\phi_{l, i_l}(k_l) = \sum_{\tau_l=0}^k \psi_{l, i_l}(\tau_l) u(k_l - \tau_l). \quad (2.7)$$

Assim, (2.6) pode ser reescrita como

$$\tilde{y}(k) = \sum_{\eta=1}^N \left[ \sum_{i_1=1}^{M_{i_1}} \dots \sum_{i_\eta=1}^{M_{i_\eta}} \alpha_{i_1, \dots, i_\eta} \prod_{l=1}^{\eta} \phi_{l, i_l}(k_l) \right]. \quad (2.8)$$

## 2.3 Base de funções ortonormais

Bases de funções ortonormais têm sido amplamente utilizadas na identificação de sistemas dinâmicos. Dentre essas, as funções de Laguerre e Kautz são as mais utilizadas para descrever as bases ortonormais, cuja principal diferença entre elas está na capacidade de representar, respectivamente, sistemas com dinâmicas amortecida e subamortecida (WILLIAMSON, 2001). Uma vez que o objeto de estudo deste trabalho está restrito a sistemas com dinâmica dominante de primeira e segunda ordem, apenas as bases de Laguerre e Kautz são apresentadas.

### 2.3.1 Funções de Laguerre

As funções de Laguerre, apresentadas em termos de suas transformadas  $Z$ , são dadas por

$$\Psi_{l, n}(z) = \frac{z \sqrt{1 - p_l^2}}{z - p_l} \left( \frac{1 - p_l z}{z - p_l} \right)^{n-1}, \quad (2.9)$$

em que  $p_l$  é o polo da função de Laguerre e  $n$  é o número de funções na base. Note que  $p_l$  deve ser necessariamente um valor real e estar contido dentro do círculo unitário, garantindo assim a estabilidade das funções. Uma boa escolha de  $p_l$  e  $n$  é importante para assegurar uma boa representação do sistema. Escolher  $n$  de forma adequada garante uma redução no erro de aproximação, para isto acontecer também é importante uma boa escolha de  $p_l$ , ou seja, um valor próximo ao polo original do sistema.

As funções de Laguerre permitem a representação em espaço de estados, sendo este modelo utilizado para obter os *kernels* da série de Volterra.

### Representação das Funções de Laguerre em Espaço de Estados

Devido a propriedade de recursividade das funções de Laguerre é possível realizar sua representação em espaço de estados. Segundo Machado et al. (2011), as equações de Laguerre em espaço de estados pode ser dado por

$$\begin{aligned}\Psi(k+1) &= A_k \Psi(k) + B_k u(k), \\ \hat{y}(k) &= C_k \Psi(k),\end{aligned}\tag{2.10}$$

em que,

$$\Psi(k) = [\psi_1(k) \dots \psi_n(k)]^T,$$

e  $n$  é o numero de filtros de Laguerre. As matrizes  $A_k$  e  $B_k$  são obtidas por meio dos polos escolhidos para representar o modelo, enquanto que a matriz  $C_k$  utiliza os termos da expansão ortonormal na sua construção. As matrizes  $A_k$ ,  $B_k$  e  $C_k$  são dadas por

$$A_k = \begin{bmatrix} p_l & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 - p_l^2 & p_l & 0 & \dots & 0 \\ (-p_l)(1 - p_l^2) & (1 - p_l^2) & p_l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-p_l)^{n-2}(1 - p_l^2) & (-p_l)^{n-3}(1 - p_l^2) & \dots & p_l & \dots \end{bmatrix}$$

$$B_k = \sqrt{1 - p_l^2} [1 \quad -p_l \quad (-p_l)^2 \quad \dots \quad (-p_l)^{n-1}]$$

$$C_k = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_n]$$

Dado que  $p_l$  é sempre real, as funções de Laguerre não são boas opções para representar sistemas com polos complexos, para tais sistemas utilizam-se as funções de Kautz (OLIVEIRA; AMARAL; LATAWIEC, 2003).

### 2.3.2 Funções de Kautz

As funções de Kautz melhor descrevem os sistemas que contêm polos complexos, ou seja, sistemas subamortecidos e são dadas por (NINNESS; GUSTAFSSON, 1997)

$$\Psi_{l,2n-1}(z) = \frac{z(z-b_l)\sqrt{1-c_l^2}}{z^2+b_l(c_l-1)z-c_l} \left[ \frac{-c_l z^2 + b_l(c_l-1)z+1}{z^2+b_l(c_l-1)z-c_l} \right]^{n-1},$$

$$\Psi_{l,2n}(z) = \frac{z\sqrt{(1-c_l^2)(1-b_l^2)}}{z^2+b_l(c_l-1)z-c_l} \left[ \frac{-c_l z^2 + b_l(c_l-1)z+1}{z^2+b_l(c_l-1)z-c_l} \right]^{n-1}, \quad (2.11)$$

em que

$$b_l = \frac{\beta_l + \bar{\beta}_l}{1 + \beta_l \bar{\beta}_l},$$

$$c_l = -\beta_l \bar{\beta}_l. \quad (2.12)$$

Como nas funções de Laguerre, é importante uma boa escolha dos polos de Kautz ( $\beta$  e  $\bar{\beta}$ ) para garantir uma boa aproximação da saída do sistema. É importante ressaltar que  $b_l$  e  $c_l$  também devem estar contidos no círculo unitário para garantir a estabilidade das funções (NINNESS; GUSTAFSSON, 1997).

As bases ímpares de Kautz podem ser escritas em função das bases pares

$$\Psi_{l,2n-1}(z) = \frac{z-b_l}{\sqrt{1-b_l^2}} \Psi_{l,2n}(z). \quad (2.13)$$

Assim como as funções de Laguerre, as funções de Kautz também podem ser representadas por meio de equações de estados. Para o presente trabalho foi utilizado esse tipo de representação para obter os *kernels* da série de Volterra.

#### Representação das Funções de Kautz em Espaço de Estados

As funções de Kautz são construídas de forma recursiva podendo assim serem representadas em espaço de estados. Segundo Machado et al. (2011), a representação em espaço de estados das funções de Kautz é dada por:

$$X(k+1) = A_k X(k) + B_k U(k),$$

$$\hat{y}(k) = C_k X(k), \quad (2.14)$$

em que

$$X(k) = [\psi_{l,1}(k-1) \ \psi_{l,1}(k) \ \dots \ \psi_{l,n-1}(k-1) \ \psi_{l,n-1}(k) \ \psi_{l,n}(k-1) \ \psi_{l,n}(k)]^T,$$

$$U(k) = [u(k-1) \ u(k)]^T,$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & a_{4,4} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2(n-1)-1,2(n-1)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2(n-1),1} & a_{2(n-1),1} & 0 & 0 & \dots & a_{2(n-1)-1,2(n-3)} & a_{2(n-1)-1,2(n-2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{2n-1,2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n,2n-2} & 0 & a_{2n,2n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \sqrt{1 - c_l^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{6,1} & b_{6,2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ b_{2(n-1),1} & b_{2(n-1),2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_k = [0 \quad \alpha_1 \quad 0 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad 0 \quad \alpha_{n-1} \quad 0 \quad \alpha_n]$$

Para construir a matriz  $A_k$ , utiliza-se a seguinte definição para os índices  $a_{p,m}$ , em que  $p$  indica a linha e  $m$  a coluna, sendo  $i$  a cardinalidade das linhas da matriz.

• Para  $i$  ímpar:

-  $a_{i,2i} = 1$ ;

- demais termos iguais a 0.

• Para  $i=2$ :

-  $a_{i,i} = -b_l(c_l - 1)$ ;

-  $a_{i,i-1} = c_l$ ;

- demais termos iguais a 0.

• Para  $i$  múltiplo de 4:

-  $a_{i,i} = b_l$ ;

-  $a_{i,i-2} = \sqrt{1 - b_l^2}$ ;

- demais termos iguais a 0.

• Para outras linhas  $i$  pares os termos são:

- $a_{i,i} = -b_l(c_l - 1)$ ;
- $a_{i,i-1} = c_l$ ;
- $a_{i,i-4j} = (-c_l)^{j-1}[b_l(c_l - 1) + (-c_l)(-b_l(c_l - 1))]$  e  
 $a_{i,i-(4j+1)} = (-c_l)^{j-1}((-c_l)(c_l) + 1)$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots$  tal que  $4j < i$ ;
- demais termos iguais a 0.

Os elementos que constituem a matriz  $B_k$  são

- Para  $i = 2 + 4j$ , com  $j = 0, 1, 2, \dots$  tal que  $j < n/2$ :
  - $b_{i,1} = (-c_l)^j$ ;
  - $b_{i,2} = (-c_l)^j(-b_l)$ .
- Para os demais  $i$ :
  - $b_{i,1} = b_{i,2} = 0$ .

Os elementos que constituem a matriz  $C_k$  são os coeficientes  $\alpha$  da expansão ortonormal.

## 2.4 Técnica de Seleção Ótima de Polos

A escolha dos polos, que parametrizam as bases de Laguerre e Kautz, é um passo importante no processo de identificação utilizando FBO, pois quando os polos escolhidos na construção das bases estão próximos dos polos reais do sistema em análise, uma menor quantidade de parâmetros serão necessários para representar o sistema. A seleção ótima dos polos muitas vezes não é possível, pois estes são desconhecidos, no entanto existem diversos métodos para encontrar os polos ótimos de um sistema.

Por esta razão, a seleção ótima dos polos a serem utilizados na construção das bases de Kautz e Laguerre vem sendo objeto de estudo em diversos trabalhos, a técnica mais utilizada é a otimização. Em Braga et al. (2011), é realizada a seleção dos polos ótimos por meio da direção de busca exata (gradientes), na qual minimiza-se a função de custo, definida como sendo o erro de estimação da saída do sistema. O resultado obtido é utilizado no método de otimização que visa encontrar a direção de busca para os polos da base por meio do algoritmo de Lavenberg-Marquardt que analisa a função de custo e informações do gradiente.

O método utilizado em Silva (2011) para encontrar os polos ótimos é o algoritmo de programação quadrática sequencial, pois este visa minimizar a função objetivo, que trata-se do erro de posicionamento dos polos de Kautz. Oroski et al. (2014) utilizaram algoritmos genéticos para obtenção dos polos ótimos de Kautz e Laguerre, que são métodos de otimização heurística que contaram com operadores baseados nos métodos de Nelder Mead e mínimos quadrados para seleção dos polos de parametrização das bases.

Para o presente trabalho foi escolhido a estratégia de otimização *Simulated Annealing*, pois trata de uma técnica de inteligência computacional para resolver problemas de otimização, em que se obtém uma única solução ótima ao final do processo de busca, além de ser de fácil implementação, diferentemente das técnicas de Braga et al. (2011) e Silva (2011) que envolvem cálculos matemáticos mais complexos.

### 2.4.1 Simulated Annealing

O *Simulated Annealing* foi desenvolvido por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi em 1983 (KIRKPATRICK et al., 1983) baseado no algoritmo de Metropolis de 1953 (METROPOLIS et al., 1953). O algoritmo se inspira na mecânica estatística, em um processo que envolve aquecimento e resfriamento controlado do material, conhecido como *annealing* (recozimento). Ao realizar o aquecimento do material, os átomos se tornam livres e se deslocam aleatoriamente nos seus estados de energia. Quando o material é resfriado lentamente os átomos conseguem encontrar uma configuração que proporciona um estado de energia menor que o estado de energia inicial (ASKARZADEH et al., 2016). Fazendo uma analogia entre o *Simulated Annealing* e o processo físico de recozimento de um sólido, pode-se dizer que cada solução viável encontrada no algoritmo é equivalente aos estados físicos do material no decorrer do processo e a função de custo a ser minimizada é similar à energia interna do sistema naquele estado.

O principal objetivo do *Simulated Annealing* é minimizar a função de custo a partir de um estado inicial aleatório. A cada iteração a função solução atual é substituída por uma solução próxima obtida aleatoriamente. A nova solução pode ser aceita ou rejeitada, independentemente se ela irá aumentar ou diminuir a função de custo, o que define a aceitação, em caso de aumentar a função a ser minimizada, é uma probabilidade controlada que é definida por uma função aceite (ARAUJO et al., 2001). A função aceite é dada por

$$e^{-\Delta/T}, \quad (2.15)$$

em que  $\Delta$  é a diferença entre a solução atual e a nova solução da função de custo e  $T$  é o parâmetro de controle, que corresponde à temperatura do material. De acordo com (2.15), as chances de aceitar pequenas variações na função de custo são maiores do que aceitar grandes variações. Isto ocorre quando a temperatura  $T$  está alta. À medida que  $T$  diminui, variações que aumentam a função de custo não são mais aceitas. Sendo assim, por meio da função aceite, o algoritmo evita o ótimo local e busca pelo mínimo global (ARAUJO et al., 2001).

O algoritmo começa com um alto valor de temperatura  $T$ . Em seguida são realizadas várias iterações a fim de obter o menor valor da função de custo de uma determinada região. Quando a função de custo atinge o equilíbrio, ou seja, se mantém estável, o valor da temperatura  $T$  é reduzido, ocorrendo o resfriamento, que deve ser realizado lentamente. Os valores de resfriamento e a da temperatura  $T$  são definidos pelo usuário. A temperatura

$T$  é reduzida até atingir um valor que não forneça mais melhora à função de custo. Considerações práticas devem ser adotadas para garantir que o algoritmo encontre uma boa solução para função de custo em um tempo aceitável. O pseudo-código, segundo Araujo et al. (2001), está ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Pseudo-código do algoritmo *Simulated Annealing*.

```

início
S ← S0;
T ← T0;
Tmin;
enquanto T < Tmin faça
    para iterações para equilíbrio faça
        gerar uma solução S' de N(S);
        avaliar a variação de energia  $\Delta = f(S') - f(S)$ ;
        se  $\Delta < 0$  então
            S ← S';
        senão
            gerar  $u \in \text{random}[0,1]$ ;
             $x = \exp(-\Delta/T)$ ;
            se  $u < x$  então
                S ← S';
        fimse
    fimse
    fimpara
    reduzir a temperatura T;
fimenquanto
fim

```

Fonte: Adaptado de Araujo et al. (2001)

## 3 Estratégias de Identificação Utilizando Séries de Volterra e FBO em Sistemas Simulados

### 3.1 Introdução

O conhecimento *a priori* do sistema ajuda no processo de identificação, quanto mais próximos os polos utilizados na construção das bases estiverem dos polos do sistema real melhor é o modelo de Volterra. A dinâmica dos sistemas identificados, bem como a dinâmica dos *kernels*, é um dos fatores que influenciam na qualidade do modelo. A utilização da série de Volterra permitem o uso de *kernels* simétricos e assimétricos na representação de sistemas com dinâmicas distintas ou iguais ao longo de suas direções. Neste capítulo, é realizada a identificação de três diferentes sistemas de segunda ordem, sendo um sistema com polos reais e comportamento simétrico, um sistema com polos complexos e comportamento simétrico, um sistema com polos complexos e comportamento assimétrico. O primeiro e o segundo sistemas são identificados por meio bases de Laguerre e Kautz utilizando *kernels* simétricos, enquanto que o sistema com comportamento assimétrico é identificado utilizando *kernels* com a mesma dinâmica e por dinâmica diferente em cada direção por meio das bases de Kautz.

Os *kernels* de Volterra podem ser simétricos ou assimétricos. Os *kernels* são ditos simétricos quando possuem dinâmicas iguais em todas as direções. Isso significa que  $h(\tau_1, \dots, \tau_i)$  é sempre igual independentemente da permutação dos índices  $\tau_1, \dots, \tau_i$ . Por exemplo, para um *kernel* de segunda ordem, tem-se que  $h_2(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_2, \tau_1)$ . Esta propriedade tem a vantagem de reduzir o número de coeficientes necessários para representar o sistema (OGUNFUNMI, 2007). Quando os *kernels* não apresentam esta propriedade são ditos assimétricos, pois possuem dinâmicas diferentes para cada direção. O uso de funções de base ortonormal permitem representar os *kernels* simétricos e assimétricos, diminuindo assim o erro de estimação, pois serão utilizadas bases com dinâmicas iguais para representar os *kernels* simétricos e bases diferentes para representar os *kernels* assimétricos (BRAGA et al., 2011).

Para exemplificar o uso dos *kernels* simétricos e assimétricos foram identificados sistemas simulados utilizando as séries de Volterra parametrizadas por funções de Kautz, pois os sistemas que possuem polos complexos são melhores representados por estes tipos de funções. Foi escolhido um sistema de segunda ordem com polos reais e iguais em que realizou-se a identificação com os polos ótimos e, em seguida, com polos aproximados, alterando o número de funções na base para obter a saída desejada, para essa identificação foram

utilizadas as bases de Laguerre e Kautz. Em seguida, foi realizado o mesmo procedimento com o sistema de polos complexos e iguais, utilizou-se as bases de Laguerre e Kautz neste processo de identificação para mostrar que as bases de Kautz conseguem estimar a saída do sistema, sendo este com polos reais ou complexos. No entanto as bases de Laguerre necessitam de um maior número de funções na base para estimar a saída do sistema com polos complexos, mesmo quando são utilizados polos ótimos. Por fim, foi identificado o sistema de segunda ordem com polos complexos e distintos utilizando as bases de Kautz, para o qual são utilizados dois procedimentos de identificação: 1) empregando os mesmos polos para ambas direções; 2) usando polos diferentes para direções diferentes. Para ambos os casos, utilizaram-se os polos ótimos e polos aproximados, modificando os números de funções na base, para garantir uma boa aproximação. Por meio dessas simulações é possível analisar a importância do conhecimento *a priori*, pois por meio deste é possível obter um menor número de funções na base utilizada para descrever a saída do sistema.

A qualidade do modelo pode ser avaliada por meio do erro quadrático médio de saída (EQS) dado por (BRAGA et al., 2011):

$$EQS = 10 \log \frac{\sum_{k=1}^{N_d} [y(k) - \hat{y}(k)]^2}{\sum_{k=1}^{N_d} [y(k)]^2} \quad (3.1)$$

sendo  $N_d$  o número de dados de entrada e saída disponíveis,  $y(k)$  é a saída real do sistema e  $\hat{y}(k)$  é a saída estimada do sistema. Quanto menor é o valor do EQS, melhor é o modelo encontrado (FERNANDES, 2006).

O erro de validação da saída estimada  $e(k)$  do sistema é definido como

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k), \quad (3.2)$$

em que  $y(k)$  é a saída real do sistema e  $\hat{y}(k)$  é a saída estimada do sistema.

O modelo de segunda ordem do *kernel* de Volterra utilizado para identificação nas seções seguintes é dado por:

$$h(k_1, k_2) = 0,25 f(k_1) g(k_2). \quad (3.3)$$

## 3.2 Sistema Simétrico com Polos Reais

O sistema simétrico com polos reais utilizado na identificação é dado por

$$f(k_1) = g(k_2) = Z^{-1} \left[ \frac{2z^2 - 0,8z}{(z - 0,1)(z - 0,7)} \right], \quad (3.4)$$

e sua forma discreta descrita por equação à diferença é dada por

$$f(k_1) = \frac{5}{3} [(0,7)^{k_1} + (0,1)^{k_1}] \quad e \quad g(k_2) = \frac{5}{3} [(0,7)^{k_2} + (0,1)^{k_2}], \quad (3.5)$$

para  $k_1, k_2 \geq 0$ .

Logo,

$$h(k_1, k_2) = 0,25 \left[ \frac{5}{3} \left( (0,7)^{k_1} + (0,1)^{k_1} \right) \right] \left[ \frac{5}{3} \left( (0,7)^{k_2} + (0,1)^{k_2} \right) \right], \quad (3.6)$$

para  $k_1, k_2 \geq 0$ .

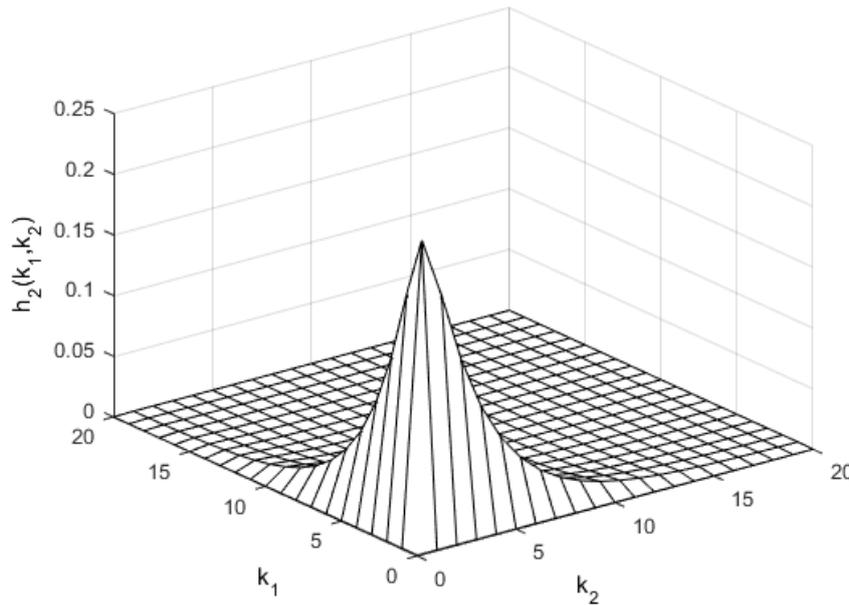
Portanto, a saída do modelo para o sistema descrito em (3.6), utilizando (2.6) é definida como

$$\tilde{y}(k) = \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \alpha_{i_1, i_2} \psi_{21, i_1}(k) \psi_{22, i_2}(k) u(k), \quad (3.7)$$

em que  $M$  é o número de funções na base.

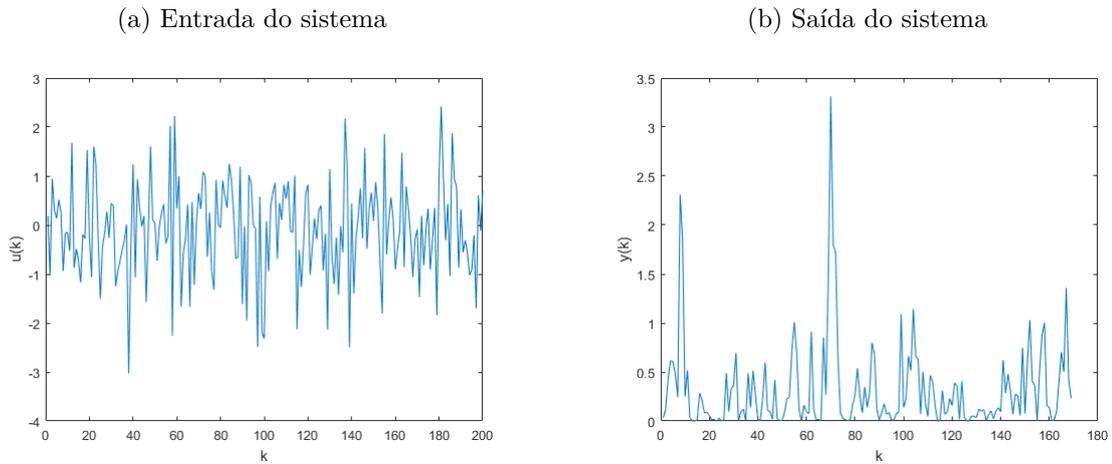
O *kernel* de segunda ordem com dinâmicas dominantes iguais em todas as direções para o sistema com polos reais é ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – *Kernel* de segunda ordem com dinâmica dominante e igual em todas as direções para o sistema com polos reais.



A entrada utilizada no processo de identificação é apresentada na Figura 3a, trata-se de um sinal aleatório, com distribuição gaussiana, média nula e variância unitária, obtendo como resposta o sinal da Figura 3b. Com o conhecimento de dois conjuntos de dados, utilizados para a estimação e validação do modelo, empregou-se as bases de Laguerre e Kautz no processo de identificação, variando-se os polos e número de funções na base.

Figura 3 – Entrada e saída do sistema de segunda ordem simétrico com polos reais.



### Identificação utilizando funções de Laguerre

As bases de Laguerre melhor descrevem os sistemas com polos reais, nesta seção será identificado a saída do sistema (3.4) composto apenas de polos desta natureza. Os polos ótimos do sistema a ser identificado são 0,7 e 0,1, contudo o polo escolhido para parametrizar as bases de Laguerre foi 0,7, pois é o polo dominante do sistema. A saída do modelo de Volterra descrito na equação (3.7) para duas funções na base é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k) = & \alpha_{1,1}\psi_{21,1}(k)\psi_{22,1}(k)u(k) + \alpha_{1,2}\psi_{21,1}(k)\psi_{22,2}(k)u(k) + \\ & + \alpha_{2,1}\psi_{21,2}(k)\psi_{22,1}(k)u(k) + \alpha_{2,2}\psi_{21,2}(k)\psi_{22,2}(k)u(k). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como a saída do modelo de Volterra (3.8) é igual para os demais sistemas, alterando somente o número de funções na base, este é apresentado somente uma única vez. A Figura 4a ilustra a saída estimada e real do sistema, o erro de estimação está presente na Figura 4b. Observa-se um erro quase nulo devido a utilização do polo ótimo. A validação do modelo pode ser vista na Figura 5a, em consequência do pequeno erro de validação, mostrado na Figura 5b, o modelo de Volterra é uma boa representação do sistema real.

Figura 4 – Identificação utilizando polo ótimo 0,7 e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

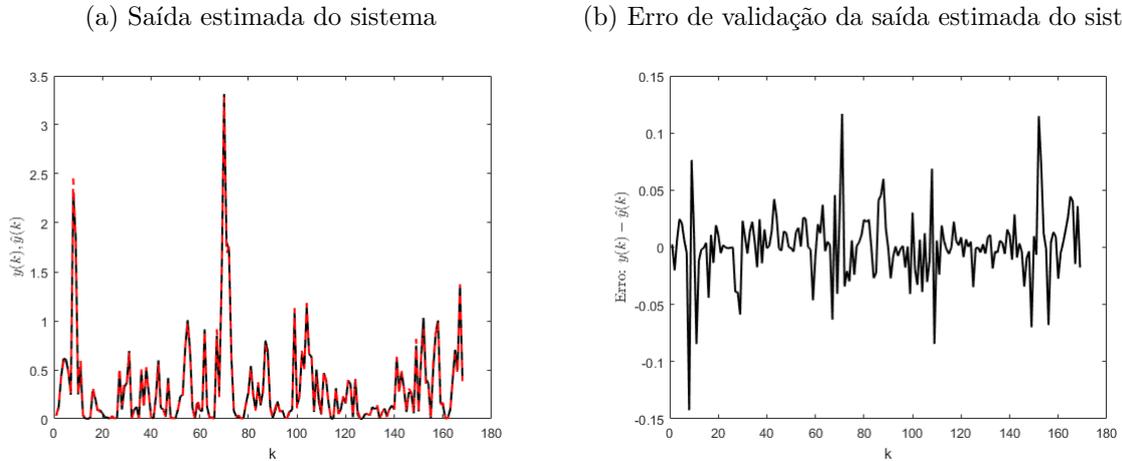
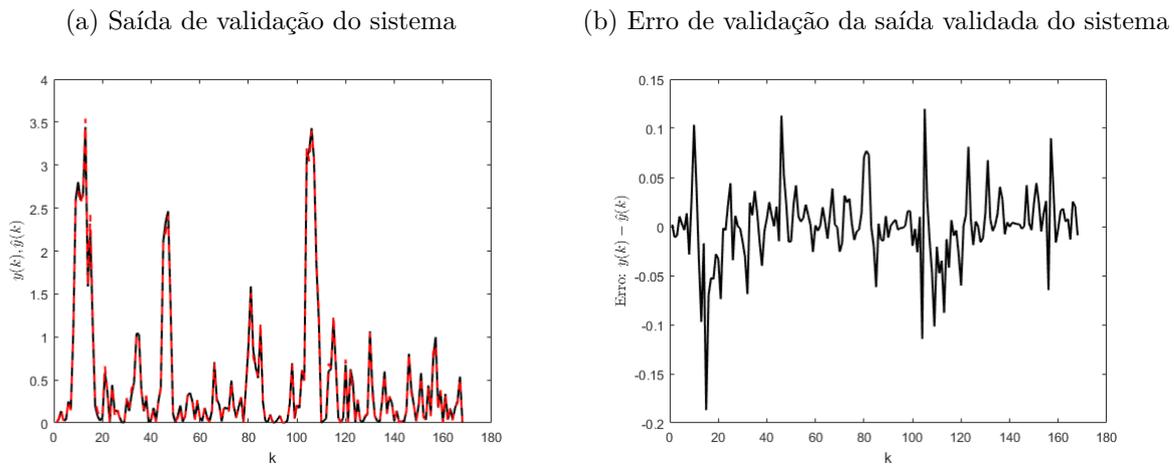


Figura 5 – Validação da identificação utilizando polo ótimo 0,7 e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



Em um segundo momento, variou-se o polo que parametriza as bases de Laguerre, utilizando o polo não ótimo 0,3 e 2 funções na base. O modelo de Volterra, apresentado na Figura 6a, não consegue descrever a saída do sistema original, o erro de estimação (Figura 6b) é elevado e a validação do modelo (Figura 7a) não é alcançada. Note também que o erro de validação, presente na Figura 7b, é alto.

Para obter um melhor desempenho do modelo de Volterra utilizando polos não ótimos foi aumentado o número de funções na base. Utilizando o polo 0,3 e 10 funções na base foi obtido o modelo da Figura 8a. O erro de estimação para esse caso foi baixo (Figura 8b). Ajustando a quantidade de funções utilizada para descrever o modelo foi possível validá-lo, como é apresentado nas Figuras 9a e 9b.

Figura 6 – Identificação utilizando polo não ótimo 0,3 e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída estimada do sistema

(b) Erro de validação da saída estimada do sistema

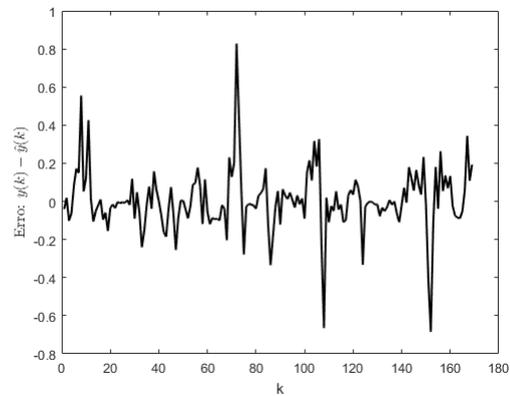
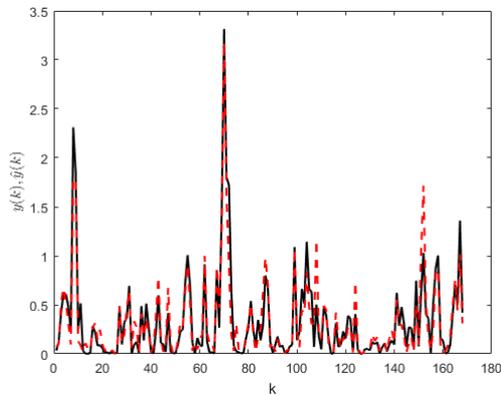


Figura 7 – Validação da identificação utilizando polo não ótimo 0,3 e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída de validação do sistema

(b) Erro de validação da saída validada do sistema

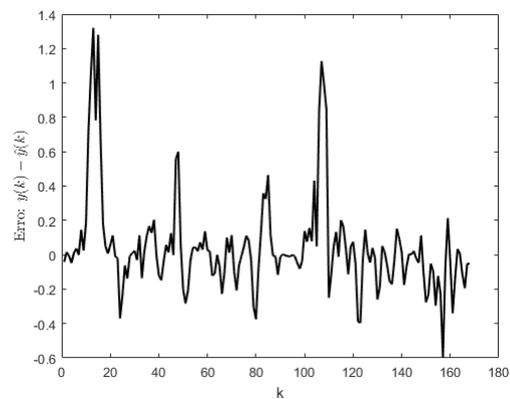
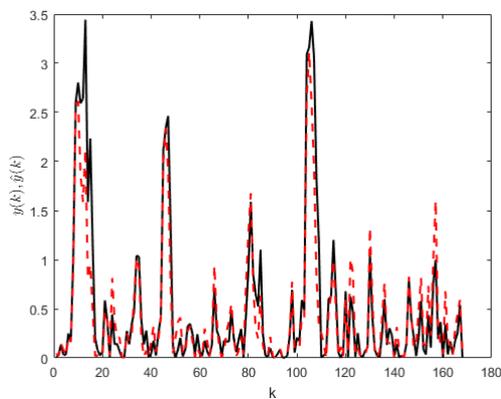


Figura 8 – Identificação utilizando polo não ótimo 0,3 e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

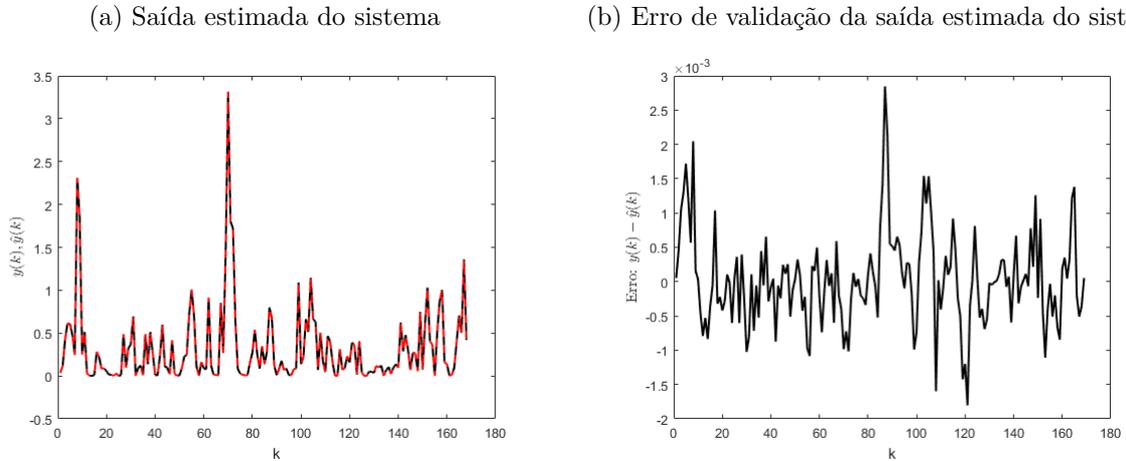
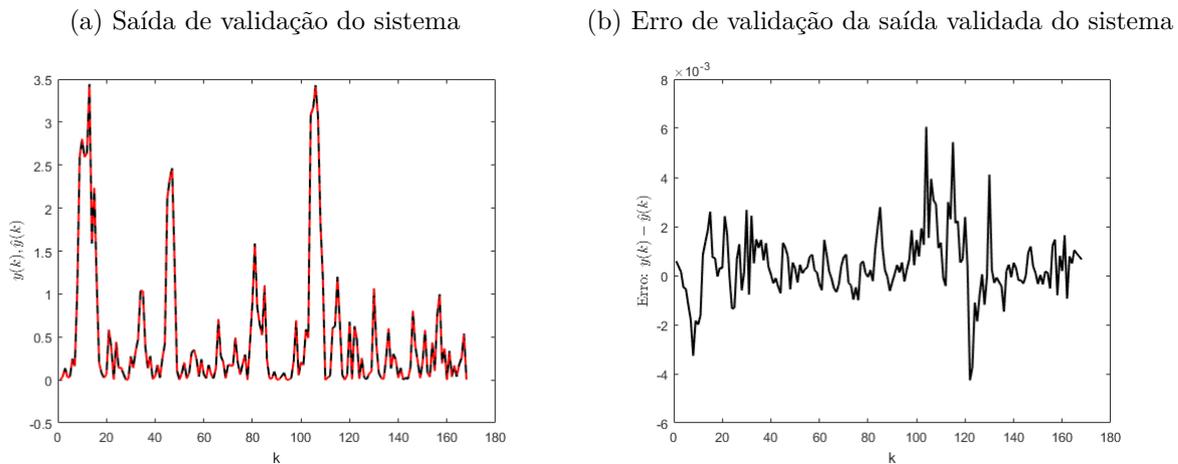


Figura 9 – Validação da identificação utilizando polo não ótimo 0,3 e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



### Identificação utilizando funções de Kautz

As bases de funções de Kautz são empregadas para descrever sistemas com polos complexos, no entanto, se a parte imaginária dos polos que parametrizam as funções for 0, a base de Kautz pode ser considerada similar as bases de Laguerre, sendo assim é possível estimar sistemas com polos reais utilizando poucos elementos na base. Foi identificado a saída do sistema (3.4) utilizando os polos ótimos  $0,7 \pm 0i$  e 2 funções na base, o resultado é apresentado na Figura 10a. O erro de estimação (Figura 10b) é aceitável e bem próximo ao erro de estimação encontrado na identificação por meio das bases de Laguerre. A validação do modelo é ilustrado na Figura 11a e o erro de validação também é apresentado (Figura 11b).

Figura 10 – Identificação utilizando polos ótimos  $0,7 \pm 0i$  e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

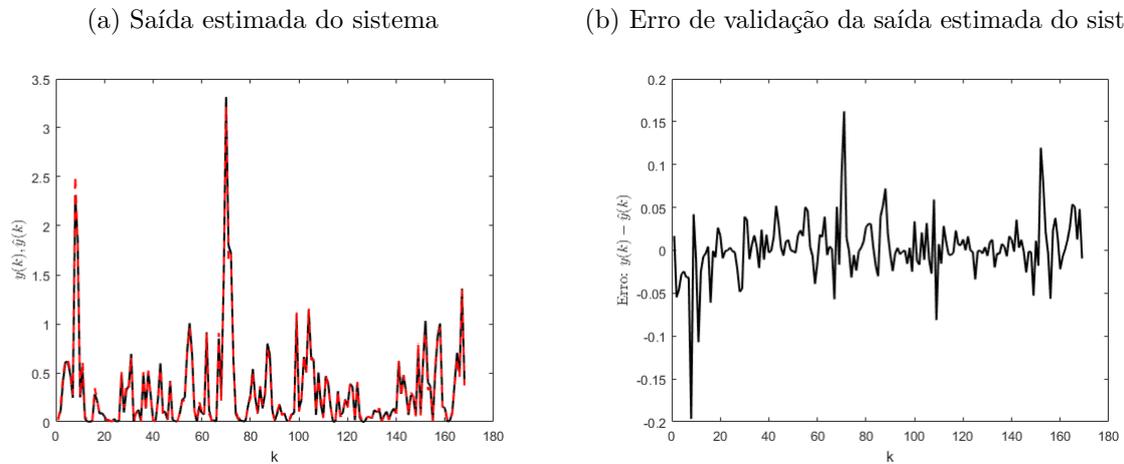
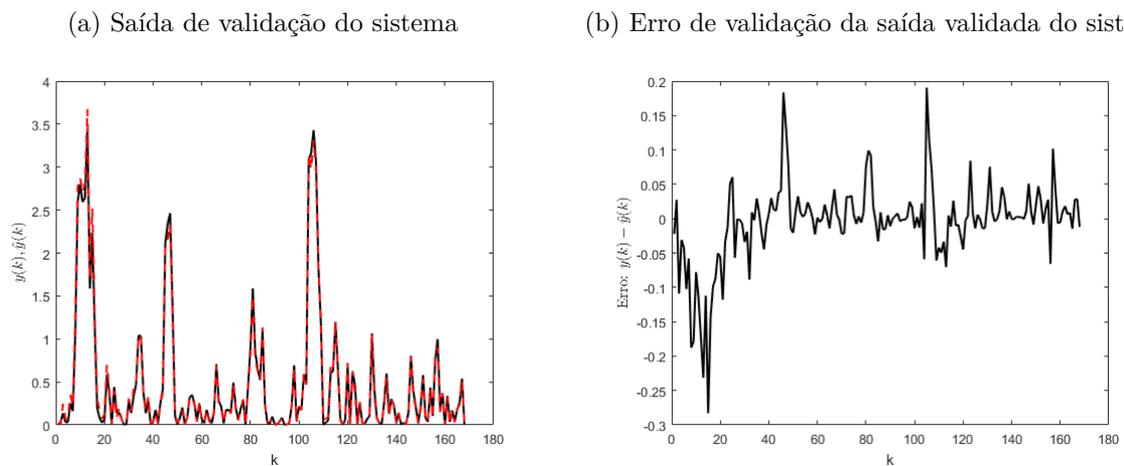


Figura 11 – Validação da identificação utilizando polos ótimos  $0,7 \pm 0i$  e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



Quando são utilizados os polos não ótimos,  $0,3 \pm 0,2i$ , para parametrizar as bases de Kautz e 2 funções na base, o modelo de Volterra, ilustrado na Figura 12a, não consegue descrever o sistema real e o erro de estimação é elevado (Figura 12b). O modelo não é validado, como é mostrado na Figura 13a e o erro de validação (Figura 13b) está alto, fora dos padrões aceitáveis.

Figura 12 – Identificação utilizando polos não ótimos  $0,3 \pm 0,2i$  e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

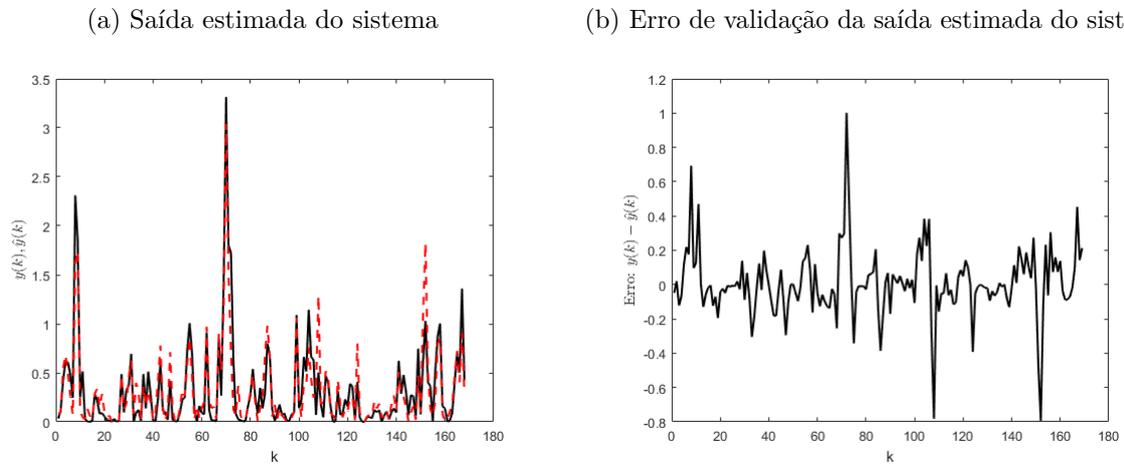
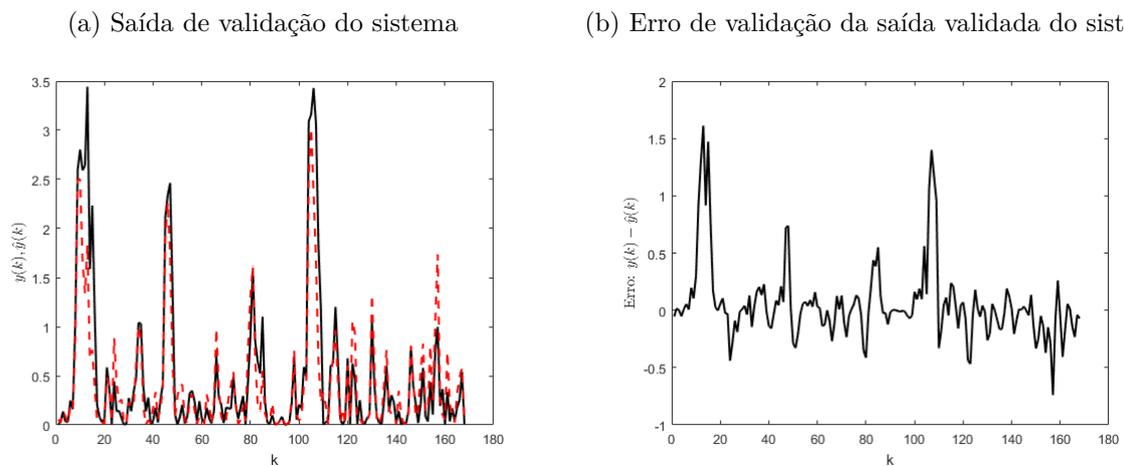


Figura 13 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos  $0,3 \pm 0,2i$  e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



A fim de melhorar a estimação do modelo original utilizando polos não ótimos  $0,3 \pm 0,2i$  e bases de Kautz, foi aumentado o número de funções na base para 10. Assim, o modelo de Volterra (Figura 14a) conseguiu estimar a saída original, obtendo um baixo erro de estimação (Figura 14b). A validação do modelo é apresentada na Figura 15a e o erro de validação na Figura 15b.

Figura 14 – Identificação utilizando polos não ótimos  $0,3 \pm 0,2i$  e 10 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

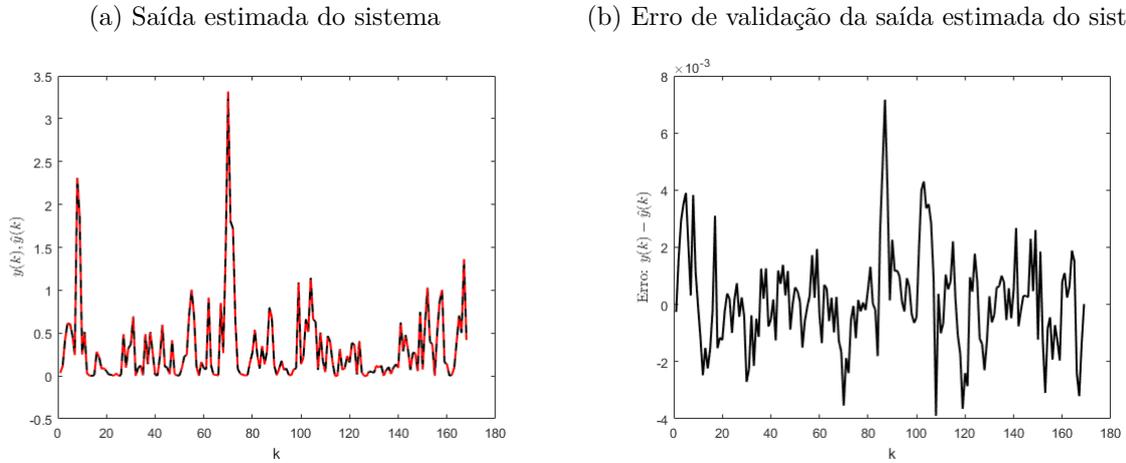
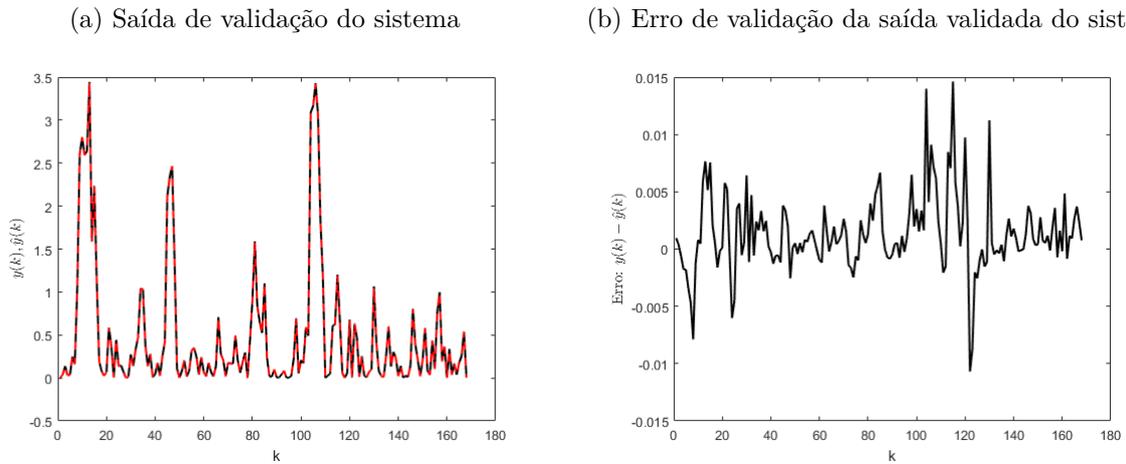


Figura 15 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos  $0,3 \pm 0,2i$  e 10 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



A Tabela 1 apresenta o erro de estimação dos modelos de Volterra parametrizados por funções de Laguerre e Kautz para o sistema (3.6). Na tabela, também apresentam-se os polos e o número de funções utilizados.

Tabela 1 – Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Laguerre e Kautz utilizadas e polos escolhidos para o sistema simétrico (3.6) com polos em 0,7 e 0,1.

Polos Utilizados	Número de funções na base	Bases	Erro EQS (dB)
0,7	2	Laguerre	-25,5148
$0,7 \pm 0i$	2	Kautz	-24,6599
0,3	2	Laguerre	-10,1780
$0,3 \pm 0,2i$	2	Kautz	-8,5857
0,3	10	Laguerre	-58,0932
$0,3 \pm 0,2i$	10	Kautz	-50,0596

Tanto as bases de Laguerre quanto as bases de Kautz asseguram um bom modelo de Volterra utilizando poucas funções na base quando é empregado os polos ótimos do sistema. A utilização dos polos não ótimos requer um maior número de termos na base, em ambas os casos, para conseguir um modelo de Volterra que estime a saída real do sistema. As bases de Kautz conseguem realizar uma boa estimação dos sistemas com polos reais, mesmo sendo desenvolvida para estimar sistemas com polos complexos, pois ao fazer a parte imaginária dos polos que as parametrizam igual a zero, estas se tornam similares as bases de Laguerre.

### 3.3 Sistema Simétrico com Polos Complexos

O sistema simétrico com polos complexos utilizado na identificação é dado por

$$f(k_1) = g(k_2) = Z^{-1} \left[ \frac{2z^2 - 0,6z}{z^2 - 0,6z + 0,73} \right], \quad (3.9)$$

e sua forma discreta descrita por equação à diferença é definida em

$$f(k_1) = (0,3 + 0,8i)^{k_1} + (0,3 - 0,8i)^{k_1} \quad e \quad g(k_2) = (0,3 + 0,8i)^{k_2} + (0,3 - 0,8i)^{k_2}, \quad (3.10)$$

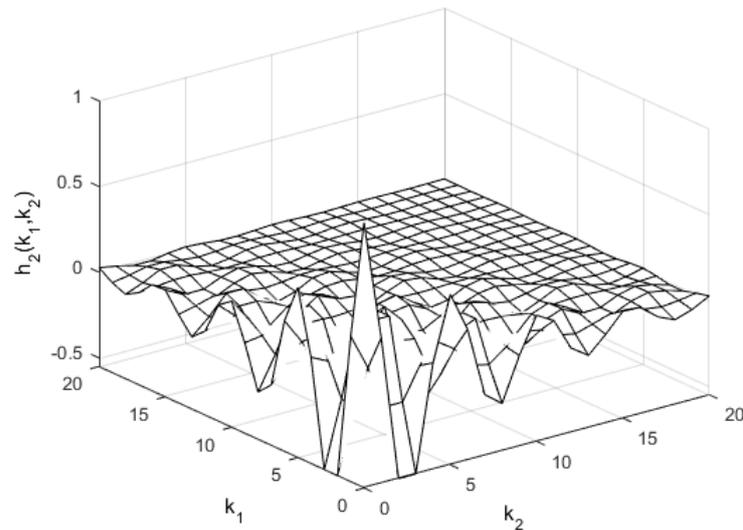
para  $k_1, k_2 \geq 0$ . Logo,

$$h(k_1, k_2) = 0,25 \left[ (0,3 + 0,8i)^{k_1} + (0,3 - 0,8i)^{k_1} \right] \left[ (0,3 + 0,8i)^{k_2} + (0,3 - 0,8i)^{k_2} \right] \quad (3.11)$$

para  $k_1, k_2 \geq 0$ .

O *kernel* de segunda ordem com dinâmicas dominantes iguais em todas as direções é ilustrado na Figura 16.

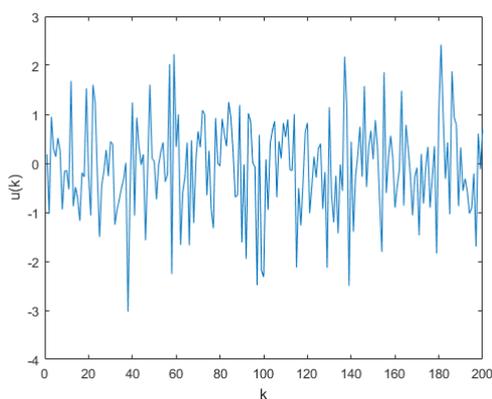
Figura 16 – *Kernel* de segunda ordem com dinâmicas dominantes iguais em todas as direções.



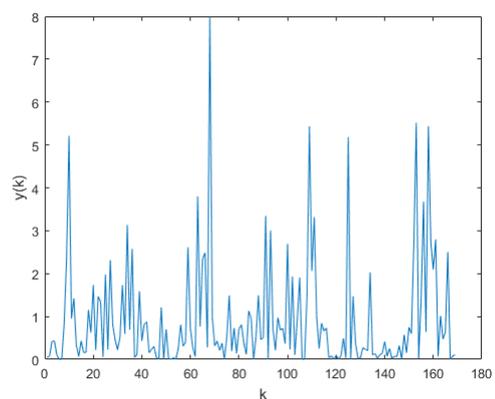
Para identificar o sistema, simulou-se a saída do modelo (3.7), obtendo como resposta a Figura 17b. Foi utilizado como entrada um sinal aleatório, com distribuição gaussiana, média nula e variância unitária, ilustrado na Figura 17a. Além disso, dois conjuntos de dados foram coletados, um para a identificação e outro para validação. Foi realizada a identificação com as bases de Laguerre e Kautz, utilizando diferentes polos e número de funções na base para obter os modelos identificados a seguir.

Figura 17 – Entrada e saída do sistema de segunda ordem simétrico com polos complexos.

(a) Entrada do sistema



(b) Saída do sistema



### Identificação utilizando funções de Laguerre

As bases de Laguerre são utilizadas para descrever sistemas com polos reais, no entanto como se trata de aproximadores universais, podem descrever sistemas com polos complexos, tendo como desvantagem o grande número de funções na base a serem utilizadas

mesmo quando é utilizado o polo ótimo do sistema. O objetivo desta simulação é mostrar esta desvantagem e comparar os resultados com a identificação por meio das bases de Kautz.

O polo ótimo de Laguerre do sistema com polos complexos é 0,0352. O valor do polo foi obtido através do algoritmo *Simulated Annealing* (o procedimento de obtenção do polo ótimo de um sistema por meio do *Simulated Annealing* será explicado com detalhes no Capítulo 4). Utilizando 2 funções na base foi obtido o modelo de Volterra presente na Figura 18a, observa-se um elevado erro de estimação (Figura 18b). As Figuras 19a e 19b mostram que o modelo encontrado não é válido.

Figura 18 – Identificação utilizando polo ótimo 0,0352 e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

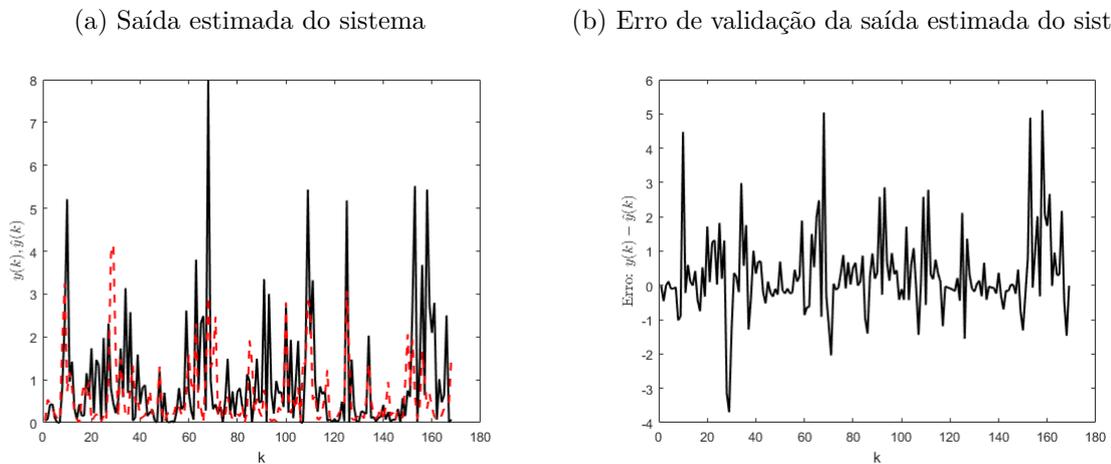
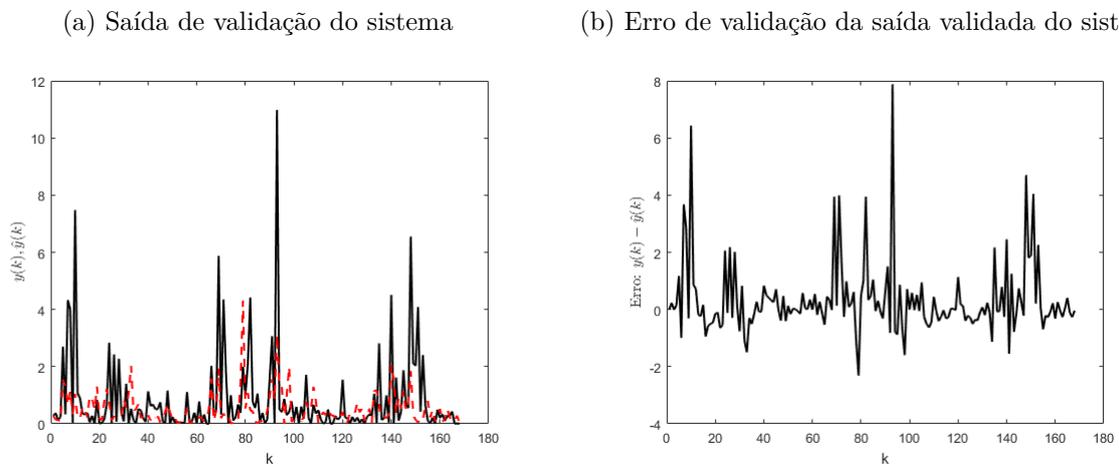


Figura 19 – Validação da identificação utilizando polo ótimo 0,0352 e 2 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

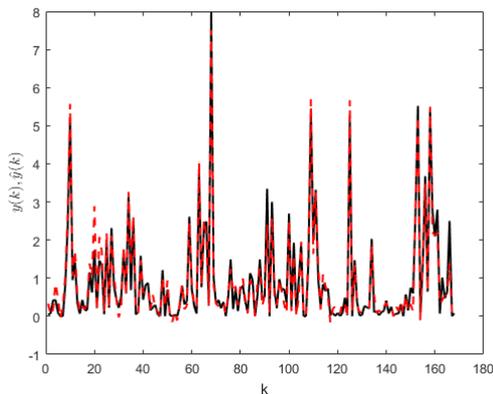


Visando melhorar a estimação do modelo foram utilizadas 10 funções na base e o polo ótimo 0,0352. A Figura 20a mostra o resultado obtido. Observa-se que as bases

de Laguerre conseguem descrever o sistema com polos complexos com um baixo erro de estimação (Figura 20b). A validação do modelo é apresentada na Figura 21a, o erro de validação obtido é aceitável e mostrado na Figura 21b.

Figura 20 – Identificação utilizando polo ótimo 0,0352 e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída estimada do sistema



(b) Erro de validação da saída estimada do sistema

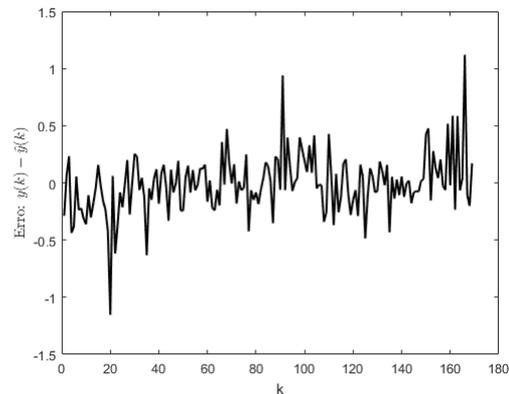
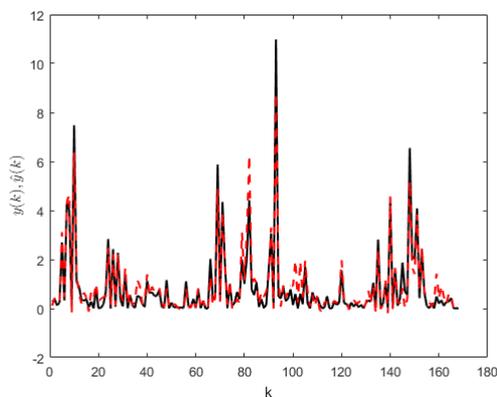
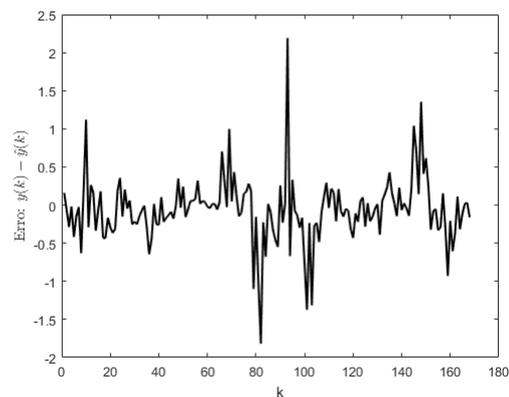


Figura 21 – Validação da identificação utilizando polo ótimo 0,0352 e 10 funções na base, parametrizada por funções de Laguerre. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída de validação do sistema



(b) Erro de validação da saída validada do sistema



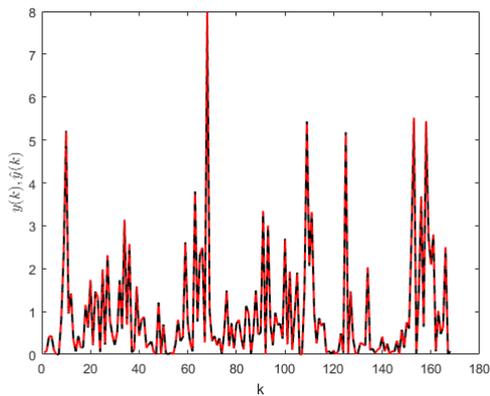
### Identificação utilizando funções de Kautz

As estimações a seguir demonstram a eficiência das bases de Kautz para descrever sistemas com polos complexos. Os primeiros polos utilizados na identificação, foram os polos ótimos do sistema  $0,3 \pm 0,8$  com duas funções na base. A saída estimada do sistema e do sistema original podem ser visualizadas na Figura 22a. A Figura 22b apresenta o erro de estimação do modelo de Volterra, devido a utilização dos polos ótimos, o erro de

estimação encontrado é quase nulo. A validação do modelo é apresentada na Figura 23a. De acordo com o erro de validação, mostrado na Figura 23b, o modelo de Volterra obtido é uma boa representação do sistema original.

Figura 22 – Identificação utilizando polos ótimos  $0,3 \pm 0,8i$  e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída estimada do sistema



(b) Erro de validação da saída estimada do sistema

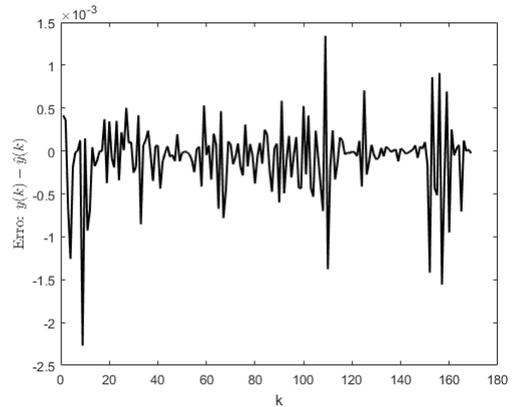
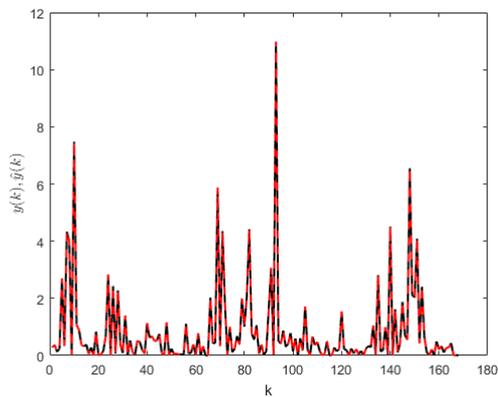
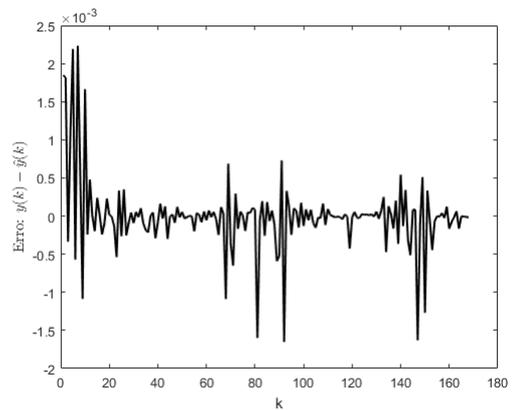


Figura 23 – Validação da identificação utilizando polos ótimos  $0,3 \pm 0,8i$  e 2 funções na base, parametrizada por funções de Kautz. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída de validação do sistema



(b) Erro de validação da saída validada do sistema



Quando se utiliza os polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e duas funções na base, o modelo de Volterra não descreve bem a saída do sistema, como visto na Figura 24a, obtendo um alto valor de erro de estimação (Figura 24b). Como esperado, a Figura 25a mostra que o modelo de Volterra utilizando polos não ótimos com 2 funções na base não é válido, pois o modelo estimado não representa bem a saída e contém um erro de validação elevado, ilustrado na Figura 25b.

Figura 24 – Identificação utilizando polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

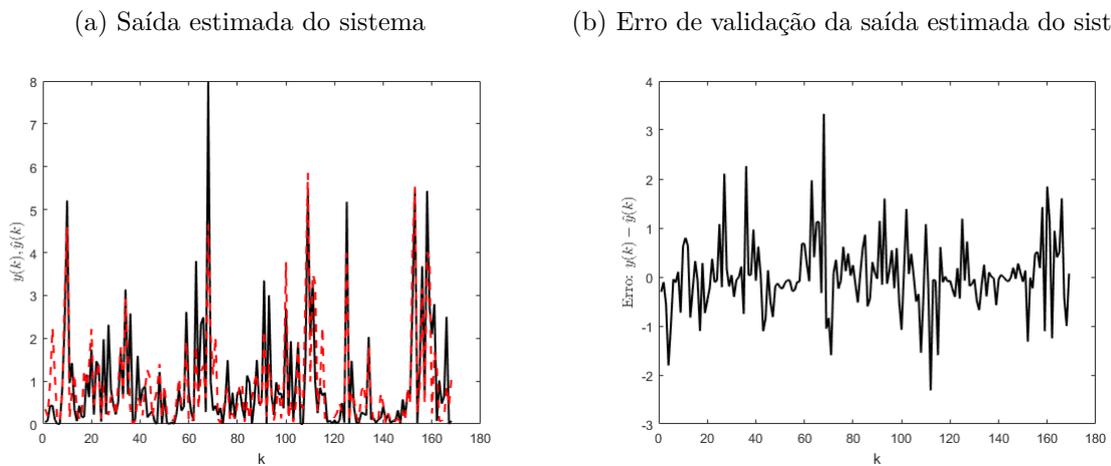
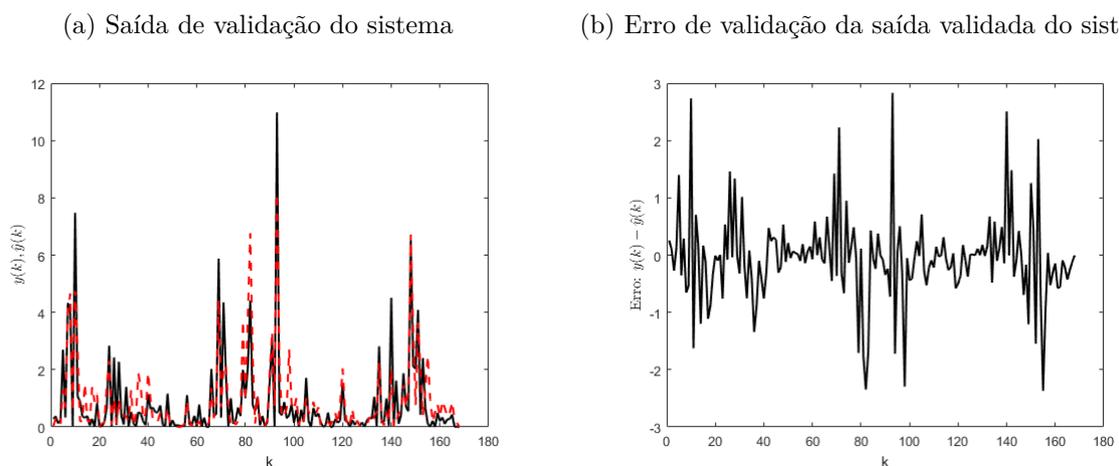


Figura 25 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

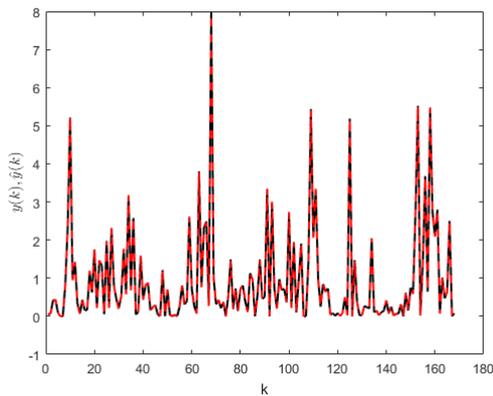


Uma alternativa de melhorar a estimação de modelos com polos não ótimos é utilizar um maior número de termos na base. Portanto, foi realizada a identificação utilizando os polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e 10 funções na base. A saída obtida é apresentada na Figura 26a. Por meio da Figura 26a e 26b, pode-se notar que esse modelo representa bem o

sistema real, uma vez que o erro de estimação está entre  $-0,06$  e  $0,06$ , um valor aceitável na representação deste modelo. Os resultados obtidos na validação do modelo, presente na Figura 27a e 27b, foram satisfatórios, uma vez que o erro de validação é pequeno.

Figura 26 – Identificação utilizando polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída estimada do sistema



(b) Erro de validação da saída estimada do sistema

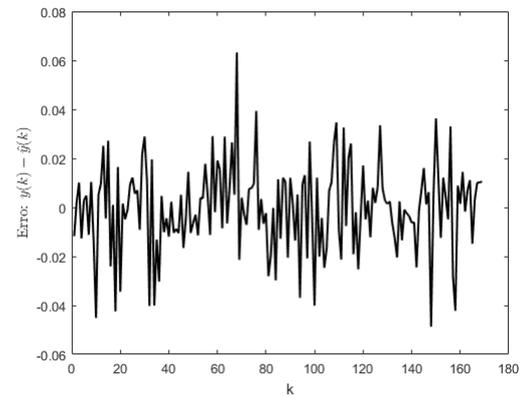
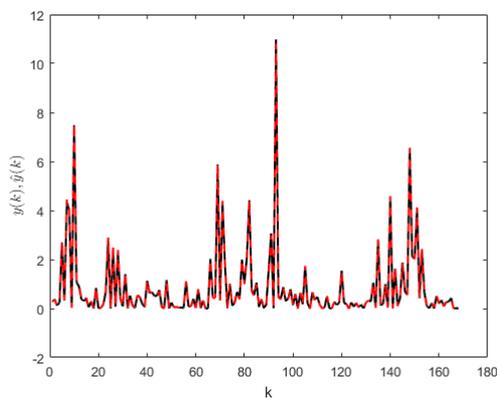
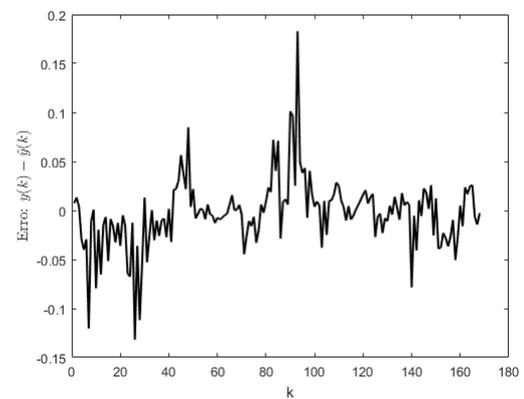


Figura 27 – Validação da identificação utilizando polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e 10 funções. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída de validação do sistema



(b) Erro de validação da saída validada do sistema



A Tabela 2 apresenta o erro de estimação dos modelos de Volterra parametrizados por funções de Laguerre e Kautz para o sistema (3.11). Na tabela, também apresentam-se os polos e o número e funções utilizados.

Tabela 2 – Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Kautz e Laguerre utilizadas e polos escolhidos para o sistema simétrico (3.11) com polos em  $0,3 \pm 0,8i$ .

Polos Utilizados	Número de funções na base	Bases	Erro EQS (dB)
0,0352	2	Laguerre	-2,0405
0,0352	10	Laguerre	-16,2808
$0,3 \pm 0,8i$	2	Kautz	-72,4849
$0,4 \pm 0,7i$	2	Kautz	-6,6172
$0,4 \pm 0,7i$	10	Kautz	-39,2592

A utilização dos polos ótimos do sistema original, assegura um bom modelo de aproximação sem utilizar muitas funções na base quando utilizada as bases de Kautz. Se forem empregadas as bases de Laguerre isto não é verdade pois trata-se de um sistema com polos complexos. Ainda assim, é possível obter uma boa aproximação do sistema original, mesmo quando estes polos não são conhecidos, pois um maior número de funções na base consegue aproximar o modelo estimado à saída do sistema real. Essa técnica também é utilizada para a estimação utilizando as bases de Laguerre em sistema com polos complexos. A parametrização por meio dos polos ótimos e funções de Kautz ou polos não ótimos com 10 funções na base resultou em um modelo apropriado. No entanto, com os polos ótimos foi obtido um menor erro de estimação, uma vez que utiliza menos parâmetros para obter o modelo.

As funções de Kautz asseguram uma boa aproximação para os modelos com polos reais ou complexos utilizando poucas funções na base, sendo assim daqui em diante serão utilizadas somente as bases de Kautz para realizar a identificação dos sistemas da Seção 3.3 e Capítulo 4.

### 3.4 Sistema Assimétrico

O sistema assimétrico de segunda ordem utilizado na identificação foi

$$f(k_1) = Z^{-1} \left[ \frac{2z^2 - 0,8z}{(z - 0,1)(z - 0,7)} \right] \quad e \quad g(k_2) = Z^{-1} \left[ \frac{2z^2 - 0,6z}{z^2 - 0,6z + 0,73} \right] \quad (3.12)$$

e sua forma discreta descrita por equação à diferença é dada por

$$f(k_1) = \frac{5}{3} [(0,7)^{k_1} + (0,1)^{k_1}] \quad e \quad g(k_2) = (0,3 + 0,8i)^{k_2} + (0,3 - 0,8i)^{k_2} \quad (3.13)$$

para  $k_1, k_2 \geq 0$ .

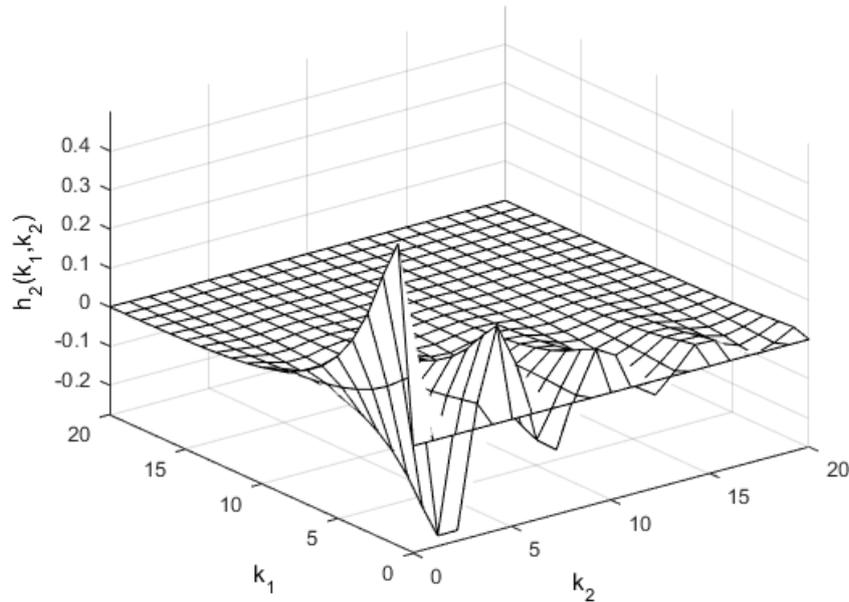
De acordo com (3.3), o *kernel* de segunda ordem para o sistema assimétrico (3.13) é descrito por

$$h(k_1, k_2) = 0,25 \left[ \frac{5}{3} \left( (0,7)^{k_1} + (0,1)^{k_1} \right) \right] \left[ (0,3 + 0,8i)^{k_2} + (0,3 - 0,8i)^{k_2} \right] \quad (3.14)$$

para  $k_1, k_2 \geq 0$ .

O *kernel* de segunda ordem com dinâmicas dominantes diferentes em todas as direções é ilustrado na Figura 28.

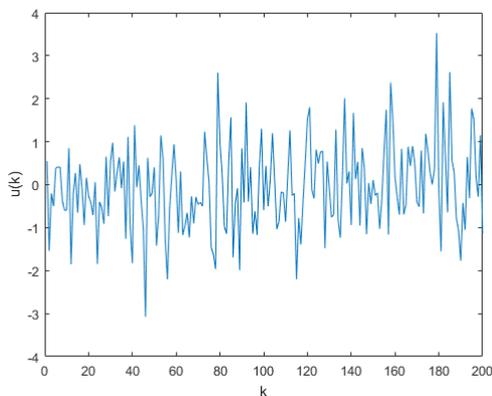
Figura 28 – *Kernel* de segunda ordem com dinâmicas dominantes diferentes em todas as direções.



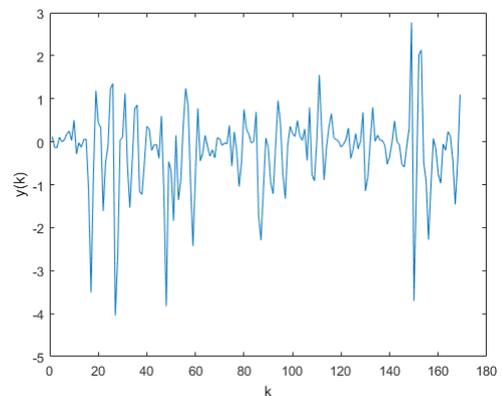
Como nos casos anteriores, os dados de entrada (Figura 29a) e saída (Figura 29b) do sistema são conhecidos, bem como os dados de validação, sendo estes diferentes dos dados de estimação. Seguiram-se dois caminhos diferentes no processo de identificação. Primeiro foi utilizado um *kernel* simétrico, ou seja, o mesmo polo para ambas direções, em seguida utilizou-se um *kernel* assimétrico, i. e., polos diferentes para cada direção.

Figura 29 – Entrada e saída do sistema de segunda ordem assimétrico.

(a) Entrada do sistema



(b) Saída do sistema



### 3.4.1 Identificação do Sistema Assimétrico Utilizando *Kernels* Simétricos

Os sistemas assimétricos podem ser representados por *kernels* simétricos, desde que utilizem-se polos que satisfaçam a dinâmica do sistema em todas as direções. Neste processo de identificação, primeiro foram utilizados os polos ótimos da direção subamortecida do sistema  $(0,3 \pm 0,8i)$ . A Figura 30a apresenta o resultado obtido. Pode-se notar que a saída estimada acompanha a dinâmica do sistema original, porém não é realizada uma boa representação, pois o erro de estimação, mostrado na Figura 30b, é elevado. Nota-se que ainda que usando dez funções na base, este modelo não é válido. Tanto a Figura 31a como a Figura 31b comprovam a ineficiência do modelo obtido.

Figura 30 – Identificação utilizando os polos ótimos  $0,3 \pm 0,8i$  de uma única direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

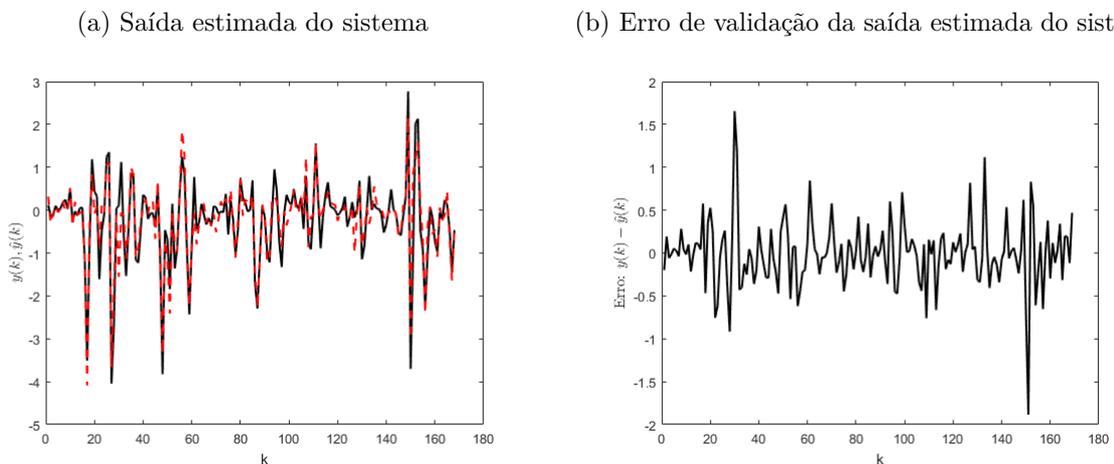
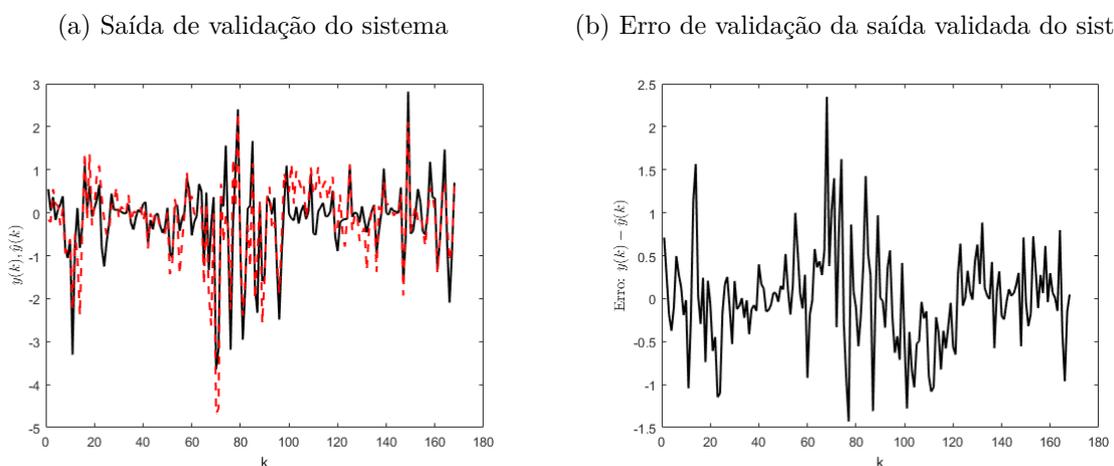


Figura 31 – Validação da identificação utilizando os polos ótimos  $0,3 \pm 0,8i$  de uma única direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



Segundo Braga et al. (2011), os polos ótimos para este sistema quando se utiliza *kernels* simétricos são  $0,3611 \pm 0,5327i$ . Com a utilização dos polos ótimos e dez funções na base, a saída do sistema estimado (Figura 32a), e o erro de estimação (Figura 32b), garantem uma boa aproximação do sistema original. A validação do modelo apresentada na Figura 33a e o erro de validação, presente na Figura 33b asseguram a qualidade do modelo.

Figura 32 – Identificação utilizando polos ótimos  $0,3611 \pm 0,5327i$  e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

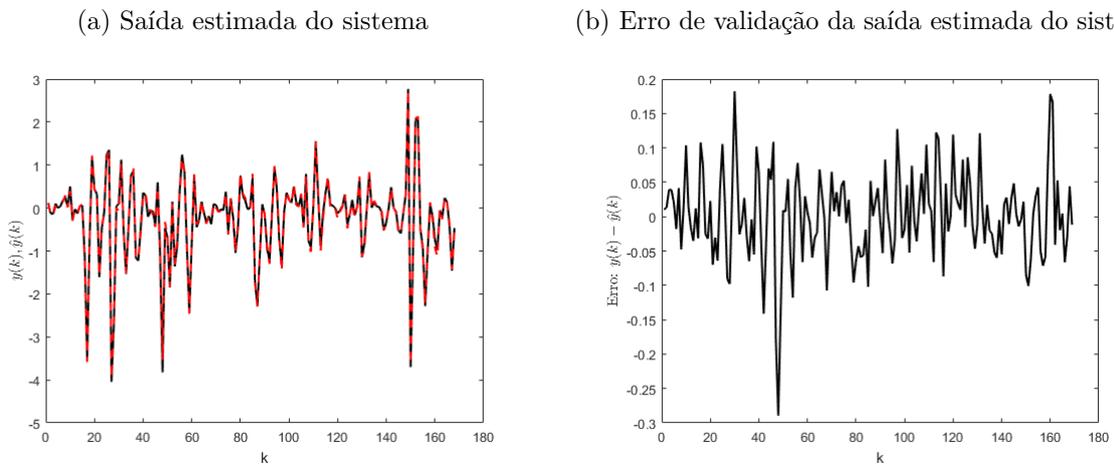
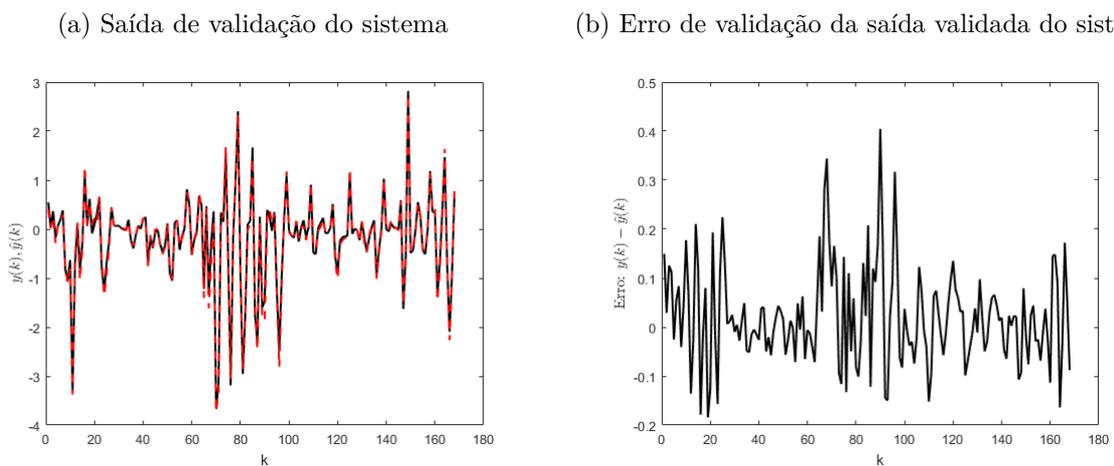


Figura 33 – Validação da identificação utilizando polos ótimos  $0,3611 \pm 0,5327i$  e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



A Tabela 3 apresenta o erro de estimação dos modelos de Volterra parametrizados por funções de Kautz para o sistema (3.14). Na tabela, também apresentam-se os polos e o número de funções utilizados.

Tabela 3 – Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Kautz utilizadas e polos escolhidos para o sistema assimétrico (3.14) com polos em  $0,3 \pm 0,8i$ ;  $0,7$  e  $0,1$ .

Polos Utilizados	Número de funções na base	Erro EQS (dB)
$0,3 \pm 0,8i$	10	-7,7554
$0,3611 \pm 0,5327i$	10	-23,3538

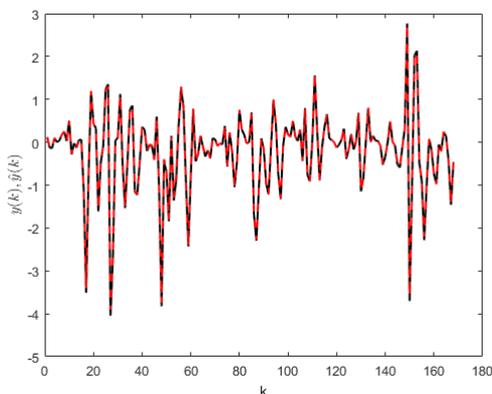
A identificação do sistema assimétrico utilizando *kernels* simétricos necessita de muitas funções na base para garantir uma aproximação desejável, mesmo que utilizando os polos ótimos simétricos do sistema, uma vez que o sistema original possui dinâmicas diferentes para cada direção. Note que os polos ótimos de somente uma das direções não são suficientes para estimar a saída original.

### 3.4.2 Identificação do Sistema Assimétrico Utilizando *Kernels* Assimétricos

A utilização de *kernels* assimétricos para representar sistemas assimétricos tem a vantagem de reduzir o erro de estimação do modelo. Na Figura 34a, é representada a saída estimada utilizando polos ótimos  $0,3 \pm 0,8i$  e  $0,6 \pm 0i$  e *kernel* assimétrico na representação do modelo. De acordo com a Figura 34b, o erro de estimação é pequeno garantindo uma boa aproximação do sistema original. Os gráficos de validação do modelo e o erro de validação, mostrados nas Figuras 35a e 35b, respectivamente, validam o modelo de Volterra encontrado.

Figura 34 – Identificação utilizando polos ótimos  $0,3 \pm 0,8i$  e  $0,6 \pm 0i$  em ambas direções e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída estimada do sistema



(b) Erro de validação da saída estimada do sistema

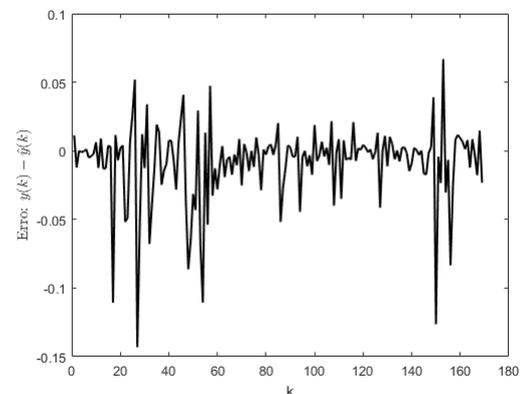
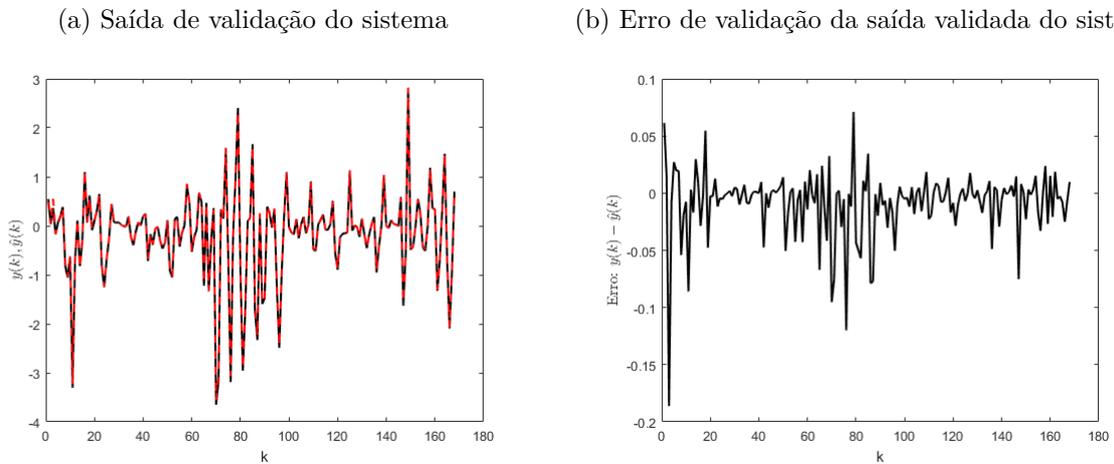


Figura 35 – Validação da identificação utilizando polos ótimos  $0,3 \pm 0,8i$  e  $0,6 \pm 0i$  em ambas direções e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



A utilização de polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e  $0,5 \pm 0i$  com duas funções na base não são suficientes para representar a saída do sistema original (Figura 36a). A Figura 36b mostra o erro referente a essa estimação, o qual se encontra fora dos limites aceitáveis na representação. A saída de validação e o erro de validação, presentes na Figura 37a e 37b, respectivamente, comprovam a ineficiência do modelo.

Figura 36 – Identificação utilizando diferentes polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e  $0,5 \pm 0i$  para cada direção e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

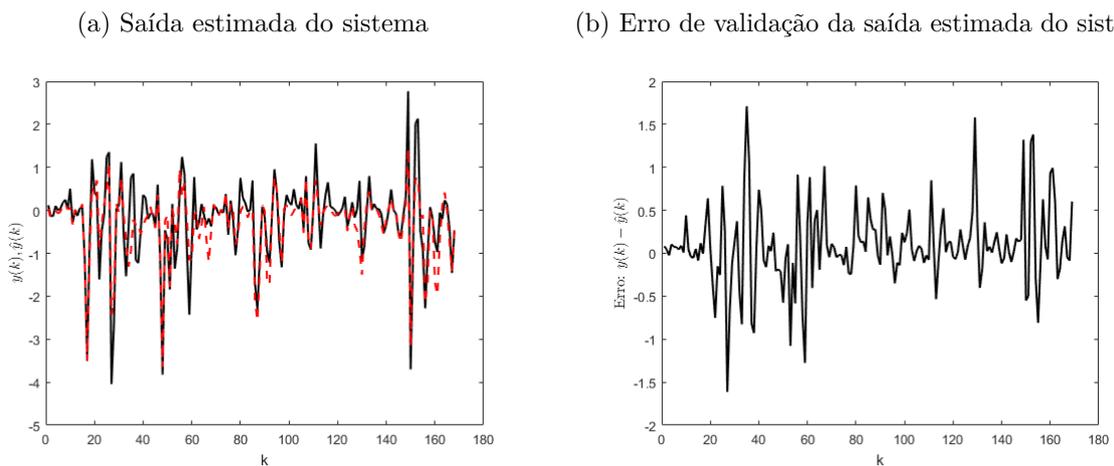
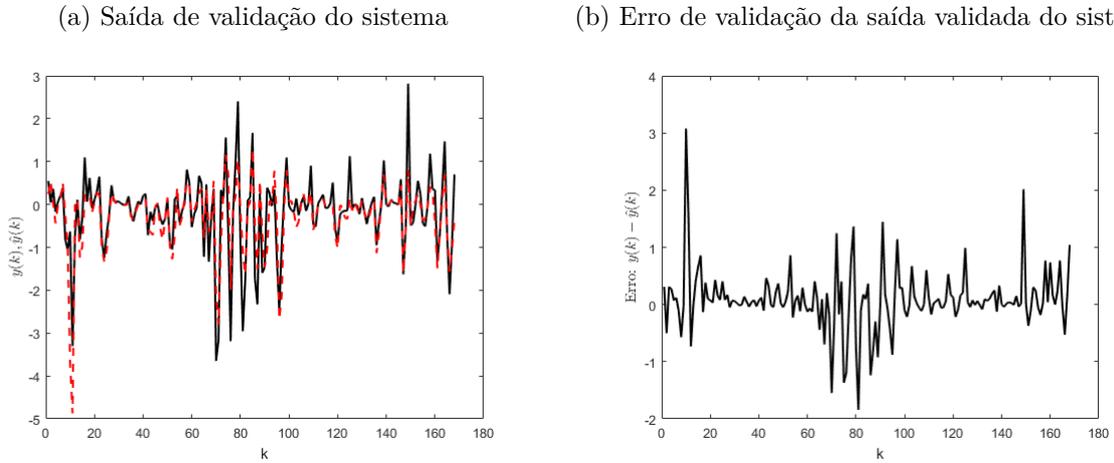


Figura 37 – Validação da identificação utilizando diferentes polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e  $0,5 \pm 0i$  para cada direção e 2 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



Para minimizar o erro de estimação, foram utilizadas mais funções na base. Na Figura 38a é apresentada a estimação da saída do modelo utilizando dez funções na base e os polos não ótimo  $0,4 \pm 0,7i$  e  $0,5 \pm 0i$ . A Figura 38b ilustra um erro de estimação menor que no caso anterior, com apenas duas funções na base e polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e  $0,5 + 0i$ . Os resultados de validação, presentes nas Figuras 39a e 39b, respectivamente, asseguram a eficiência do modelo de Volterra encontrado.

Figura 38 – Identificação utilizando diferentes polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e  $0,5 + 0i$  para cada direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

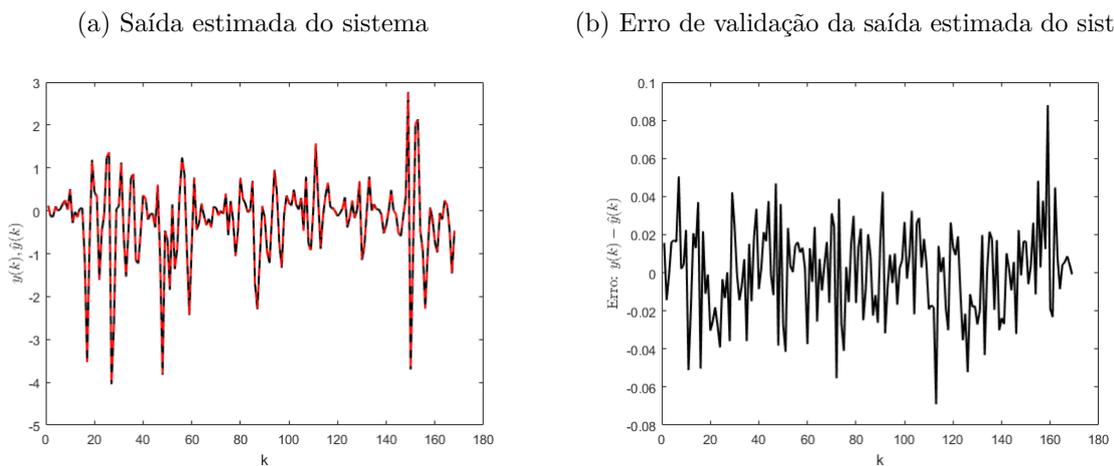
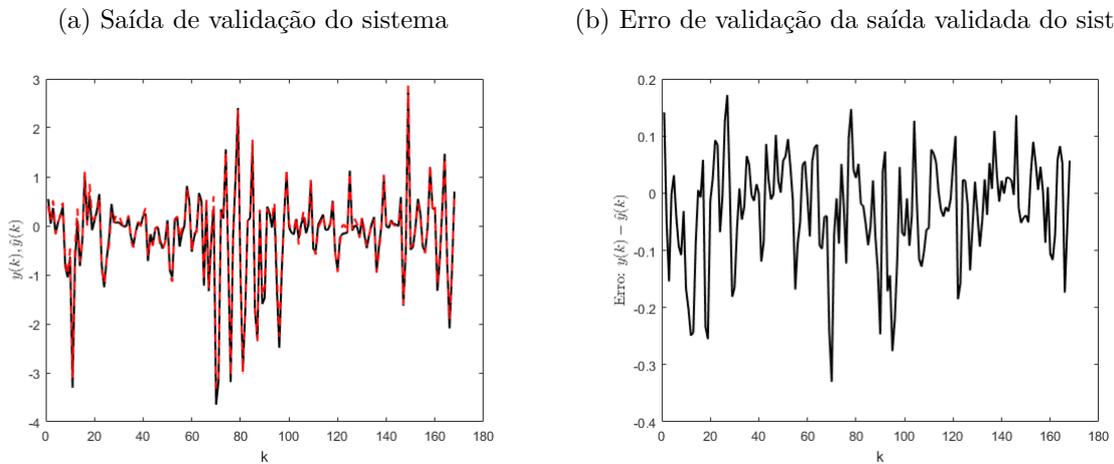


Figura 39 – Validação da identificação utilizando diferentes polos não ótimos  $0,4 \pm 0,7i$  e  $0,5 + 0i$  para cada direção e 10 funções na base. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



A Tabela 4 apresenta o erro de estimação dos modelos de Volterra parametrizados por funções de Kautz para o sistema (3.14). Na tabela, também apresentam-se os polos e o número de funções utilizados.

Tabela 4 – Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções de Kautz utilizadas e polos escolhidos para o sistema (3.14) com polos em  $0,3 \pm 0,8i$ ;  $0,7$  e  $0,1$ .

Polos Utilizados	Número de funções na base	Erro EQS (dB)
$0,3 \pm 0,8i; 0,6 \pm 0, i$	2	-30,3086
$0,4 \pm 0,7i; 0,5 \pm 0, i$	2	-5,8076
$0,4 \pm 0,7i; 0,5 \pm 0, i$	10	-32,3347

Por meio da parametrização por *kernels* assimétricos, o modelo estimado alcançou a saída original do sistema com apenas 2 funções na bases, quando os polos ótimos são utilizados, para polos não ótimos foram necessárias 10 funções na base para obter a mesma saída. O erro de estimação foi bem próximo para ambos os casos, polos ótimos e não ótimos com 10 funções na base.

## 4 Estudo de Caso

### 4.1 Introdução

A obtenção dos modelos dos sistemas reais torna possível o conhecimento, a análise, a estimação e o controle de processos. No entanto, os sistemas reais, muitas vezes, possuem dinâmicas desconhecidas, em que não se conhecem as equações físicas que regem o sistema ou o processo de obtê-las é muito difícil e demorado. Para tais sistemas é utilizada a técnica de identificação de sistemas, pois este processo utiliza necessariamente dados experimentais, sendo que, a partir da análise das entradas e saídas são gerados modelos matemáticos ou físicos do sistema. Para o presente capítulo é utilizado um sistema de um pequeno aquecedor elétrico com dissipação variável em que os dados experimentais de entrada e saída foram coletados em laboratório. O sistema em estudo foi retirado do livro *Introdução à Identificação de Sistemas* de Luis Antonio Aquirre (AGUIRRE, 2007).

O aquecedor elétrico com dissipação variável teve sua variação realizada por meio de um ventilador, em que a entrada é a tensão elétrica aplicada ao aquecedor e a saída é o sinal amplificado de um termopar. Realizaram-se testes dinâmicos para a obtenção dos dados, utilizando, como entrada, sinais aleatórios de tensão elétrica. A saída foi medida utilizando um termopar conectado a um amplificador de instrumentação. Para cada valor de entrada foi aguardado 10 segundos com taxa de amostragem igual a 1 segundo. A saída teve fator de decimação de 12 amostras.

A identificação do sistema do aquecedor foi realizada utilizando séries de Volterra e FBO. Foram empregados os *kernels* simétricos e assimétricos, alterando o número de funções na base, começou-se com 2 funções na base e este valor foi aumentado até alcançar o valor máximo, valor no qual o sistema não é mais válido. O polo ótimo do sistema real não é conhecido, por essa razão foi utilizado o algoritmo *Simulated Annealing*, para seleção do melhor polo que irá parametrizar as bases de Kautz. Como nos sistemas do Capítulo 3, foi utilizado o erro quadrático médio de saída (3.1), para verificar a qualidade do modelo.

### 4.2 Identificação do Sistema de um Aquecedor Elétrico com Dissipação Variável

O conhecimento *a priori* do sistema contém informações importantes para a identificação utilizando séries de Volterra, pois a utilização dos polos ótimos na parametrização das bases de Laguerre e Kautz reduz o número de funções na base, necessário para descrever o sistema. No entanto, os polos ótimos do sistema real do aquecedor elétrico, bem como

sua estrutura, são desconhecidos. Diante disso, foi utilizado o *Simulated Annealing* para obter o melhor polo que parametrize as bases de Kautz.

O algoritmo *Simulated Annealing* visa minimizar uma função de custo a partir de dados iniciais aleatórios. A Figura 40 apresenta o fluxograma do *Simulated Annealing* para obtenção dos melhores polos que parametrizam as bases de Kautz. A função de custo, no presente problema, foi definida com sendo o erro médio de estimação entre a saída real e a saída estimada. A cada iteração, foi gerado um modelo de Volterra utilizando bases de Kautz. A partir de polos gerados aleatoriamente próximos do polo da solução atual, obtêm-se novos valores para função de custo. O número de funções na base foi mantido igual a 2. Em seguida, a nova função de custo era comparada com a função anterior, podendo ser aceita ou rejeitada, de acordo com a função aceite (2.15). A temperatura  $T$ , definida como  $T = 100$ , foi sendo reduzida até um valor  $T_{min}$  definido como  $T_{min} = 0.01$ .

Os valores dos polos que geraram a menor função de custo são escolhidos como sendo os melhores polos para parametrizar as bases de Kautz. Uma vez que a estrutura do sistema também é desconhecida, foram utilizados *kernels* simétricos e assimétricos de primeira, segunda e terceira ordem em associação para encontrar a melhor estrutura para o sistema que gere a menor função de custo.

A melhor estrutura encontrada para descrever a saída do sistema do aquecedor elétrico foi utilizando *kernels* de primeira e segunda ordem. Portanto, a saída do modelo de Volterra é dado por

$$\tilde{y}(k) = \sum_{i_1=1}^M \alpha_{i_1} \psi_{1,i_1}(k) u(k) + \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \alpha_{i_1,i_2} \psi_{21,i_1}(k) \psi_{22,i_2}(k) u(k). \quad (4.1)$$

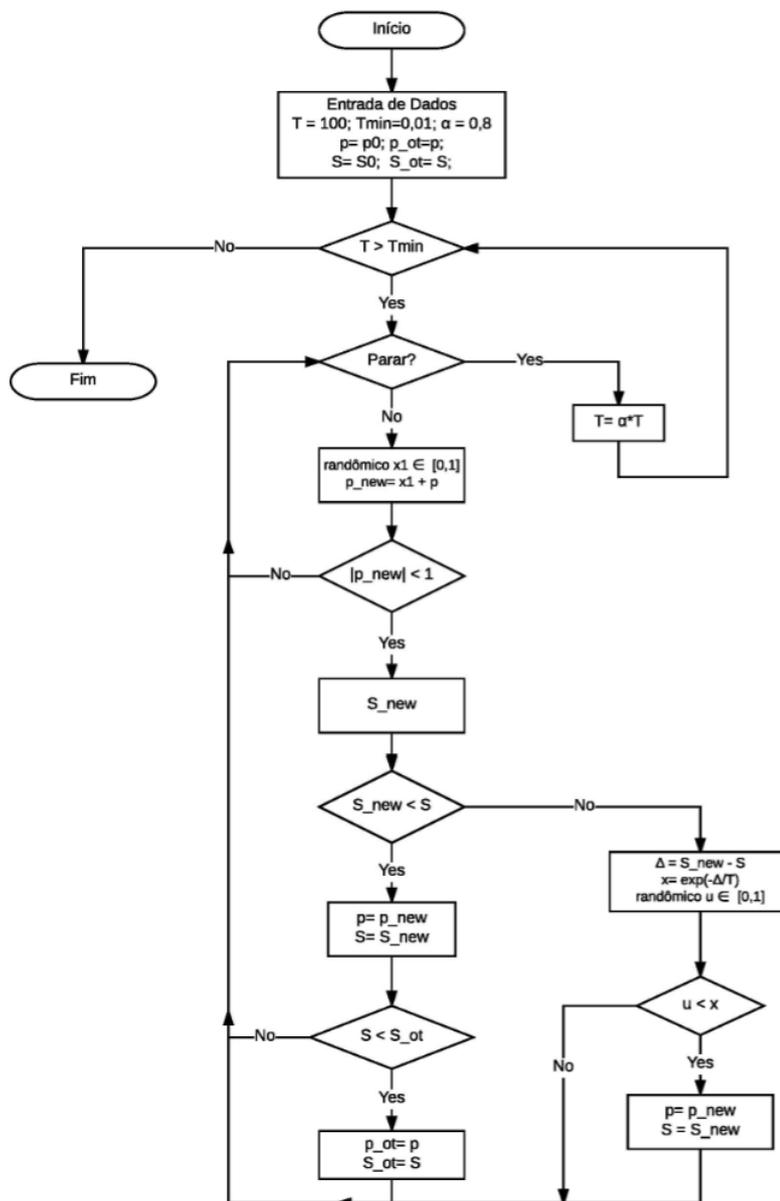
Os coeficientes da série de Volterra  $\alpha_{i_1, \dots, i_n}$  são estimados por meio dos mínimos quadrados. A quantidade de  $\alpha$  estimados e os polos estimados, por meio do *Simulated Annealing*, são utilizados para comparar os modelos encontrados e ajudar na definição do melhor modelo. Utilizando *kernels* simétricos, o número de parâmetros estimados é dado por 4.2, enquanto que, utilizando *kernels* assimétricos, a quantidade de parâmetros é definida em 4.3.

$$n + \frac{n(n+1)}{2} + 2, \quad (4.2)$$

$$n + n^2 + 3 \quad (4.3)$$

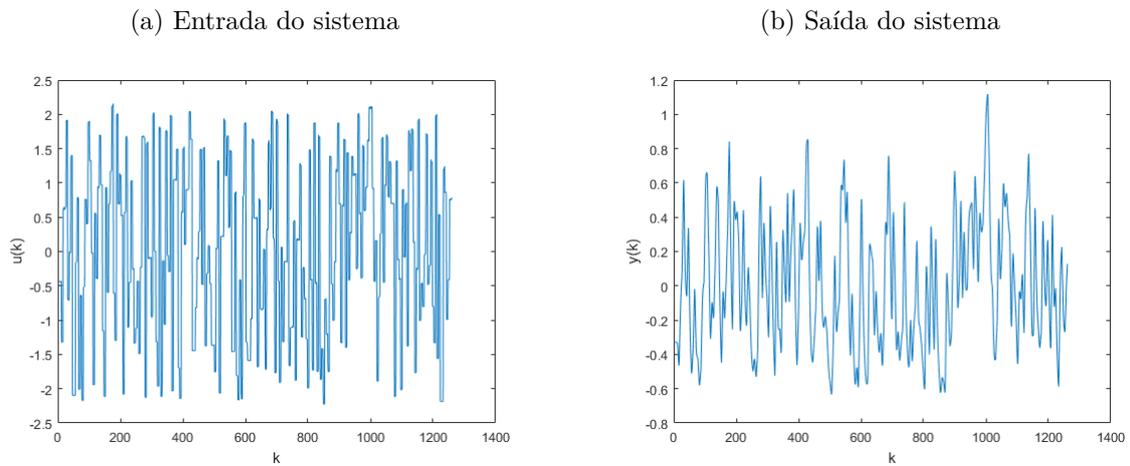
em que  $n$  é o número de funções utilizadas na base. Em ambas equações, o primeiro termo define a quantidade de parâmetros do *kernel* de primeira ordem, o segundo termo determina os parâmetros do *kernel* de segunda ordem e o último termo é referente a quantidade de polos estimados.

Figura 40 – Fluxograma do *Simulated Annealing* para obtenção dos melhores polos que parametrizam as bases de Kautz.



A Figura 41a ilustra os sinais aleatórios de entrada de tensão elétrica, com distribuição gaussiana, média nula e variância unitária. A saída do sistema é mostrada na Figura 41b. A primeira metade dos dados da entrada e saída foi utilizada no processo de estimação da saída real do sistema, enquanto que a segunda metade foi usada para a validação do modelo encontrado.

Figura 41 – Entrada e saída do sistema de um aquecedor elétrico com dissipação variável.



#### 4.2.1 Identificação Utilizando *Kernels* Simétricos

Os polos encontrados utilizando o *Simulated Annealing*, *kernels* simétricos e 2 funções na base foram  $0,7292 \pm 0,0014i$  para o *kernel* de primeira ordem e  $0,6797 \pm 0,3372i$  para o *kernel* de segunda ordem. Foi obtido o modelo de Volterra da Figura 42a, o modelo encontrado e o erro de estimação (Figura 42b) garantem uma boa aproximação do sistema do aquecedor elétrico. A validação do modelo encontrado, presente na Figura 43a, e o erro de validação (Figura 43b) confirmam a qualidade do modelo.

Figura 42 – Identificação utilizando os polos  $0,7292 \pm 0,0014i$  e  $0,6797 \pm 0,3372i$  e 2 funções na base, parametrizada por *kernels* simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

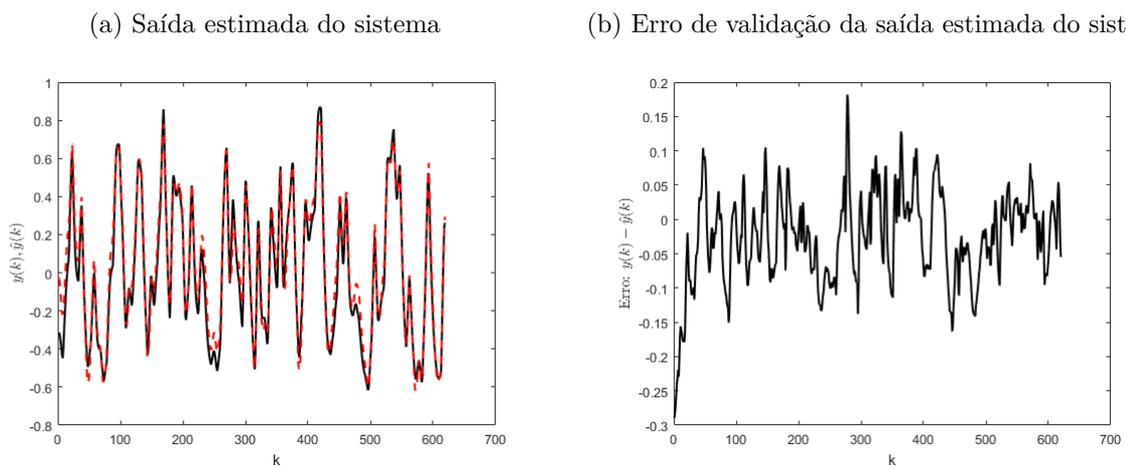
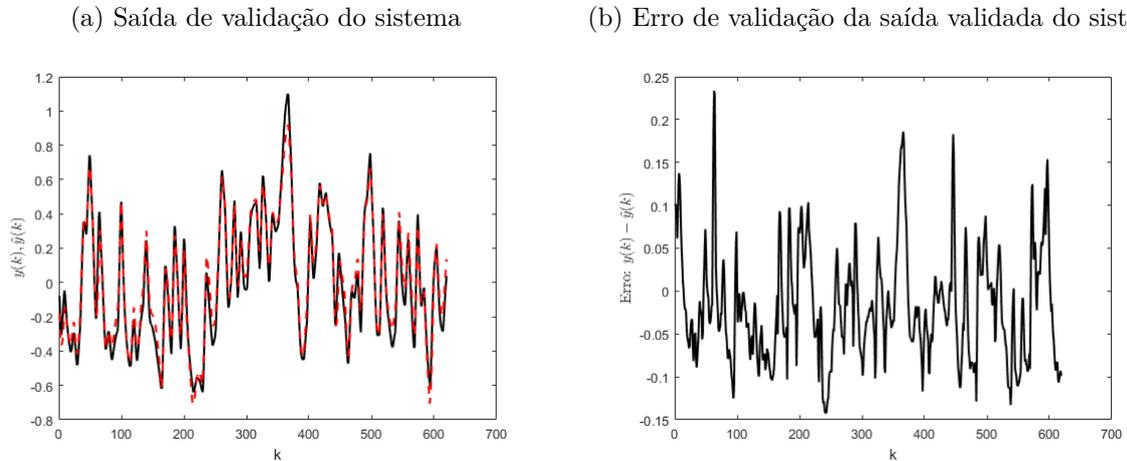


Figura 43 – Validação da identificação utilizando os polos  $0,7292 \pm 0,0014i$  e  $0,6797 \pm 0,3372i$  e 2 funções na base, parametrizada por *kernels* simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



Com o intuito de melhorar a estimação do modelo de Volterra, foram utilizados os polos encontrados anteriormente e aumentou-se o número de funções na base. A Tabela 5 apresenta os valores de EQS quando é utilizado 2, 5, 10, 11 ou 15 funções na base.

Tabela 5 – Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções utilizando os polos  $0,7292 \pm 0,0014i$  e  $0,6797 \pm 0,3372i$ .

Número de funções na base	Parâmetros estimados	Erro EQS (dB) estimação	Erro EQS (dB) validação
2	7	-13,8792	-14,3337
5	22	-14,9720	-15,8849
10	67	-16,0293	-16,1836
11	79	-16,1160	-15,9523
15	137	-17,3286	-12,0100

Quando são utilizadas 11 funções na base, o valor do EQS de validação começa a aumentar, sendo assim, o valor máximo de funções a serem utilizadas, a fim de garantir um bom modelo, são 10 funções na base. Utilizar mais funções que este valor máximo, encontra-se uma boa estimação da saída, porém este modelo não é válido. A Figura 44a apresenta o melhor modelo de Volterra encontrado para esta configuração, utilizando 10 funções na base. Como pode ser observado na Figura 44b, o erro de estimação é baixo. As Figuras 45a e 45b mostram que o modelo obtido é válido.

Figura 44 – Identificação utilizando os polos  $0,7292 \pm 0,0014i$  e  $0,6797 \pm 0,3372i$  e 10 funções na base, parametrizada por *kernels* simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

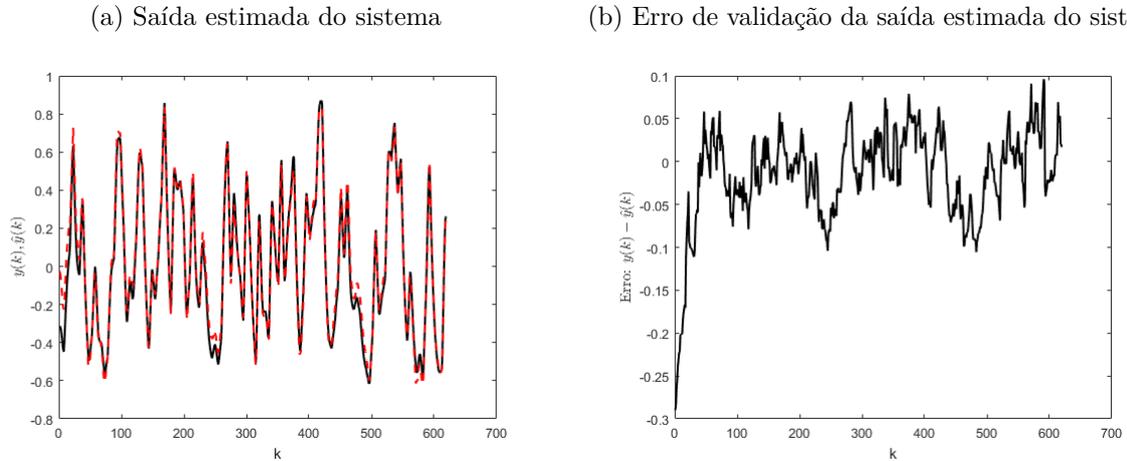
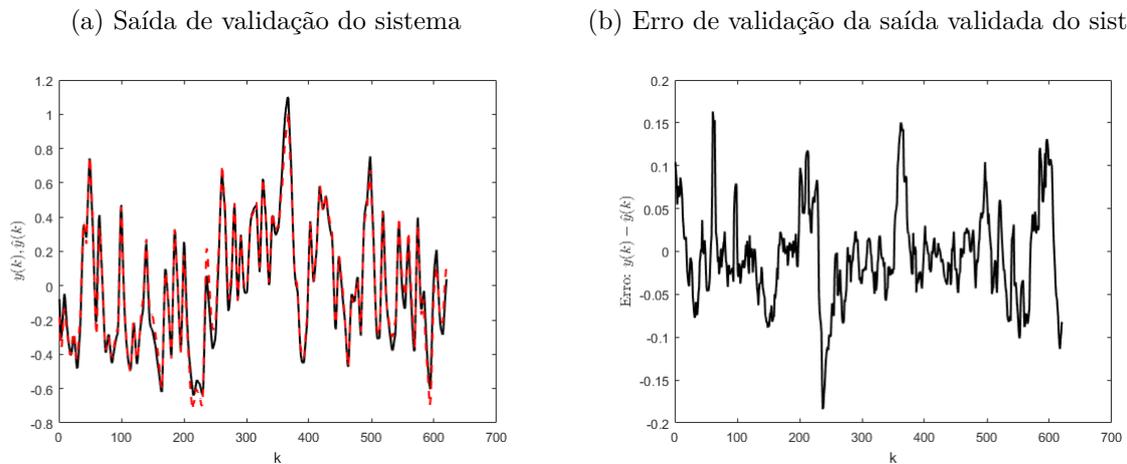


Figura 45 – Validação da identificação utilizando os polos  $0,7292 \pm 0,0014i$  e  $0,6797 \pm 0,3372i$  e 10 funções na base, parametrizada por *kernels* simétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

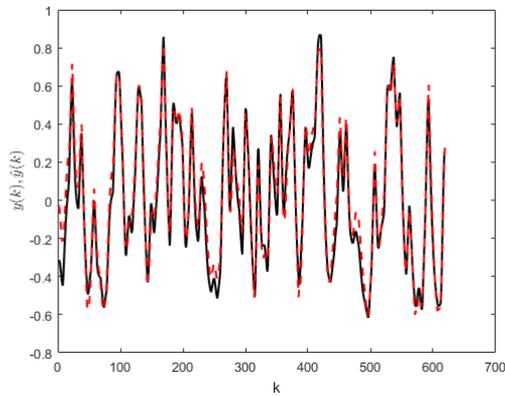


#### 4.2.2 Identificação Utilizando *Kernels* Assimétricos

Utilizando os *kernels* assimétricos e 2 funções na base, o *Simulated Annealing* encontrou os seguintes polos:  $0,7358 \pm 0,0171i$  para o *kernel* de primeira ordem e  $0,6629 \pm 0,0414i$  e  $0,7442 \pm 0,1615i$  para o *kernel* de segunda ordem. A Figura 46a apresenta a saída estimada e real do sistema. O modelo encontrado descreve bem o modelo original, uma vez que o erro de estimação (Figura 46b) está dentro dos limites aceitáveis. A validação do modelo é mostrado na Figura 47a, conforme o baixo erro de validação apresentado na Figura 47b, o modelo de Volterra realiza uma boa representação do sistema real.

Figura 46 – Identificação utilizando os polos  $0,7358 \pm 0,0171i$ ;  $0,6629 \pm 0,0414i$  e  $0,7442 \pm 0,1615i$  e 2 funções na base, parametrizada por *kernels* assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída estimada do sistema



(b) Erro de validação da saída estimada do sistema

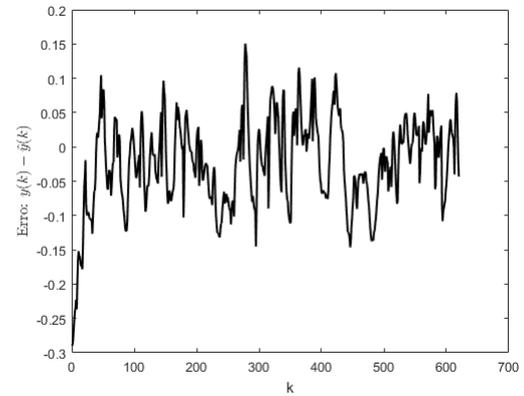
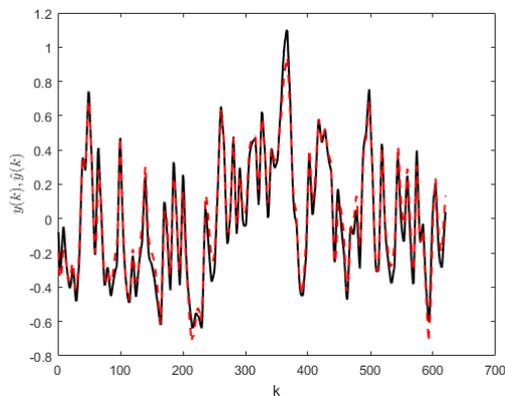
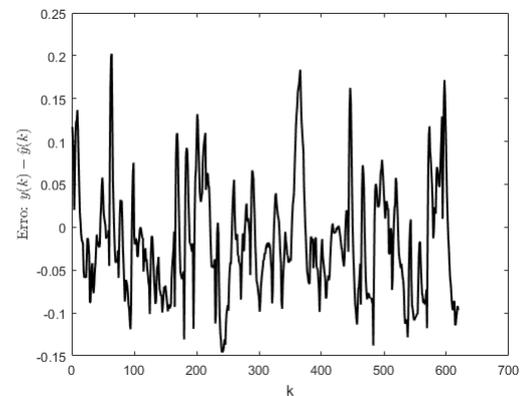


Figura 47 – Validação da identificação utilizando os polos  $0,7358 \pm 0,0171i$ ;  $0,6629 \pm 0,0414i$  e  $0,7442 \pm 0,1615i$  e 2 funções na base, parametrizada por *kernels* assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída de validação do sistema



(b) Erro de validação da saída validada do sistema



Tendo em vista obter um melhor modelo que descreva o sistema do aquecedor, utilizaram-se diferentes números de funções na base e os polos encontrados utilizando o *kernel* assimétrico. A Tabela 6 mostra os resultados de EQS quando é utilizado 2, 4, 6, 7 e 9 funções na base.

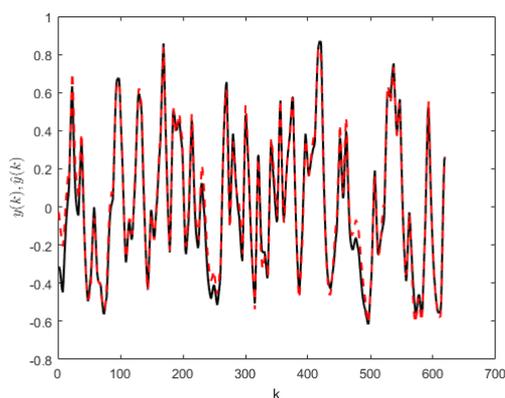
Tabela 6 – Erro de aproximação da saída de acordo com o número de funções utilizando os polos  $0,7358 \pm 0,0171i$ ;  $0,6629 \pm 0,0414i$  e  $0,7442 \pm 0,1615i$ .

Número de funções na base	Parâmetros estimados	Erro EQS (dB) estimação	Erro EQS (dB) validação
2	9	-14,1058	-14,4211
4	23	-15,0442	-15,8562
6	45	-15,7109	-16,4020
7	59	-16,1736	-15,5094
9	93	-18,0787	-11,8900

O erro EQS de estimação melhora quando o número de funções na base é aumentado. No entanto para o EQS de validação existe um valor máximo na quantidade de funções na base. Utilizando *kernels* assimétricos, o número máximo de funções na base diminui para 6 funções, uma vez o que o sistema tem mais variáveis o erro entre a saída real e a saída de validação aumenta mais rapidamente. A Figura 48a ilustra o modelo de Volterra que utiliza o número máximo de funções que gera o melhor modelo. O erro de estimação, mostrado na Figura 48b, é pequeno o que garante uma boa aproximação do sistema original. As Figuras 49a e 49b asseguram a qualidade do modelo de Volterra encontrado para essa configuração.

Figura 48 – Identificação utilizando os polos  $0,7358 \pm 0,0171i$ ;  $0,6629 \pm 0,0414i$  e  $0,7442 \pm 0,1615i$  e 6 funções na base, parametrizada por *kernels* assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.

(a) Saída estimada do sistema



(b) Erro de validação da saída estimada do sistema

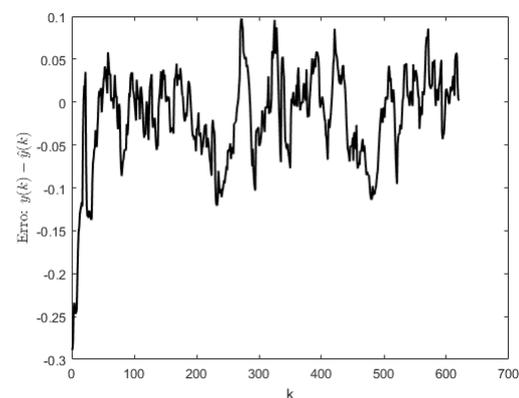
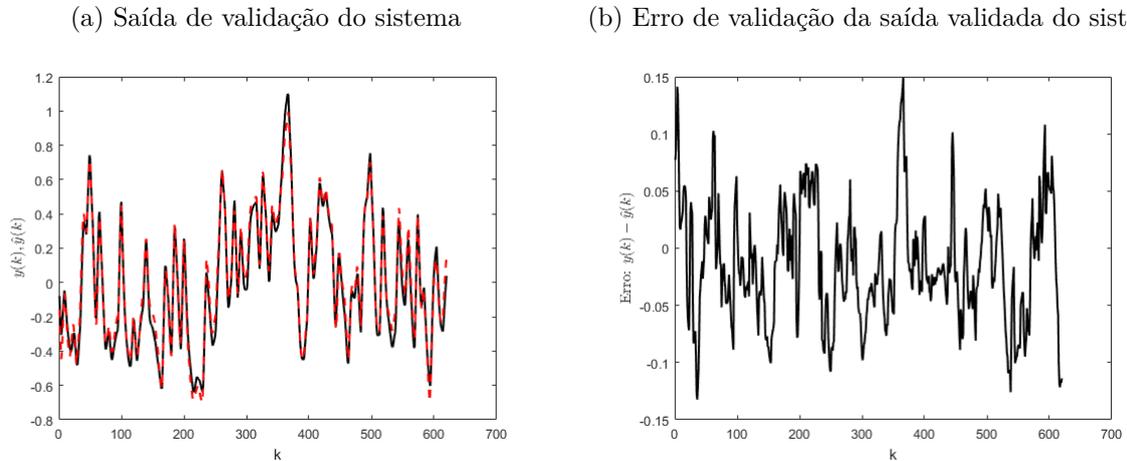


Figura 49 – Validação da identificação utilizando os polos  $0,7358 \pm 0,0171i$ ;  $0,6629 \pm 0,0414i$  e  $0,7442 \pm 0,1615i$  e 6 funções na base, parametrizada por *kernels* assimétricos. A linha cheia representa a saída real do sistema e a linha tracejada indica a saída estimada do sistema.



O melhor modelo de Volterra encontrado para descrever o sistema do aquecedor elétrico foi o modelo parametrizado por *kernels* assimétricos e 6 funções na base. Nesta configuração, são estimados 45 parâmetro, o que ajuda na redução do erro de estimação e validação, uma vez que os polos encontrados em ambos os casos, utilizando *kernels* simétricos e assimétricos, estão próximos. Utilizado *kernels* simétricos são necessárias 10 funções na base para alcançar o menor erro de estimação e validação, sendo estimado 67 parâmetros, 22 parâmetros a mais que o melhor modelo encontrado por meio dos *kernels* assimétricos. Contudo, todas as configurações utilizadas conseguiram uma boa estimação da saída real do sistema do aquecedor elétrico.

## 5 Conclusão e Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusão

A utilização das séries de Volterra parametrizadas por funções de Kautz é uma importante ferramenta na identificação de sistemas. O uso das FBO, juntamente com as séries de Volterra, garante a redução do número de coeficientes necessários para obter a saída do sistema. A partir da análise dos gráficos apresentados, é possível concluir que a série de Volterra é uma alternativa viável na identificação de sistemas. A escolha dos polos interfere diretamente na quantidade de funções utilizadas na base, sendo esta menor quanto mais próximo os polos utilizados na construção das bases estiverem dos polos originais do sistema. Portanto, o conhecimento *a priori* do sistema no processo de identificação garante uma aproximação satisfatória da saída, utilizando menos parâmetros para descrever o sistema. O uso de funções de Laguerre para estimar sistemas descritos por polos complexos não é uma alternativa viável, pois mesmo utilizando polos ótimos é necessário muitas funções na base para obter a saída desejável. Portanto, ao realizar a identificação de um sistema real, em que a estrutura e os polos são desconhecidos, é mais factível a utilização das bases de Kautz, uma vez que estas bases descrevem bem os sistemas com polos reais e complexos.

O uso do *Simulated Annealing* para obtenção dos polos que parametrizam as bases de Kautz é uma solução satisfatória, uma vez que necessita de poucas funções na base para alcançar o resultado desejado com baixo erro de estimação, o que não acontece quando a escolha dos polos é feita de forma aleatória. A identificação utilizando *kernels* simétricos e assimétricos apresenta uma pequena discrepância, visto que os polos encontrados em ambas configurações estão próximos, nota-se que os *kernels* assimétricos dão uma liberdade maior ao modelo estimado, obtendo assim um erro de estimação um pouco menor. Verificou-se também que existe um número máximo de funções que devem ser utilizadas na base, pois acima deste valor o modelo obtido não é válido. Quando são empregados os *kernels* simétricos o valor máximo de funções na base é maior do que quando se utiliza *kernels* assimétricos. O modelo de Volterra parametrizado por funções de Kautz e *kernels* assimétricos gerou um melhor modelo que descreve o sistema do aquecedor elétrico com dissipação variável. No entanto, todos os modelos encontrados utilizando polos obtidos por meio do *Simulated Annealing* geraram saídas desejáveis com pequenos erros de estimação e validação.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Algumas melhorias no processo de identificação utilizando séries de Volterra e FBO podem ser realizadas, tais propostas são apresentadas para continuação deste trabalho:

- Usar a curva estática como base para definir o número de parâmetros a serem utilizados para a representação do modelo.
- Sistemas não lineares podem ser representados por meio da interconexão de blocos dinâmicos lineares e de blocos estáticos não lineares (ROMANO, 2010). Assim a utilização dos modelos de blocos estruturados poderia melhorar os resultados reduzindo o número de parâmetros utilizados.

# Referências

- AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas, Editora UFMG, 3 a.* [S.l.]: Edição, 2007. 1, 2, 7, 40
- ARAUJO, H. A. d. et al. Algoritmo simulated annealing: uma nova abordagem. Florianópolis, SC, 2001. 13, 14
- ASKARZADEH, A. et al. A population-based simulated annealing algorithm for global optimization. In: IEEE. *Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2016 IEEE International Conference on.* [S.l.], 2016. p. 004626–004633. 13
- BIBES, G. et al. An optimized regularization method using volterra model application to atrazine oxidation process. In: IEEE. *Proceedings of 2005 IEEE Conference on Control Applications, 2005. CCA 2005.* [S.l.], 2005. p. 102–107. 2
- BOYD, S.; CHUA, L. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with volterra series. *IEEE Transactions on circuits and systems*, IEEE, v. 32, n. 11, p. 1150–1161, 1985. 6
- BRAGA, M. F. et al. Modelos de volterra: identificação não paramétrica e robusta utilizando funções ortonormais de kautz e generalizadas. Campinas, SP, 2011. 2, 3, 6, 7, 12, 13, 15, 16, 35
- CHON, K. H. et al. Linear and nonlinear system identification of autonomic heart-rate modulation. *IEEE engineering in medicine and biology magazine*, IEEE, v. 16, n. 5, p. 96–105, 1997. 1
- CORRÊA, M. V.; AGUIRRE, L. A. Identificação não-linear caixa-cinza: uma revisão e novos resultados. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO B,rasil, v. 15, n. 2, p. 109–126, 2004. 1
- DOYLE III, F. J.; PEARSON, R. K.; OGUNNAIKE, B. A. *Identification and control using Volterra models.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002. 6, 7
- ERFANIAN, A. Chaotic radial basis function network with application to dynamic modeling of chaotic time series. In: IEEE. *Engineering in Medicine and Biology Society, 1998. Proceedings of the 20th Annual International Conference of the IEEE.* [S.l.], 1998. v. 3, p. 1587–1590. 2
- EYKHOFF, P. System parameter and state estimation. 1972. 6, 8
- FERNANDES, F. de S. *Identificação por predição de erro e síntese de controladores robustos.* Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. 16
- GERMANI, A.; MANES, C. State observers for systems with sensors modeled by polynomials and rational functions. In: IEEE. *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on.* [S.l.], 2008. p. 1387–1392. 2

- ISAKSSON, M.; RÖNNOW, D. A parameter-reduced volterra model for dynamic rf power amplifier modeling based on orthonormal basis functions. *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, Wiley Online Library, v. 17, n. 6, p. 542–551, 2007. 2
- JANSSON, D.; MEDVEDEV, A. Volterra modeling of the smooth pursuit system with application to motor symptoms characterization in parkinson's disease. In: IEEE. *Control Conference (ECC), 2014 European*. [S.l.], 2014. p. 1856–1861. 2
- KABIR, H. et al. High-dimensional neural-network technique and applications to microwave filter modeling. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, IEEE, v. 58, n. 1, p. 145–156, 2010. 2
- KIRKPATRICK, S. et al. Optimization by simulated annealing. *science*, Washington, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. 3, 13
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the user*. [S.l.]: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987. 1
- MACHADO, J. B. et al. Modelagem de sistemas não-lineares por base de funções ortonormais generalizadas com funções internas. Campinas, SP, 2011. 9, 10
- METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, AIP, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953. 13
- NINNESS, B.; GUSTAFSSON, F. A unifying construction of orthonormal bases for system identification. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 42, n. 4, p. 515–521, 1997. 10
- OGUNFUNMI, T. *Adaptive nonlinear system identification: the Volterra and Wiener model approaches*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. 5, 6, 15
- OLIVEIRA, G. H.; AMARAL, W.; LATAWIEC, K. Crhpc using volterra models and orthonormal basis functions: an application to cstr plants. In: IEEE. *Control Applications, 2003. CCA 2003. Proceedings of 2003 IEEE Conference on*. [S.l.], 2003. v. 1, p. 718–723. 2, 7, 9
- OROSKI, E. et al. Identificação de um levitador magnético não linear a partir de funções de Kautz e algoritmos genéticos. In: *Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Indústria*. [S.l.: s.n.], 2014. 3, 12
- OSMAN, K. et al. System identification model for an intelligent pneumatic actuator (ipa) system. In: IEEE. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. [S.l.], 2012. p. 628–633. 2
- PAN, G. Wavelets: a promising approach to linear and nonlinear modeling of electromagnetic problems. In: IEEE. *Microwave and Millimeter Wave Technology Proceedings, 1998. ICMMT'98. 1998 International Conference on*. [S.l.], 1998. p. 23–35. 2
- PUCCIARELLI, A. J.; BARRETO, G.; SERRA, G. L. Identificação nebulosa adaptativa multivariável. *Sbc: Sociedade Brasileira de Computação*, V ENIA, p. 651–660, 2005. 1

- RAGHUNATHAN, S. Knams: A knowledge acquisition tool for modeling systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., v. 23, n. 5, p. 1316–1329, 1993. ISSN 0018-9472. 1
- RASMUSSEN, B. P.; ALLEYNE, A. G.; MUSSER, A. B. Model-driven system identification of transcritical vapor compression systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 13, n. 3, p. 444–451, 2005. 2
- REGINATO, B. C.; OLIVEIRA, G. H. On selecting the mimo generalized orthonormal basis functions poles by using particle swarm optimization. In: IEEE. *Control Conference (ECC), 2007 European*. [S.l.], 2007. p. 5182–5188. 7
- ROMANO, R. A. *Identificação de processos não-lineares e quantificação de atrito em válvulas de controle*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010. 50
- RUGH, W. J. *Nonlinear system theory*. [S.l.]: Johns Hopkins University Press Baltimore, 1981. 2
- SERETIS, C.; ZAFIRIOU, E. Nonlinear dynamical system identification using reduced volterra models with generalised orthonormal basis functions. In: IEEE. *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*. [S.l.], 1997. v. 5, p. 3042–3046. 5, 7
- SILVA, S. D. Non-parametric identification of mechanical systems by kautz filter with multiple poles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 1103–1111, 2011. 3, 12, 13
- SILVEIRA, D. D. et al. Analysis of variations of volterra series models for rf power amplifiers. *IEEE microwave and wireless components letters*, IEEE, v. 23, n. 8, p. 442–444, 2013. 7
- TEHRANI, A. S. et al. Orthonormal-basis power amplifier model reduction. In: IEEE. *Integrated Nonlinear Microwave and Millimetre-Wave Circuits, 2008. INMMIC 2008. Workshop on*. [S.l.], 2008. p. 39–42. 2
- WILLIAMSON, G. A. Reduced complexity volterra models for nonlinear system identification. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, v. 4, p. 257–265, 2001. 2, 8