UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E A DISTÂNCIA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LARISSA CRISTINA MORAIS TRINDADE

RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: CONTEXTO HISTÓRICO, DEFINIÇÕES, APLICAÇÕES E ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO MÉDIO

João Monlevade, MG

Julho, 2022

LARISSA CRISTINA MORAIS TRINDADE

RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: CONTEXTO HISTÓRICO, DEFINIÇÕES, APLICAÇÕES E ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) junto ao Centro de Educação Aberta e a Distância (CEAD) como requisito indispensável à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Claudiney Nunes de Lima.

João Monlevade, MG

Julho, 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

T832r Trindade, Larissa Cristina Morais.
Razão Áurea e a sequência de Fibonacci [manuscrito]: Contexto histórico, definições, aplicações e atividades didáticas para o Ensino Médio. / Larissa Cristina Morais Trindade. - 2022.
15 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Claudiney Nunes Lima.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto. Centro de Educação Aberta e a Distância. Graduação em Matemática .

1. Matemática. 2. Números de Fibonacci. 3. Ensino médio. I. Lima, Claudiney Nunes. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
CENTRO DE EDUCACAO ABERTA E A DISTANCIA - CEAD
COLEGIADO DO CURSO DE MATEMATICA -
MODALIDADE A DISTANCIA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Larissa Cristina Morais Trindade

RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI:
CONTEXTO HISTÓRICO, DEFINIÇÕES, APLICAÇÕES E ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, modalidade a distância, da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática

Aprovada em 27 de julho de 2022

Membros da banca

Doutor em Estatística e Experimentação Agropecuária - Claudiney Nunes de Lima - Orientador (Universidade Federal de São João Del-Rei)
Doutor em Educação - Daniel Clark Orey - Leitor Crítico - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Doutor em Educação - Milton Rosa - Leitor Crítico - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Claudiney Nunes de Lima, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 2707/2022

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: - www.ufop.br

RESUMO

Este trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica de teses e dissertações sobre a Razão Áurea, sua relação com a Sequência de Fibonacci, e propostas de atividades voltadas para o ensino médio. A pesquisa foi realiza no catálogo de dissertações e teses da Capes e contemplou 12 trabalhos defendidos no período de 2014 a 2021. Aborda-se o contexto histórico, definições, e exemplos onde a Razão Áurea é aplicada na Matemática e na natureza. Além de ampliar o aprendizado sobre o tema, e aumentar ainda mais o fascínio sobre a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci, levar esse conhecimento para a sala de aula, possibilita que o aluno visualize que a Matemática está presente no nosso cotidiano e ao nosso redor.

Palavras-chave: Razão Áurea, Sequência de Fibonacci, Aplicações, Atividades didáticas, Ensino médio.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

Durante uma conversa informal com alguns alunos de matemática do ensino básico, e algumas vezes do ensino superior, é comum escutar as seguintes frases: “Mas para que estudar isso?”, “Eu nunca vou usar isso na minha vida.”. Parte-se do princípio que a matemática é feita apenas para calcular, realizar contas, quando na verdade ela vai além.

A Sequência de Fibonacci e sua relação com a Razão Áurea é a prova de que a matemática aparece na natureza, na ciência e no corpo humano, de forma muito singela, comprovando a perfeição como algumas coisas no mundo são formadas.

É importante apresentar sugestões de exercícios que possibilitem a ampliação da visão do aluno que a matemática está presente no cotidiano e no mundo que o rodeia.

1.2. Objetivo

O objetivo desse trabalho é trazer o contexto histórico, as definições e a relação entre a Razão Áurea e Sequencia de Fibonacci, e posteriormente propostas de aplicação em atividades direcionadas para o ensino médio.

2. METODOLOGIA

O levantamento bibliográfico para a realização dessa pesquisa foi realizado através catálogo de dissertações e teses da Capes em duas etapas.

Na primeira etapa, com o intuito de selecionar trabalhos que tratassem do contexto histórico, a pesquisa foi realizada por meio da busca das palavras-chave: razão áurea, Sequência de Fibonacci e matemática.

Na segunda etapa, com o intuito de selecionar trabalhos que abordassem a prática didática as palavras-chave utilizadas foram: razão áurea, sequência de Fibonacci, ensino de Matemática e atividades.

Após a pesquisa foram selecionadas doze dissertações defendidas no período de 2014 a 2020, das quais três foram selecionadas na primeira etapa por serem pesquisas bibliográficas que possibilitam uma fundamentação teórica no processo de desenvolvimento da sequência de Fibonacci e sua relação com a Razão Áurea. As demais dissertações apresentam propostas de ensino e atividades voltadas para o 6º ano do ensino fundamental, ensino médio e ensino superior, sendo apresentadas aqui apenas as atividades voltadas para o ensino médio.

3. RAZÃO ÁUREA

Segundo Fulone (2017) provavelmente o interesse pela Razão Áurea foi despertado por sua relação com o pentagrama, figura muito representada pelos mais variados motivos em diversas civilizações (Figura 1).

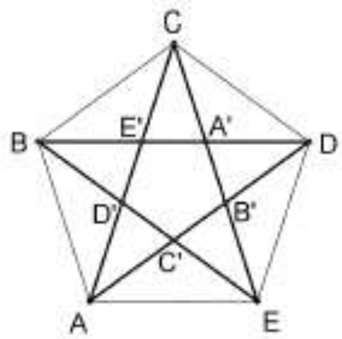


Figura 1: Pentagrama formado pelas diagonais de um pentágono regular

Fonte: FULONE, 2017.

> Apesar de estudos de tabuletas cuneiformes do segundo milênio a.E.C. descobertas em 1936 em Susa, no Irã, indicarem que os babilônios conheciam uma fórmula para determinar a área (aproximada) de um pentágono, não há indícios matemáticos de que conhecessem de fato a Razão Áurea, ao menos não nos documentos encontrados até hoje. (FULONE, 2017)

De acordo com Fulone (2017) boa parte do trabalho que possibilitou a definição e a compreensão da Razão Áurea ocorreu antes e durante a abertura da Academia de Platão em 386 a.E.C., com forte influência dos estudos de Theaetetus (cerca de 417 a 369 a.E.C.).

Segundo Amaral (2014) em cerca de 300 a.C. o matemático *Euclides* descreveu no Livro VI de sua obra *Os Elementos,* a divisão de um segmento em duas partes dividindo-o em razão média e extrema (Figura 2).

A Razão Áurea, seção áurea ou proporção divina é definida pela razão:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498\ldots = \Phi.$$

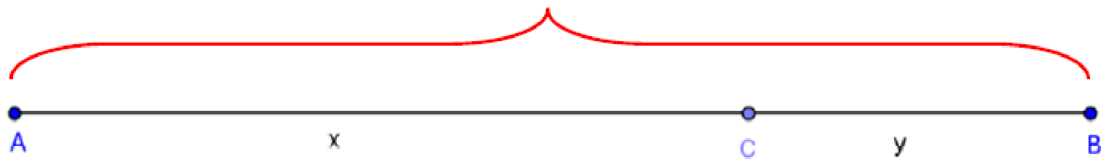
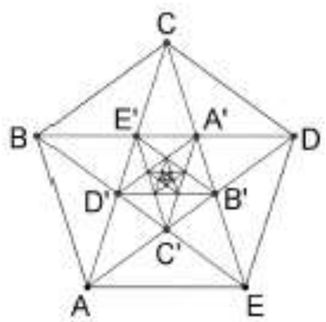


Figura 2: Divisão de um segmento em duas partes dividindo-o em razão média e extrema

Fonte: AMARAL, 2014

Fulone (2017) apresenta algumas figuras geométricas que possuem naturalmente a razão áurea, como o Fractal, pentagrama formado pelas diagonais de um pentágono regular (Figura 3), o triângulo áureo formado pela construção de um triângulo isósceles cuja medida dos ângulos da base é o dobro da medida do ângulo oposto a ela (Figura 4), o retângulo áureo (Figura 5), e a espiral áurea, construída pela espiral logarítmica (Figura 6).



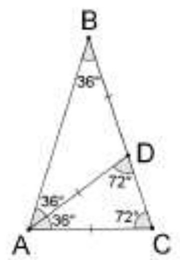
"Fazendo as razões entre os segmentos formados pelos pontos de intersecção das diagonais, sempre obteremos a Razão Áurea."

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{ED'}} = \frac{\overline{ED'}}{\overline{EC'}} = \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D'}}$$

$$\frac{l \cdot \Phi}{l} = \frac{l}{\frac{l}{\Phi}} = \frac{\frac{l}{\Phi}}{\frac{l}{\Phi^2}} = \Phi$$

Figura 3: Fractal, pentagrama formado pelas diagonais de um pentágono regular.

Fonte: FULONE, 2017.



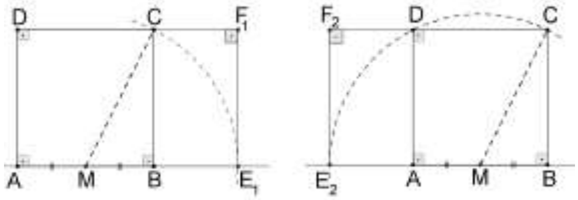
"O triângulo ABC (assim, como CAD) possui a razão F entre o lado e a base, sendo conhecido como *Triângulo Áureo*."

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \Phi$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\Phi} = \phi.$$

Figura 4: Triângulo Áureo

Fonte: FULONE, 2017.



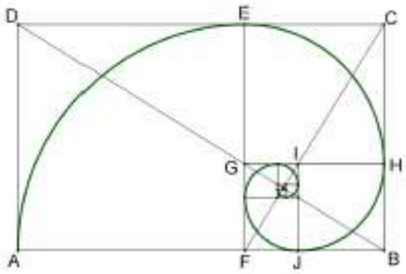
"O retângulo que possui seus lados na proporção Áurea, isto é, tal que a razão entre o lado maior e o menor é Φ, recebe o nome de *Retângulo Áureo.*"

$$\frac{\overline{AE_1}}{\overline{AD}} = \frac{\Phi\overline{AB}}{\overline{AB}} = \Phi$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE_2}} = \frac{\overline{AB}}{\phi\overline{AB}} = \frac{1}{\phi} = \Phi.$$

Figura 5: Construção do Retângulo Áureo

Fonte: FULONE, 2017.



"A Espiral Áurea pode ser obtida pelo lugar geométrico que o vértice A percorre para coincidir com o vértice E quando o retângulo ABCD tiver um movimento simultâneo de rotação e contração dado por um fator FΦ^{-1}, com centro no "Olho de Deus", para sobrepor o retângulo ECBF. Em seguida, continuando o movimento, passar pelos vértices H e J, sobrepondo, respectivamente, os retângulos HBFG e JFGI, e assim sucessivamente para os demais retângulos da série."

Figura 6: Espiral Áurea

Fonte: FULONE, 2017.

Abaixo apresentamos alguns exemplos de ocorrências da razão áurea na natureza:

Para atacar suas presas, os falcões-peregrinos usam essa propriedade. Pelo fato de seus olhos estarem nas laterais de sua cabeça, eles precisam inclinar a cabeça em torno de 40 graus para um dos lados e assim não perder o alvo de vista. Dessa forma, o falcão desce em rota de espiral logarítmica para poder manter esse ângulo constante, usando a propriedade Equiangular (Figura 7). (SANTOS, 2020)

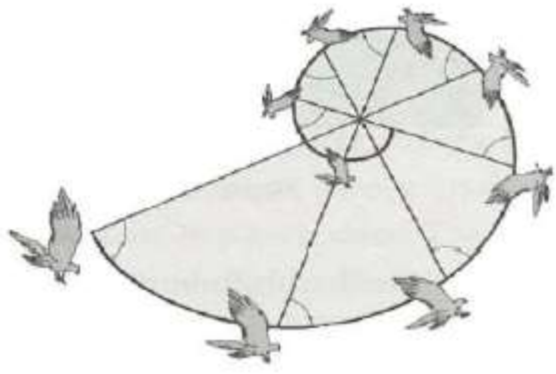


Figura 7: Voo do Falcão-Peregrino em forma de espiral

Fonte: LÍVIO (2011) *apud* SANTOS (2010)

Observando um girassol, por exemplo, percebemos que a distribuição de suas sementes é em formato de espiral (Figura 8). São várias espirais tanto no sentindo horário quanto no sentido anti-horário e a quantidade delas está relacionada com os números de Fibonacci. Dependendo do tamanho do Girassol ele possui 21 espirais em um sentido e 34 no outro sentido, 34 espirais em um sentido e 55 em outro sentido, 55 e 89 ou 89 e 144, que são números de Fibonacci adjacentes. (SANTOS, 2010)

Figura 8: Girassol

Fonte: FRANCISCO (2017) *apud* SANTOS (2010)

4. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Segundo Fulone (2017) Leonardo de Pisa nasceu por volta da década de 1170, atualmente mais conhecido por Fibonacci, do latim *filius* Bonacci, filho da família Bonacci, ou “filho da boa natureza”. Fibonacci é conhecido por uma importante descoberta Matemática que ficou conhecida como “o problema dos coelhos” (Figura 9), cuja solução gera a sequência de Fibonacci:

> “Quantos casais de coelhos podem ser formados a partir de um único casal de recém-nascidos durante um ano, se cada par originar um novo casal a cada mês, o qual se torna fértil a partir do segundo mês de vida, e não ocorrerem mortes?” (FULONE, 2017)

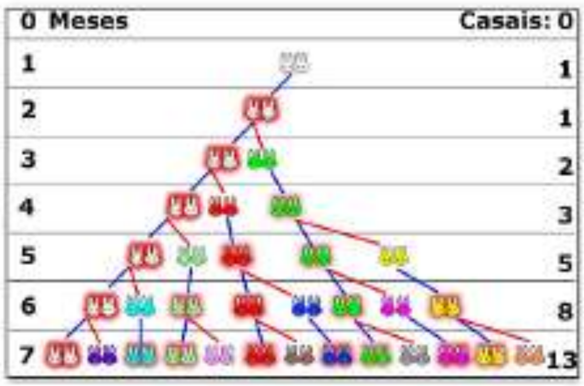


Figura 9: Ilustração do problema sobre a reprodução dos coelhos
Fonte: BELINI, 2015

De acordo com o enunciado do problema, dois meses é o tempo necessário para que esse casal atinja a fertilidade, portanto após dois meses, continua com apenas 1 casal. No terceiro mês haverá 2 casais, o casal original e sua primeira cria. [...] Dessa forma, o número de casais no quinto mês será 5. E assim por diante (BELINI, 2015).

O resultado é uma sequência de números em que cada um deles é obtido pela soma dos dois números imediatamente anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... Esta é a sequência de Fibonacci (BELINI, 2015).

Belini (2015) coloca a expressão que dá o número de Fibonacci de ordem n é representada por uma função F: N → N dada por:

$$F(n) = F_n = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 1, n = 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

De acordo com Belini (2015) Johannes Kepler, o célebre astrônomo das três leis planetárias, notou em 1611 que a divisão entre um número de Fibonacci e seu precedente leva ao número Φ quando se avança para valores cada vez maiores na sequência. Ou seja:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right) = \Phi$$

5. ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O ENSINO MÉDIO

Atividade 1: Explorando a Razão Áurea em objetos do dia-a-dia.

Com esta atividade pretende-se mostrar uma aplicação prática de obtenção da razão áurea, promover a socialização e discussão entre os discentes e demonstrar a relação entre a Matemática e o mundo material. A mesma terá a duração de 1h/aula e os recursos utilizados serão: fotos 3×4, identidades, cartões de banco, carteira de trabalho, carteira de motorista, quadros, régua e papel ofício. Para a sua execução, é requerido do aluno conhecimento sobre os números racionais e suas operações elementares, do número de ouro, do sistema métrico e também da manipulação da calculadora.

A atividade acontecerá da seguinte maneira: de início o professor indagará que a aula irá demonstrar uma aplicação prática da razão áurea. Depois dividirá a sala em 4 equipes, pedindo que cada equipe obtenha as medidas dos lados dos objetos e depois calculem a razão entre as mesmas. No final todos apresentarão os resultados obtidos e o professor mediará a discussão, enfatizando que os resultados encontrados são aproximações da razão áurea e que a mesma está presente em nosso cotidiano.

Fonte: SILVA, 2015.

Atividade 2: Representação do número áureo.

Existem outras formas de representarmos o número áureo. Uma delas está expressa pela equação abaixo:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Resolva a equação e mostre que x =Φ.

Fonte: BELINI, 2015

Atividade 3: Explorando a relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci.

Outra situação em que o número de ouro está presente é na sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Note que ela possui uma propriedade bem interessante: cada termo da sequência, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Assim, temos:

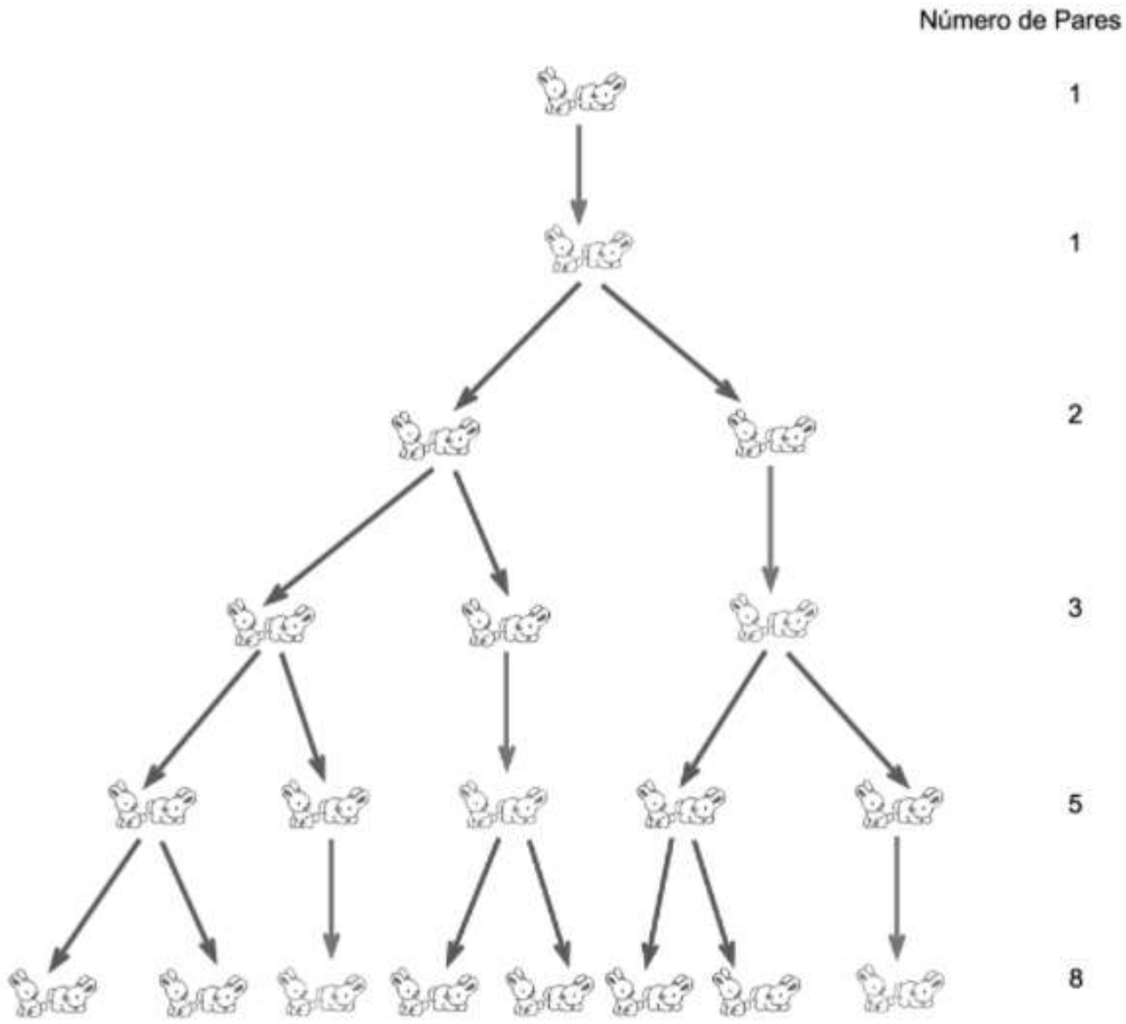
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$
$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$$
$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$$
$$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21$$

Mantendo a construção da sequência, determine os valores de F14, F15 e F16.

Fonte: BELINI, 2015

Atividade 4: Explorando a sequência de Fibonacci e o "Problema dos Coelhos".

Fibonacci apresentou em seu livro Liber Abaci o problema dos coelhos: "Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida".



Tomando como verdade que nenhum coelho morreu, responda: Quantos pares de coelhos existirão no 7º mês? Quantos pares de coelhos existirão no 8º mês?

a) 13 e 21
b) 8 e 13
c) 8 e 21
d) 21 e 43

Fonte: BELINI, 2015

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou o contexto histórico e a definição da Razão Áurea, um número irracional, que se encontra presente em diversas construções matemáticas, como o Fractal, pentagrama sendo gerado pelas diagonais do pentágono regular, o triângulo áureo, o retângulo áureo, a espiral áurea, o ângulo áureo, além da perfeição em que se encontra em diversos fenômenos da natureza.

Em seguida, foi demonstrado como se obtém a sequência de Fibonacci, e sua relação com a razão áurea, onde o limite da razão entre dois termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando a ordem (n) tende para o infinito.

Para finalizar foram apresentadas propostas de aplicação de atividades direcionadas para o ensino médio, explorando a razão áurea em objetos do dia-a-dia, o número áureo, a relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci, e a sequência de Fibonacci e o "Problema dos Coelhos".

Além de ampliar o aprendizado sobre o tema, e aumentar ainda mais o fascínio sobre a razão áurea e a sequência de Fibonacci, as atividades propostas são ótimas sugestões para se aplicar futuramente em sala de aula, demonstrando para os alunos que a matemática está presente no nosso cotidiano e ao nosso redor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARAL, Janine Velloso. **A Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba . Ouro Branco, 2014.

BELINI, Marcelo Manechine, **A razão áurea e a sequência de Fibonacci. .** Dissertação (Mestre em Ciências - Programa de Mestrado Profissional em Matemática) USP – São Carlos, 2015.

FULONE, Hugo Daniel. **Desmistificando a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal do ABC. Santo André, 2017.

SANTOS, Lisandra Mayara. **Razão Áurea: Abordagem histórica, aplicações e sua relação com Fibonacci.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2020.

SILVA, Reginaldo Leoncio. **A Sequência de Fibonacci e o número de ouro: Contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Vitória da Conquista – Ba, 2015.