



UFOP - Universidade Federal de Ouro Preto



Júlia Chaves Gonçalves

Modelos Matemáticos e sua aplicação ao controle da broca da cana-de-açúcar

Ouro Preto, Brasil

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Júlia Chaves Gonçalves

**Modelos Matemáticos e sua aplicação ao controle da
broca da cana-de-açúcar**

Monografia submetida ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Graduado em Bacharelado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Vinícius Vivaldino Pires de Almeida

Coorientador: Prof. Dr. Marcos Roberto Marcial

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas – ICEB

Departamento de Matemática – DEMAT

Ouro Preto, Brasil

2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

G635m Gonçalves, Julia Chaves.

Modelos Matemáticos e sua aplicação ao controle da broca da cana-de-açúcar. [manuscrito] / Julia Chaves Gonçalves. - 2022.

70 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Me. Vinícius Vivaldino Pires Almeida.

Coorientador: Prof. Dr. Marcos Roberto Marcial.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Modelagem matemática. 2. Controle biológico. 3. Cana-de-açúcar.
I. Almeida, Vinícius Vivaldino Pires. II. Marcial, Marcos Roberto. III.
Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 51

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE BACHARELADO EM
MATEMÁTICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Júlia Chaves Gonçalves

Modelos Matemáticos e sua aplicação ao controle da broca da cana-de-açúcar

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharela em Matemática

Aprovada em 21 de junho de 2022.

Membros da banca

Me. Vinícius Vivaldino P. de Almeida - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Marcos Roberto Marcial - Universidade Federal de Ouro Preto
Ma. Monique Rafaella Anuniação de Oliveira - Universidade Federal de Ouro Preto

Vinícius Vivaldino P. de Almeida, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 11/07/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Vivaldino Pires de Almeida, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/07/2022, às 12:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0359832** e o código CRC **6B9F8640**.

Agradecimentos

Esse trabalho me faz estar cada vez mais perto do tão sonhado diploma, que antes de ser meu, é também de pessoas maravilhosas que de alguma forma me fizeram continuar persistindo nesse sonho. Dedico e agradeço, portanto, à todas essas pessoas.

Primeiramente à minha família, aos meus pais pelo apoio incondicional e aos meus irmãos pela torcida de sempre. Tudo isso é por vocês.

Aos meus orientadores que sempre me incentivaram e nunca desistiram de mim, minha gratidão será eterna. Obrigada, Marcos, pela paciência comigo e dedicação com esse trabalho. Obrigada, Vinícius, por ser muito mais que orientador e professor. Também à Monique, por aceitar fazer parte da banca e dedicar seu tempo pra isso.

À todos meus amigos, primos, tios e avós. Em especial meus padrinhos, Emanuel, Gisele e Euler. Minhas tias Estefânia, Elba e Simone. Meus primos Luiz, Vitória, Carmen, Marcela e Lara. E meus amigos Jefferson, Loiany, Ana Paula e Cássia. A vida não se vive sozinha.

À Ana, por ser minha duplinha inseparável de curso e de vida. Obrigada pela ajuda, pelos conselhos e pela amizade.

Ao pessoal do PET Matemática. Não tenho palavras pra descrever o quanto cada um de vocês é especial. Agradeço especialmente à Joyce, que sempre esteve comigo e ao Eder, que me ajudou durante toda a caminhada.

Finalizo agradecendo a todos outros que fizeram parte do processo. Existe cada um de vocês aqui.

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas, seus pontos de equilíbrio e uma aplicação dessa teoria por meio da modelagem matemática. Começamos estudando a existência e unicidade das soluções de problemas de valor inicial. Estudamos também alguns sistemas de equações diferenciais lineares em que classificamos os pontos de equilíbrio e sua estabilidade por meio de uma análise qualitativa e assim esboçamos os seus planos de fase. Analogamente analisamos os sistemas não lineares e os classificamos por meio da sua linearização. Examinamos, ainda, determinadas classes de modelos epidemiológicos. Por fim, aplicamos a teoria estudada no controle biológico da broca da cana-de-açúcar por meio da modelagem matemática, em que utilizamos um sistema de equações diferenciais não lineares que descreve as interações entre a praga e seu parasitoide, e com sua linearização conseguimos analisar o comportamento das soluções e assim explorar sua estabilidade.

Palavras-chave: Sistema de equações diferenciais ordinárias. Pontos de equilíbrio. Modelagem matemática.

Abstract

In this work we study systems of autonomous ordinary differential equations, their equilibrium points and an application of this theory through mathematical modeling. We begin by studying the existence and uniqueness of initial value problem solutions. We also study some systems of linear differential equations in which we classify the equilibrium points and their stability by means of a qualitative analysis and thus plotted their phase plans. Analogously, we analyze nonlinear systems and classify them through their linearization. We also examined certain classes of epidemiological models. Finally, we applied the theory studied in the biological control of the sugarcane borer through mathematical modeling, in which we used a system of nonlinear differential equations that describes the interactions between the pest and its parasitoid, and with its linearization we were able to analyze the behavior of the solutions and thus explore when it is stable.

Keywords: System of ordinary differential equations. Equilibrium points. Mathematical modeling.

Sumário

	Introdução	8
1	RESULTADOS PRELIMINARES	10
1.1	Álgebra linear	10
1.2	Espaços Métricos	11
1.3	Crítério de Routh-Hurwitz	22
2	TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	24
3	SISTEMAS AUTÔNOMOS	29
3.1	Sistemas autônomos lineares	29
3.1.1	Autovalores reais iguais	31
3.1.2	Autovalores reais distintos	31
3.1.3	Autovalores complexos	32
3.2	Planos de fase	33
3.2.1	Autovalores reais iguais	33
3.2.2	Autovalores reais distintos	36
3.2.3	Autovalores complexos	40
3.3	Sistemas Autônomos não lineares	41
3.3.1	O problema do pêndulo não linear	43
4	MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS	48
4.1	Modelo SIR	49
4.2	Modelo SIRI	50
4.3	Modelo SIRS	51
5	MODELAGEM MATEMÁTICA DO CONTROLE BIOLÓGICO DA BROCA DA CANA-DE-AÇÚCAR	53
5.1	Simulação numérica	62
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICE A – CÓDIGO SCILAB	69

Introdução

A modelagem matemática vem sendo aplicada cada vez mais ao longo dos anos e tem sua origem na matemática aplicada. Se trata de uma estratégia didático-pedagógica que permite transformar situações problemas da realidade em expressões matemáticas que os descrevem e resolvê-los, interpretando a solução matemática na linguagem do mundo real. Essa ferramenta consegue descrever uma grande diversidade de situações, tanto dentro da própria matemática quanto situações oriundas de outras áreas do conhecimento.

A necessidade de fundamentação do conhecimento matemático deve ultrapassar a teorização do conhecimento enciclopédico, tão evidenciado no ensino tradicional da Matemática, avançando para um conhecimento prático, ou seja, aquele em que o sujeito poderá aplicar os conteúdos matemáticos a uma situação real, para resolver problemas. (RANGEL (2011))

Em especial, a modelagem matemática aplicada à controle biológico de pragas tem como um dos objetivos simular as dinâmicas populacionais de um sistema, auxiliando para o melhor entendimento dos principais fatores que comandam as interações e assim contribuindo para a compreensão de quais programas serão mais eficientes para controle do sistema analisado (FREIRE et al., 2005).

Nesse trabalho apresentamos alguns resultados da teoria de equações diferenciais ordinárias autônomas, assim como um estudo qualitativo das mesmas e temos como objetivo principal aplicar esses conhecimentos no estudo do controle biológico da praga *Diatraea Saccharalis*, conhecida como broca da cana-de-açúcar, com a modelagem matemática.

Com o propósito de alcançar esse objetivo, transitamos por uma via teórica para obter os conhecimentos matemáticos necessários. Dessa maneira, o texto se organiza da seguinte forma: No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos iniciais da teoria de álgebra linear e topologia dos espaços métricos, como sistemas lineares, sequências convergentes, sequências de Cauchy no espaço métrico, espaço métrico completo, ponto fixo, e teoremas como o teorema do ponto fixo de Banach.

No Capítulo 2 apresentamos e demonstramos um dos principais teoremas da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), conhecido como teorema de existência e unicidade de soluções para EDOs.

Já no Capítulo 3, desenvolvemos um estudo sobre os sistemas lineares autônomos e fazemos uma análise qualitativa da solução desses sistemas com os seus respectivos planos de fase. Ainda nesse capítulo, exibimos os sistemas não lineares e apresentamos uma forma

de os linearizar para que seja feita a análise das suas soluções.

No Capítulo 4, exibimos e analisamos alguns modelos matemáticos em epidemiologia, conhecidos como os sistemas dos tipos SIR, SIRI e SIRS usando sistemas de EDOs vistos no capítulo anterior.

No Capítulo 5, finalmente, conseguimos estudar por meio de sistemas dinâmicos autônomos e modelagem matemática, o controle biológico da praga *Diatraea Saccharalis*. Aqui exibimos um sistema de equações diferenciais que descreve as interações da praga da cana-de-açúcar e seu parasitoide, considerando as populações da praga nas fases de ovo e larva e do seu parasitoide em termos de ovos parasitados. Encontramos os pontos de equilíbrio desse sistema e analisamos sua estabilidade. Por se tratar de um sistema de controle biológico, analisamos as condições necessárias para estabilidade do sistema e por último fazemos uma simulação numérica utilizando o software gratuito *Scilab* implementando o método de Runge Kutta de 4ª ordem.

Por fim, o capítulo 6 encerra o texto com uma breve conclusão sobre o trabalho desenvolvido.

1 Resultados preliminares

Apresentaremos, nessa seção, conceitos e resultados iniciais da teoria de álgebra linear e espaços métricos, juntamente com exemplos, que serão fortemente usados ao longo deste trabalho. As referências usadas foram (COELHO; LOURENÇO, 2018), (DOERING; LOPES, 2016), (KREYSZIG, 1979) e (LIMA, 2016).

1.1 Álgebra linear

Começaremos definindo conceitos importantes da teoria de álgebra linear.

Definição 1. Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo 1. Os dois sistemas a seguir são equivalentes, pois eles possuem o mesmo conjunto solução. Sendo

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ 2x + y = 31 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x + y = 43 \\ x - 2y = -2. \end{cases}$$

Observe que no primeiro sistema temos que $y = 19 - x$ e portanto, $2x + (19 - x) = 31$, que implica que $x = 12$ e $y = 7$. No segundo sistema temos que $y = 43 - 3x$ e portanto, $x - 2(43 - 3x) = -2$, que implica em $x = 12$ e $y = 7$. Logo, os dois sistemas possuem o mesmo conjunto solução e portanto, são equivalentes.

Definição 2. Dizemos que duas matrizes A e B são semelhantes quando existe uma matriz invertível P , tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

Exemplo 2. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

As matrizes A e B são semelhantes, pois existe uma matriz invertível P dada por

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

De fato, temos que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

1.2 Espaços Métricos

Definiremos também conceitos importantes da teoria de espaços métricos.

Definição 3 (Espaço métrico). *Um espaço métrico é o par ordenado (X, d) em que X é um conjunto não vazio munido de uma função real $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, denominada métrica de X , tal que satisfaça as seguintes propriedades:*

- P1) $d(a, b) \geq 0$ para todo $a, b \in X$;
- P2) $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = b$;
- P3) $d(a, b) = d(b, a)$ para todo $a, b \in X$;
- P4) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ para todo $a, b, c \in X$.

Antes de apresentarmos exemplos de espaços métricos, apresentaremos a definição de norma.

Definição 4. *Uma norma consiste em uma função que a cada vetor de um espaço vetorial associa um número real não-negativo.*

Observação 1. *Toda norma induz, de forma natural, uma métrica d em X cujos valores são dados por*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Voltando aos exemplos de espaços métricos, temos

Exemplo 3. *Considere a função*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow d(a, b) = |a - b|. \end{aligned}$$

Temos que d é uma métrica, denominada métrica usual em \mathbb{R} .

De fato, a função d está munida das propriedades listadas acima. Provaremos cada uma delas.

P1) $d(a, b) = |a - b| \geq 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

P2) $d(a, b) = |a - b|$. Mas se $d(a, b) = 0$, então $|a - b| = 0$, o que implica em $a - b = 0$ e portanto, $b = a$.

Por outro lado, se $a = b$, então $d(a, b) = |a - b| = |b - b| = |0| = 0$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Logo, $d(a, b) = 0$ se, e só se, $a = b$.

P3) $d(a, b) = |a - b| = |b - a| = d(b, a)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

P4) $d(a, b) = |a - b| \leq |b - c| + |c - a| = |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Daí, concluímos que d é métrica e (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico.

Exemplo 4. Considere a função

$$\begin{aligned} d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow d_1(a, b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}, \end{aligned}$$

em que $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Temos que d_1 é uma métrica em \mathbb{R}^n .

De fato, a função d_1 está munida das propriedades listadas na definição (3). Provaremos cada uma delas.

P1) $d_1(a, b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} \geq 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$.

P2) Se $d_1(a, b) = 0$, então

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = 0;$$

Note que todos os termos dentro da raiz são não negativos, e por isso $d_1(a, b) = 0$ só acontece quando, para todo $i \in [1, n]$, temos

$$(b_i - a_i)^2 = 0 \Leftrightarrow b_i - a_i = 0 \Leftrightarrow b_i = a_i \quad \text{para todo } i \in [1, n].$$

Por outro lado, se $a = b$, então

$$d_1(a, b) = d_1(b, b) = \sqrt{(b_1 - b_1)^2 + \cdots + (b_n - b_n)^2} = \sqrt{0 + \cdots + 0} = \sqrt{0} = 0 \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, $d_1(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = b$.

P3) Como $(b_i - a_i)^2 = (a_i - b_i)^2$ para todo $a_i, b_i \in [1, n]$, temos que

$$d_1(a, b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} = d_1(b, a).$$

P4) Utilizaremos para provar essa propriedade a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja (COELHO; LOURENÇO, 2018)), que diz que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, para $p, q \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}.$$

Daí, temos que

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n p_i q_i + \sum_{i=1}^n q_i^2 \leq \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2} + \sum_{i=1}^n q_i^2.$$

Isto implica que

$$\sum_{i=1}^n (p_i + q_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2} \right)^2.$$

Agora, tomando $p_i = a_i - c_i$ e $q_i = c_i - b_i$, onde $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, teremos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - b_i)^2},$$

que é exatamente

$$d_1(a, b) \leq d_1(a, c) + d_1(c, b).$$

Concluimos então que d_1 é métrica em \mathbb{R}^n e portanto (\mathbb{R}^n, d_1) é um espaço métrico.

Exemplo 5. Considere a função

$$\begin{aligned} d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow d_2(a, b) = \max\{|b_1 - a_1|, \dots, |b_n - a_n|\}. \end{aligned}$$

em que $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Temos que d_2 é uma métrica em \mathbb{R}^n .

De fato, a função d_2 está munida das quatro propriedades da definição (3). Provaremos cada uma delas.

P1) Como para cada $i = 1, \dots, n$ temos $|b_i - a_i| \geq 0$, então

$$d_2(a, b) = \max\{|b_1 - a_1|, \dots, |b_n - a_n|\} \geq 0$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$.

P2) Se $d_2(a, b) = 0$, então

$$\max\{|b_1 - a_1|, \dots, |b_n - a_n|\} = 0.$$

Note que todos os termos são não negativos, e por isso $d_2(a, b) = 0$ só se $|b_i - a_i| = 0$ para todo $i \in [1, n]$. Logo, temos que ter

$$b_i - a_i = 0 \text{ se, e somente se, } b_i = a_i \text{ para todo } i \in [1, n].$$

Por outro lado, se $a = b$, então

$$d_2(a, b) = d_2(b, b) = \max\{|b_1 - b_1|, \dots, |b_n - b_n|\} = \max\{0, \dots, 0\} = 0.$$

Portanto, $d_2(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = b$.

P3) Como $|b_i - a_i| = |a_i - b_i|$ para todo $a_i, b_i \in [1, n]$, temos que

$$d_2(a, b) = \max\{|b_1 - a_1|, \dots, |b_n - a_n|\} = \max\{|a_1 - b_1|, \dots, |a_n - b_n|\} = d_2(b, a).$$

P4) Como sabemos que $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $\max\{A + B\} \leq \max\{A\} + \max\{B\}$, temos que

$$\begin{aligned} d_2(a, b) &= \max\{|b_1 - a_1|, \dots, |b_n - a_n|\} \\ &= \max\{|b_1 - c_1 + c_1 - a_1|, \dots, |b_n - c_n + c_n - a_n|\} \\ &\leq \max\{|b_1 - c_1| + |c_1 - a_1|, \dots, |b_n - c_n| + |c_n - a_n|\} \\ &\leq \max\{|b_1 - c_1|, \dots, |b_n - c_n|\} + \max\{|c_1 - a_1|, \dots, |c_n - a_n|\} \\ &= d_2(a, c) + d_2(c, b). \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que d_2 também é métrica em \mathbb{R}^n .

Exemplo 6. Considere a função

$$\begin{aligned} d_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\rightarrow d_3(a, b) = (a - b)^2. \end{aligned}$$

Note que d_3 não é uma métrica em \mathbb{R} .

De fato, a função d_3 não está munida de todas as quatro propriedades da definição (3). Provaremos que essa função não satisfaz a quarta propriedade para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$. De fato, tome $a = 3$, $b = 5$ e $c = 6$. Note que

$$d(a, b) = (a - b)^2 = (3 - 5)^2 = 4$$

e

$$d(a, c) = (a - c)^2 = (3 - 6)^2 = 9$$

e

$$d(c, a) = (c - b)^2 = (6 - 5)^2 = 1.$$

Logo,

$$9 = d(a, c) > d(a, b) + d(b, c) = 4 + 1 = 5.$$

Concluimos, portanto, que d_3 não é métrica em \mathbb{R} .

Apresentaremos agora, outras definições que se relacionam com espaços métricos.

Definição 5. Num espaço métrico (X, d) , a bola aberta de raio ϵ centrada num ponto a é o conjunto de pontos cuja distância a a é inferior a ϵ , isto é,

$$B(a, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \epsilon\}.$$

Definição 6. A bola fechada de raio ϵ centrada num ponto a , é o conjunto de pontos à distância de a não superior a ϵ , isto é,

$$B[a, \epsilon] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq \epsilon\}.$$

Sendo assim, a diferença entre a bola aberta e a fechada é que na fechada os pontos de fronteira estão incluídos.

Definição 7. O conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado quando está contido em alguma bola $B[a, r]$, isto é, se existir $a \in \mathbb{R}^n$ e r positivo, tal que X está contido na bola fechada de centro a e raio r .

Definição 8. O conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se todo limite de sequência de pontos em X necessariamente está em X .

Exemplo 7. Para todo $a \in \mathbb{R}^n$ e todo $\epsilon > 0$ a bola $B[a, \epsilon] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq \epsilon\}$ é um conjunto fechado de \mathbb{R}^n .

Definição 9. Em um espaço métrico de dimensão finita, um conjunto chama-se compacto quando é limitado e fechado.

Teorema 1 (Teorema de Weierstrass). Seja X um conjunto compacto. Toda função real contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge em X seus valores de máximo e mínimo, isto é, existem $a, b \in X$ tal que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Considere X um conjunto compacto e f uma função real contínua, então sabemos que $f(X)$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R} , ou seja, $f(X)$ é fechado e limitado em \mathbb{R} (ver (LIMA, 2016)). Daí, existem $x_1 = \inf\{f(X)\}$ e $x_2 = \sup\{f(X)\}$ tais que $x_1, x_2 \in X$, isto é, existem $a, b \in X$ tais que $f(a) = x_1$ e $f(b) = x_2$. Portanto, para todo $x \in X$, temos $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. \square

Definição 10. Uma sequência em um espaço métrico X é uma função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow X \\ n &\mapsto f(n) = x_n, \end{aligned}$$

denotada por x_n .

Definição 11. Dizemos que uma sequência de pontos x_n em um espaço métrico X converge para um ponto $x \in X$ se dado $\epsilon > 0$ existir n_0 natural, tal que $d(x_n, x) < \epsilon$, sempre que $n > n_0$, isto é, x_n converge caso possamos garantir que para todo n suficientemente grande a distância entre x_n e x seja arbitrariamente pequena. Neste caso, o ponto x é chamado de limite da sequência e é denotado por

$$\lim x_n = x \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow x.$$

Definição 12 (Sequência de Cauchy). Seja X um espaço métrico, com uma métrica d . Uma sequência x_n de elementos de (X, d) é dita de Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Exemplo 8. A sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy no espaço métrico (\mathbb{R}, d) , em que d é a métrica usual em \mathbb{R} .

De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Daí, se $m, n > n_0$ temos que $\frac{1}{m}, \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$ e então

$$d(x_m, x_n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \epsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que quando $n, m > n_0$ temos $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Definição 13 (Espaço Métrico Completo). Um espaço métrico (X, d) se diz completo quando toda sequência de Cauchy em X for convergente.

Exemplo 9. Considere o espaço métrico (X, d) em que $X = C[0, 1]$ é o conjunto de todas as funções reais contínuas em $[0, 1]$ e d é a métrica definida por

$$\begin{aligned} d: X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\rightarrow d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt. \end{aligned}$$

Veremos que esse espaço métrico não é completo.

Primeiramente provaremos que d é métrica em X . Para isso, a função d tem que satisfazer todas as propriedades definidas em (3). Aqui usaremos propriedades conhecidas de funções contínuas, módulo e integral definida.

P1) Como $|f(t) - g(t)| \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \geq 0 \quad \forall f, g \in X.$$

P2) Se $d(f, g) = 0$, então

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| dt = 0,$$

que implica $|f(t) - g(t)| \equiv 0$, pois caso contrário teríamos $|f(t) - g(t)| = p(t) > 0$, o que significa que $\int_a^b |f(t) - g(t)| dt = \int_a^b |p(t)| dt > 0$ e por isso concluimos que se $d(f, g) = 0$, então $f = g$.

Por outro lado, se $f = g$, então

$$d(f, g) = d(f, f) = \int_a^b |f(t) - f(t)| dt = \int_a^b |0| dt = 0.$$

Portanto, $d_2(f, g) = 0$ se, e só se, $f = g$.

P3) Como $|f(t) - g(t)| = |g(t) - f(t)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt = \int_a^b |g(t) - f(t)| dt = d(g, f).$$

P4) Como em \mathbb{R} vale $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| dt \\ &\leq \int_a^b [|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|] dt \\ &= \int_a^b |f(t) - h(t)| dt + \int_a^b |h(t) - g(t)| dt \\ &= d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que d é uma métrica em X . A seguir mostraremos que esse espaço métrico com essa métrica d não é completo. Para isso, basta exibirmos uma sequência de Cauchy que convirja para um elemento que não está em X .

Considere $f_m : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a sequência de funções dada por

$$f_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ m \left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, a_m\right], \\ 1 & \text{se } t \in [a_m, 1], \end{cases}$$

em que $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, como na figura 1 abaixo.

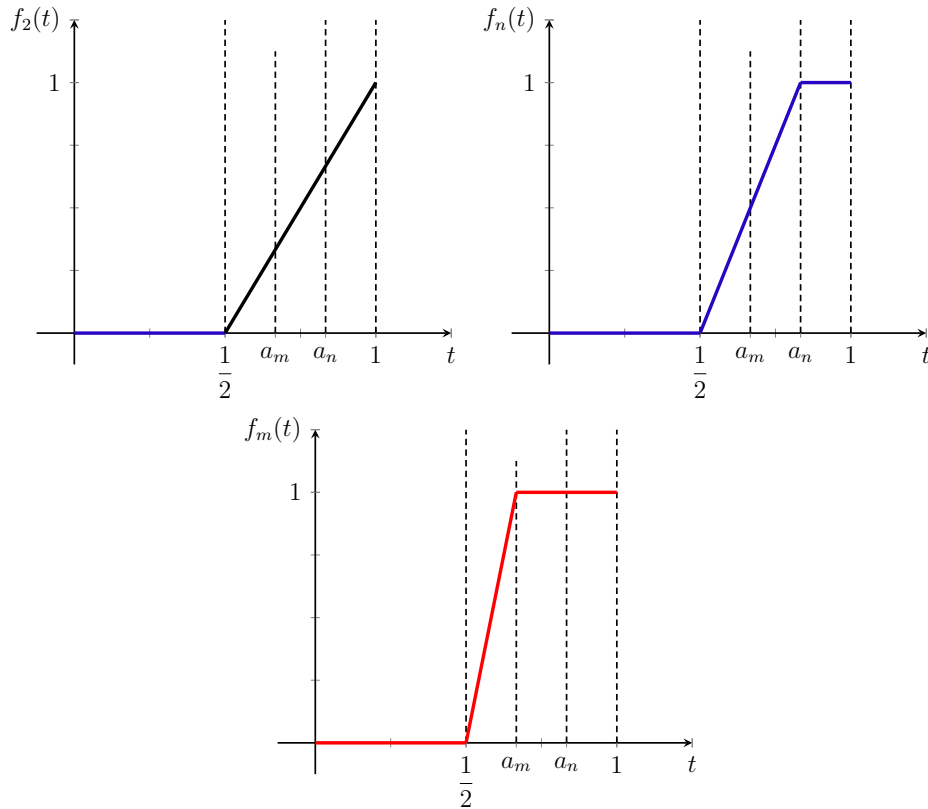


Figura 1 – Sequências f_2, f_n, f_m com $m > n > 2$.

Fonte: A autora.

Agora, mostraremos que a sequência f_m é de Cauchy em X , isto é, verificaremos que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(f_m, f_n) < \epsilon$, para todo $m, n > n_0$. De fato, supondo sem perda de generalidade que $m > n$, temos

$$\begin{aligned}
 d(f_m, f_n) &= \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |f_m(t) - f_n(t)| dt + \int_{a_m}^{a_n} |1 - f_n(t)| dt \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} \left| m \left(t - \frac{1}{2} \right) - n \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| dt + \int_{a_m}^{a_n} \left| 1 - n \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| dt \\
 &= (m - n) \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} \left(t - \frac{1}{2} \right) dt + \int_{a_m}^{a_n} \left| 1 - n \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| dt.
 \end{aligned}$$

Substituindo $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$ e $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ nas integrais temos

$$\begin{aligned}
 d(f_m, f_n) &= (m - n) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}} \left(t - \frac{1}{2} \right) dt + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} \left(1 - nt + \frac{n}{2} \right) dt \\
 &= \left(\frac{m - n}{2m^2} \right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2m^2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right).
 \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 = \frac{1}{2\epsilon}$ tal que, para $m > n > n_0$, temos

$$d(f_m, f_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n_0} = \epsilon.$$

Logo, f_m é de Cauchy em X . Finalmente, provaremos que essa sequência converge para uma função f que não pertence a X . De fato, suponhamos por absurdo que f_m convirja para $f \in X$, então quando $m \rightarrow \infty$ temos que

$$d(f_m, f) = 0. \quad (1.1)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} d(f_m, f) &= \int_0^1 |f_m(t) - f(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |f_m(t) - f(t)| dt + \int_{a_m}^1 |1 - f(t)| dt. \end{aligned}$$

Note que quando $m \rightarrow \infty$, temos que $a_m \rightarrow \frac{1}{2}$, então a segunda expressão da igualdade acima se anula e de acordo com (1.1) temos

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt + \int_{a_m}^1 |1 - f(t)| dt = 0.$$

Mas a equação acima só tem solução se

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt = \int_{a_m}^1 |1 - f(t)| dt = 0.$$

Logo, tiramos que $|f(t)| = 0$ para todo $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $|1 - f(t)| = 0$ para todo $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, e portanto

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

que não é contínua e portanto não pertence a X , o que é um absurdo. Sendo assim, concluímos, enfim, que o espaço métrico (X, d) não é completo.

Precisaremos também, ao longo do trabalho, das definições de ponto fixo e contração.

Definição 14 (Ponto fixo). *Chama-se de ponto fixo da função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ um ponto $x \in X$, tal que $f(x) = x$.*

Exemplo 10. *Seja a função $f(x) = x^2 - 2$, por exemplo, temos que os pontos fixos são as intersecções dos gráficos de $y = f(x)$ com $y = x$, ou seja, $x = -1$ e $x = 2$.*

Definição 15. *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada contração quando existe $K \in [0, 1)$ tal que*

$$d(f(y), f(x)) \leq K \cdot d(y, x),$$

para todo $x, y \in X$.

Com esses conceitos definidos, iremos agora tratar de um teorema de grande importância para nosso trabalho conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach. É por meio desse teorema que conseguiremos provar, mais adiante, o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

Teorema 2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Uma contração de um espaço métrico completo possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico completo com uma métrica d . Suponha que $f : X \rightarrow X$ é uma contração, isto é, que existe uma contante $0 \leq K < 1$, tal que

$$d(f(y), f(x)) \leq K \cdot d(y, x)$$

para todos $x, y \in X$. Queremos provar que essa contração possui um único ponto fixo. De fato, dado um ponto $x_0 \in X$ qualquer, tomando $f(x_n) = x_{n+1}$ com $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0) \\ &\vdots \\ x_n &= \dots = f^n(x_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como X é completo, basta mostrar que a sequência (x_n) é de Cauchy para que possamos concluir que ela é convergente, pois toda sequência de Cauchy é convergente em um espaço métrico completo (ver (DOERING; LOPES, 2016)). Provaremos esse fato por indução. Note que se f é uma contração, então temos

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \\ &\leq K^1 \cdot d(x_0, x_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \\ &\leq K \cdot d(x_1, x_2) \\ &\leq K^2 \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Suponhamos que $d(x_{n-1}, x_n) \leq K^{n-1} \cdot d(x_0, x_1)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq K^1 \cdot d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq K \cdot (K^{n-1} \cdot d(x_0, x_1)) \\ &= K^n \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Logo,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n \cdot d(x_0, x_1). \quad (1.2)$$

Assim, usando a desigualdade triangular e a desigualdade (1.2), temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq K^n \cdot d(x_0, x_1) + K^{n+1} \cdot d(x_0, x_1) + \cdots + K^{n+m-1} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= (K^n + K^{n+1} + \cdots + K^{n+m-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ &= K^n \frac{(1 - K^{m-1})}{1 - K} d(x_0, x_1) \\ &< \frac{K^n}{1 - K} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Como f é contração, então $0 \leq K < 1$ e portanto, a série geométrica $\sum_{i=1}^{\infty} K^n$ converge e conseqüentemente $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{K^n}{1 - K} \cdot d(x_0, x_1)$ também converge. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K^n}{1 - K} \cdot d(x_0, x_1) = 0.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$,

$$\frac{K^n}{1 - K} \cdot d(x_0, x_1) < \epsilon. \quad (1.4)$$

Logo, pelas desigualdades (1.3) e (1.4), temos que

$$d(x_n, x_{n+m}) < \epsilon$$

sempre que $n > n_0$, ou seja, x_n é de Cauchy. Seja x o limite dessa seqüência, ou seja,

$$\lim x_n = x.$$

Como $x_n \in X$ e X é completo, então $x \in X$. Como f é contínua, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim f(x_n) \\ &= \lim x_{n+1} \\ &= x. \end{aligned}$$

Concluimos então que $x \in X$ é um ponto fixo de f . Agora, provaremos a unicidade desse ponto. Suponha que exista outro ponto $a \in X$, tal que $f(a) = a$. Daí,

$$d(x, a) = d(f(x), f(a)) \leq K \cdot d(x, a),$$

o que implica

$$\begin{aligned} d(x, a) - Kd(x, a) &\leq 0 \\ (1 - K) \cdot d(x, a) &\leq 0 \\ d(x, a) &\leq 0, \end{aligned}$$

pois como $K \in [0, 1)$, $1 - K > 0$.

Mas d é uma métrica, então $d(x, a) \geq 0$. Se $d(x, a) \geq 0$ e $d(x, a) \leq 0$ ao mesmo tempo, concluímos que $d(x, a) = 0$ e portanto $x = a$. Portanto, uma contração f de um espaço métrico possui um único ponto fixo.

□

1.3 Critério de Routh-Hurwitz

Apresentaremos, por fim, um critério em que permite determinar a estabilidade de um sistema dinâmico a partir dos coeficientes da equação característica. Esse critério, conhecido como critério de Routh-Hurwitz, mostra que uma condição necessária e suficiente para a estabilidade é que todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh sejam positivos (DEMITI, 2018).

A tabela de Routh possui $n + 1$ linhas, em que n é o grau do polinômio característico dado por

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Inicialmente, na primeira coluna, distribuímos de cima para baixo, as potências de λ da maior para a menor. As duas primeiras linhas são preenchidas com os coeficientes do polinômio da esquerda para direita e com uma condição: os coeficientes ímpares ficarão na linha em que a potência é ímpar e os coeficientes pares na linha em que a potência é par.

λ^n	a_n	a_{n-2}	\dots	a_0
λ^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	\dots	a_1
λ^{n-2}	c_1	c_2	\dots	c_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
λ^2	h_1	h_2	\dots	h_i
λ^1	j_1	j_2	\dots	j_i
λ^0	k_1	k_2	\dots	k_i

Tabela 1 – Início da tabela de Routh

Os demais elementos k_i , j_i , h_i e c_i são uma divisão, onde o denominador é o elemento da primeira coluna da linha anterior (fixo para todos os elementos dessa linha). O

numerador é o negativo do determinante das entradas das duas últimas linhas anteriores, onde a primeira coluna da matriz é sempre a primeira coluna da tabela anterior; já a segunda coluna da matriz segue a sequência das próximas colunas da tabela. Acrescente zero caso haja elementos vazios na tabela.

$$\begin{array}{c}
 \lambda^n \\
 \lambda^{n-1} \\
 \lambda^{n-2} \\
 \vdots \\
 \lambda^2 \\
 \lambda^1 \\
 \lambda^0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{c}
 a_n \\
 a_{n-1} \\
 -\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} \\
 a_{n-1} \\
 \vdots \\
 h_1 \\
 j_1 \\
 -\det \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ j_1 & j_2 \end{bmatrix} \\
 j_1
 \end{array} \right|
 \left| \begin{array}{c}
 a_{n-2} \\
 a_{n-3} \\
 -\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix} \\
 a_{n-1} \\
 \vdots \\
 h_2 \\
 j_2 \\
 -\det \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ j_1 & j_3 \end{bmatrix} \\
 j_1
 \end{array} \right|
 \cdots
 \left| \begin{array}{c}
 a_0 \\
 a_1 \\
 -\det \begin{bmatrix} a_n & 0 \\ a_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \\
 a_{n-1} \\
 \vdots \\
 h_i \\
 j_i \\
 -\det \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ j_1 & 0 \end{bmatrix} \\
 j_1
 \end{array} \right|$$

Tabela 2 – Tabela de Routh

2 Teorema de Existência e Unicidade de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias

Nesse capítulo, cujas referências são (FIGUEIREDO, 2021) e (FIGUEIREDO; NEVES, 2018), apresentaremos alguns resultados e demonstrações para que, finalmente, consigamos enunciar e demonstrar o principal teorema desse capítulo, que é conhecido como teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias.

Começaremos enunciando alguns lemas que serão utilizados na demonstração do teorema de existência e unicidade de soluções para EDOs.

Lema 1. *Seja um conjunto aberto X e uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Então, a função contínua $T : I \rightarrow \mathbb{R}$, em que I é um intervalo aberto, é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

se, e somente se, for solução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds; \quad x \in I. \quad (2.2)$$

Demonstração. Seja T solução do problema de valor inicial (2.1), então

$$T'(x) = f(x, T(x)) \text{ e } T(x_0) = y_0.$$

Integrando de x_0 a x de ambos os lados e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, teremos

$$\int_{x_0}^x T'(z) dz = \int_{x_0}^x f(z, T(z)) dz.$$

Daí,

$$T(x) - T(x_0) = \int_{x_0}^x f(z, T(z)) dz,$$

que implica

$$T(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(z, T(z)) dz.$$

Reciprocamente, seja T solução da equação diferencial (2.2), então vale

$$T(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, T(s)) ds; \quad x \in I.$$

Novamente usando o Teorema Fundamental do Cálculo (veja FIGUEIREDO e NEVES (2018)), temos que

$$T'(x) = f(x, T(x)).$$

Note também que se considerarmos $x = x_0$, temos que $T(x_0) = y_0$. Portanto, a função T é solução do problema de valor inicial (2.1). \square

Lema 2. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto X do plano (x, y) tal que a derivada parcial $f_y : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja também contínua. Dado um subconjunto limitado $X_0 \subset \overline{X_0} \subset X$, existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Demonstração. Veja (FIGUEIREDO; NEVES, 2018). □

Enunciaremos e demonstraremos agora o principal teorema do capítulo. Ele apresenta condições suficientes e necessárias para que exista e seja única a solução do problema de valor inicial (2.1).

Teorema 3 (Existência e Unicidade). *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que a derivada parcial de f seja contínua em relação à segunda variável. Então, para cada ponto $(x_0, y_0) \in X$ existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função contínua $T : I \rightarrow \mathbb{R}$ solução do problema de valor inicial (2.1) com $(x, T(x)) \in X$.*

Demonstração. Sejam $(x_0, y_0) \in X$ e a, b números reais positivos, tais que o retângulo

$$A = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja contido em X .

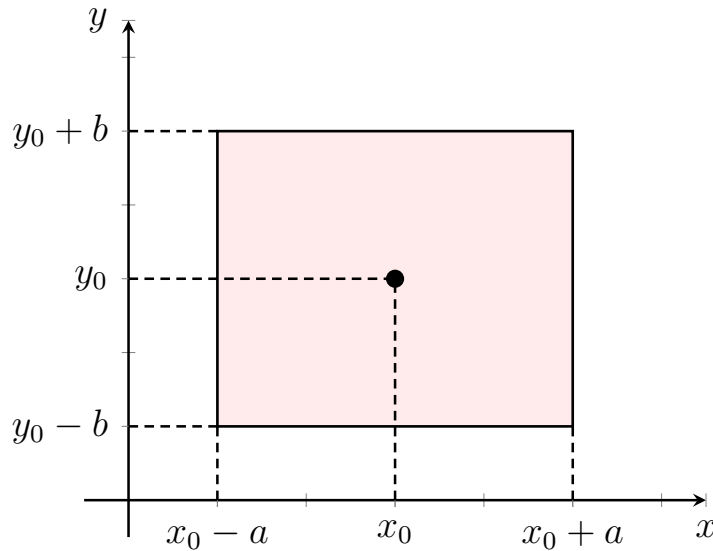


Figura 2 – Retângulo $A = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$.
Fonte: A autora.

Note que A é compacto, pois A é fechado e limitado em \mathbb{R}^2 . De fato, tomando $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, temos que A está contido na bola fechada de centro (x_0, y_0) e raio r e

portanto pela definição 7 temos que A é limitado, ou seja, existe uma constante $K_0 \geq 0$ tal que $|f(x, y)| \leq K_0$ para todo $(x, y) \in A$. Daí, tome

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in A\}$$

e $I_{\bar{a}}$ como o intervalo

$$I_{\bar{a}} = [x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$$

em que

$$0 \leq \bar{a} \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Agora, restringiremos o domínio de forma que este esteja no intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$. Então defina C da seguinte forma

$$C = \{f : I_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ contínua}; f(x_0) = y_0 \text{ e } |f(x) - y_0| \leq b\},$$

isto é, C é o conjunto das funções contínuas que passam pelo ponto (x_0, y_0) e estão dentro do retângulo A .

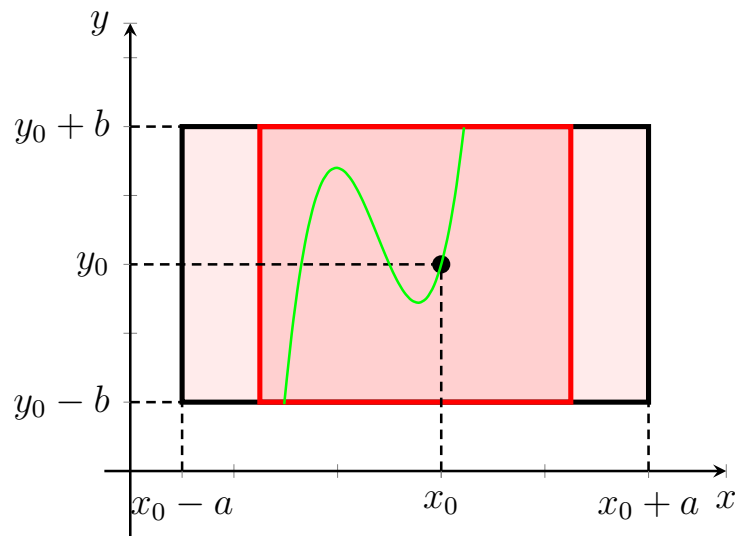


Figura 3 – Retângulo A e o espaço das funções definidas em C .
Fonte: A autora.

Considere $d : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(f_1, f_2) = \max\{|f_1(x) - f_2(x)| : x \in I_{\bar{a}}\}.$$

Temos que d como definida é uma métrica em C . De fato,

P1) Como para cada $x \in I_{\bar{a}}$ temos $|f_1(x) - f_2(x)| \geq 0$, segue que

$$d(f_1, f_2) = \max\{|f_1(x) - f_2(x)|\} \geq 0 \quad \forall f_1, f_2 \in C.$$

P2) Se $d(f_1, f_2) = 0$, então

$$d(f_1, f_2) = \max\{|f_1(x) - f_2(x)|\} = 0,$$

para todo $x \in I_{\bar{a}}$. Note que $d(f_1, f_2) = 0$ se, e só se, $|f_1(x) - f_2(x)| = 0$, o que implica que $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in I_{\bar{a}}$.

Por outro lado, se $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in I_{\bar{a}}$, então

$$d(f_1, f_2) = d(f_2, f_2) = \max\{|f_2(x) - f_2(x)|\} = \max\{0\} = 0.$$

Portanto, $d(f_1, f_2) = 0$ se, e somente se, $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in I_{\bar{a}}$.

P3) Como $|f_1(x) - f_2(x)| = |f_2(x) - f_1(x)|$ para todo $x \in I_{\bar{a}}$, temos que

$$d(f_1, f_2) = \max\{|f_1(x) - f_2(x)|\} = \max\{|f_2(x) - f_1(x)|\} = d(f_2, f_1).$$

P4) Vale a desigualdade triangular, pois

$$\begin{aligned} d(g_1, g_2) &= \max\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in I_{\bar{a}}\} \\ &\leq \max\{|g_1(x) - g_3(x)| + |g_3(x) - g_2(x)| : x \in I_{\bar{a}}\} \\ &\leq \max\{|g_1(x) - g_3(x)| : x \in I_{\bar{a}}\} + \max\{|g_3(x) - g_2(x)| : x \in I_{\bar{a}}\} \\ &= d(g_1, g_3) + d(g_3, g_2). \end{aligned}$$

Portanto temos que (C, d) é um espaço métrico. Esse espaço é completo, pois a convergência na métrica d é a convergência uniforme de funções e funções contínuas convergem para uma função contínua na convergência uniforme (não apresentaremos essa demonstração aqui, mas ela pode ser encontrada em [\(FIGUEIREDO; NEVES, 2018\)](#)).

Agora, voltemos à equação integral (2.2). Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} T : C &\rightarrow C \\ y &\mapsto T(y) = g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |g(x) - y_0| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds - y_0 \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x M ds \right| = M |x - x_0| \\ &\leq M\bar{a} \leq b, \end{aligned}$$

e $g(x_0) = y_0$. Portanto, $g \in C$.

A equação integral (2.2) pode ser escrita da seguinte forma

$$y(x) = T(y(x)).$$

Portanto, as soluções de (2.1) são os pontos fixos de T . Daí, basta provar que T é contração para que possamos usar o Teorema 2. Notemos que

$$|T(g_1(x)) - T(g_2(x))| = \left| \int_{x_0}^x [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \right|$$

Para estimar o integrando do segundo membro utilizamos que

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))| ds$$

e o lema 2, que nos garante que existe $K > 0$ tal que

$$|T(g_1(x)) - T(g_2(x))| \leq K \int_{x_0}^x |g_1(s) - g_2(s)| ds.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} |T(g_1(x)) - T(g_2(x))| &\leq K \left| \int_{x_0}^x |g_1(s) - g_2(s)| ds \right| \\ &\leq K \bar{a} d(g_1, g_2) \end{aligned}$$

em que K é uma constante positiva. E daí

$$d(T(g_1), T(g_2)) \leq K \bar{a} d(g_1, g_2).$$

Assim, tomando $K \bar{a} < 1$, isto é, $\bar{a} < 1/K$, temos que T é uma contração.

Como $T : C \rightarrow C$ é uma contração e C é um espaço métrico completo, temos pelo Teorema 2 que T possui um único ponto fixo. Daí, o Teorema fica demonstrado com $I = (x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a})$. \square

3 Sistemas Autônomos

Um sistema autônomo é um conjunto de equações diferenciais ordinárias que não dependem das variáveis independentes. Nesse capítulo apresentaremos um pouco de sistemas bidimensionais autônomos lineares e não lineares, baseando-se nas referências (DOERING; LOPES, 2016), (BOYCE; DIPRIMA, 2012) e (FIGUEIREDO; NEVES, 2018). Além desses sistemas, apresentaremos também os planos de fase. É a partir deles que conseguimos estudar qualitativamente como as soluções se comportam quando t cresce, abordando conceitos de estabilidade para os mesmos.

3.1 Sistemas autônomos lineares

Consideraremos nessa seção sistemas de equações diferenciais lineares e autônomos, que são do tipo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + by(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

em que a, b, c, d são constantes reais.

Observe que o sistema (3.1) pode ser escrito na forma matricial

$$\frac{dX}{dt}(t) = A \cdot X(t), \quad (3.2)$$

em que $X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

O sistema (3.2) se assemelha à equação diferencial $\frac{dx}{dt} = ax$, cuja solução geral é da forma

$$x(t) = c_0 e^{at},$$

em que c_0 é uma constante. Portanto, se $x(t)$ e $y(t)$ são soluções de (3.1) podemos, ao invés de trabalhar com esse sistema, procurar soluções para o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t}, \end{cases} \quad (3.3)$$

ou equivalentemente, $X(t) = C e^{\lambda t}$, na qual $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

Ao derivar cada equação do sistema (3.3), obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda c_1 e^{\lambda t}, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda c_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Substituindo em (3.1), teremos

$$\begin{cases} \lambda c_1 e^{\lambda t} = a c_1 e^{\lambda t} + b c_2 e^{\lambda t} \\ \lambda c_2 e^{\lambda t} = c c_1 e^{\lambda t} + d c_2 e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [(a - \lambda)c_1 + b c_2] e^{\lambda t} = 0 \\ [c c_1 + (d - \lambda)c_2] e^{\lambda t} = 0. \end{cases}$$

Sabendo que $e^{\lambda t}$ é positivo e diferente de zero, temos

$$\begin{cases} (a - \lambda)c_1 + b c_2 = 0 \\ c c_1 + (d - \lambda)c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Seja B a matriz $B = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix}$. Daí temos:

- se $\det B \neq 0$, então o sistema tem única solução (solução trivial), isto é, $c_1 = c_2 = 0$;
- se $\det B = 0$, então o sistema tem infinitas soluções.

Como estamos interessados apenas nas soluções não triviais, nos interessa saber quando o determinante da matriz B é igual a zero. Portanto,

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ se, e só se, } (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \text{ se, e só se, } \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Note que $(a + d)$ e $(ad - bc)$ são o traço e o determinante da matriz A , respectivamente. Logo,

$$\det B = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

em que $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$ é o polinômio característico de B . As raízes deste polinômio são os autovalores da matriz A , podendo ser eles

- reais iguais;
- reais distintos;
- complexos (necessariamente distintos).

Mostraremos agora como ficam as soluções do sistema em cada caso.

3.1.1 Autovalores reais iguais

Quando A tem autovalores iguais reais, denotados por $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, temos duas possibilidades: A pode ou não ser diagonalizável. Se A é diagonalizável, então A é equivalente à sua matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Logo, o sistema (3.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y, \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} x(t) = c_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_1 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

em que c_0 e c_1 são constantes.

Caso contrário, quando A não é diagonalizável, temos que A é semelhante à sua matriz na forma de Jordan (veja (COELHO; LOURENÇO, 2018) e (FIGUEIREDO; NEVES, 2018))

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

A partir daí, o sistema (3.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x + y \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y, \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} x(t) = (c_0 + c_1 t) e^{\lambda t} \\ y(t) = c_1 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

em que c_0 e c_1 são constantes.

Mostraremos agora o caso quando A possui autovalores reais distintos.

3.1.2 Autovalores reais distintos

Neste caso, por A contar com dois autovalores distintos reais, temos que A é necessariamente diagonalizável, isto é, A é semelhante à matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

A partir daí, o sistema (3.1) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y, \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} x(t) = c_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_1 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

em que c_0 e c_1 são constantes.

No próximo e último caso, mostraremos como fica a solução quando A tem autovalores complexos, necessariamente distintos.

3.1.3 Autovalores complexos

Neste caso, temos dois autovalores da forma $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$, com α e β reais. Logo a matriz A é semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

A partir daí, o sistema (3.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y, \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0. \end{cases}$$

De fato, temos por coordenadas polares que

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t). \end{cases}$$

Daí, derivando ambas as equações acima, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r'(t) \cos \theta(t) - r(t) \sin \theta(t) \theta'(t) = \alpha r(t) \cos \theta(t) - \beta r(t) \sin \theta(t) \\ \frac{dy}{dt} = r'(t) \sin \theta(t) + r(t) \cos \theta(t) \theta'(t) = \beta r(t) \cos \theta(t) + \alpha r(t) \sin \theta(t). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos \theta(t)$ e a segunda equação por $\sin \theta(t)$, temos

$$\begin{cases} \cos \theta(t) \frac{dx}{dt} = r'(t) \cos^2 \theta(t) - r(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t) \theta'(t) \\ \sin \theta(t) \frac{dy}{dt} = r'(t) \sin^2 \theta(t) + r(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t) \theta'(t). \end{cases}$$

Logo,

$$r'(t) = \cos \theta(t) \frac{dx}{dt} + \sin \theta(t) \frac{dy}{dt} = \alpha r(t).$$

Agora, multiplicando a primeira equação por $-\sin \theta(t)$ e a segunda equação por $\cos \theta(t)$, temos

$$\begin{cases} -\sin \theta(t) \frac{dx}{dt} = -r'(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) + r(t) \sin^2 \theta(t) \theta'(t) \\ \cos \theta(t) \frac{dy}{dt} = r'(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t) + r(t) \cos^2 \theta(t) \theta'(t). \end{cases}$$

Logo,

$$\theta'(t) = \frac{\cos \theta(t) \frac{dy}{dt} - \sin \theta(t) \frac{dx}{dt}}{r(t)} = \frac{\beta r(t)}{r(t)} = \beta.$$

Assim, temos

$$\begin{cases} r'(t) = \alpha r(t) \\ \theta'(t) = \beta, \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0. \end{cases}$$

3.2 Planos de fase

Para analisar as soluções dos sistemas vistos até agora, utilizamos os planos de fase, que permitem estudarmos essas soluções de forma qualitativa. As curvas $(x(t), y(t))$ são chamadas trajetórias e cada curva representa uma condição que passa por uma condição inicial diferente. Os planos de fase representam geometricamente todas as trajetórias de um sistema dinâmico no plano. Dessa maneira, os planos de fase são úteis para visualizar o comportamento dos sistemas dinâmicos. Nessas representações as trajetórias podem tender em direção ao zero, ou em direção ao infinito, ou até mesmo alcançar situações estáveis. Portanto, isso é útil para determinar se a dinâmica do sistema estudado é estável ou não.

Estamos interessados em analisar um sistema de EDO do tipo (3.2). Nesses sistemas, associamos um ponto do plano para cada t . A seguir estudaremos as trajetórias de um ponto em cada sistema obtido na seção anterior.

3.2.1 Autovalores reais iguais

Primeiramente, analisaremos o caso em que A é diagonalizável, ou seja, analisaremos a solução

$$\begin{cases} x(t) = c_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_1 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Suponha então que λ seja positivo. Para obter o plano de fase, primeiramente analisaremos as trajetórias nos eixos y e x , isto é, quando $c_0 = 0$ e $c_1 = 0$, respectivamente.

Note que se $c_0 = 0$, temos sempre $x(t) = 0$, portanto estamos analisando a trajetória no eixo y . Daí, se $c_1 > 0$, temos que, quando $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow \infty$. Analogamente, se $c_1 < 0$, temos que $y(t) \rightarrow -\infty$ à medida que t aumenta.

Analogamente acontece com as trajetórias no eixo x , quando $c_1 = 0$. Se $c_0 > 0$, temos que, quando $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow \infty$ e quando $c_0 < 0$, $x(t) \rightarrow -\infty$ à medida que t aumenta. O que acontece se tomarmos um ponto fora dos eixos?

Se o ponto estiver no primeiro quadrante, $c_0 > 0$ e $c_1 > 0$, isto é, $x(t), y(t) \rightarrow \infty$ quando t cresce. Da mesma forma, se o ponto estiver no terceiro quadrante, $c_0 < 0$ e $c_1 < 0$, temos que $x(t), y(t) \rightarrow -\infty$, quando t cresce.

Agora, se o ponto estiver no segundo quadrante, $c_0 < 0$ e $c_1 > 0$, isto é, $x(t) \rightarrow -\infty$, enquanto $y(t) \rightarrow \infty$. Ao contrário de quando o ponto estiver no quarto quadrante, $c_0 > 0$ e $c_1 < 0$, temos que $x(t) \rightarrow \infty$ e $y(t) \rightarrow -\infty$, quando t cresce.

Como os autovalores são iguais, temos que, quando não são nulos, $x(t)$ e $y(t)$ crescem de forma igual, portanto as trajetórias são semirretas, como na figura 4 a seguir.

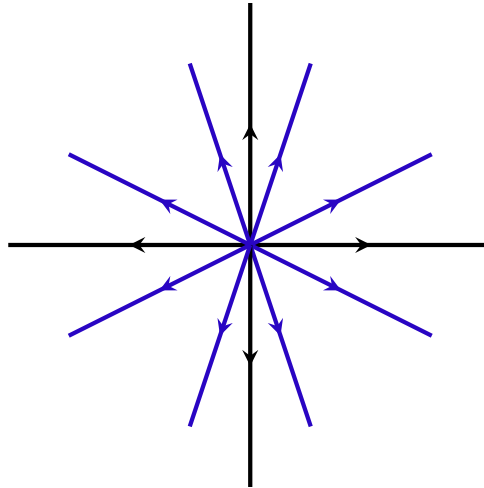


Figura 4 – Plano de fase do caso em que A é diagonalizável e possui autovalores reais positivos e iguais. Fonte: A autora.

Observe que em qualquer uma das trajetórias os pontos se afastam da origem, portanto, dizemos que este sistema é instável e o ponto de equilíbrio é dito foco.

Agora, observe que se os autovalores forem negativos, teremos a mesma configuração das trajetórias acima, porém com sentidos contrários. Assim temos o plano de fase abaixo.

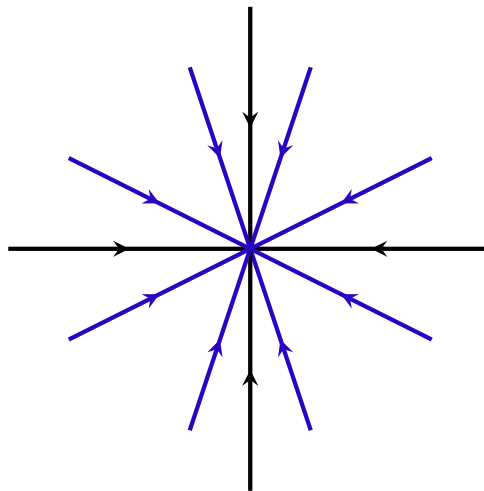


Figura 5 – Plano de fase do caso em que A é diagonalizável e possui autovalores reais negativos e iguais. Fonte: A autora.

Note que em qualquer uma das trajetórias, nesse caso, os pontos se aproximam da origem. Portanto, dizemos que este sistema é estável e o ponto de equilíbrio é dito foco.

Por fim, analisaremos o caso em que A não é diagonalizável, isto é, analisaremos a solução

$$\begin{cases} x(t) = (c_0 + c_1 t)e^{\lambda t} \\ y(t) = c_1 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Suponhamos então que $\lambda > 0$. Analisaremos primeiramente, o caso em que $c_1 = 0$, isto é, $y(t) = 0$, portanto estamos analisando a trajetória no eixo x . Daí, se $c_0 > 0$, temos que quando $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow \infty$. Analogamente, se $c_0 < 0$, temos que $y(t) \rightarrow -\infty$ à medida que t aumenta.

Agora, se $c_0 = 0$, temos que se $c_1 > 0$, $x(t), y(t) \rightarrow +\infty$ e se $c_1 < 0$, $x(t), y(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Observe também que se $t = 0$, então $x(t) = 0$ e $y(t) = c_1$, portanto sabemos que o ponto $(0, c_1)$ faz parte da trajetória, sendo c_1 positivo ou negativo.

Se tivermos $c_0 > 0$ e $c_1 > 0$, podemos notar que $x(t)$ cresce mais rápido que $y(t)$. De fato,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0.$$

Além disso, percebemos que $y(t)$ é sempre positivo, enquanto $x(t)$ tem uma parte positiva e outra negativa e que quando $t \rightarrow \infty$, $x(t), y(t) \rightarrow \infty$. Analogamente, quando $c_0 < 0$ e $c_1 < 0$, temos que $y(t)$ é sempre negativo, enquanto $x(t)$ tem uma parte positiva e que quando $t \rightarrow \infty$, $x(t), y(t) \rightarrow -\infty$.

Finalmente, quando $c_0 > 0$ e $c_1 < 0$, temos que, quando $t \rightarrow \infty$, $x(t), y(t) \rightarrow -\infty$ e quando $c_0 < 0$ e $c_1 > 0$ temos $x(t), y(t) \rightarrow \infty$.

Logo, as trajetórias desse sistema tem o seguinte formato

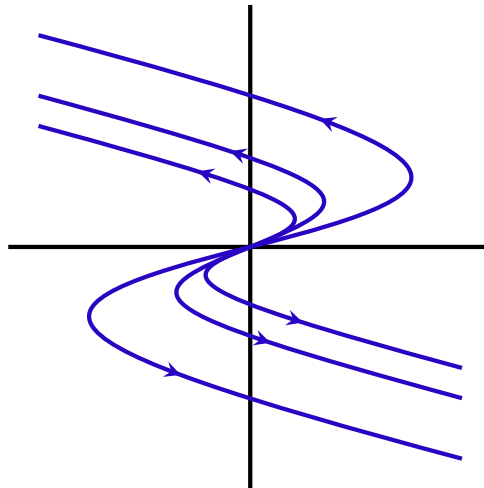


Figura 6 – Plano de fase do caso em que A não é diagonalizável e possui autovalores reais positivos e iguais. Fonte: A autora.

Então, o ponto de equilíbrio aqui é dito nó impróprio. Esse ponto é instável nesse caso pois as trajetórias se afastam da origem.

Agora, se $\lambda < 0$, teremos a mesma configuração, mas com sentido das trajetórias sendo oposto.

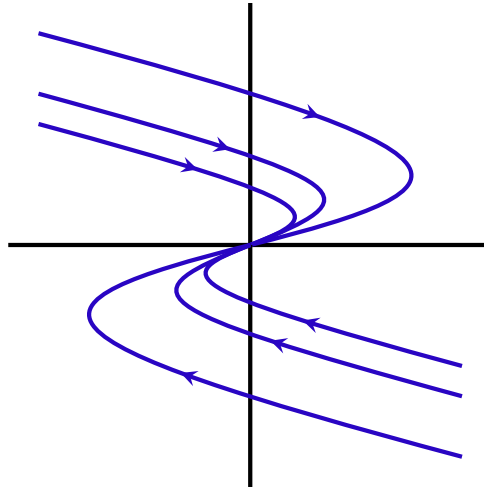


Figura 7 – Plano de fase do caso em que A não é diagonalizável e possui autovalores reais negativos e iguais. Fonte: A autora.

Então, o ponto de equilíbrio aqui é dito nó impróprio. Esse ponto é estável nesse caso pois as trajetórias se tendem para a origem.

Veremos agora como fica a configuração do plano de fase quando A possui autovalores reais distintos.

3.2.2 Autovalores reais distintos

Nesse caso, analisaremos a solução

$$\begin{cases} x(t) = c_0 e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) = c_1 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

A análise será dividida em casos, primeiro quando:

- 1) λ_1 e λ_2 com sinais contrários.

Suponha, a princípio que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. Novamente, analisaremos primeiro as trajetórias nos eixos y e x , isto é, quando $c_0 = 0$ e $c_1 = 0$, respectivamente. Note que se $c_0 = 0$, temos sempre $x(t) = 0$, portanto estamos analisando a trajetória no eixo y . Daí, $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente se $c_1 < 0$ ou $c_1 > 0$.

Analogamente, analisaremos as trajetórias no eixo x , quando $c_1 = 0$. Se $c_0 > 0$, temos que quando $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow \infty$ e quando $c_0 < 0$, $x(t) \rightarrow -\infty$ à medida que t aumenta. Mas o que acontece se tomarmos um ponto fora dos eixos?

Se o ponto estiver no primeiro quadrante, $c_0 > 0$ e $c_1 > 0$, o que significa que $x(t)$ tende ao infinito quando t cresce e $y(t)$ tende a zero. Por outro lado, se o ponto estiver no terceiro quadrante, $c_0 < 0$ e $c_1 < 0$, o que significa que $x(t) \rightarrow -\infty$ e $y(t) \rightarrow 0$ quando t cresce.

Agora, se o ponto estiver no segundo quadrante, $c_0 < 0$ e $c_1 > 0$, o que significa que $x(t) \rightarrow -\infty$, enquanto $y(t) \rightarrow 0$. Ao contrário de quando o ponto estiver no quarto quadrante, $c_0 > 0$ e $c_1 < 0$, o que significa que $x(t) \rightarrow \infty$ e $y(t) \rightarrow 0$ quando t cresce.

Logo, temos o seguinte plano de fase

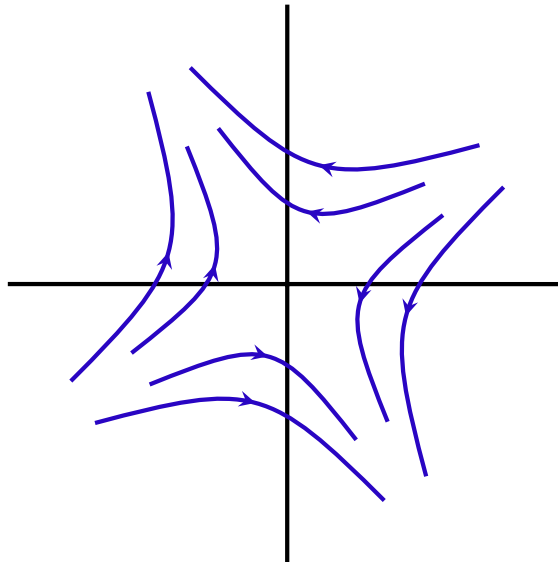


Figura 8 – Plano de fase do caso em que A possui autovalores reais distintos com $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. Fonte: A autora.

Veremos a seguir um exemplo do caso acima.

Exemplo 11. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt}(t) = 2x - 2y, \end{cases}$$

que pode ser reescrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Temos que o polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ e portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. Logo, a solução do sistema analisado é

$$\begin{cases} x(t) = c_0 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{-t}. \end{cases}$$

Portanto, teríamos a seguinte configuração do plano de fase, análogo ao visto anteriormente na figura 8.

Logo, temos o seguinte plano de fase

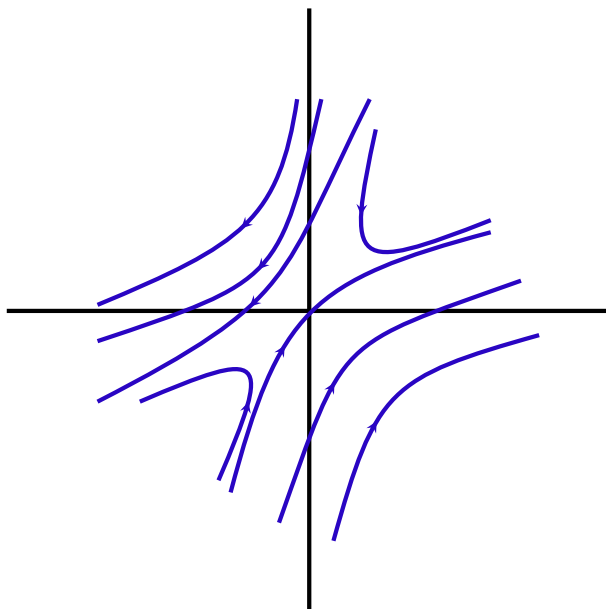


Figura 9 – Plano de fase do exemplo 11.
Fonte: A autora.

Agora, observe que se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, teremos a mesma configuração das trajetórias, porém com sentidos contrários. Portanto, temos a seguinte configuração da figura 10.

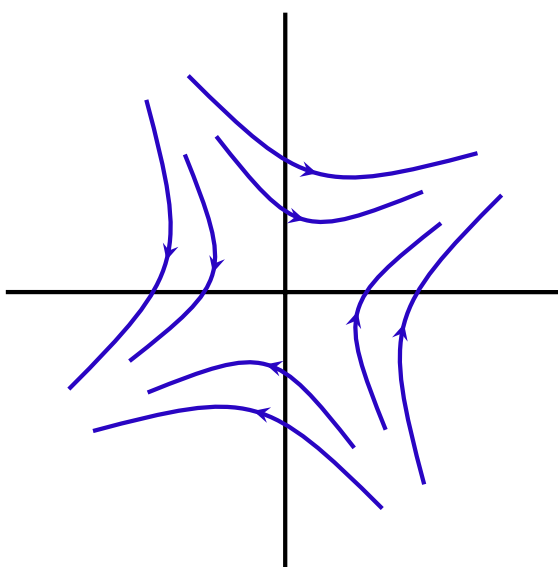


Figura 10 – Plano de fase do caso em que A possui autovalores reais distintos com $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$. Fonte: A autora.

Note que nos casos das figuras 10 e 8 temos trajetórias se afastando da origem, mas também temos algumas se aproximando. Chamamos a origem, portanto, de sela.

2) λ_1 e λ_2 com mesmo sinal.

Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ utilizaremos a análise da seção anterior, quando A é diagonalizável. Lá, os autovalores são iguais e portanto, têm o mesmo sinal. O que difere aqui é que, sem perda de generalidade, $\lambda_1 > \lambda_2$ e nesse caso, as trajetórias não são semirretas, pois $x(t)$ crescerá (ou decrescerá) mais rápido que $y(t)$. Logo, se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, então temos a seguinte configuração da figura 11. O ponto de equilíbrio é dito, nesse caso, um nó instável.

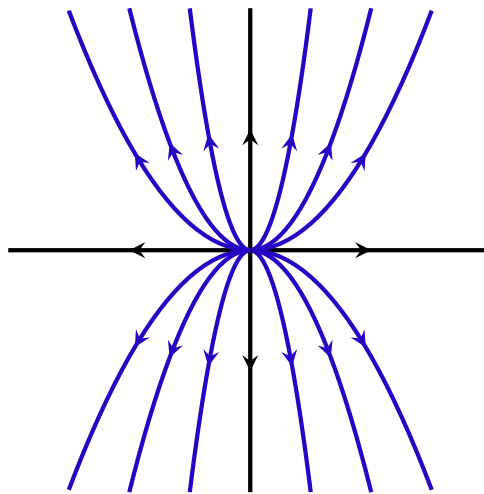


Figura 11 – Plano de fase do caso em que A possui autovalores reais distintos com $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Fonte: A autora.

Agora, se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, teremos a mesma configuração mas em sentidos opostos, como na figura 12. O ponto de equilíbrio é dito, nesse caso, um nó estável.

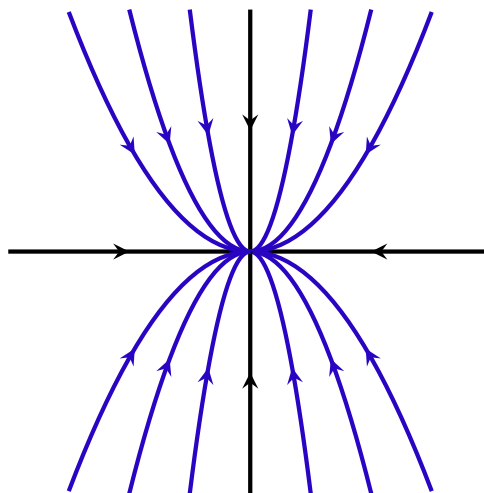


Figura 12 – Plano de fase do caso em que A possui autovalores reais distintos com $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Fonte: A autora.

Veremos agora como fica a configuração do plano de fase quando A possui autovalores complexos.

3.2.3 Autovalores complexos

Nesse caso, analisaremos o seguinte sistema solução

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0. \end{cases}$$

Aqui, nossas variáveis são r e θ , que são funções reais.

Se $\alpha = 0$, temos que $r(t) = r_0$, isto é, a solução possui um raio fixo. Se $\beta < 0$, a órbita gira em sentido horário e se $\beta > 0$, em sentido anti-horário. Logo, a trajetória é um círculo centrado na origem como na figura 13. Dizemos nesse caso, que o ponto de equilíbrio é um centro.

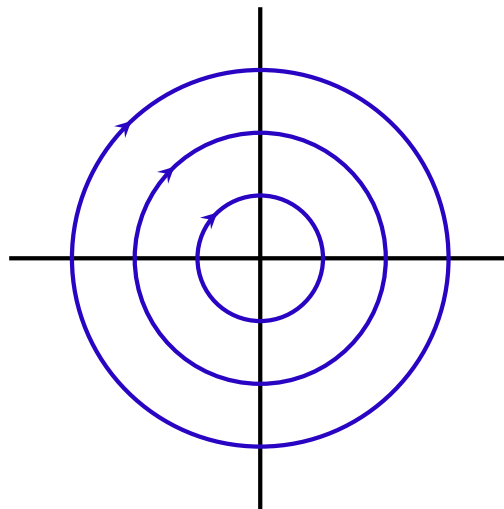


Figura 13 – Plano de fase do caso em que A possui autovalores complexos e $\alpha = 0$ e $\beta < 0$.
Fonte: A autora.

Agora, se $\alpha \neq 0$, temos que se $\alpha < 0$ então $r(t)$ vai diminuindo à medida que t cresce. Nesse caso, o ponto de equilíbrio é dito um ponto de espiral estável. Por outro lado, se $\alpha > 0$, então $r(t)$ vai aumentando à medida que t cresce. Logo, a trajetória é uma espiral, como na figura 14 a seguir. Dizemos, nesse caso, que o ponto de equilíbrio é um ponto espiral.

Repare que os autovalores nesse caso são do tipo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ e portanto, se $\beta = 0$ os autovalores são do tipo possuem parte imaginária nula e então são reais. Daí, seguirão o estudo dos planos de fase estudados anteriormente.

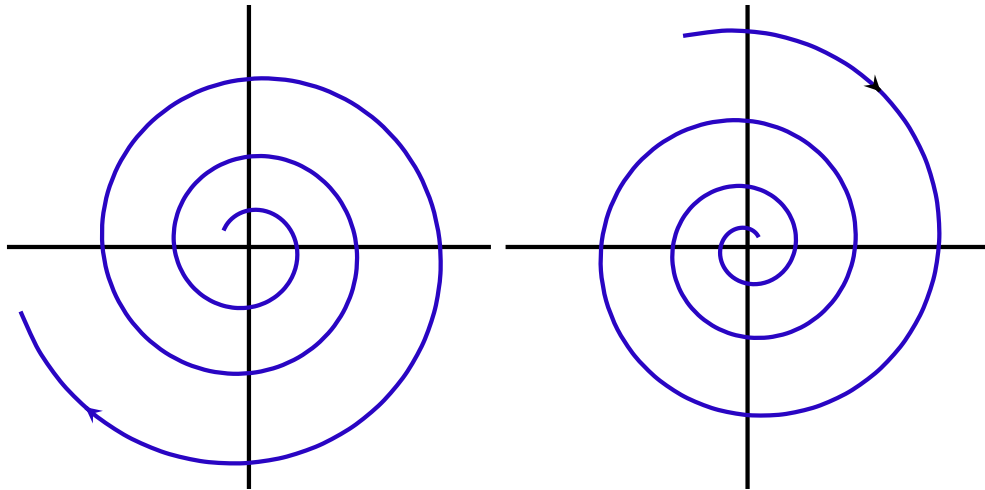


Figura 14 – Plano de fase do caso em que A possui autovalores complexos com $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$, respectivamente. Fonte: A autora.

3.3 Sistemas Autônomos não lineares

Apesar de todos os métodos de análise de um sistema vistos até agora serem em torno de sistemas lineares, quase todos os sistemas reais não são desse tipo. Os sistemas não lineares são complexos e grande parte deles não possui solução analítica. Nesse caso, os métodos numéricos também apresentam problemas, como por exemplo a demora para a convergência da solução. Nessa seção, cuja referências são (DOERING; LOPES, 2016) e (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 1974), veremos por que o estudo de sistemas lineares é pertinente, embora a maioria dos sistemas seja não linear. Para isso vamos estudar uma ferramenta muito importante para decidir a estabilidade de um sistema não linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio, o Teorema de Hartman-Grobman, que consegue, a partir de uma matriz, obter um sistema linear de um sistema não linear.

Consideraremos os sistemas de equações diferenciais do tipo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt}(t) = g(x, y), \end{cases} \quad (3.6)$$

em que as funções f e g são funções reais contínuas e não são simples combinações lineares das variáveis x e y .

Esse sistema pode ser escrito na forma vetorial

$$X' = F(X),$$

em que

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(X) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}.$$

Definição 16. Dizemos que $P = (x, y)$ é um ponto de equilíbrio do sistema (3.6) quando $F(P) = 0$, isto é, $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$.

A seguir apresentaremos o Teorema de Hartman-Grobman, no qual diz que, localmente, o comportamento do sistema não linear (3.6) é equivalente ao sistema linear dado por sua linearização.

Teorema 4 (Teorema de Hartman-Grobman). *Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto de equilíbrio do sistema (3.6) e A a matriz jacobiana do sistema calculada nesse ponto, denotada por*

$$A = J(P) = J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Se $\det A \neq 0$ e todos os autovalores de A possuírem parte real não nula, então o comportamento qualitativo do sistema (3.6) em torno do ponto P é equivalente ao comportamento qualitativo do sistema linearizado em P , dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + by(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = cx(t) + dy(t), \end{cases}$$

em que $a = f_x(x_0, y_0)$, $b = f_y(x_0, y_0)$, $c = g_x(x_0, y_0)$ e $d = g_y(x_0, y_0)$.

Omitiremos a demonstração desse resultado por não ser o foco deste trabalho, mas ela pode ser encontrada em (SOTOMAYOR, 1979).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 12. *Determine a estabilidade do sistema a seguir*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x^2 + y^2 - 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Para isso, calcularemos as derivadas parciais e a matriz jacobiana. As derivadas parciais, nesse caso, são $f_x = 1$, $f_y = 0$, $g_x = 2x$ e $g_y = 2y$ e portanto temos a seguinte matriz jacobiana

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

Note que os pontos de equilíbrio de (3.7) são $(0, 1)$ e $(0, -1)$. De fato,

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1. \end{cases}$$

Assim temos a matriz jacobiana nesses pontos:

$$J(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J(0, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Essas matrizes já são diagonais, o que nos permite observar que ambas têm como autovetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, com autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ (no primeiro caso) e $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ (no segundo caso), respectivamente.

Como os autovalores têm parte real não nula e o determinante da matriz jacobiana calculada nos pontos de equilíbrio é não nulo, podemos aplicar o Teorema 4 que diz que a estabilidade do sistema é localmente equivalente ao sistema linearizado.

Portanto, concluímos que no primeiro caso, o ponto é um nó estável em torno do ponto $(0, 1)$ e no segundo caso, o ponto é um ponto de sela ao redor do ponto $(0, -1)$.

3.3.1 O problema do pêndulo não linear

Falaremos agora sobre o exemplo do pêndulo simples não amortecido, também conhecido como pêndulo simples não linear. As referências usadas aqui são (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) e (DOERING; LOPES, 2016).

Considere um pêndulo simples num plano coordenado sob a ação da força da gravidade. Consideremos esse pêndulo, com uma haste rígida de comprimento $l > 0$ e massa m desprezível, com uma das extremidades fixadas na origem do plano e outra extremidade contendo o pêndulo, conforme a figura 15 a seguir.

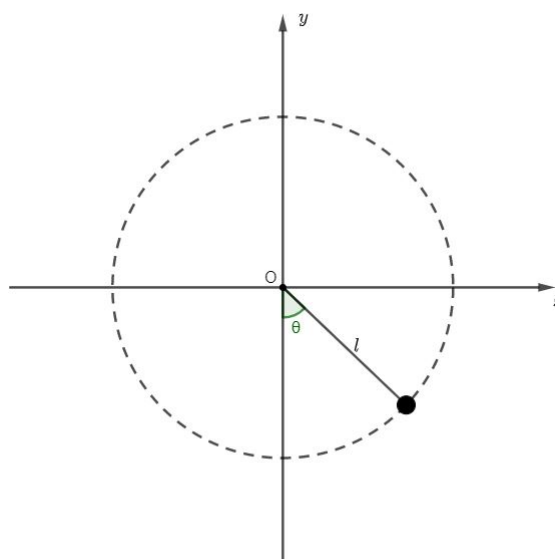


Figura 15 – Pêndulo simples.
Fonte: A autora.

A posição do pêndulo em relação ao tempo é dada por

$$(x(t), y(t)) = (l \operatorname{sen} \theta, -l \cos \theta).$$

Atuando no sistema da figura 15 a componente \vec{F}_y da força peso é tangente ao círculo do movimento, como na figura 16. Essa componente sempre trará o pêndulo em sentido contrário ao aumento do ângulo e por isso podemos descrevê-la da seguinte maneira

$$F_y = -mg \operatorname{sen} \theta, \quad (3.8)$$

em que g é a força da gravidade.

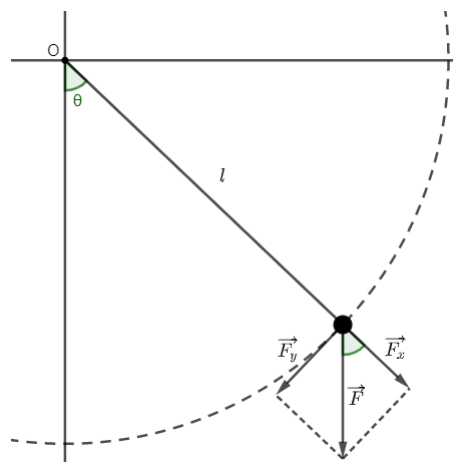


Figura 16 – Componentes da força peso exercidas sobre o pêndulo simples.
Fonte: A autora.

O deslocamento da partícula ao longo do arco é dado por

$$s(t) = l \cdot \theta(t).$$

Daí, a velocidade do pêndulo é dada por

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = l \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

e a aceleração por

$$a(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}.$$

Além disso, temos a força de atrito, que é proporcional à velocidade e atua no sentido oposto do movimento, dada por

$$F_a = -bl \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (3.9)$$

Pela Segunda Lei de Newton, que diz que a soma das forças se iguala ao produto da massa pela aceleração, temos

$$F = ma = ml \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}. \quad (3.10)$$

Portanto, das equações (3.8), (3.9) e (3.10) acima, temos a EDO que descreve o movimento de um pêndulo não-amortecido

$$-bl \frac{d\theta(t)}{dt} - mg \operatorname{sen} \theta = ml \frac{d^2\theta(t)}{dt^2},$$

que pode ser reescrita como

$$m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + c \operatorname{sen} \theta = 0,$$

em que $c = \frac{mg}{l}$.

Exemplo 13. Considerando a EDO que descreve o movimento de um pêndulo não-amortecido obtido acima

$$m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + c \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (3.11)$$

em que θ é o ângulo que o pêndulo faz com o eixo vertical, encontre os pontos de equilíbrio do sistema e os classifique quanto à estabilidade.

Podemos escrever esse sistema não linear na forma usual fazendo

$$v = \frac{d\theta}{dt}$$

e daí

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Temos então que (3.11) é equivalente ao seguinte sistema de EDOs,

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v - \frac{c}{m} \operatorname{sen} \theta. \end{cases} \quad (3.12)$$

Consideremos $f(\theta, v) = v$ e $g(\theta, v) = -\frac{b}{m}v - \frac{c}{m} \operatorname{sen} \theta$ e calculemos as derivadas parciais,

$$f_\theta = 0, \quad f_v = 1, \quad g_\theta = -\frac{c}{m} \cos \theta, \quad g_v = -\frac{b}{m}.$$

Assim, a matriz jacobiana é dada por

$$J(\theta, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} \cos \theta & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}.$$

Agora, calcularemos os pontos de equilíbrio do sistema (3.12), ou seja, quando $\frac{d\theta}{dt} = 0$ e $\frac{dv}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} v = 0, \\ -\frac{c}{m} \operatorname{sen} \theta = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 0, \\ \operatorname{sen} \theta = 0. \end{cases}$$

Logo, os pontos de equilíbrio são do tipo $(k\pi, 0)$ em que $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que o determinante da matriz jacobiana calculada nos pontos de equilíbrio nunca será nulo e que, quando os pontos de equilíbrio forem do tipo $k = (0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots)$, a matriz jacobiana será a mesma:

$$J(k\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}.$$

Nesses casos, o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{c}{m}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b^2}{m^2} - \frac{4c}{m} \\ &= \frac{b^2 - 4mc}{m^2}, \end{aligned}$$

donde obtemos as duas raízes de $p(\lambda)$ dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4mc}{m^2}}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}. \end{aligned}$$

Logo, temos dois autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}.$$

Note que, quando $b^2 - 4mc = 0$, temos que $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Analogamente, quando $b^2 - 4mc > 0$, temos que

$$\sqrt{b^2 - 4mc} < \sqrt{b^2} = b, \quad \text{o que implica em } \lambda_1 < 0$$

e

$$\sqrt{b^2 - 4mc} > 0 \quad \text{implica em } \lambda_2 < 0.$$

Concluimos então que se k for do tipo $k = (0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots)$ e $b^2 - 4mc > 0$, então os autovalores são números reais negativos e portanto, aplicando o Teorema de Hartman-Grobman, temos que os pontos de equilíbrio do sistema não linear (3.12) têm estabilidade do tipo nó estável numa vizinhança desses pontos.

Agora, ainda quando k é par, se $b^2 - 4mc < 0$, então

$$\sqrt{b^2 - 4mc} \in \mathbb{C}, \quad \text{que implica } \operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$$

e

$$\sqrt{b^2 - 4mc} \in \mathbb{C}, \quad \text{que implica } \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0.$$

Concluimos então que se $b^2 - 4mc < 0$, temos que os autovalores têm partes reais não nulas negativas e portanto, aplicando o Teorema de Hartman-Grobman, temos que os pontos de equilíbrio do sistema não linear (3.12) tem comportamento do tipo foco estável.

Por outro lado, a matriz jacobiana terá um formato diferente quando k for do tipo $(\pm\pi, \pm 3\pi, \dots)$, dada por:

$$J(k\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}.$$

Nesses casos, o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda - \frac{c}{m}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b^2}{m^2} + \frac{4c}{m} \\ &= \frac{b^2 + 4mc}{m^2}. \end{aligned}$$

Assim, suas raízes são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2 + 4mc}{m^2}}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4mc}}{2m}. \end{aligned}$$

Logo, temos dois autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4mc}}{2m} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4mc}}{2m}.$$

Agora, analisaremos os autovalores encontrados. Note que $b^2 + 4mc > 0$ e daí

$$\sqrt{b^2 + 4mc} > \sqrt{b^2} = b, \quad \text{o que implica em } \lambda_1 > 0$$

e

$$\sqrt{b^2 + 4mc} > 0, \quad \text{que implica em } \lambda_2 < 0.$$

Concluimos então que se $k = (\pm\pi, \pm 3\pi, \dots)$ e $b^2 + 4mc > 0$, temos autovalores reais com sinais opostos e portanto, aplicando o Teorema de Hartman-Grobman, temos que os pontos de equilíbrio do sistema não linear (3.12) têm estabilidade do tipo ponto de sela em uma vizinhança desses pontos.

4 Modelos Epidemiológicos

Apresentaremos nesse capítulo modelos matemáticos em epidemiologia dos tipos SIR, SIRI e SIRS usando sistemas autônomos de equações diferenciais não lineares vistos no capítulo anterior. Usamos nessa seção a referência (XAVIER, 2017).

Esses modelos consideram uma população, que denotaremos por N , e dividem os indivíduos dessa população entre classes, sendo elas a classe S dos suscetíveis, formada pelos indivíduos saudáveis que estão passíveis de receber a infecção, a classe I dos infectados, formada pelos indivíduos que adquiriram a infecção e a classe R dos recuperados formada pelos indivíduos que se recuperaram da infecção. O total de indivíduos da população é dado pela soma dos indivíduos de cada classe, isto é,

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

Para entender melhor os sistemas de cada um dos modelos, vamos assumir alguns parâmetros, sendo eles

- Taxa de contágio ou função de incidência: ϕ ;
- Taxa de recuperação: γ ;
- Taxa de reinfeção: ψ ;
- Taxa de natalidade: b ;
- Taxa de mortalidade: d .

Serão, ainda, denotadas em alguns modelos por ϵ e δ o excesso de mortes causada pela infecção nas classes I e R , respectivamente, e a taxa com que os indivíduos perdem a imunidade temporária será dada por ρ . Vale ressaltar que todos esses parâmetros são números reais não negativos.

Falaremos a seguir mais detalhadamente dos modelos SIR, SIRI e SIRS. O primeiro é o único onde se considera a população sendo constante, enquanto os outros introduzem as taxas de nascimento e mortalidade. No modelo SIRI, adiciona-se também a possibilidade de uma pessoa que está recuperada se reinfectar, como também no último modelo SIRS, mais completo, que se difere pois acrescenta-se, além desta, a possibilidade do indivíduo recuperado voltar à classe dos suscetíveis.

4.1 Modelo SIR

O primeiro modelo que vamos apresentar é o do tipo SIR, com população constante. Esse modelo é o mais simples de todos e o mais apropriado para doenças que indivíduos adquirem apenas uma vez na vida. Apenas nele um indivíduo recuperado não volta a se infectar, e também não se considera nascimentos e mortes.

Nesse modelo é utilizada como função de incidência

$$\phi(S, I, N) = \varphi \frac{S}{N},$$

em que φ e N são constantes. A transição de indivíduos entre as classes é mostrada esquematicamente abaixo

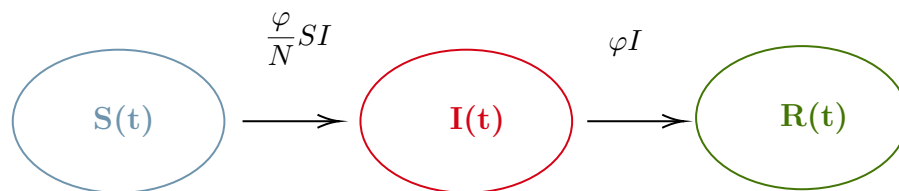


Figura 17 – Transição entre classes do modelo SIR, com população constante mostrada esquematicamente.

Fonte: A autora.

Assim, consideramos que um indivíduo da classe dos suscetíveis pode passar para a classe dos infectados que por sua vez pode passar para a classe dos recuperados.

O sistema de equações diferenciais ordinárias que representa esse modelo é obtido da seguinte forma: a variação $S'(t)$ da quantidade de indivíduos da classe S em função do tempo decresce a uma taxa de contágio à medida que acontece o encontro de indivíduos saudáveis com indivíduos infectados, ou seja, aqui representamos os indivíduos que estavam inicialmente na classe S e passaram para classe I . Além disso, temos que a variação em função do tempo da quantidade de indivíduos da classe I ($I'(t)$) aumenta à medida que indivíduos da classe S passam para a classe I e diminui, simultaneamente, à uma taxa γ de recuperação quando indivíduos infectados se recuperam. Finalmente, analisaremos a variação em função do tempo da quantidade de indivíduos da classe R ($R'(t)$), que vai aumentando na medida que indivíduos da classe I passam para a classe R .

Logo, temos o seguinte sistema dado por

$$\begin{cases} S' = -\frac{\varphi}{N}SI, \\ I' = \frac{\varphi}{N}SI - \gamma I, \\ R' = \gamma I. \end{cases}$$

Lembrando que estamos considerando população constante, temos que

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0.$$

Podemos também considerar o modelo SIR com população não constante, ou seja, considerando-se as taxas de natalidade e mortalidade. Nesse caso, a transição de indivíduos entre as classes é mostrada esquematicamente da seguinte forma

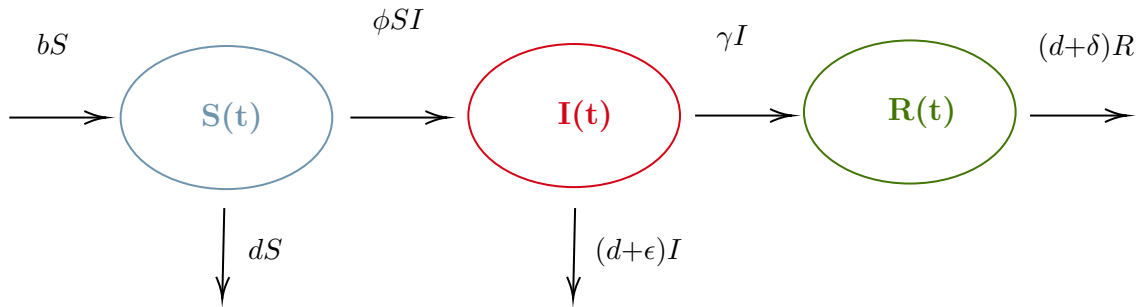


Figura 18 – Transição entre classes do modelo SIR com população não constante.
Fonte: A autora.

Portanto, o conjunto de equações que representa esse modelo é dado por

$$\begin{cases} S' = -\phi SI + (b - d)S, \\ I' = \phi SI - \gamma I - (d + \epsilon)I, \\ R' = \gamma I - (d + \delta)R. \end{cases}$$

Nesse sistema é acrescentado na primeira equação os indivíduos que nascem a uma taxa de natalidade b e diminuído os indivíduos que estão na classe dos suscetíveis que morrem a uma taxa de mortalidade d .

Na segunda equação são diminuídas as taxas de mortalidade e excesso de mortalidade dos indivíduos infectados, assim como na terceira equação que são diminuídas as taxas de mortalidade e excesso de mortalidade dos indivíduos recuperados. Ou seja, nesse modelo apenas acrescentamos as taxas de natalidade e mortalidade, que antes não eram consideradas.

Veremos agora um modelo que, além de considerar população não constante, também considera a possibilidade de reinfeção.

4.2 Modelo SIRI

No modelo epidemiológico SIRI consideraremos a possibilidade do indivíduo recuperado voltar a se infectar. Assim, a transição de pessoas entre as classes nesse modelo é

mostrada esquematicamente da seguinte forma

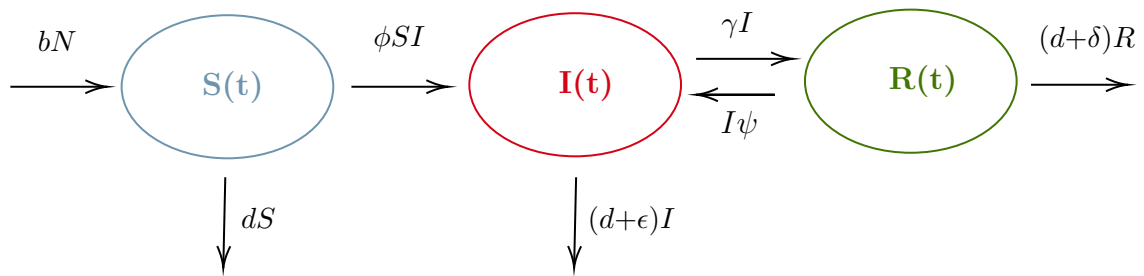


Figura 19 – Transição entre classes do modelo SIRS.

Fonte: A autora.

Note que, um indivíduo da classe dos suscetíveis pode passar para a classe dos infectados, que por sua vez pode passar para a classe dos recuperados. Além disso, uma pessoa da classe dos recuperados pode voltar a fazer parte da classe dos infectados.

Seguindo os parâmetros e taxas de contágio e reinfecção descritos anteriormente, o conjunto de equações que representa esse modelo é dado por

$$\begin{cases} S' = bN - dS - IS\phi, \\ R' = \gamma I - (d + \delta)R - I\psi. \end{cases}$$

Note que, nesse sistema, acrescentamos apenas as hipóteses que não eram consideradas no modelo anterior, isto é, consideramos que indivíduos recuperados podem se reinfecar e então diminuimos esses indivíduos da terceira equação do sistema, adicionamos, consequentemente, essas pessoas na classe dos infectados.

Finalmente, veremos o último modelo que além de considerar a reinfecção, também adiciona a possibilidade de uma pessoa recuperada poder voltar para a classe dos suscetíveis.

4.3 Modelo SIRS

O modelo epidemiológico SIRS com população de tamanho variável é o mais completo desses modelos (XAVIER, 2017). Nele, o indivíduo recuperado adquire imunidade parcial temporária, isto é, o indivíduo recuperado pode voltar tanto à classe dos indivíduos suscetíveis, quanto à classe dos indivíduos infectados. Assim, a transição entre as classes é mostrada esquematicamente da seguinte forma

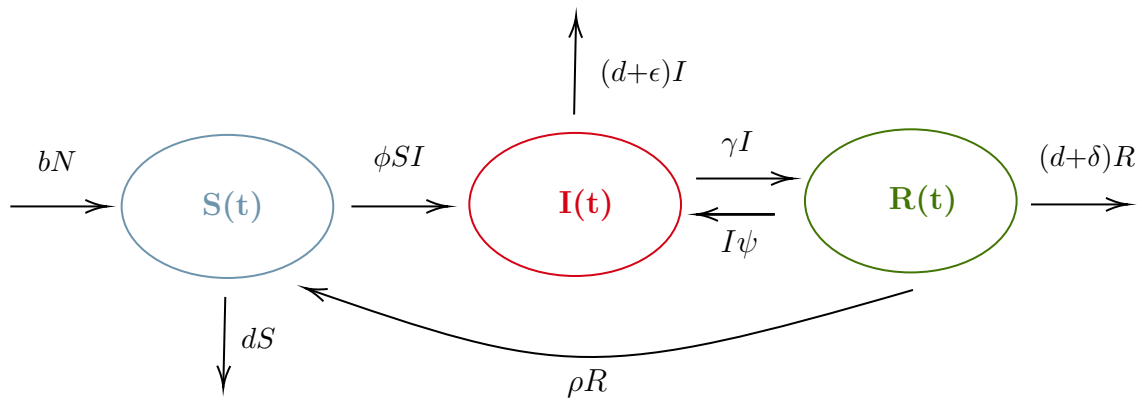


Figura 20 – Transição entre classes do modelo SIRS.
 Fonte: A autora.

Portanto, o sistema de equações diferenciais que representa esse modelo é dado por

$$\begin{cases} S' = bN - dS - IS\phi + \rho R, \\ I' = IS\phi - \gamma I + I\psi - (d + \epsilon)I, \\ R' = \gamma I - (d + \delta)R - I\psi - \rho R. \end{cases}$$

Observe que acrescentamos na primeira equação desse sistema os indivíduos que perdem a imunidade temporária e conseqüentemente essas são diminuídas da terceira equação.

5 Modelagem matemática do controle biológico da broca da cana-de-açúcar

Nesse capítulo utilizamos a referência (RAFIKOV; LIMEIRA, 2012) para apresentar um sistema de equações diferenciais que modelam as interações de duas espécies: a praga *Diatraea Saccharalis*, popularmente conhecida como broca da cana-de-açúcar e seu parasitoide da família *Trichogramma galloi*. Estudaremos esse sistema por meio da modelagem matemática e analisaremos sua solução, interpretando-a na linguagem do mundo real.

As pragas da cana-de-açúcar podem causar sérios prejuízos econômicos à produção canavieira, ocasionando até mesmo a perda da lavoura, por isso é de extrema importância realizar o monitoramento e controle dessas pragas. Dentre as diferentes pragas que atacam a cana-de-açúcar, a broca (*Diatraea Saccharalis*) é considerada uma das principais. O ciclo de vida dessa espécie, nessa ordem, passa pelas fases de ovo, larva, pupa (casulo) e adulto. A primeira dessas fases, a fase de ovo, tem o mais curto período de duração, variando de quatro a nove dias. Esses ovos são depositados na face inferior das folhas da planta e eclodem originando uma lagarta branca com a cabeça marrom que inicialmente se alimenta das folhas para depois penetrarem no colmo, que é o caule da cana-de-açúcar. A fase larval tem duração média de 44 dias. A fase de pupa, que segue a larval, dura um período de nove a quatorze dias e resulta numa mariposa com asas amarela-palha que sai pelo orifício deixado pela lagarta. O ciclo total tem duração média de 53 a 60 dias e pode resultar em até quatro gerações no ano (ROSSETTO; SANTIAGO, 2008).



Figura 21 – Fase larval da broca da cana-de-açúcar - Disponível em (INOVADORES, 2020).

As lagartas formam galerias no interior do colmo gerando falhas na germinação e perda de peso. Alguns dos danos causados são a seca dos ponteiros, sintoma conhecido como coração morto, principalmente nas plantas mais novas; quebras dos colmos, plantas com desenvolvimento reduzido, menor número de colmos. As galerias abertas pelas lagartas também servem de entrada para inúmeros fungos que causam podridão, diminuindo a pureza e o rendimento do açúcar. (AGROLINK, 2008)

O controle biológico é uma técnica que utiliza meios naturais, especificamente outros organismos vivos, criada para diminuir a população de organismos considerados pragas. Essa é uma das estratégias eficientes utilizadas para o controle da broca, que se dá através da inserção de parasitas de ovos da vespa da espécie *Trichogramma galloi* no sistema. Essa espécie age de forma preventiva, pois ataca os ovos e assim rapidamente diminui a população da praga e conseqüentemente os danos que ela causaria, além de não possuir efeitos tóxicos ao meio ambiente ou à saúde do homem. A vespa coloca seus ovos dentro dos ovos da praga e assim, no processo de desenvolvimento do parasitoide, os ovos da praga escurecem, indicando que estão parasitados.



Figura 22 – Vespa *Trichogramma galloi* em ovos parasitados - Disponível em (OLIVEIRA, 2018).

Utilizaremos a modelagem matemática para estudar o controle biológico de pragas, analisando de forma qualitativa sistemas dinâmicos que simulam as interações entre as populações da broca da cana-de-açúcar, consideradas nas fases de ovo e larval, e seu parasitoide da espécie *Trichogramma galloi*, em termo de ovos parasitados.

Para construção do modelo matemático que analisaremos, consideramos x_1 , x_2 e x_3 como as populações de ovos, de ovos parasitados e de larvas da broca da cana-de-açúcar, respectivamente. Além disso, consideraremos uma taxa β de reprodução de ovos da broca da cana, uma taxa α de parasitismo e K como a capacidade de carga do ambiente, que é

o tamanho populacional máximo de uma espécie que o meio pode sustentar. Portanto, a variação, em função do tempo, da densidade populacional de ovos da broca é dada por

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) x_1 - m_1 x_1 - n_1 x_1 - \alpha x_1 x_2,$$

em que m_1 é a taxa de mortalidade da população de ovos da broca e n_1 é o coeficiente que caracteriza parte da população de ovos da broca que se tornaram larvas no tempo t .

Agora, a equação que descreve a taxa de variação, em função do tempo, da densidade populacional de ovos parasitados é dada por

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1 x_2 - m_2 x_2 - n_2 x_2,$$

em que m_2 é a taxa de mortalidade da população de ovos parasitados e n_2 é o coeficiente que caracteriza parte da população de ovos parasitados que se tornaram parasitoides no tempo t .

Por fim, a equação que descreve a taxa de variação, em função do tempo, da densidade populacional de larvas da broca é dada por

$$\frac{dx_3}{dt} = n_1 x_1 - m_3 x_3 - n_3 x_3,$$

em que m_3 é a taxa de mortalidade da população de larvas e n_3 é o coeficiente que caracteriza parte da população de larvas que se tornaram pupas no tempo t .

Portanto, o sistema de equações diferenciais que descreve as interações entre a broca da cana e seu parasitoide é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \beta \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) x_1 - m_1 x_1 - n_1 x_1 - \alpha x_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1 x_2 - m_2 x_2 - n_2 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = n_1 x_1 - m_3 x_3 - n_3 x_3. \end{cases} \quad (5.1)$$

Note que o sistema (5.1) é um sistema autônomo de equações não lineares e, como já visto, nem sempre conseguiremos explicitar as soluções desse tipo de sistema. Por isso, faremos uma análise qualitativa do comportamento das soluções através da linearização do sistema. Para isso, encontraremos os pontos de equilíbrio do sistema (5.1) para que possamos estudar o comportamento das soluções em torno de cada um desses pontos e analisar sua estabilidade.

Para encontrar os pontos de equilíbrio, fazemos

$$\begin{cases} \beta \left(1 - \frac{x_1^*}{K}\right) x_1^* - m_1 x_1^* - n_1 x_1^* - \alpha x_1^* x_2^* = 0, \\ \alpha x_1^* x_2^* - m_2 x_2^* - n_2 x_2^* = 0, \\ n_1 x_1^* - m_3 x_3^* - n_3 x_3^* = 0. \end{cases}$$

que implica em

$$\begin{cases} x_1^* \left[\left(\beta - \beta \frac{x_1^*}{K} \right) - m_1 - n_1 - \alpha x_2^* \right] = 0 \\ x_2^* [\alpha x_1^* - m_2 - n_2] = 0 \\ n_1 x_1^* - x_3^* [m_3 + n_3] = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Logo, o primeiro ponto de equilíbrio é dado por

$$P_1 = (0, 0, 0).$$

Observe que se $x_1^* = 0$ estaríamos admitindo que não existem pragas, portanto assumiremos que $x_1^* \neq 0$. Logo, pela primeira equação de (5.2) temos que

$$x_1^* = \frac{(-m_1 - n_1 - \alpha x_2^* + \beta)K}{\beta}. \quad (5.3)$$

Agora, analisando a segunda equação de (5.2) temos duas opções: $x_2^* = 0$ ou $x_2^* \neq 0$. Primeiramente, estudaremos o caso em que $x_2^* = 0$. Daí,

$$x_1^* = \frac{(-m_1 - n_1 + \beta)K}{\beta}.$$

Portanto, substituindo na terceira equação de (5.2) temos

$$x_3^* = \frac{n_1(-m_1 - n_1 + \beta)K}{\beta(m_3 + n_3)}.$$

Logo, o segundo ponto de equilíbrio é dado por

$$P_2 = \left(\frac{(-m_1 - n_1 + \beta)K}{\beta}, 0, \frac{n_1(-m_1 - n_1 + \beta)K}{\beta(m_3 + n_3)} \right).$$

Como estamos tratando de populações, não teria sentido biológico se estivéssemos em um caso que representasse população negativa. Por isso, note que esse ponto só faz sentido se

$$-m_1 - n_1 + \beta > 0 \text{ então } \beta > m_1 + n_1.$$

Finalmente, estudaremos o caso em que $x_2^* \neq 0$. Daí, pela segunda equação de (5.2) temos que

$$x_1^* = \frac{m_2 + n_2}{\alpha}. \quad (5.4)$$

Mas já vimos em (5.3) que

$$x_1^* = \frac{(-m_1 - n_1 - \alpha x_2^* + \beta)K}{\beta}.$$

Logo, igualando (5.4) e (5.3) temos que

$$\frac{(-m_1 - n_1 - \alpha x_2^* + \beta)K}{\beta} = \frac{m_2 + n_2}{\alpha}.$$

Multiplicando ambos lados da igualdade acima por $\frac{\beta}{K}$ e fazendo as devidas simplificações temos

$$x_2^* = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 K}(m_2 + n_2) - \frac{(m_1 + n_1)}{\alpha}.$$

Daí, pela terceira equação de (5.2) e (5.4) temos

$$x_3^* = \frac{n_1(m_2 + n_2)}{\alpha(m_3 + n_3)}.$$

Logo, o segundo ponto de equilíbrio é dado por

$$P_3 = \left(\frac{m_2 + n_2}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 K}(m_2 + n_2) - \frac{(m_1 + n_1)}{\alpha}, \frac{n_1(m_2 + n_2)}{\alpha(m_3 + n_3)} \right).$$

Analogamente ao ponto anterior, não teria sentido biológico se estivéssemos em um caso que representasse população negativa. Por isso, note que esse ponto só faz sentido se

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 K}(m_2 + n_2) - \frac{(m_1 + n_1)}{\alpha} > 0 \Rightarrow \beta > \frac{\alpha K(m_1 + n_1)}{\alpha K - (m_2 + n_2)}.$$

Utilizaremos aqui o Teorema de Hartman-Grobman, enunciado no teorema 4, para linearizar o sistema (5.1) e analisar de forma qualitativa a estabilidade desse sistema ao redor dos pontos de equilíbrio encontrados acima.

Para isso construiremos a matriz Jacobiana do sistema (5.1). Denotaremos

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= \beta \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) x_1 - m_1 x_1 - n_1 x_1 - \alpha x_1 x_2, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= \alpha x_1 x_2 - m_2 x_2 - n_2 x_2, \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= n_1 x_1 - m_3 x_3 - n_3 x_3 \end{aligned}$$

e calcularemos as derivadas parciais de cada uma dessas funções no ponto de equilíbrio.

As derivadas parciais da função F_1 são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= \beta - \frac{2x_1^* \beta}{K} - m_1 - n_1 - \alpha x_2^*, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= -\alpha x_1^*, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= 0. \end{aligned}$$

As derivadas parciais da função F_2 são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= \alpha x_2^*, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= \alpha x_1^* - m_2 - n_2, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= 0. \end{aligned}$$

As derivadas parciais da função F_3 são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= n_1, \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= 0, \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= -m_3 - n_3.\end{aligned}$$

Logo, a matriz jacobiana é dada por

$$J(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{bmatrix} \beta - \frac{2x_1^*\beta}{K} - m_1 - n_1 - \alpha x_2^* & -\alpha x_1^* & 0 \\ \alpha x_2^* & \alpha x_1^* - m_2 - n_2 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{bmatrix}.$$

Agora, analisaremos cada ponto de equilíbrio. Primeiramente analisaremos a estabilidade do ponto de equilíbrio $P_1 = (0, 0, 0)$. Para isso, substituiremos os valores de P_1 na matriz jacobiana e daí obtemos

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} \beta - m_1 - n_1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 - n_2 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{bmatrix}.$$

Calcularemos agora os autovalores de $J(P_1)$ encontrando os zeros do polinômio característico

$$\det \begin{bmatrix} \beta - m_1 - n_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 - n_2 - \lambda & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Note que a matriz acima é triangular superior e portanto, seu determinante é dado pela multiplicação dos elementos da diagonal principal, isto é

$$(\beta - m_1 - n_1 - \lambda)(-m_2 - n_2 - \lambda)(-m_3 - n_3 - \lambda) = 0.$$

Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \beta - m_1 - n_1 - \lambda = 0, \\ -m_2 - n_2 - \lambda = 0, \\ -m_3 - n_3 - \lambda = 0 \end{cases}$$

e obtemos os autovalores a seguir

$$\lambda_1 = \beta - m_1 - n_1,$$

$$\lambda_2 = -m_2 - n_2,$$

$$\lambda_3 = -m_3 - n_3.$$

Como se trata de um sistema de controle biológico, é pertinente que não estejamos interessados nas soluções instáveis. Dito isso, precisamos que os pontos de equilíbrio tenham comportamento estável e para que isso aconteça aqui precisamos que os autovalores sejam negativos.

Sabemos que λ_2 e λ_3 são negativos, uma vez que as taxas m_i e n_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, são por definição não negativas. Resta analisar λ_1 , devendo ter a seguinte condição

$$\beta - m_1 - n_1 < 0 \Leftrightarrow \beta < m_1 + n_1.$$

Logo, concluímos que P_1 é estável se $\beta < m_1 + n_1$.

Agora analisaremos a estabilidade do ponto de equilíbrio P_2 . Novamente, substituiremos os valores de P_2 na matriz jacobiana e daí obtemos

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} \beta - \frac{2\beta}{K} \left(\frac{H}{\beta}\right) - m_1 - n_1 & -\alpha \left(\frac{H}{\beta}\right) & 0 \\ 0 & \alpha \left(\frac{H}{\beta}\right) - m_2 - n_2 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{bmatrix},$$

em que $H = (-m_1 - n_1 + \beta)K$.

Analogamente, calcularemos agora os autovalores de $J(P_2)$

$$\det \begin{bmatrix} -\beta + m_1 + n_1 - \lambda & \frac{-\alpha K}{\beta}(-m_1 - n_1 + \beta) & 0 \\ 0 & \frac{\alpha K}{\beta}(-m_1 - n_1 + \beta) - m_2 - n_2 - \lambda & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

então temos

$$(-\beta + m_1 + n_1 - \lambda) \left(\frac{\alpha K}{\beta}(-m_1 - n_1 + \beta) - m_2 - n_2 - \lambda \right) (-m_3 - n_3 - \lambda) = 0.$$

Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\beta + m_1 + n_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\alpha K}{\beta}(-m_1 - n_1 + \beta) - m_2 - n_2 - \lambda = 0, \\ -m_3 - n_3 - \lambda = 0 \end{cases}$$

e obtemos os autovalores a seguir

$$\lambda_1 = -\beta + m_1 + n_1,$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha K}{\beta}(-m_1 - n_1 + \beta) - m_2 - n_2,$$

$$\lambda_3 = -m_3 - n_3.$$

Como já dito anteriormente, estamos interessados nas soluções estáveis e para que isso aconteça precisamos que os autovalores sejam negativos.

Sabemos que λ_3 é negativo, uma vez que as taxas m_3 e n_3 são, por definição, não negativas. Já em λ_1 , precisamos ter

$$-\beta + m_1 + n_1 < 0 \text{ então } \beta > m_1 + n_1.$$

Por último, analisaremos λ_2 e veremos

$$\frac{\alpha K}{\beta}(-m_1 - n_1 + \beta) - m_2 - n_2 < 0 \text{ então } \beta < \frac{\beta}{\alpha K}(m_2 + n_2) + m_1 + n_1.$$

Ou seja,

$$\beta < \frac{\alpha K(m_1 + n_1)}{\alpha K - m_2 - n_2},$$

com $\alpha K - m_2 - n_2 \neq 0$.

Logo, concluímos que P_2 é estável se $m_1 + n_1 < \beta < \frac{\alpha K(m_1 + n_1)}{\alpha K - m_2 - n_2}$.

Agora analisaremos a estabilidade do ponto de equilíbrio P_3 . Novamente, substituiremos os valores de P_3 na matriz jacobiana e daí obtemos

$$J(P_3) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{K\alpha}(m_2 + n_2) & -m_2 - n_2 & 0 \\ \beta - \frac{\beta}{\alpha K}(m_2 + n_2) - m_1 - n_1 & 0 & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, calculando os autovalores de $J(P_3)$ obtemos

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{K\alpha}(m_2 + n_2) - \lambda & -m_2 - n_2 & 0 \\ \beta - \frac{\beta}{\alpha K}(m_2 + n_2) - (m_1 + n_1) & -\lambda & 0 \\ n_1 & 0 & -m_3 - n_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

então temos,

$$\left[\left(-\frac{\beta}{K\alpha}(m_2 + n_2) - \lambda \right) (-\lambda) (-m_3 - n_3 - \lambda) \right] - \left[(-m_2 - n_2) \left(\beta - \frac{\beta}{\alpha K}(m_2 + n_2) - (m_1 + n_1) \right) (-m_3 - n_3 - \lambda) \right] = 0,$$

o que implica em,

$$[-m_3 - n_3 - \lambda] \cdot \left[\lambda^2 + \frac{\beta(m_2 + n_2)}{K\alpha} \lambda + \left\{ (m_2 + n_2) \left(\beta - \frac{\beta}{\alpha K}(m_2 + n_2) - (m_1 + n_1) \right) \right\} \right] = 0. \quad (5.5)$$

Assim, temos que um dos autovalores é

$$\lambda_1 = -m_3 - n_3,$$

e obtemos os outros autovalores a partir da equação

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

em que

$$a_2 = 1,$$

$$a_1 = \frac{\beta}{K\alpha}(m_2 + n_2),$$

e

$$a_0 = (m_2 + n_2) \left(\beta - \frac{\beta}{\alpha K} (m_2 + n_2) - (m_1 + n_1) \right).$$

Para analisar a estabilidade aqui utilizaremos o critério de Routh-Hurwitz. Tal critério permite determinar a estabilidade de um sistema a partir dos coeficientes da equação característica.

O critério de Routh-Hurwitz mostra que uma condição necessária e suficiente para estabilidade é que todos os elementos na primeira coluna da tabela de Routh sejam positivos. Essa tabela é construída com $n + 1$ linhas, em que n é o grau do polinômio. As duas primeiras linhas serão preenchidas com os coeficientes separados em coeficientes pares e ímpares.

Dado o polinômio característico (5.5), temos a seguinte tabela de Routh:

λ^2	1	$(m_2 + n_2) \left(\beta - \frac{\beta}{\alpha K} (m_2 + n_2) - (m_1 + n_1) \right)$
λ^1	$\frac{\beta}{\alpha K} (m_2 + n_2)$	
λ^0	c_1	

Em seguida a tabela termina de ser preenchida com um coeficiente c_1 que, nesse caso, é encontrado da seguinte forma

$$c_1 = \frac{\left[\frac{\beta}{\alpha K} (m_2 + n_2) \right] \cdot \left[(m_2 + n_2) \left(\beta - \frac{\beta}{\alpha K} (m_2 + n_2) - (m_1 + n_1) \right) \right]}{\left[\frac{\beta}{\alpha K} (m_2 + n_2) \right]}.$$

Para que tenhamos estabilidade, que é o que nos interessa, temos que garantir que os elementos da primeira coluna sejam positivos, ou seja, que $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ e $a_0 = c_1 > 0$.

Sabemos que $a_1, a_2 > 0$, então basta analisar quando $a_0 > 0$. Para isso, é necessário que

$$\beta - \frac{\beta}{\alpha K} (m_2 + n_2) - (m_1 + n_1) > 0.$$

Logo, P_3 é estável se

$$\beta > \frac{\alpha K (m_1 + n_1)}{\alpha K - m_2 - n_2},$$

com $\alpha K - m_2 - n_2 \neq 0$.

Aqui, encerramos a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio. A seguir iremos usar o software livre *Scilab* para implementar o método de Runge-Kutta de quarta ordem e realizar simulações numéricas.

5.1 Simulação numérica

Utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem na linguagem *Scilab* para obtermos a solução discreta do sistema (5.1) e compararmos as soluções estabilizadas. Para mais informações sobre a implementação feita no software *Scilab* veja o apêndice A.

Para a simulação numérica da interação entre as populações da broca da cana e seu parasitoide utilizaremos os mesmos coeficientes da referência (RAFIKOV; LIMEIRA, 2012): $n_1 = 0.1$, $n_2 = 0.1$, $n_3 = 0.02439$, $m_1 = 0.03566$, $m_2 = 0.03566$, $m_3 = 0.00256$, $\alpha = 0.0001723$ e $K = 25000$ larvas por hectare.

Vimos, ao analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, que parâmetro β é de suma importância para verificar se o ponto de equilíbrio será estável ou não. Cada um dos pontos de equilíbrio encontrados apresenta condições para que seja estável o ponto. Veremos cada um desses casos novamente.

Vimos que para que o ponto P_1 seja estável, precisamos que o coeficiente β satisfaça a seguinte condição

$$\beta < m_1 + n_1 = 0.13566.$$

A figura 23 mostra a evolução das populações ao passar do tempo quando consideramos o parâmetro $\beta = 0.130$. Além disso, consideramos aqui as condições iniciais para as populações como $x_1 = 1000$, $x_2 = 1000$ e $x_3 = 2000$. Nesse caso, podemos observar pela simulação realizada na figura 23, que todas as populações tendem a ser extintas e portanto, atingem equilíbrio.

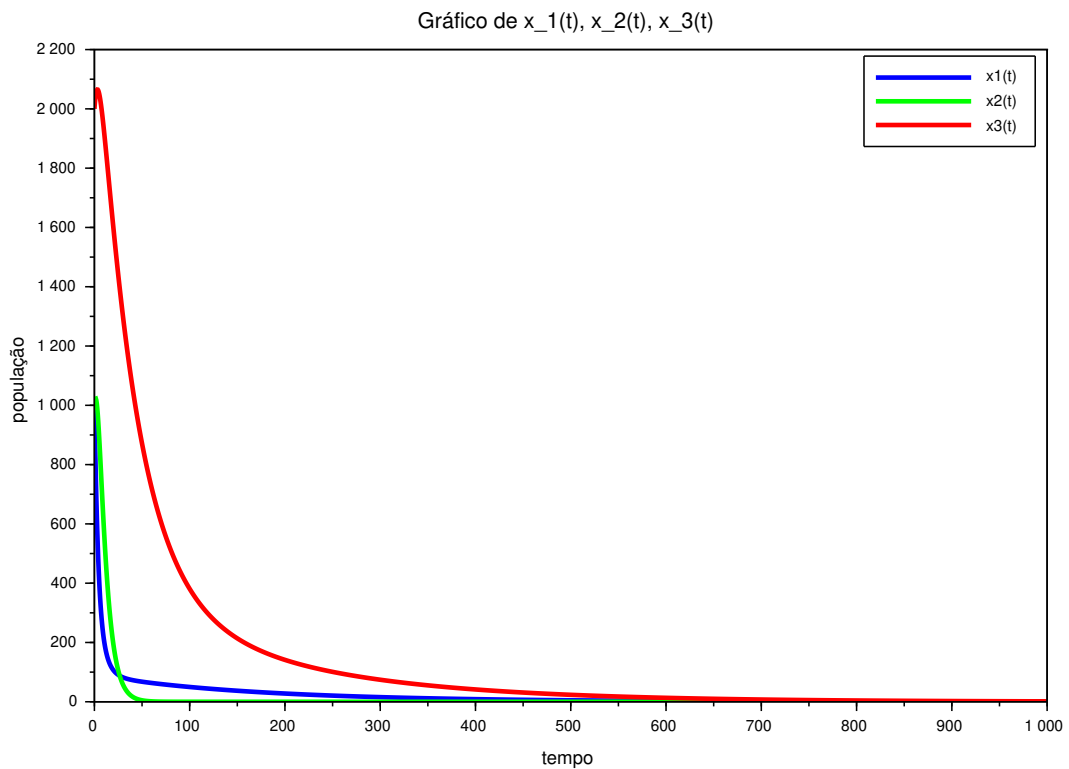


Figura 23 – Evolução das populações de ovos, ovos parasitados e larvas para $\beta = 0.130$.
 Fonte: A autora.

Agora, a condição para que o ponto de equilíbrio P_2 seja estável é que β precisa satisfazer as seguintes condições

$$0.13566 = m_1 + n_1 < \beta$$

e

$$\beta < \frac{\alpha K(m_1 + n_1)}{\alpha K - m_2 - n_2} = 0.14007\dots$$

Consideramos, portanto, na figura 24 as populações iniciais $x_1 = 100$, $x_2 = 100$ e $x_3 = 250$ e o parâmetro $\beta = 0.139$. Neste caso, podemos ver pela simulação realizada, que a população de ovos parasitados tende à extinção, e as populações de ovos e larvas vão para níveis de estabilidade positivas. Portanto as populações, nesse caso, tendem a ficar estáveis.

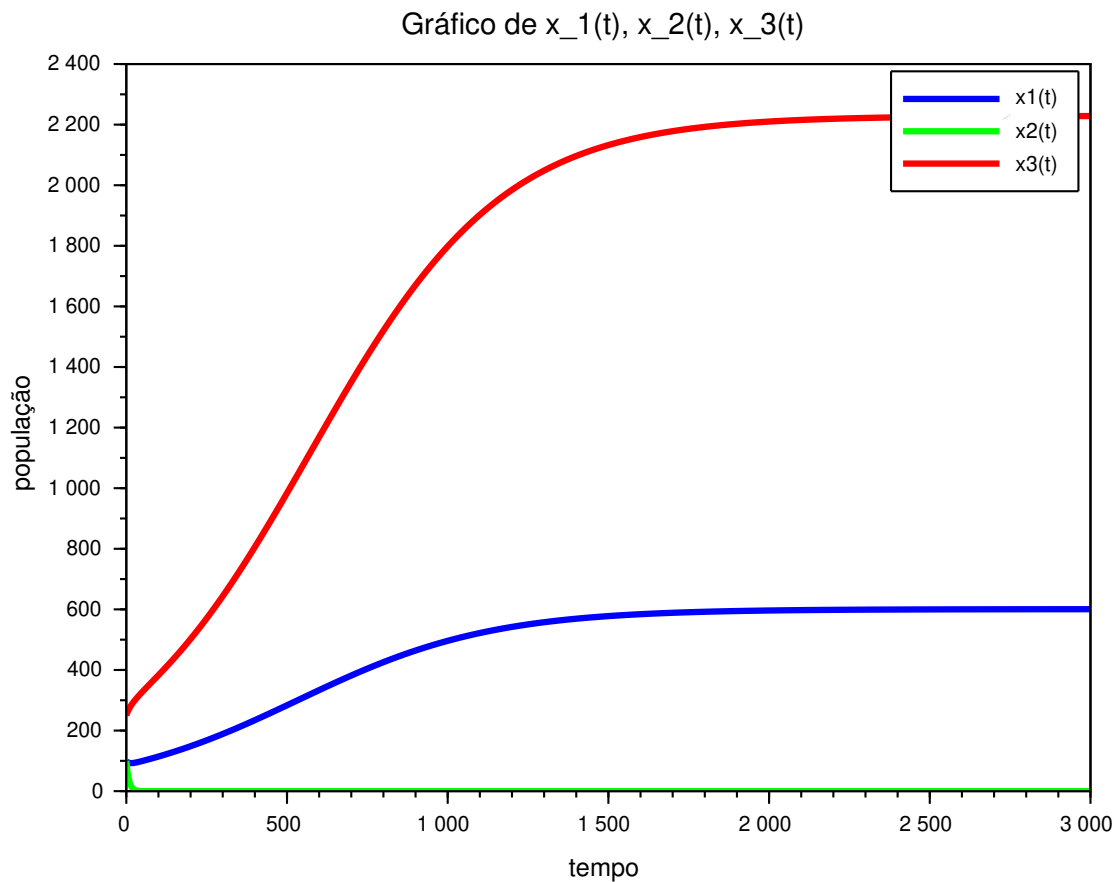


Figura 24 – Evolução das populações de ovos, ovos parasitados e larvas para $\beta = 0.139$.
Fonte: A autora.

Finalmente, pela análise feita anteriormente, vimos que para que o ponto de equilíbrio P_3 seja estável a taxa de reprodução de ovos β deve satisfazer a seguinte condição

$$\beta > \frac{\alpha K(m_1 + n_1)}{\alpha K - m_2 - n_2} = 0.14007\dots$$

A figura 25 mostra o desenvolvimento das três populações quando consideramos a taxa de reprodução de ovos $\beta = 0.1908$. Além disso, as condições iniciais consideradas para as populações foram $x_1 = 800$, $x_2 = 100$ e $x_3 = 2500$.

Observe que nessa simulação conseguimos ver que as populações de ovos, ovos parasitados e larvas oscilam, e ao passar do tempo essa oscilação diminui sua amplitude. Portanto, concluímos que ao longo do tempo essas populações tendem a atingir um equilíbrio.

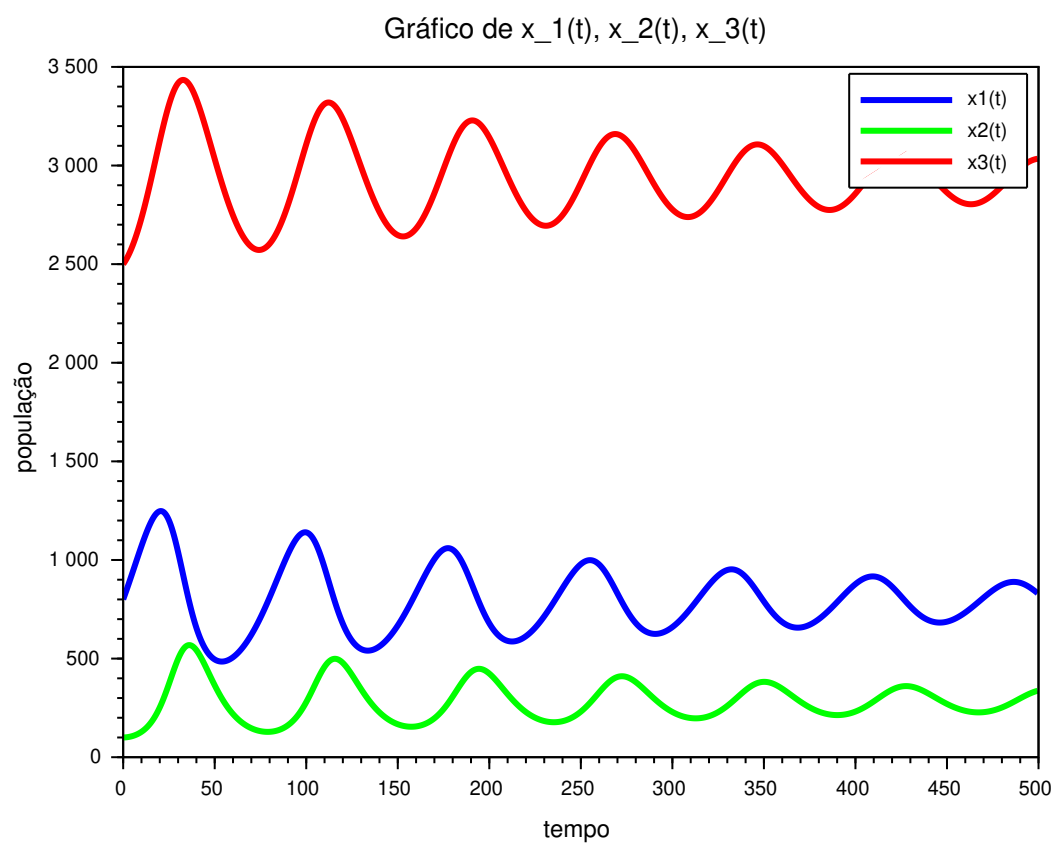


Figura 25 – Evolução das populações de ovos, ovos parasitados e larvas para $\beta = 0.1908$.
Fonte: A autora.

6 Considerações finais

A modelagem matemática tem se apresentado como uma ferramenta importante no processo da aprendizagem em matemática. Muitos são os casos em que alunos se perguntam o motivo pelo qual estão estudando Matemática, e questionam se certos conteúdos têm aplicação fora do ambiente escolar. Daí surge a importância da modelagem matemática, estratégia utilizada nesse trabalho. Juntamente com conteúdos teóricos, apresentamos um modelo matemático para um problema real, que é a infestação da praga conhecida como broca no cultivo da cana-de-açúcar.

Durante a realização deste trabalho foi constatada a importância do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de EDOs, já que com ele conseguimos comprovar sob quais condições uma equação diferencial possui solução e também conseguimos garantir que essa solução é única. Essa garantia é importante, principalmente em um sistema que simula interações reais, pois ao analisar as curvas soluções dos sistemas do último capítulo, por exemplo, não precisamos preocupar com a possibilidade de outra solução.

Também foi feito um estudo sobre sistemas autônomos, apresentando os planos de fase. É a partir desses que conseguimos analisar qualitativamente como cada uma das soluções desses sistemas se comportam e assim concluímos como cada um dos sistemas dinâmicos estudados se comportam.

No quarto capítulo introduzimos a modelagem matemática de sistemas, apresentando alguns modelos matemáticos em epidemiologia. Fizemos um breve estudo sobre os sistemas e analisamos como esses se comportam por meio dos planos de fase.

Por fim, utilizando toda a base teórica estudada, apresentamos um modelo matemático que rege a dinâmica populacional sobre as interações de uma das pragas da cana-de-açúcar com seu parasitoide. Entender a dinâmica de interação entre as populações da *Diatraea Sccharalis* e seu parasitoide *Trichogramma Galloi* por meio de uma ferramenta tão poderosa como a modelagem matemática é de extrema importância, uma vez que esse estudo pode contribuir para o sucesso do controle da praga, evitando prejuízos. Concluímos nesse capítulo que o parâmetro β é de suma importância para analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio e na figura 25, por exemplo, vimos que quando a população da praga apresenta valores maiores que a capacidade do meio seria necessário aplicar o controle biológico.

Pode-se ainda apontar que o presente trabalho foi de extrema importância para minha formação, uma vez que ao pesquisar mais a fundo sobre esse assunto foi possível descobrir como a Matemática está presente nas mais variadas áreas do conhecimento, bem como suas aplicações.

Referências

- AGROLINK. *Broca do colmo*. Agrolink, 2008. Disponível em: <https://www.agrolink.com.br/problemas/broca-do-colmo_375.html>. Acesso em: 27 mar. 2022. Citado na página 54.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. Citado na página 29.
- COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 10, 13 e 31.
- DEMITI, F. T. *Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz*. ELÉTRICA COM SCILAB, 2018. Disponível em: <<https://eletricacomscilab.blogspot.com/2018/04/criterio-de-estabilidade-de-routh.html>>. Acesso em: 15 jun. 2022. Citado na página 22.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 10, 20, 29, 41 e 43.
- FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 27, 29, 31 e 43.
- FIGUEIREDO, J. K. *Modelagem do crescimento populacional no Brasil: uma aplicação da teoria de Equações Diferenciais*. 110 p. Dissertação (Monografia em Licenciatura Matemática) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2021. Citado na página 24.
- FREIRE, R. M. et al. Mathematical modelling applied to biological control of ceratitis capitata (wiedemann) (diptera: Tephritidae), by diachasmimorpha longicaudata (ashmed) (hymenoptera: Braconidae) in citrus. *SciELO - Scientific Electronic Library Online*, SciELO, v. 34, n. 2, p. 281–289, 2005. Citado na página 8.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. 3. ed. Boston: Library of Congress, 1974. Citado na página 41.
- INOVADORES, A. *Broca da cana-de-açúcar (Diatrea sacchralis)*. AgroPos, 2020. Disponível em: <<https://agropos.com.br/pragas-da-cana-de-acucar/>>. Acesso em: 20 mar. 2022. Citado na página 53.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. Revised ed. New York: Wiley, 1979. Citado na página 10.
- LIMA, E. L. *Análise Real, volume 2: Funções de n variáveis*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.
- OLIVEIRA, D. *O parasitoide Trichogramma galloi emergindo dos ovos da Broca da cana (Diatraea saccharalis)*. Facebook:Koppert Brasil, 2018. Disponível em: <<https://www.facebook.com/KoppertBrasil/photos/o-parasitoide-trichogramma-galloi-emergindo-dos-ovos-da-broca-da-cana-diatraea-s/2446759768697889/>>. Acesso em: 20 mar. 2022. Citado na página 54.

RAFIKOV, M.; LIMEIRA, E. de H. Mathematical modelling of the biological pest control of the sugarcane borer. *International Journal of Computer Mathematics*, International Journal of Computer Mathematics, v. 89, n. 3, p. 390–401, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 62.

RANGEL, W. S. A. *Projetos de modelagem matemática e sistemas lineares: contribuições para formação de professores de matemática*. 139 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Citado na página 8.

ROSSETTO, R.; SANTIAGO, A. D. *Broca da cana-de-açúcar (Diatrea sacchralis)*. Embrapa, 2008. Disponível em: <https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/cana-de-acucar/arvore/CONTAG01_131_272200817517.html>. Acesso em: 27 mar. 2022. Citado na página 53.

SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. Citado na página 42.

XAVIER, J. *Modelo de transmissão de doenças em populações de tamanho variável*. 43 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 51.

APÊNDICE A – Código Scilab

O Scilab é um software científico gratuito para computação numérica que fornece um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas. Esse software foi utilizado para implementar o método de Runge-Kutta de quarta ordem e analisar a solução do sistema (5.1). Para isso, precisaremos implementar no software duas funções: uma para montar o sistema e outra para a execução do método em si.

Denominaremos a primeira função de $f(x, t)$ com variável dependente x e variável independente t , em que $x = (x_1, x_2, x_3)$ é dada por nosso sistema de equações (5.1). Ainda aqui, definimos as constantes K , β , α , m_1 , m_2 , m_3 , n_1 , n_2 e n_3 para cada um dos casos, como na figura 26.

```

1 function [f]=f(t,x)
2   ... k=25000;
3   ... alfa=0.0001723;
4   ... betha=0.130;
5   ... m1=0.03566;
6   ... m2=0.03566;
7   ... m3=0.00256;
8   ... n1=0.1;
9   ... n2=0.1;
10  ... n3=0.02439;
11  ... f1=betha*(1-x(1)/k)*x(1)-m1*x(1)-n1*x(1)-alfa*x(1)*x(2);
12  ... f2=alfa*x(1)*x(2)-m2*x(2)-n2*x(2);
13  ... f3=n1*x(1)-m3*x(3)-n3*x(3);
14  ... f=[f1;f2;f3];
15 endfunction

```

Figura 26 – Função f no ambiente Scilab.

Agora, definimos outra função para implementar o método de Runge-Kutta. Denominaremos essa função de r e ela vai depender do tempo inicial (t_0), tempo final (t_f), incremento (h) e a condição inicial no tempo zero (x).

Como a função f é um conjunto de equações então temos a variável x como um conjunto de números, por isso precisamos associar a quantidade de linhas ao tamanho do vetor x e para isso fazemos $X(:, 1) = x$.

Agora sim implementamos o método e definimos as inclinações de Runge-Kutta. Além disso, pelo método, temos que $X(:, i+1)$ recebe o valor de $X(:, i) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ e $t(i+1)$ passa a ser $t(i) + h$, como na figura 27.

```

1 function [r]=r(t0,x,tf,h)
2 --- t(:,1)=t0;
3 --- X(:,1)=x;
4 --- b=tf;
5 --- for i=1:b;
6 --- T(:,i)=t(:,i);
7 --- X(:,i)=X(:,i);
8 --- k1(:,i)=f(T(:,i),x(:,i));
9 --- k2(:,i)=f(T(:,i)+h/2,x(:,i)+h/2*k1(:,i));
10 --- k3(:,i)=f(T(:,i)+h/2,x(:,i)+h/2*k2(:,i));
11 --- k4(:,i)=f(T(:,i)+h,x(:,i)+h*k3(:,i));
12 --- X(:,i+1)=X(:,i)+(h/6)*(k1(:,i)+2*k2(:,i)+2*k3(:,i)+k4(:,i));
13 --- t(:,i+1)=t(:,i)+h;
14 --- end
15 --- //r=X(:,1:3);
16 --- plot(t(:,1:b),X(1,1:b),'b',t(:,1:b),X(2,1:b),'g',t(:,1:b),X(3,1:b),'r');
17 --- xtitle("Gráfico de x_1(t), -x_2(t), -x_3(t)");
18 --- xlabel('tempo');
19 --- ylabel('população');
20 --- legend('x1(t)', 'x2(t)', 'x3(t)', "in_upper_right");
21 endfunction

```

Figura 27 – Função r no ambiente *Scilab*.

Finalmente, basta salvar e executar as duas funções no ambiente inicial e chamar a função r com as suas respectivas variáveis, como na figura 28.

```

Scilab 6.1.1 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 6.1.1 Console
--> exec('C:\Users\jucch\f.sce', -1)
--> exec('C:\Users\jucch\r.sce', -1)
--> r(0, [100;100;100], 2500, 0.5)

```

Figura 28 – Execução do código no ambiente *Scilab*.