UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
COLEGIADO DO CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO - CECAU

GABRIEL SALES VELOSO

CONTROLE PDC DE UM PÊNDULO INVERTIDO REPRESENTADO POR MODELO TAKAGI-SUGENO EXATO

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Ouro Preto, 2022

GABRIEL SALES VELOSO

CONTROLE PDC DE UM PÊNDULO INVERTIDO REPRESENTADO POR MODELO TAKAGI-SUGENO EXATO

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Pablo Henrique Gonçalves

Coorientador: Prof. Regiane De Souza E Silva Ramalho

Ouro Preto
Escola de Minas – UFOP
2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

V438c Veloso, Gabriel Sales.
Controle pdc de um pêndulo invertido representado por modelo TAKAGI-SUGENO exato. [manuscrito] / Gabriel Sales Veloso. - 2022.
42 f.: il.: . + Equações e matrizes.

Orientador: Me. Pablo Henrique Gonçalves.
Coorientadora: Profa. Ma. Regiane De Souza e Silva Ramalho.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Graduação em Engenharia de Controle e Automação .

1. Sistemas difusos - Modelos Takagi-Sugeno. 2. Sistemas não-lineares - Não-Linearidade de Setor. 3. Controle PDC. 4. Linear Matrix Inequalities (LMI's). I. Gonçalves, Pablo Henrique. II. Ramalho, Regiane De Souza e Silva. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 681.5

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CONTROLE E AUTOMACAO

FOLHA DE APROVAÇÃO

Gabriel Sales Veloso

Controle PDC de um pêndulo invertido representado por modelo Takagi-Sugeno Exato

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação

Aprovada em 14 de junho de 2022

Membros da banca

Doutorando - Pablo Henrique Gonçalves - Orientador - Universidade Federal de Minas Gerais
Mestre - Regiane de Sousa e Silva Ramalho - Universidade Federal de Ouro Preto
Doutor - João Carlos Vilela de Castro - Universidade Federal de Ouro Preto
Doutorando - Diego dos Santos Carneiro - Escola de Engenharia de São Carlos

Regiane de Sousa e Silva Ramalho, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 21/06/2022

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: 3135591533 - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de me tornar uma pessoa melhor ao longo dessa jornada. Aos meus pais, Maria Helena e José wilson, á minha irmã Letícia, ao meu irmão Vitor, que sempre me apoiaram durante a trajetória acadêmica. A minha sobrinha Cecília por ser uma fonte de luz e inspiração na minha vida. Ao meu orientador Pablo, que ajudou e contribui de forma imensurável para que este projeto se concluisse, a todos amigos, da automação e os demais que fiz durante a gradução, em especial ao Patrick, que sempre me ajudou e me deu forças para concluir esse trabalho. A todos os professores que tive durante o curso, e ao DECAT, que foram solícitos sempre que tive alguma dúvida durante a realização do trabalho. A República Confraria e a todos os Confrades pelos bons momentos partilhados durante esta jornada.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.” (Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma técnica para a obtenção de um modelo nebuloso Takagi-Sugeno para o sistema não-linear. A não-linearidade de setor se torna interessante porque oferece uma representação exata do sistema não-linear em uma determinada região de estudo. Em seguida é utilizada uma técnica de controle para garantir a estabilidade do sistema. O controle por compensação paralela distribuída faz o uso das mesmas funções de pertinência, do modelo obtido, para o controlador. Por fim, um exemplo numérico é apresentado para demonstrar tais técnicas.

Palavras-chaves: Modelos Takagi-Sugeno, Não-Linearidade de Setor, Controle PDC, Estabilidade, Desigualdades Matriciais Lineares.

ABSTRACT

This paper presentes a technique to obtain a Takagi-Sugeno Fuzzy Model to a non-linear system. A non-lineability of a sector is a interesting approach because it offers a exact representation of a non-linear system in a specific study-area. Then using a control technique in necessary to ensure the system stability. The distribute paralel compensation control uses the same functions of membership, of obtained model, to the controller. Lastly a numeric example is presented to demonstrate the techniques.

Key-words: Takagi-Sugeno models, Sector Non-Linearity, PDC control, Stability, Linear Matrix Inequalities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas encontrados no dia a dia são, na maioria dos casos, não-lineares. Processos industriais de mineração, temperatura, vazão, entre outros, bem como veículos aéreos e robôs móveis, são exemplos de sistemas dinâmicos não-lineares. Tais sistemas são desafiadores devido ao fato de seu comportamento não ser previsível e periódico. A análise destes sistemas deve ser feita cautelosamente, desde a sua modelagem matemática até a execução final do projeto proposto ao sistema.

Devido a complexidade de se lidar com sistemas não-lineares, várias abordagens vêm sendo utilizadas, de modo a obter modelos lineares que representem satisfatoriamente a dinâmica do sistema não-linear. O uso de modelos lineares permite que a análise do sistema seja feita utilizando técnicas clássicas e bem definidas na literatura. Dentre as abordagens utilizadas para se obter modelos representativos, observa-se a linearização contínua do sistema em diferentes pontos de operação Teixeira e Zak (1999), a utilização de técnicas de identificação de sistemas como indicado em Aguirre (2022) além de técnicas utilizando sistemas fuzzy (TAKAGI; SUGENO, 1985).

Os sistemas fuzzy oferecem uma representação aproximada do sistema não-linear e conseguem trabalhar com incertezas associadas, visto a sua facilidade em tratar problemas subjetivos, computacionalmente. Além da obtenção de modelos fuzzy, ao longo do tempo, foram desenvolvidas também técnicas de controle de sistemas nebulosos. O controle fuzzy se iniciou com o trabalho de Mandani (1974), estimulado pelos artigos de Zadeh que apresentavam uma modelagem de sistemas utilizando regras se-então Zadeh (1996). Desde então, o foco nesta área de pesquisa vem crescendo a fim de obter melhorias para a representação e controle de modelos lineares e não-lineares.

Diversas abordagens baseadas em modelo fuzzy vêm sendo desenvolvidas. Uma abordagem utilizando o teorema de estabilidade de Lyapunov e formulações de Desigualdade Matricial Linear (LMI) apresenta uma facilidade na análise e implementação em solucionadores numéricos (BOYD et al., 1994).

1.1 Justificativa do trabalho

Como os sistemas são, na sua maioria, não-lineares, diversas técnicas para se obter modelos linearizados vêm sendo trabalhadas e discutidas para conseguir representar o sistema de maneira aproximada fazendo com que se torne viável a aplicação de técnicas de controle lineares ao sistema. A aplicação de técnicas de controle aos modelos lineares é mais comumente utilizado em relação as técnicas não lineares. Com isso, obter um modelo linear é de suma importância para o desenvolvimento do projeto. Técnicas para obter modelos lineares estão sendo trabalhadas e a análise do comportamento do sistema controlado quando aplicado a tais modelos deve ser feita para a verificação da viabilidade, estabilidade e outros requisitos de desempenho para o sistema. O trabalho consiste em obter um modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TS) que represente de maneira exata um sistema não-linear em um determinado setor. Com o modelo obtido, uma metodologia para o projeto da lei de controle é apresentada. A metodologia para o controle consiste em utilizar as mesmas funções de pertinência do modelo para o controlador, por simplicidade. As condições obtidas são derivadas de LMIs. A área de pesquisa dos modelos Takagi-Sugeno vêm crescendo como forma de se obter modelos exatos para sistemas não-lineares, de tal forma que muitas aplicações em controle estão sendo analisadas á partir destes modelos. Mesmo sendo uma abordagem mais recente, vários trabalhos obtiveram bons resultados quando aplicada tal técnica.

1.2 Objetivos geral e específicos

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento da técnica de controle por Compensação Paralela Distribuída (PDC) em um modelo Takagi-Sugeno de um sistema não-linear. Como objetivos específicos pode-se citar:

- Obter o modelo Takagi-Sugeno de um sistema não-linear;
- Analisar o comportamento do controle PDC em um sistema não-linear dado pelo seu modelo linearizado;
- Analisar os efeitos do controle aplicado em relação à norma H_∞;

1.3 Estrutura do trabalho

O trabalho será estruturado em capítulos. Este capítulo apresenta os objetivos deste trabalho e como ele está organizado, bem como a introdução, contendo uma breve contextualização sobre a técnica de controle que será utilizada durante o trabalho e como ela funciona. No Capítulo 2, são apresentados os conceitos que envolvem o trabalho no ponto de vista teórico, com intuito de embasar as escolhas realizadas durante o trabalho. A metodologia utilizada para estruturar o desenvolvimento do projeto é apresentada no Capítulo 3. Os resultados e discussões são apresentados no Capítulo 4. No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido, bem como sugestões para trabalhos futuros, em vista de comparar o modelo apresentado com outras formas de controle. Por fim, os Apêndices possuem a obtenção das condições LMIs para a abordagem do trabalho e o script desenvolvido para a obtenção dos ganhos do controlador.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Pode-se dizer que um sistema é uma disposição, conjunto ou coleção de partes conectadas que atuam e realizam um objetivo. Um sistema não se limita a algo físico, alguns sistemas são abstratos, podendo ser econômicos, biológicos, entre outros Ogata (2011). Um sistema pode ser descrito por meio de um modelo matemático, como também por meio de dados obtidos com experiências e observações.

O modelo matemático de um sistema dinâmico, pode ser representado por meio de uma equação diferencial, quando se trata de um sistema contínuo, ou equação a diferença, quando se trata de um sistema discreto. No dia-a-dia, a maioria dos sistemas são contínuos, entretanto, para que os cálculos se tornem possíveis, é necessário fazer a discretização do sistema para uma análise computacional (AGUIRRE, 2015).

Uma das maneiras de se obter as equações diferenciais que constituem um modelo matemático para o sistema, é classificá-lo em três tipos, de acordo com as informações que possuímos sobre cada sistema. Os três tipos de classificação são: modelagem em caixa branca, modelagem em caixa cinza, e modelagem em caixa preta.

A modelagem em caixa branca, considera as leis e princípios físicos e químicos do sistema, podendo ser chamada de modelagem pela física ou conceitual, portanto, suas estruturas são ajustadas, à partir de informações conhecidas, esse tipo de modelagem não é muito utilizada, pois há uma dificuldade em equacionar os fenômenos envolvidos, além do tempo necessário para modelar este tipo de sistema (AGUIRRE, 2015).

A modelagem em caixa preta, também conhecida como modelagem empírica, é a mais utilizada, para este tipo de modelagem, pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema é necessário. Nesse modelo, apenas dados de entrada e saída do sistema são usados durante a identificação, procurando descrever as relações de causa e efeito entre essas variáveis. Este tipo de modelagem é aplicado quando o sistema em si é muito complexo, ou quando não é possível obter os dados de respostas relacionando a evolução temporal das variáveis em estudo (AGUIRRE, 2015).

A modelagem em caixa cinza, consiste em uma junção dos dois tipos de modelagem anteriormente citados, considera as variáveis de entrada e saída do sistema, além de informações auxiliares, conhecidas do sistema (AGUIRRE, 2015).

2.1 Representação de sistemas

Existem várias maneiras de representar os sistemas, entre elas, a representação por meio da função de transferência e a representação por espaço de estados. A representação por função de transferência pode ser obtida por meio da transformada de Laplace dos sinais de entrada e saída do sistema, para condições iniciais nulas. Esta função permite separar a entrada do sistema e a saída em partes diferentes e distintas, no sentido de que expressa a equação diferencial que relaciona a variável de saída com respeito às variáveis de entrada. Diferentemente do que ocorre com a equação diferencial. Caso a resposta seja contínua no tempo, a função de transferência $H(s)$ é obtida pela transformada de Laplace, porém se a resposta ao impulso for discreta no tempo, a função de transferência é obtida pela transformada Z (OGATA, 2011). A abordagem utilizada para esse trabalho é feita em espaço de estados, também conhecida por abordagem moderna ou no domínio do tempo. Como afirmado por Nise e Silva (2002), esse tipo de abordagem possui diversas vantagens, tais como:

- Esta abordagem é utilizada em conjunto com técnicas avançadas de controle;
- possibilita a modelagem de sistemas variantes no tempo;
- Esta abordagem é aplicável em sistemas não lineares;
- Possui softwares e métodos computacionais que solucionam de uma forma mais simples problemas modelados em espaço de estados.

Algumas das características de uma função de transferência são apontadas em : Ogata (2011)

- A função de um sistema é um modelo matemático que resulta em um método operacional para expressar a equação diferencial que relaciona a variável de saída à variável de entrada;
- A função de transferência é uma propriedade pertencente ao sistema, ou seja, não depende da magnitude e da natureza da função de entrada ou de excitação;
- A função de transferência não informa nenhuma característica relativa à estrutura física do sistema;
- Conhecendo a função de transferência de um sistema, a saída ou a resposta poderá ser estudada para várias maneiras de entrada, visando ao entendimento da natureza do sistema;

Uma forma de representação comum da função de transferência é a representação por diagrama de blocos, a Figura 1 corresponde a representação do diagrama de blocos de uma função de transferência, em que a entrada do sistema se encontra à esquerda, representada por $X(s)$, e a saída do sistema se encontra à direita, representada por $Y(s)$. Para um sistema linear e invariante no tempo, essa função de transferência é a relação da transformada de Laplace da saída, que também pode ser chamada de função resposta, para a transformada de Laplace da entrada, que também pode ser dita como função de excitação, considerando nulas todas as condições iniciais (OGATA et al., 2010).

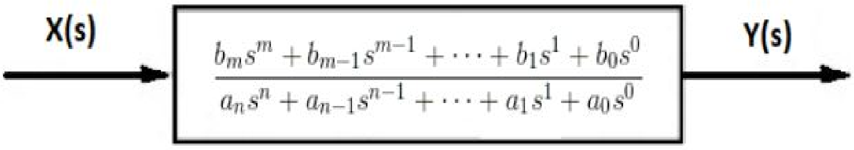

Figura 1 – Representação da Função De Transferência por Diagrama de Blocos.

Fonte: (NISE; SILVA, 2002)

2.2 SLIT-Sistemas Lineares e Invariantes no tempo

Um sistema é dito linear se for válido o princípio da superposição generalizado, ou seja, a resposta do sistema à uma combinação linear de duas entradas x_1, x_2 é uma combinação linear das saídas y_1, y_2.

Pode-se dizer que um sistema é dito invariante no tempo se um retardo (ou avanço) de tempo do sinal de entrada resulta em um deslocamento de tempo idêntico no sinal de saída. Portanto, em qualquer tempo aquele sistema possui as mesmas características e comportamento, sendo assim, em qualquer momento que for realizado um determinado experimento com esse sistema, os resultados obtidos deverão ser os mesmos (OPPENHEIM; SCHAFER, 2013).

Os sistemas que apresentam ambas as características de linearidade e invariância no tempo são denominados de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo – SLIT’s.

2.3 Espaço de estados

A representação em espaço de estados, consiste em escrever o sistema em função dos estados, utilizando a representação em forma de vetores, sendo eles : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ um vetor de estados, $u(t)$ vetor de entradas e $y(t)$ um vetor de saídas, as matrizes A, B, C, D são matrizes do sistema com dimensões apropriadas. Esta representação facilita a visualização da dinâmica de um sistema de ordem n usando n equações diferenciais de primeira ordem Oppenheim e Schafer (2013). Esta representação é mais adequada para sistemas não lineares e multivariáveis, pois relaciona as variáveis internas do sistema descrevendo-o no domínio do tempo. A representação de um sistema linear e invariante no tempo em espaço de estados é feita pela Equação 2.1:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{2.1}$$

Duas observações em relação à representação de um sistema em espaço de estados, devem ser feitas: Aguirre (2022).

- O conhecimento do vetor de estado em qualquer instante t_0 especifica o estado ou condição do sistema nesse instante;
- É possível que o mesmo sistema seja representado por mais de um modelo.

2.4 Modelo Takagi-Sugeno

Um sistema não-linear descrito através da metodologia fuzzy Takagi-Sugeno (TS) pode ser representado pelas regras fuzzy: Se-Então. Este conjunto de regras representa localmente as relações lineares entre a entrada e a saída do sistema não-linear. Para um conjunto de variáveis premissas, estabelece que a dinâmica do sistema não-linear pode ser representada por um modelo linear. O modelo fuzzy Takagi-Sugeno para um sistema não-linear de tempo contínuo pode ser descrito por:

$$Regra \quad R_i: \; Se \;\; z_1(t) \in \mathscr{M}_1^i \;\; e \; ... \; e \;\; z_p(t) \in \mathscr{M}_p^i$$
$$Entao \;\; \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \end{cases}$$

Em que R_i denota a i-ésima regra de inferência fuzzy, $\mathscr{M}_j^i$ com $i \in \Omega_r$ e $j \in \Omega_p$ são o conjunto fuzzy e A_i, B_i, C_i e D_i são as matrizes de espaço de estados de dimensões apropriadas do i-ésimo modelo local. As varáveis premissas podem ser funções das variáveis de estado, de distúrrbios externos ou do tempo. O vetor de variáveis premissas é definido por $z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & \cdots & z_p(t) \end{bmatrix}$. Utilizando o centro de gravidade, (que consiste em encontrar um ponto que representa o centro de gravidade do conjunto agregado difuso em um dado intervalo). Como método de defuzzificação, o modelo fuzzy pode ser representado na forma compacta por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{2.2}$$

Em que as funções de pertinência normalizadas $h_i(z)$ são definidas como:

$$h_i(z) = \frac{\omega_i(z)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(z)} \tag{2.3}$$

$$\omega_i(z) = \prod_{j=1}^{p} \mu_j^i(z_j), \quad i \in \Omega_r \tag{2.4}$$

As funções de pertinência das variáveis premissas nos respectivos conjuntos fuzzy $\mathscr{M}_j^i$ são dadas como $\mu_j^i(z_j)$. As funções de pertinência normalizadas satisfazem as propriedades de soma convexa:

$$0 \leq h_i(z) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{r} h_i(z) = 1, \quad \sum_{i=1}^{r} \dot{h}_i(z) = 0 \tag{2.5}$$

Existem várias estratégias para se obter um modelo TS de um sistema não-linear, como por exemplo, por técnicas de identificação de sistemas Takagi e Sugeno (1985), Papadakis e Theocharis (2002) ou por linearizações sucessivas em torno de diferentes pontos de operação Teixeira e Zak (1999), contudo, a técnica mais comumente utilizada para se obter modelos TS exatos dentro de um domínio de análise compacto é o método da não-linearidade de setor Wang e Tanaka (2004). A não-linearidade de setor é uma técnica que permite encontrar uma representação exata, num domínio compacto, para um sistema não-linear.

2.4.1 Não-linearidade de setor em função escalar

Em uma determinada função escalar não-linear, procura-se um setor, dentro do domínio desejado, de modo que:

$$f(x) \in \begin{bmatrix} a^1 & a^2 \end{bmatrix} x \tag{2.6}$$

Pode-se calcular

$$a^1 = max(g(x)) \qquad a^2 = min(g(x)) \tag{2.7}$$

Se for possível reescrever a função como

$$f(x) = g(x)x \tag{2.8}$$

Deste modo, pode-se reescrever a função como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2} w^i a^i x \tag{2.9}$$

e encontrar as funções de pertinência w^i como:

$$w^1 = \frac{g(x) - a^2}{a^1 - a^2} \qquad w^2 = \frac{g(x) - a^1}{a^2 - a^1} \tag{2.10}$$

As funções de pertinência são tais que $w^i \geq 0, \ \ \forall i$ e $\sum_{i=1}^{2} w^i = 1$ e, portanto, são vistas como funções de pertinência normalizadas (KING; MAMDANI, 1977).

2.4.2 Não-linearidade de setor em sistemas dinâmicos

De modo a obter um modelo TS para um sistema dinâmico, o mesmo procedimento é aplicado e por fim, combina-se as funções de pertinência encontradas utilizando o produto.

Se o sistema não-linear puder ser representado por uma representação quasi-LPV (qLPV), tal que:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x)x + B(x)u \\ y(t) &= C(x)x + D(x)u \end{aligned} \tag{2.11}$$

Esta representação não é única e pode influenciar nos resultados obtidos. Após obter o modelo em representação qLPV, seleciona-se as não-linearidades diferentes que compõem o modelo e o procedimento é realizado do mesmo modo que para os casos de funções escalares, de acordo com os máximos e mínimos das não-linearidades. Desta forma, o modelo (2.2) é obtido (WANG; TANAKA, 2004).

Tal representação se assemelha com a representação politópica para sistemas incertos, a diferença se dá na matriz de peso correspondente a cada regra/vértice do politopo, que neste caso é conhecida. A matriz de peso correspondente é obtida agregando as funções de pertinência correspondentes a cada conjunto nebuloso, por meio da operação do produto (WANG; TANAKA, 2004).

2.5 Sistemas de controle

Para o Nise e Silva (2002), "Um sistema de controle é composto por um subsistema e um processo elaborados com a finalidade de alcançar um resultado desejado com um desempenho desejado, dado uma entrada específica". Para obter a saída desejada, adiciona-se um componente ou conjunto de componentes que tratam da entrada e/ou saída. Como a resposta desejada do sistema é conhecida, é gerado um sinal proporcional ao erro entre a resposta desejada e a resposta real. Por meio dos controladores, é possível melhorar a acurácia de determinadas aplicações em que o manuseio de determinados equipamentos e o ajuste manual dessa acurácia seriam quase impossíveis. Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com sua configuração: sistema de malha aberta e sistema de malha fechada.

2.5.1 Sistemas de Malha Aberta

Um sistema de controle em malha aberta opera sem retroação, e gera diretamente a saída em resposta a um sinal de entrada a partir de um controlador ou atuador de controle que age diretamente no processo. Sendo assim este tipo de controle não consegue compensar perturbações adicionais do sistema. O dispositivo de atuação, ou controlador possui apenas a capacidade de manipular a variável de entrada (DORF; BISHOP, 2009).

Na Figura 2 há a representação de um exemplo de um sistema de controle em malha aberta.

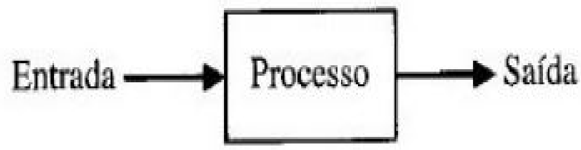

Figura 2 – Sistema De controle em Malha Aberta.

Fonte: (DORF; BISHOP, 2009).

Um sistema de controle em malha aberta possui algumas características e vantagens específicas, sendo elas Ogata (2011):

- Simples de se construir e possuem fácil manutenção;
- Um distúrbio ou uma mudança na calibração irá causar erros.

Algumas desvantagens do sistema de controle em malha aberta :

- É necessária uma regulagem periódica, para manter a qualidade requerida do sinal de saída;
- Possui menor custo em relação a um sistema correspondente de malha fechada;
- Considera-se que a estabilidade é uma característica existente no sistema;
- É o ideal quando o sistema apresenta dificuldades na medida da saída, ou quando essa medição é economicamente inviável.

2.5.2 Sistemas de Malha Fechada

Um sistema de controle em malha fechada, usa uma medida do sinal de saída e a comparação com a saída desejada, para gerar um sinal de erro que é aplicado ao atuador. Este sistema possui como finalidade corrigir as alterações e erros causadas pelos distúrbios. Essa correção é feita pois este sistema de controle possui uma realimentação, que é realizada através de um instrumento de medição, esse sinal de saída, é comparado novamente com o sinal de entrada, caso haja uma discrepância entre as respostas, o controlador envia um sinal de atenuação para realizar as correções que se fizerem necessárias Dorf e Bishop (2009). Na Figura 3 temos um sistema de controle em malha fechada.

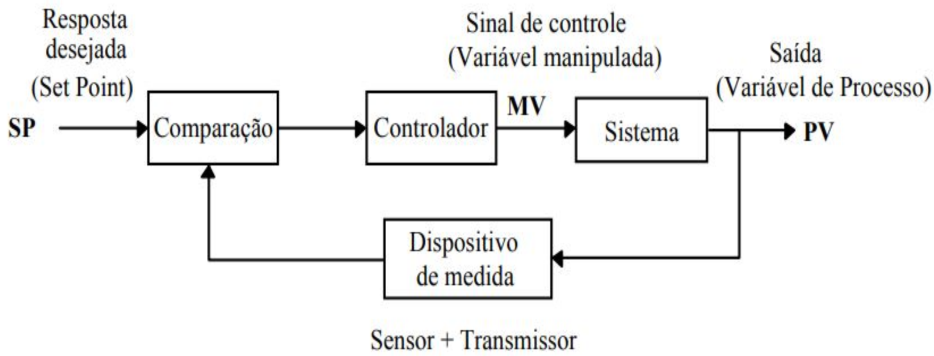

Figura 3 – Sistema De Controle em Malha Fechada.

Fonte: (DORF; BISHOP, 2009).

2.6 Projeto de Sistemas De Controle

Para que seja possível realizar o projeto de um controlador para um sistema de controle, é necessário primeiramente, obter a configuração, as especificações e a identificação dos principais parâmetros do sistema proposto Ogata et al. (2010). Para que isso ocorra, se faz necessário definir qual é a finalidade, o objetivo do sistema que será controlado. Em seguida precisa-se identificar quais serão as variáveis do processo que serão controladas, feito isso, deve-se determinar as especificações em termos de exatidão que devem ser alcançados. Posteriormente deve-se projetar o controlador, e por fim fazer o ajuste dos parâmetros, para que se possa obter o resultado desejado.

2.7 Desigualdades Matriciais Lineares

As desigualdesdes matriciais lineares, ou LMIs são ferramentas matemáticas amplamente empregadas em teoria de controle, devido suas vantagens e também pela capacidade de serem resolvidas numericamente de modo eficiente e permitirem a incorporação de restrições adicionais como incertezas. Uma definição importante para que se possa compreender as LMIs é o conceito de matrizes positivas definidas. Assim, uma matriz quadrada e real P é dita positiva definida se, e somente se :

$$x^T Px > 0,\ \forall x \neq 0,\ P \in \mathbb{R}^{n\,x\,n},\ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

Geralmente é utilizado a notação $P > 0$ para indicar que P é definida positiva.

Uma LMI é uma desigualdade da forma : (BOYD et al., 1994)

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i > 0 \tag{2.13}$$

em que $x \in R^n$ é uma variável vetorial e $Fi = F_i' \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}, i = 0, 1, 2.....n$ são conhecidas Boyd et al. (1994). Observa-se que a LMI 2.13 é uma restrição convexa em x, ou seja, o seu conjunto solução $x/F(x) > 0$ é convexo, essa característica é fundamental, pois permite a utilização de algoritmos apropriados para resolver esse tipo de problema de forma bastante eficiente. A desigualde em 2.13 pode apresentar uma ampla variedade de restrições convexas em x, como a desigualdade de Lyapunov, que é um exemplo de LMI com váriável matricial da seguinte forma :

$$A'P + PA < 0, \tag{2.14}$$

Sendo P definida positiva, $(P > 0)$. Seja dada uma LMI o problema associado a ela consiste em calcular a variável matricial P, tal que a desigualdade é satisfeita.

2.7.1 Análise de estabilidade Segundo Lyapunov

Considere o sistema dinâmico linear autônomo da forma Aguirre (2022) :

$$\dot{x} = Ax(t) \tag{2.15}$$

Sendo que, $x \in \mathbb{R}^n$ e, $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$.

A matriz A é assintoticamente estável se, e somente se, o limite de $x(t)$ quando t tende ao infinto for nulo para uma condição inicial arbitrária, ou seja

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \tag{2.16}$$

Para o caso de um sistema contínuo, A é assintoticamente estável se todos os autovalores do sistema estiverem no semiplano esquerdo do plano complexo, ou seja, se a parte real de todo os seus autovalores for menor que zero. Um método para se verificar a estabilidade de um sistema é por meio da função de Lyapunov, seja 2.15 a matriz A é assintoticamente estável pela condição de Lyapunov se existir :

$$\begin{gathered} v(x) > 0, \forall x \neq 0 \\ \dot{v}(x) < 0, \forall x \neq 0 \end{gathered} \tag{2.17}$$

Sendo $v(x) = x'Px > 0$, para P simétrica e definida positiva $(P = P' > 0)$, por 2.17, tem-se que :

$$\begin{gathered} \dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} < 0 \\ = (Ax')Px + x'PAx < 0 \\ = x'A'Px + x'PAx < 0 \\ = x'(A'P + PA)x < 0 \Leftrightarrow A'P + PA < 0 \end{gathered} \tag{2.18}$$

Dessa forma, para verificar se o sistema contínuo representando por 2.15 é estável, encontra-se uma solução viável para o seguinte conjunto de LMIs :

$$\begin{aligned} P = P' > 0 \\ A'P + PA < 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.8 Sistemas de Controle Robusto

Frequentemente o modelo do sistema, pode ser não-linear, e é possível que tenha parâmetros distribuídos, fazendo com que sua análise se torne mais díficil. Portanto, é desejável fazer uma aproximação por meio de uma equação linear de coeficientes constantes que irá proporcionar uma aproximação boa do objeto real no ponto de operação. O controle robusto possui como objetivo principal garantir o desempenho do sistema, superando essa diferença entre o modelo do objeto real. Pressumindo que se possa obter um modelo que se aproxima de modo satisfatório do sistema real, precisa-se obter um modelo simplificado, com o objetivo de projetar um sistema de controle que requer um compensador da menor ordem possível. Dito isso, o modelo do objeto de controle provavelmente incluirá um erro no processo de modelagem, para ter-se a certeza de que o controlador irá funcionar de maneira satisfatória para a planta original. A teoria do controle robusto foi desenvolvida por volta de 1980 (OGATA et al., 2010).

Sistemas projetados com base na teoria do controle robusto possuem as seguintes propriedades :

- Estabilidade Robusta : O sistema de controle projetável é estável na presença de distúrbios.
- Desempenho Robusto : O sistema de controle manifesta características de resposta predeterminadas na presença de distúrbios.

2.9 Linearização

Segundo Dorf e Bishop (2009) para entender o funcionamento e controlar um sistema complexo, deve-se obter um modelo matemático quantitativo desse sistema. Como os sistemas são dinâmicos por natureza, as equações que os descrevem são naturalmente equações diferenciais. Como os sistemas em sua maioria são não-lineares, eles possuem um tratamento matemático bastante complexo, por este motivo busca-se aproximar o sistema de um modelo matemático linear, para isso busca-se um ponto de operção x_0, y_0, no qual o sistema se comporta dessa forma, desde que sejam aceitas pequenas variações em torno desse ponto. Sendo assim é feita a linearização deste sistema, aproximando o modelo de um sistema linear.

Quando $x(t) = x0 + \Delta x(t)$ e $y(t) = y0 + \Delta y(t)$, tem-se :

$$y(t) = mx(t) + b \tag{2.20}$$

ou

$$y_0 + \Delta y(t) = mx_0 + m\Delta x(t) + b \tag{2.21}$$

Dadas satisfeitas as devidas condições de continuidade em torno do ponto de operação, pode-se utilizar a expansão em Série de Taylor para encontrar um sistema que seja linear e, satisfatoriamente próximo do original, com isso pode-se realizar a análise de características como polo, estabilidade entre outros Alves (2018). A série de Taylor pode ser expressa da seguinte forma :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^k(a)\frac{(x-a)^k}{k!} \tag{2.22}$$

Representando $y(t)$ em função de $x(t)$ e aplicando a expansão em Série de Taylor, tem-se a equação linearizada podendo ser reescrita como:

$$y(t) - y_0 = m(x(t) - x_0)$$

ou

$$\Delta y(t) = m\Delta x(t) \tag{2.23}$$

2.10 Técnicas de controle

A escolha do tipo de técnica de controle a ser utilizada, deve ser realizada tendo como base a natureza da planta e as condições de operação, alguns elementos como segurança, custo, disponibilidade, confiabilidade, precisão, peso e tamanho também são levados em conta para a escolha do modelo de controlador ideal a ser feito (OGATA, 2011).

2.11 Controle PDC

Diferentes esquemas de controle de realimentação (estado ou saída) podem ser aplicados aos modelos fuzzy TS. A lei de controle mais comumente usada é baseada no chamado conceito de compensação paralela distribuída (PDC), para o qual o controlador fuzzy compartilha as mesmas regras e conjuntos que o modelo fuzzy TS. Como resultado, um controlador PDC é obtido a partir de uma combinação convexa dos ganhos de realimentação local linear e as funções de pertinência do modelo fuzzy TS, dentro da estrutura de controle baseada em LMI.

Considere a lei de controle PDC dada por

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} h_j(z) K_j x(t) \tag{2.24}$$

Então, o sistema TS em malha fechada pode ser obtido, tal que:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(z) h_j(z) (A_i + B_i K_j) x(t) \tag{2.25}$$

O resultado básico é baseado na função de Lyapunov quadrática ($P > 0$), tal que, para a análise de estabilidade de malha fechada a sua derivada no tempo, ao longo da trajetória, deve ser negativa, ou seja, $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$, o que resulta em:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(z) h_j(z) He[(A_i + B_i K_j)^T P] < 0 \tag{2.26}$$

Sendo $He(X) = X^T + X$. O resultado acima é expresso em termos de desigualdades matriciais bilineares, devido ao acoplamento entre as matrizes de Lyapunov (P) e os ganhos do controlador (K_j). Aplicando uma transformação de congruência, com $X = P^{-1} > 0$ obtém-se a LMI equivalente:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(z) h_j(z) He[A_i X + B_i Y_j] < 0 \tag{2.27}$$

Então, a lei de controle PDC (2.24) estabiliza assintoticamente o sistema TS com $K_j = Y_j X^{-1}, \quad \forall\, j \in \Omega_r$.

Uma consequência direta de compartilhar as mesmas funções de pertinência para o controle PDC e o sistema fuzzy TS é que aparecem somas convexas duplas.

2.11.1 Especificações de desempenho

Ao analisar o desempenho de um controlador, é preciso avaliar as especificações de desempenho, que são as condições necessárias de um sistema de controle. Essas especificações são geralmente indicadas em termos de resposta transitória e estacionária. Segundo Ogata (2011) para comparar as características da resposta transitória, utiliza-se condições iniciais nulas.

A seguir serão apresentadas duas normas de sistemas, a norma H_∞ é uma norma induzida, ou seja, vê o sistema como operador, dessa forma, essa norma transforma os sinais de entrada em sinais de saída. A norma H_2, vê o sistema como um conjunto de sinais a partir da sua resposta ao impulso.

A norma H_∞ é um critério de desempenho associado à robustez do sistema às perturbações externas. Então a norma H_∞ é indicada se o objetivo do projeto é ter um sistema menos suscetível a ruídos do tipo w pertencente a L_2, em que L_2 corresponde ao espaço de funções quadraticamente integráveis no caso contínuo. Matematicamente a norma H_∞ está associada ao cálculo do valor singular da sua resposta em frequência (correspondendo ao pior caso para todas as frequências). Como ela tende a minimizar a relação entre o vetor de saída e o vetor de entrada ruidosa para todas as diferentes frequências, ela é um bom critério para rejeição de distúrbios.

Matematicamente, para um sistema contínuo precisamente conhecido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \tag{2.28}$$

com função de transferência:

$$H(s) = C(sl - A)^{-1}B + D \tag{2.29}$$

e valores singulares dados por :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(H(jw)H(jw))} \tag{2.30}$$

a norma H_∞ é definida como:

$$\|H(s)\|_\infty = \underset{w}{max}\,\overline{\sigma}(H(jw)) \tag{2.31}$$

Com isso conclui-se que a norma H_∞ é definida como o maior ganho que o sistema pode aplicar sobre um sinal, e que esse valor corresponde ao valor de pico da resposta em frequência do sistema.

Em contraste, a norma H_2, opera na resposta ao impulso no sistema, sendo assim, a norma H_2 é um critério de desempenho associado com a velocidade de convergência ou energia gasta por um sistema para alcançar seu ponto de equilíbrio. Por conta disso, essa norma é muito comum quando trata-se de LMIs. Matematicamente, para um sistema tradicional, precisamente conhecido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.32}$$

com função de transferência dada por :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{2.33}$$

e resposta ao impulso dada por:

$$h(t) = \begin{Bmatrix} C^{At}B & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{Bmatrix} \tag{2.34}$$

a norma H_2 é definida matematicamente por :

$$\begin{array}{r} \|H(s)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} Tr(H(s)^T H(s))dt} \\ \|H(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\Pi}\int_{-\infty}^{\infty} Tr(H(jw)^* H(jw))dw} \end{array} \tag{2.35}$$

em que $(H(jw)^*)$ representa a matriz conjugada transposta de $G(jw)$.

3 METODOLOGIA

Aborda-se neste capítulo a metodologia aplicada no trabalho, bem como todos os cálculos e modelagem do sistema estudado. Existem diversos meios de se obter matematicamente a dinâmica de um sistema. Neste capítulo, empregando a abordagem Newton-Euler, é formalizada a modelagem matemática do sistema carro-pêndulo, sendo assim, obtém-se suas equações e representação em LMI'S.

3.1 Descrição do Problema

Para este trabalho, estudou-se o sistema pêndulo invertido, que é composto por um trilho onde corre um carrinho e, neste carrinho é fixada uma haste com um peso na sua extremidade e o objetivo é equilibrar este peso ortogonalmente em relação ao trilho. Foi obtido um modelo teórico para o sistema carro-pêndulo, mostrado na Figura 4 aplicando a abordagem dinâmica de Newton-Euler.

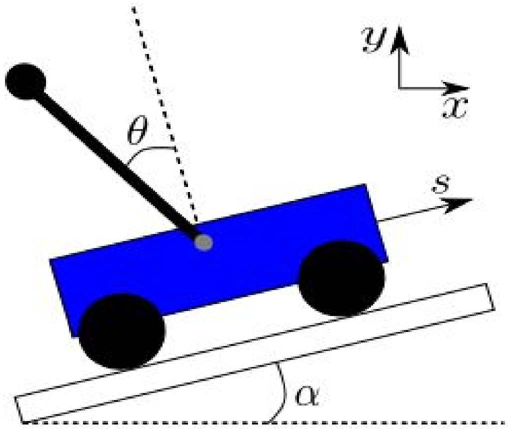

Figura 4 – Sitema Carro-Pêndulo.

Fonte: (DORF; BISHOP, 2009)

3.1.1 Modelagem

Para esta modelagem, considerou-se um pêndulo invertido sobre um carrinho que está preso sobre um trilho cuja inclinação é fixa. A distância percorrida pelo carrinho no trilho é descrita por s. O ângulo de rotação do pêndulo em relação à haste, é descrito por θ, enquanto a inclinação do trilho em relação ao plano inclinado no ponto atual é descrita por α. Considera-se que a massa do carrinho é dada por $M = 1,5kg$, a massa do pêndulo é dada por $m = 0,3kg$, a aceleração da gravidade é dada por $g = 9,78m/s^2$, a distância entre o centro de gravidade do pêndulo e o seu ponto de rotação é dada por $l = 0,3m$. Usando a segunda lei de Newton para o carrinho.

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x}) = Fcos(\alpha) - R_x + N_x \tag{3.1}$$
$$\frac{d}{dt}(M\dot{y}) = Fsen(\alpha) - Mg - R_y + N_y \tag{3.2}$$

Com F uma força aplicada no carrinho no sentido do trilho, Rx e Ry as forças de reação na junta que liga o pêndulo ao carrinho, e Nx e Ny a força normal do trilho em relação ao carrinho. Como a força normal de reação do trilho acontece apenas devido ao peso do carrinho e do pêndulo, tem-se que :

$$\begin{gathered} N = (M+m)gcos(\alpha) \\ N_x = (M+m)gsen(\alpha)cos(\alpha) \\ N_y = (M+m)gcos(\alpha)^2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Considerando que cada ponto do plano xy pode ser unicamente determinado como uma função da posição s do carrinho no trilho, obtém-se que :

$$\begin{gathered} \tfrac{dx}{ds} = cos(\alpha) \\ \tfrac{dx}{ds} = sen(\alpha) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Ao substituir 3.4 em e 3.3 tem-se :

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x}) = \frac{d}{dt}(M\dot{s}\cos(\alpha)) = Mcos(\alpha)\ddot{s} \tag{3.5}$$
$$\frac{d}{dt}(M\dot{y}) = \frac{d}{dt}(M\dot{s}(\alpha)) = Msen(\alpha)\ddot{s} \tag{3.6}$$

A posição do centro de massa do pêndulo pode ser escrita, no referencial inercial, como :

$$\vec{r_p} = \begin{bmatrix} x(s) & -lsen(\alpha+\theta) \\ y(s) & +lcos(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

de modo que a velocidade pode ser escrita como :

$$\vec{r_p} = \begin{bmatrix} \dot{x}(s) & -lcos(\alpha+\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}(s) & -lsen(\alpha+\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r_p} = \begin{bmatrix} \dot{s}cos(\alpha) & -lcos(\alpha+\theta)\dot{\theta} \\ \dot{s}sen(\alpha) & -lsen(\alpha+\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

e sua aceleração pode ser escrita como :

$$\vec{r}_p = \begin{bmatrix} \ddot{s}cos(\alpha) & -lcos(\alpha+\theta)\dot{\theta} & -lcos(\alpha+\theta)\ddot{\theta} \\ \ddot{s}sen(\alpha) & -lsen(\alpha+\theta)\dot{\theta} & -lsen(\alpha+\theta)\ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

Mas, pela segunda lei de Newton aplicada no pêndulo, tem-se :

$$m\ddot{\vec{r}}_p \begin{bmatrix} R_x \\ R_y - mg \end{bmatrix}$$

Ao agrupar todas as equações anteriores, obtém-se:

$$\begin{gathered} Mcos(\alpha)\ddot{s} = Fcos(\alpha)(M+m)gsen(\alpha)cos(\alpha) - R_x \\ Msen(\alpha)\ddot{s} = Fsen(\alpha) - Mg + (M+m)gcos^2(\alpha) - R_y \\ mcos(\alpha)\ddot{s} + mlsen(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - mlcos(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = R_x \\ msen(\alpha)\ddot{s} - mlcos(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - mlsen(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = R_y - mg \end{gathered} \tag{3.7}$$

Somando a primeira equação de 3.7 com a terceira, e a segunda equação com a quarta (para eliminarmos Rx e Ry), tem-se :

$$\begin{gathered} (M+m)cos(\alpha)\ddot{s} + mlsen(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - mlcos(\alpha+\theta) = Fcos(\alpha) - (M+m)gsen(\alpha)cos(\alpha) \\ (M+m)sen(\alpha)\ddot{s} - mlsen(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - mlsen(\alpha+\theta) = Fsen(\alpha) - (M+m)gsen^2(\alpha) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Multiplicando a primeira equação por $cos(\alpha)$ e a segunda equação por $sen(\alpha)$ e somando as duas, obtém-se:

$$(M+m)\ddot{s} + mlsen(\theta)\dot{\theta}^2 - mlcos(\theta)\dot{\theta}^2 = F - (M+m)gsen(\alpha) \tag{3.9}$$

Voltando às equações do pêndulo, tem-se :

$$\begin{gathered} mcos(\alpha)\ddot{s} + mlsen(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - mlcos(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = R_x \\ msen(\alpha)\ddot{s} - mlcos(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - mlsen(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = R_y - mg \end{gathered} \tag{3.10}$$

Multiplicando a primeira equação por $lcos(\alpha+\theta)$, e a segunda por $lsen(\alpha+\theta)$ e somando as duas, tem-se :

$$mlcos(\theta)\ddot{s} - ml\ddot{\theta} = l(R_xcos(\alpha+\theta) + R_ysen(\alpha+\theta)) - mglsen(\alpha+\theta) \tag{3.11}$$

É possível se mostrar que as forças de reação do pêndulo são tais que, considera-se que a força aplicada sobre o carrinho possui duas componentes, uma força de atrito viscoso sobre o carrinho e uma força externa que servirá como sinal de controle. De forma que pode-se escrever $F = u \ - kvs$

$$R_x cos(\alpha + \theta) + R_y sen(\alpha + \theta) = 0 \tag{3.12}$$

E pode-se escrever a dinâmica como :

$$\begin{bmatrix} M+m & -mlcos(\theta) \\ -mlcos(\theta) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mlsen(\theta)\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{bmatrix} (M+m)gsen(\alpha) \\ -mglsen(\alpha+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - k_v\dot{s} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

3.1.2 Modelo TS por não-linearidade de setor

Inicialmente é necessário obter o modelo TS correspondente, utilizando a não-linearidade de setor. Desta forma, realizando uma manipulação na matriz B_w em que se evidencia $sinc(\alpha)$, é possível transformar o ruído $w = \alpha$ para $w = sen(\alpha)$. Considerando tal transformação, substituindo os valores dos dados e definindo as variáveis premissas como:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ cos(\alpha)sinc(\theta) \\ sen(\theta)\omega \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

O sistema qLPV correspondente é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 & -0,09z_1 \\ 0 & 0 & -0,09z_1 & 0,027 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \cdots \tag{3.15}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -0,09z_3 \\ 0 & 0,8802z_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \cdots \tag{3.16}$$

$$\cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -17,604 \\ 0,8802z_1 \end{bmatrix} sen(\alpha) \tag{3.17}$$

Com o modelo na forma qLPV, define-se os máximos e mínimos das variáveis premissas definidas. Considerando que a inclinação do plano é dada por $-10° \leq \alpha \leq 10°$, o ângulo formado entre o pêndulo e a reta normal ao plano é $-60° \leq \theta \leq 60°$ e a velocidade angular é $-1 \leq \omega \leq 1$, é possível determinar os máximos e mínimos das variáveis premissas.

$$\begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} max(z_1) \\ max(z_2) \\ max(z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86602 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} min(z_1) \\ min(z_2) \\ min(z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,8144 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,86602 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Com os máximos e mínimos das variáveis premissas, determina-se as funções de pertinência relativas.

- Funções de pertinência relativas aos máximos:

$$w_1^1(z_1) = \frac{z_1 - 0,5}{0,5} = \frac{cos(\theta) - 0,5}{0,5} \tag{3.20}$$

$$w_2^1(z_2) = \frac{z_2 - 0,8144}{0,1856} = \frac{cos(\alpha)sinc(\theta) - 0,8144}{0,1856} \tag{3.21}$$

$$w_3^1(z_3) = \frac{z_3 + 0,86602}{1,73204} = \frac{sen(\theta)\omega + 0,86602}{1,73204} \tag{3.22}$$

- Funções de pertinência relativas aos mínimos:

$$w_1^2(z_1) = \frac{1 - z_1}{0,5} = \frac{1 - cos(\theta)}{0,5} \tag{3.23}$$

$$w_2^2(z_2) = \frac{1 - z_2}{0,1856} = \frac{1 - cos(\alpha)sinc(\theta)}{0,1856} \tag{3.24}$$

$$w_3^2(z_3) = \frac{0,86602 - z_3}{1,73204} = \frac{0,86602 - sen(\theta)\omega}{1,73204} \tag{3.25}$$

Para obter o modelo inferido, utiliza-se as matrizes E, A e B_w usando todas as possíveis combinações entre os limitantes e encontra-se as matrizes de peso correspondentes a cada regra utilizando o operador de agregação do produto. A matriz B_u é constante e não depende das variáveis premissas, logo se mantém a mesma para todas as 8 regras do modelo. As regras para a inferência do modelo são definidas da seguinte maneira :

- **Regra 1)** Se z_1 é a_1^2 e z_2 é a_2^2 e z_3 é a_3^2, então:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 & -0,045 \\ 0 & 0 & -0,045 & 0,027 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0,078 \\ 0 & 0,7168 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$B_{w_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -17,604 \\ 0,4401 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$h_1(x) = w_1^2(z_1)w_2^2(z_2)w_3^2(z_3) \tag{3.29}$$

- **Regra 2)** Se z_1 é a_1^2 e z_2 é a_2^2 e z_3 é a_3^1, então:

$$E_2 = E_1 \qquad B_{w_2} = B_{w_1} \tag{3.30}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -0,078 \\ 0 & 0,7168 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$h_2(x) = w_1^2(z_1)w_2^2(z_2)w_3^1(z_3) \tag{3.32}$$

- **Regra 3)** Se z_1 é a_1^2 e z_2 é a_2^1 e z_3 é a_3^2, então:

$$E_3 = E_1 \qquad B_{w_3} = B_{w_1} \tag{3.33}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0,078 \\ 0 & 0,8802 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$h_3(x) = w_1^2(z_1)w_2^1(z_2)w_3^2(z_3) \tag{3.35}$$

- **Regra 4)** Se z_1 é a_1^1 e z_2 é a_2^2 e z_3 é a_3^2, então:

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 & -0,09 \\ 0 & 0 & -0,09 & 0,027 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$A_4 = A_1 \qquad B_{w_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -17,604 \\ 0,8802 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

$$h_4(x) = w_1^1(z_1)w_2^2(z_2)w_3^2(z_3) \tag{3.38}$$

- **Regra 5)** Se z_1 é a_1^2 e z_2 é a_2^1 e z_3 é a_3^1, então:

$$E_5 = E_1 \qquad B_{w_5} = B_{w_1} \tag{3.39}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -0,078 \\ 0 & 0,8802 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$$h_5(x) = w_1^2(z_1)w_2^1(z_2)w_3^1(z_3) \tag{3.41}$$

- **Regra 6)** Se z_1 é a_1^1 e z_2 é a_2^2 e z_3 é a_3^1, então:

$$E_6 = E_4 \qquad A_6 = A_2 \qquad B_{w_6} = B_{w_4} \tag{3.42}$$

$$h_6(x) = w_1^1(z_1)w_2^2(z_2)w_3^1(z_3) \tag{3.43}$$

- **Regra 7)** Se z_1 é a_1^1 e z_2 é a_2^1 e z_3 é a_3^2, então:

$$E_7 = E_4 \qquad A_7 = A_3 \qquad B_{w_7} = B_{w_4} \tag{3.44}$$

$$h_7(x) = w_1^1(z_1)w_2^1(z_2)w_3^2(z_3) \tag{3.45}$$

- **Regra 8)** Se z_1 é a_1^1 e z_2 é a_2^1 e z_3 é a_3^1, então:

$$E_8 = E_4 \qquad A_8 = A_5 \qquad B_{w_8} = B_{w_4} \tag{3.46}$$

$$h_8(x) = w_1^1(z_1)w_2^1(z_2)w_3^1(z_3) \tag{3.47}$$

O modelo TS inferido é dado por:

$$\sum_{i=1}^{8} h_i(x)E_i\dot{x} = \sum_{i=1}^{8} h_i(x)(A_i x + B_{u_i}u + B_{w_i}w) \tag{3.48}$$

3.1.3 Controle PDC

Para projetar a lei de controle de compensação paralela distribuída que reduza o efeito da inclinação no ângulo do pêndulo e na posição do carrinho tem-se :

$$z = Cx \quad \therefore z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

A lei de controle PDC é dada por:

$$u = \sum_{j=1}^{8} h_j(x)K_j x \tag{3.50}$$

Assim, o sistema em malha fechada é dado por:

$$\sum_{i=1}^{8} h_i(x)E_i\dot{x} = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} h_i(x)h_j(x)((A_i + B_{u_i}K_j)x + B_{w_i}w) \tag{3.51}$$

$$z = \sum_{i=1}^{8} h_i(x)C_i x \tag{3.52}$$

Considerando a função de Lyapunov quadrática (P) e utilizando o Lema de Finsler e condições linearizantes, obtém-se as condições LMIs para se obter o controlador PDC com custo garantindo H_∞.

- **1)** $\bar{P} > 0$
- **2)** $Q_{ii} < 0, \quad \forall\ i$

- **3)** $Q_{ij} + Q_{ji} < 0, \quad \forall \ i, \ j > i$

Sendo Q_{ij} definido como

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} A_iX + B_{u_i}Y_j + X^TA_i^T + Y_j^TB_{u_i}^T & \cdots \\ \bar{P} + \mu(A_iX + B_{u_i}Y_j) - X^TE_i^T & \cdots \\ B_{w_i}^T & \cdots \\ C_iX & \cdots \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

$$\begin{matrix} \cdots & * & * & * \\ \cdots & -\mu(E_iX + X^TE_i^T) & * & * \\ \cdots & \mu B_{w_i}^T & -\gamma I & * \\ \cdots & 0 & 0 & I \end{matrix} \Bigg] \tag{3.54}$$

Sendo γ o limitante superior da norma H_∞, N a variável de folga derivada do Lema de Finsler, μ é o escalar referente a variável de folga adicionada e $X = N^{-1}$, $Y_j = K_jX$, $\bar{P} = X^TPX$ são derivadas das condições linearizantes, todas as matrizes são de dimensões adequadas. O $*$ indica a simetria.

4 RESULTADOS

4.1 Resultados e discussões

Utilizando $\mu = 0,3$, o limitante superior da norma H_∞ possuiu o menor resultado, porém ganhos muito altos foram impostos ao controlador. Desta forma, fixou-se o limitante superior, tal que $\gamma = 4,6904$ e assim, os ganhos obtidos para o controlador atendem situações reais e aumenta a velocidade de simulação do sistema, ao evitar problemas numéricos. Os ganhos encontrados pelas condições LMIs são:

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ K_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158,3128 & -544,7149 & 136,2871 & -103,9946 \\ 157,8932 & -543,2222 & 135,9347 & -103,5630 \\ 161,3243 & -575,5124 & 138,7206 & -105,6638 \\ 102,2162 & -357,1977 & 89,4844 & -67,0005 \\ 162,1880 & -578,6921 & 139,4476 & -106,1369 \\ 101,5527 & -355,0228 & 88,9402 & -66,4444 \\ 104,3143 & -370,1149 & 91,1945 & -68,0858 \\ 103,4281 & -367,1123 & 90,4545 & -67,3618 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Simulando o modelo TS em malha fechada, considerando o controlador encontrado pelas condições LMIs, obtém-se a resposta temporal do sistema. Foi considerada como a entrada de ruído exógena $w = sen(0,01t)e^{-0,01t}$. A simulação foi realizada utilizando integração numérica, com o método Runge-Kutta de quarta ordem com tempo $t = \begin{bmatrix} 0 & 30 \end{bmatrix}$ e passo de integração fixo igual a $0,001$. Os estados e a saída do sistema estão representados nas Figuras 5 e 6, respectivamente.

Ao observar os estados e saída do sistema, percebe-se o comportamento assintótico, o que indica que o controlador manteve o sistema estável. Além disso percebe-se que os estados estão dentro da região determinada a eles durante a inferência do modelo Takagi-Sugeno. Ao observar a saída, nota-se que a lei de controle PDC obtida foi capaz de reduzir o efeito da inclinação no ângulo do pêndulo (θ) e na posição do carrinho (s), da maneira em que era proposto.

A Figura 7, mostra o ganho obtido para a simulação e o limitante superior encontrado pelas condições LMIs.

Ao observar o gráfico da evolução do ganho, conclui-se que a norma H_2 induzida se manteve muito abaixo do limitante encontrado pelas condições LMIs, sendo de $1,4935$, enquanto o limitante encontrado foi de $4,6904$.

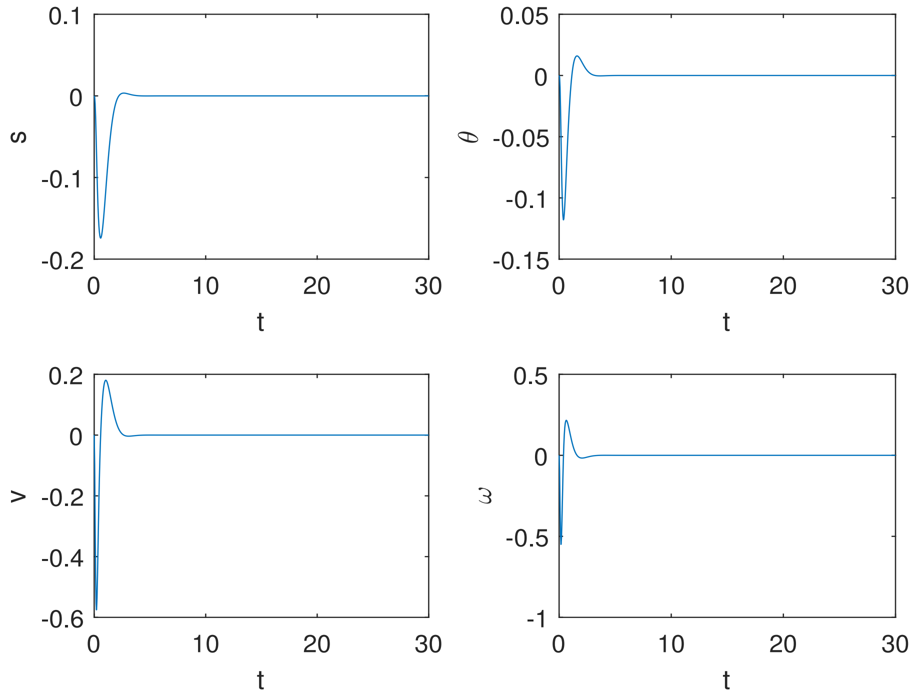

Figura 5 – Evolução dos estados do sistema ao longo do tempo.

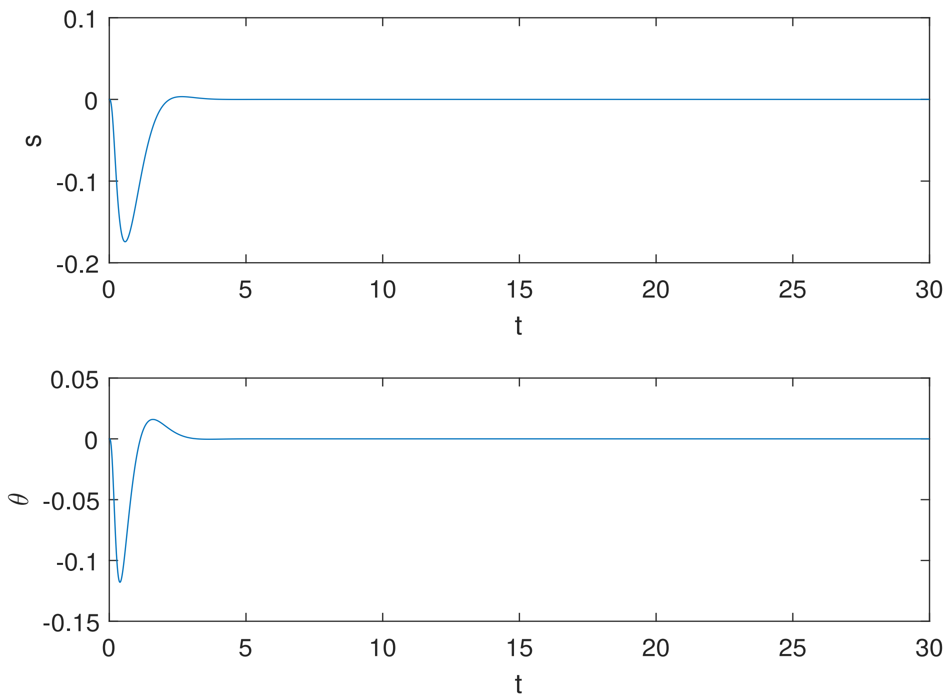

Figura 6 – Evolução da saída do sistema ao longo do tempo.

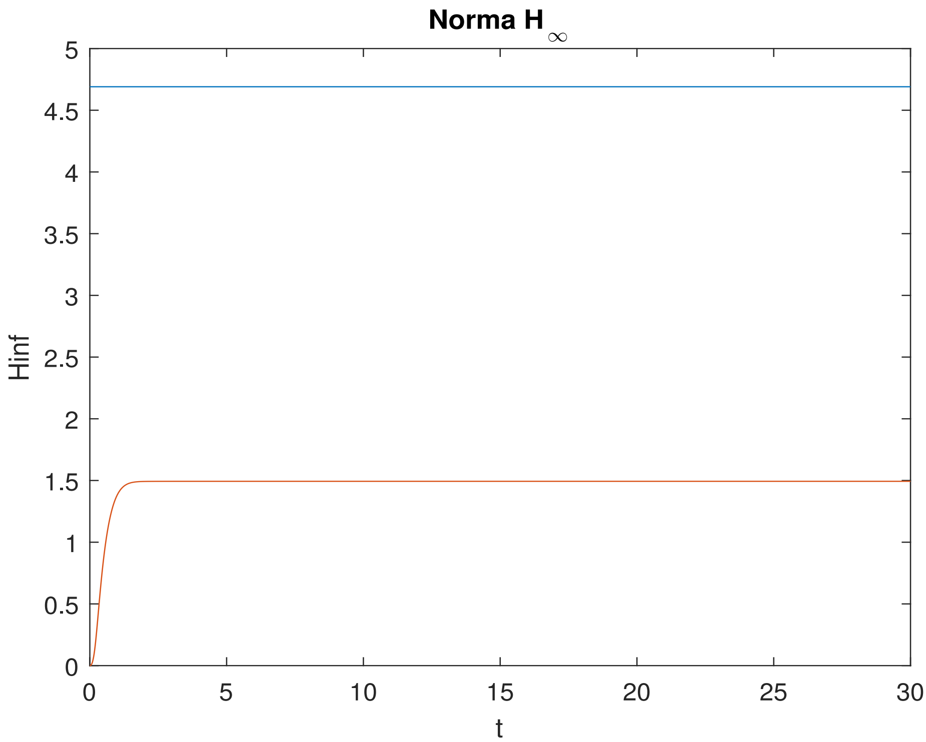

Figura 7 – Ganho $\mathscr{L}_2$ ao longo do tempo para a simulação e o limitante encontrado pelas condições LMIs. Em azul o limitante superior encontrado pelas LMIs $(4,6904)$ e em vermelho a norma $\mathscr{L}_2$ do sistema controlado, com seu valor final $(1,4935)$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

A análise e controle de sistemas não-lineares é uma área de pesquisa que cresce exponencialmente, um dos motivos desse crescimento, se deve ao fato de utilizar metodologias que facilitem o projeto do sistema em questão. Várias abordagens para obter modelos que sejam representativos ao sistema não-linear original vêm sendo desenvolvidas na busca de uma abordagem que melhor se apresenta para tratar tais sistemas.

Este trabalho apresentou uma abordagem de obtenção de um modelo Takagi-Sugeno que represente exatamente o sistema não-linear em uma determinada faixa. A técnica de não-linearidade de setor permite que se obtenham modelos lineares exatos ao modelo não-linear e desta forma pode-se aplicar as técnicas lineares já conhecidas e bem definidas na literatura. Como obtém-se um modelo exato em um determinado setor, diversos modelos para representar o sistema não-linear como um todo, podem ser obtidos. Com o modelo linear TS obtido, é possível projetar uma lei de controle de compensação paralela distribuída que faz o uso das mesmas funções de pertinência do modelo para o controlador, facilitando a implementação. Ao analisar as técnicas descritas, foi obtido um controlador, por meio de desigualdades matriciais lineares que garantiram a estabilidade do sistema não-linear de maneira satisfatória, além de respeitar as condições limite do projeto.

Com a estabilidade do sistema garantida, uma outra vantagem analisada é o valor da norma H_2 induzida bem inferior ao limitante superior encontrado pelas condições LMIs. A norma é um critério de desempenho associado a robustez do sistema às perturbações externas, ou seja, é um bom critério para rejeição de distúrbios, visto que ela tende a minimizar a relação entre o vetor de saída e o vetor de ruídos para todas as diferentes frequências.

A metodologia apresentada oferece ganhos para a análise de sistemas não-lineares como, por exemplo: a facilidade para a implementação, a alternativa de se obter uma representação linear exata e a possibilidade do projeto do controlador que utiliza as mesmas funções de pertinência do modelo TS e consegue garantir a estabilidade do sistema e manter um custo garantido para a norma H_∞. Como sugestões de trabalhos futuros, propõe-se o estudo das regiões em que o modelo obtido por não-linearidade de setor é válido, além do uso de outra técnica de controle que utilize abordagens distintas, como por exemplo, funções de pertinência distintas do modelo, para verificar a qualidade e obter uma comparação com o método apresentado.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas*. [S.l.: s.n.], 2015. ISBN 978-85-423-0079-6. Citado na página 13.

AGUIRRE, L. *Sistemas Dinâmicos Não Lineares: Conceitos e Análise de Dados (in Portuguese)*. [S.l.: s.n.], 2022. Citado 3 vezes nas páginas 11, 15 e 21.

ALVES, R. G. Controle de um pêndulo invertido utilizando técnica de linearização por realimentação. 2018. 2018. Citado na página 23.

BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X. Citado 3 vezes nas páginas 11, 20 e 21.

DORF, R.; BISHOP, R. *Sistemas de controle modernos*. LTC, 2009. ISBN 9788521617143. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=pT4bQAAACAAJ>. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 20, 22 e 27.

KING, P. J.; MAMDANI, E. H. The application of fuzzy control systems to industrial processes. *Automatica*, 1977. Elsevier, v. 13, n. 3, p. 235–242, 1977. Citado na página 17.

MANDANI, E. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proc. IEEE*, 1974. v. 121, n. 12, 1974. Citado na página 11.

NISE, N. S.; SILVA, F. R. da. *Engenharia de sistemas de controle*. [S.l.]: LTC, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 18.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 19, 23 e 24.

OGATA, K. et al. *Modern control engineering*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 14, 20 e 22.

OPPENHEIM, A.; SCHAFER, R. *Processamento Em Tempo Discreto De Sinais*. PEARSON BRASIL, 2013. ISBN 9788581431024. Disponível em: <https://books.google.com.br-/books?id=g72vnQEACAAJ>. Citado na página 15.

PAPADAKIS, S. E.; THEOCHARIS, J. A ga-based fuzzy modeling approach for generating tsk models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002. Elsevier, v. 131, n. 2, p. 121–152, 2002. Citado na página 17.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1985. IEEE, n. 1, p. 116–132, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 17.

TEIXEIRA, M. C.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 1999. IEEE, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 17.

WANG, H. O.; TANAKA, K. *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

ZADEH, L. A. On fuzzy algorithms. In: *fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers By Lotfi A Zadeh*. [S.l.]: World Scientific, 1996. p. 127–147. Citado na página 11.

APÊNDICE A – OBTENÇÃO DAS CONDIÇÕES LMIS

De posse do modelo TS inferido, considerando a inclinação do plano como uma perturbação medida, deseja-se projetar uma lei de controle de compensação paralela distribuída (PDC) que reduza o efeito da inclinação no ângulo do pêndulo e na posição do carrinho. Desta forma, tem-se :

$$z = cx \therefore z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

Desta forma, é possível projetar a lei de controle PDC, que é dada por:

$$u = \sum_{j=1}^{8} h_j(x) K_j x \tag{A.2}$$

Assim, o sistema em malha fechada é dado por:

$$\sum_{i=1}^{8} h_i(x) E_i \dot{x} = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} h_i(x) h_j(x)((A_i + B_{u_i} K_j)x + B_{w_i} w) \tag{A.3}$$

$$z = \sum_{i=1}^{8} h_i(x) C_i x \tag{A.4}$$

Deste modo, temos :

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} h_i(x) h_j(x)((A_i + B_{u_i} K_j)x + B_{w_i} w) - \sum_{i=1}^{8} h_i(x) E_i \dot{x} = 0 \tag{A.5}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} h_i(x) h_j(x)(A_i + B_{u_i} K_j) & -\sum_{i=1}^{8} h_i(x) E_i & \sum_{i=1}^{8} B_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ w \end{bmatrix} = 0 \tag{A.6}$$

Sendo $\mathscr{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} h_i(x) h_j(x)(A_i + B_{u_i} K_j) & -\sum_{i=1}^{8} h_i(x) E_i & \sum_{i=1}^{8} B_{wi} \end{bmatrix}$

Sendo a função de Lyapunov quadrática :

$$V(x) = x^T P x > 0 \Rightarrow P > 0$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P X + x^T P \dot{x} < 0$$

Para o custo garantido H_∞ tem-se:

$$\dot{V} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0 \tag{A.7}$$

em que γ é um limitante superior da norma H_∞.

Deste modo :

$$\begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T & w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} h_i(x) c_i^T \sum_{i=1}^{8} h_i(x) c_i & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ w \end{bmatrix} \leq 0 \tag{A.8}$$

Sendo $\mathscr{Q} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} h_i(x) c_i^T \sum_{i=1}^{8} h_i(x) c_i & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$

Pela relação do lema de Finsler:

$\exists\, x \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathscr{Q} + \mathscr{X}\mathscr{B} + \mathscr{B}^T \mathscr{X}^T < 0$, com $\mathscr{X} = \begin{bmatrix} N \\ \mu N \\ 0 \end{bmatrix}$

E considerando as seguintes transformações linearizantes: $X = N^{-1}$, $Y_j = K_j X$ e $\bar{P} = X^T P X$, obtém-se as condições LMIs:

- **1)** $\bar{P} > 0$
- **2)** $Q_{ii} < 0, \quad \forall\ i$
- **3)** $Q_{ij} + Q_{ji} < 0, \quad \forall\ i,\ j > i$

Sendo Q_{ij} definido como

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} A_i X + B_{u_i} Y_j + X^T A_i^T + Y_j^T B_{u_i}^T & \cdots \\ \bar{P} + \mu(A_i X + B_{u_i} Y_j) - X^T E_i^T & \cdots \\ B_{w_i}^T & \cdots \\ C_i X & \cdots \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

$$\begin{matrix} \cdots & * & * & * \\ \cdots & -\mu(E_i X + X^T E_i^T) & * & * \\ \cdots & \mu B_{w_i}^T & -\gamma I & * \\ \cdots & 0 & 0 & I \end{matrix}\Bigg] \tag{A.10}$$

APÊNDICE B – SCRIPT COMENTADO

O Apêndice B possui o script desenvolvido para as condições LMIs utilizadas ao longo do trabalho.

```matlab
function [mu,P,K,diagnostico,primal] = condtf(E,A,Bu,Bw,C,gamma)

% Número de vértices da matriz A
N = numel(A);
% Pega o número de estados do sistema (x)
n = size(A{1},1); % n=4
% Pega o número de entradas (w)
nu = size(Bu,2); % nw=1
% Pega o número de saídas de desempenho (z)
nz = size(C,1); % nz=2

% Define as variáveis de decisão

mu = sdpvar(1,1);
%mu = 22;
X = sdpvar(n,n,'full');
P = sdpvar(n,n,'symmetric');
Y = cell(1,N);

for i=1:N
    Y{i}=sdpvar(nu,n,'full');
end

% Declara as restrições
LMIs=[];

for i=1:N
    LMIs = LMIs + (P>=0);
    Cond1 = blkvar;
    Cond1(1,1) = A{i}*X+Bu*Y{i}+X'*A{i}'+Y{i}'*Bu';
    Cond1(1,2) = P'+gamma*(X'*A{i}'+Y{i}'*Bu')-E{i}*X;
    Cond1(1,3) = Bw{i};
    Cond1(1,4) = X'*C';
    Cond1(2,2) = -gamma*(E{i}*X+X'*E{i}');
    Cond1(2,3) = gamma*(Bw{i});
    Cond1(2,4) = zeros(n,nz);
    Cond1(3,3) = -mu*eye(nu);
    Cond1(3,4) = zeros(nu,nz);
    Cond1(4,4) = -eye(nz);
    Cond1 = sdpvar(Cond1);
    LMIs = LMIs + (Cond1 <= 0);
end

for i=1:N-1
    for j=i+1:N
        Cond2 = blkvar;
        Cond2(1,1) = A{i}*X+Bu*Y{j}+X'*A{i}'+Y{j}'*Bu';
        Cond2(1,2) = P'+gamma*(X'*A{i}'+Y{j}'*Bu')-E{i}*X;
        Cond2(1,3) = Bw{i};
        Cond2(1,4) = X'*C';
        Cond2(2,2) = -gamma*(E{i}*X+X'*E{i}');
        Cond2(2,3) = gamma*(Bw{i});
        Cond2(2,4) = zeros(n,nz);
        Cond2(3,3) = -mu*eye(nu);
        Cond2(3,4) = zeros(nu,nz);
        Cond2(4,4) = -eye(nz);
```

```matlab
        Cond2 = sdpvar(Cond2);
        Cond3 = blkvar;
        Cond3(1,1) = A{j}*X+Bu*Y{i}+X'*A{j}'+Y{i}'*Bu';
        Cond3(1,2) = P'+gamma*(X'*A{j}'+Y{i}'*Bu')-E{j}*X;
        Cond3(1,3) = Bw{j};
        Cond3(1,4) = X'*C';
        Cond3(2,2) = -gamma*(E{j}*X+X'*E{j}');
        Cond3(2,3) = gamma*(Bw{j});
        Cond3(2,4) = zeros(n,nz);
        Cond3(3,3) = -mu*eye(nu);
        Cond3(3,4) = zeros(nu,nz);
        Cond3(4,4) = -eye(nz);
        Cond3 = sdpvar(Cond3);
        LMIs = LMIs + ((Cond2 + Cond3) <=0);
    end
end


% Resolve o problema de otimização

diagnostico = optimize(LMIs,mu);
%diagnostico = optimize(LMIs);
checkset(LMIs);

primal = checkset(LMIs);
mu = sqrt(double(mu));

for i=1:N
   Y{i} = double(Y{i});
end

X= double(X);

for i=1:N
   K{i} = Y{i}*inv(X);
end

% for i=1:N
%    K{i} = double(K{i});
% end

resi=min(checkset(LMIs));

end
```