



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Aplicação de Técnicas de Controle para Sistemas Lineares Positivos

Adeilson Gonçalves Silvério

**João Monlevade, MG
2022**

Adeilson Gonçalves Silvério

Aplicação de Técnicas de Controle para Sistemas Lineares Positivos

Projeto de pesquisa apresentado à banca examinadora do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP-MG, como requisito parcial obrigatório para aprovação e obtenção do Grau bacharel em engenharia elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Tiago

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2022**

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S587a Silvério, Adeilson Gonçalves.
Aplicação de técnicas de controle para sistemas lineares positivos.
[manuscrito] / Adeilson Gonçalves Silvério. - 2022.
61 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Tiago.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia
Elétrica .

1. Engenharia elétrica. 2. Sistemas lineares de controle. 3. Teoria do
controle - Desigualdades matriciais lineares. I. Braga, Márcio Feliciano. II.
Tiago, Marcelo Moreira. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 681.515.4

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Adeilson Gonçalves Silvério

Aplicação de Técnicas de Controle para Sistemas Lineares Positivos

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Elétrica

Aprovada em 05 de janeiro de 2022

Membros da banca

Dr. Márcio Feliciano Braga - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Marcelo Moreira Tiago - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dra. Wendy Yadira Eras Herrera - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Rodrigo Augusto Ricco - Universidade Federal de Ouro Preto

Márcio Feliciano Braga, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 19/01/2022



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Feliciano Braga, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 21/01/2022, às 15:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0269234** e o código CRC **B50EF9A0**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.000643/2022-64

SEI nº 0269234

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: - www.ufop.br

Dedico este trabalho aos meus pais e amigos, que me inspiraram e apoiaram todos os dias dos últimos anos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela inteligência e persistência que me foi dada e pela realização do sonho e aos meus orientadores, Dr. Márcio Feliciano Braga e Dr. Marcelo Moreira Tiago pela paciência e dedicação em me ensinar.

Agradeço de forma especial aos Meus Pais, que em tudo me apoiaram, e aos meus amigos e companheiros de estudo, Flávio Quiel, Gabriel Machado, Guilherme Lima, Gustavo de Souza, Lorrán de Faria e minha noiva Marphiza Santos que fizeram dessa caminhada mais suave e divertida.

"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé, sobre os ombros de gigantes."

– Isaac Newton

Resumo

Na atualidade, com a crescente modernização de tecnologias, faz-se necessário o desenvolvimento de técnicas de controle cada vez mais eficazes a fim de acompanhar as necessidades crescentes de precisão e velocidade de operação de sistemas. Tais características de funcionamento estão relacionadas com especificações de desempenho escolhidas pelo projetista, como tempo de assentamento e máximo sobressinal. A partir das especificações de desempenho escolhidas pelo projetista, é possível determinar uma região de alocação de polos de forma que o sistema atenda a essas especificações, estratégia conhecida como \mathcal{D} -estabilidade. Além disso, em algumas aplicações, é desejável garantir que o sistema opere com sinais positivos, os quais podem ser encontrados na mais diversas áreas, como engenharia, biologia, medicina, ciências sociais e economia. Como vantagem de tais sistemas, destaca-se um melhor aproveitamento dos sinais, visto que leis de controle positivas apresentam um significado físico adequado, o que pode não ocorrer em algumas aplicações da engenharia com sinais negativos, levando, em alguns casos, o sistema à condição de espera ou saturação, por exemplo, em aplicações de controle de nível, vazão ou tensão. Portanto, este trabalho inicialmente foca na utilização de condições de síntese na forma de desigualdades matriciais lineares que empregam a estratégia de \mathcal{D} -estabilidade a fim de projetar controladores PI robustos para uma planta de controle de nível presente no Laboratório de Automação e Controle do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas (ICEA) da UFOP. Deseja-se apresentar as vantagens, devido à utilização de técnicas de alocação de polos, como a redução do tempo de assentamento e máxima ultrapassagem percentual do sistema em malha fechada, em comparação com os resultados de outras estratégias da literatura. Em seguida, desenvolve-se uma nova condição que unificará os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade e positividade para sistemas incertos a tempo discreto. Finalmente, utilizam-se dois exemplos para ilustrar as vantagens e a aplicabilidade da técnica desenvolvida.

Palavras-chave: Controle, \mathcal{D} -Estabilidade, Sistemas Positivos, Sistemas Incertos, Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

Nowadays, with the increasing modernization of technologies, it is necessary to develop increasingly effective control techniques in order to keep up with the increasing needs for precision and speed of system operation. Such operating characteristics are related to performance specifications chosen by the designer, such as settling time and maximum overshoot. From the performance specifications chosen by the designer, it is possible to determine regions to place system's pole so that the system meets those specifications, a strategy known as \mathcal{D} -stability. In addition, in some applications, it is desirable to ensure that the system operates with positive signals, which can be found in the most diverse areas, such as engineering, biology, medicine, social sciences and economics. As an advantage of such systems, there is a better use of the signals, since positive control laws have an appropriate physical meaning, which may not occur in some engineering applications with negative signals, bringing, in some cases, the system to the condition of standby or saturation, for example, in level, flow or voltage control applications. Therefore, this work initially focuses on the use of synthesis conditions in the form of linear matrix inequalities that employ the \mathcal{D} -stability strategy in order to design robust PI controllers for a level control plant present in the Laboratory of Automation and Control at the Institute of Exact and Applied Sciences (ICEA) at UFOP. It is desired to present the advantages, due to the use of pole allocation techniques, such as the reduction of the settling time and maximum percentage overshoot of the closed-loop system, in comparison with the results of other strategies in the literature. Then, a new condition is developed that will unify the concepts of \mathcal{D} -stability and positivity for discrete-time uncertain systems. Finally, two examples are used to illustrate the advantages and applicability of the developed technique.

Keywords: Control, \mathcal{D} -stability, Positive Systems, Uncertain Systems, Linear Matrix Inequalities.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Região de alocação do Teorema 2.5.	24
Figura 2	– Diagrama de blocos de uma planta de primeira ordem.	27
Figura 3	– Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa branca com $\alpha = [0, 0723 \ 0, 5735 \ 0, 2203 \ 0, 1339]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	32
Figura 4	– Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa branca com $\alpha = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	33
Figura 5	– Nuvem de autovalores da planta com controlador para o modelo caixa branca.	34
Figura 6	– Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 25% e $\alpha = [0, 1397 \ 0, 2827 \ 0, 2984 \ 0, 2792]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	36
Figura 7	– Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 25% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	36
Figura 8	– Nuvem de autovalores da planta com controlador para o modelo caixa preta com ponto de operação de 25%.	37
Figura 9	– Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 50% e $\alpha = [0, 2440 \ 0, 4297 \ 0, 3146 \ 0, 0117]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	38
Figura 10	– Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 50% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	39
Figura 11	– Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0, 0197 \ 0, 3019 \ 0, 0967 \ 0, 5817]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	40

Figura 12 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	41
Figura 13 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0, 2028 \ 0, 1511 \ 0, 2515 \ 0, 3946]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	42
Figura 14 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.	43
Figura 15 – Esquema de conexões de um circuito RLC.	46
Figura 16 – Nuvem de Autovalores do Circuito RLC Instável em Malha Aberta.	47
Figura 17 – Resposta ao degrau do circuito RLC instável em malha aberta, para o experimento 1 com controlador estabilizante e com controlador \mathcal{D} -estável, respectivamente.	48
Figura 18 – Resposta à condição inicial $x_0 = [1 \ 2]$ do circuito RLC instável em malha aberta, para o experimento 1 com controlador estabilizante e com controlador \mathcal{D} -estável, respectivamente.	49
Figura 19 – Nuvem de Autovalores do Circuito RLC Estável em Malha Aberta.	50
Figura 20 – Nuvem de autovalores do circuito RLC estável em malha aberta com: (a) Controlador estabilizante; (b) Controlador \mathcal{D} -estável.	51
Figura 21 – Resposta ao degrau do circuito RLC estável, para o experimento 1 em: (a) Malha Aberta; (b) Malha fechada com controlador estabilizante; (c) Malha fechada com controlador \mathcal{D} -estável.	52
Figura 22 – Resposta à condição inicial $x_0 = [1 \ 2]$ do circuito RLC estável, para o experimento 1 em: (a) Malha Aberta; (b) Malha fechada com controlador estabilizante; (c) Malha fechada com controlador \mathcal{D} -estável.	52
Figura 23 – Diagrama Simplificado de um Levitador Magnético.	53
Figura 24 – Nuvem de Autovalores do Modelo de Levitador Magnético em Malha Fechada.	55
Figura 25 – Resposta ao Degrau para o Modelo do Levitador Magnético para o experimento 4 com $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$	56
Figura 26 – Resposta a condição inicial $x_0 = [1 \ 1]^T$ para o Modelo do Levitador Magnético para o Experimento 4 com $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$	57

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados do modelo caixa branca.	31
Tabela 2 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 25%.	35
Tabela 3 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 50%.	37
Tabela 4 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 75%.	39
Tabela 5 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 100%.	41
Tabela 6 – Associação de experimentos com parâmetros α para testes realizados nos circuitos RLC instável e RLC estável.	47
Tabela 7 – Resultados do modelo de um circuito RLC instável com $R = [7\ 13]$, $L = [0,7\ 1,3]$, $C = [0,07\ 0,13] \times 10^{-4}$ e $T = 0,01$	48
Tabela 8 – Resultados do modelo de circuito RLC estável com $R = [0,7\ 1,3]$, $L = [0,07\ 0,13]$, $C = [0,07\ 0,13]$ e $T = 0,01$	50
Tabela 9 – Parâmetros do Levitador Magnético	53
Tabela 10 – Associação de experimentos com parâmetros α para testes realizados no levitador magnético.	55
Tabela 11 – Resultados do Modelo do Levitador Magnético.	56

Lista de acrônimos

<i>LMI</i>	Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, <i>Linear Matrix Inequalities</i>)
<i>LPV</i>	Sistemas Lineares com parâmetros Variantes (do inglês, <i>Linear Parameter-Varying</i>)
MU	Máxima Ultrapassagem
MUP	Máxima Ultrapassagem Percentual
<i>ZN</i>	Controlador Obtido por Sintonia de Ziegler e Nichols
<i>SISO</i>	Entrada única, saída única (do inglês, <i>Single Input Single Output</i>)

Lista de símbolos

n_x	Número de Estados do Sistema
n_u	Número de Entradas do Sistema
n_y	Número de Saídas do Sistema
\mathcal{H}_∞	Norma H-Infinito
\mathcal{H}_2	Norma H-Dois
T_s	Tempo de Assentamento
T_p	Tempo de Pico
\otimes	Produto de Kronecker
T	Período de Amostragem
τ_{mr}	Constante de Tempo Mais Rápida
ω_b	Banda Passante
ω_s	Frequência de Amostragem
ω_d	Frequência Natural Amortecida
f_o	Função Objetivo
P_o	Pólos

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivação	16
1.2	Objetivos	16
1.2.1	Objetivos Específicos	16
1.3	Estrutura do Trabalho	17
2	REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO	18
2.1	Teoremas de Análise Canônicos	18
2.2	Teoremas de Síntese Canônicos	20
2.3	\mathcal{D} -estabilidade	22
2.4	Otimização do Raio de uma Região de Alocação	24
2.5	Estrutura de Seguimento de Referência	26
2.5.1	Obtenção de uma Representação em Espaço de Estados para Sistemas de Primeira Ordem	26
2.5.2	Estrutura para Obtenção de um Controlador Proporcional Integral	26
2.6	Discretização de Equações de Estado	28
2.7	Positividade de Sistemas Lineares	29
3	APLICAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE CONTROLE A TEMPO CONTÍNUO COM \mathcal{D}-ESTABILIDADE EM UMA PLANTA DE NÍVEL	30
3.1	Planta de Controle de Nível	30
3.1.1	Resultados	30
3.1.2	Modelo Caixa Branca	30
3.1.3	Modelo Caixa Preta	33
3.1.4	Conclusão Parcial	42
4	SÍNTESE DE CONTROLADORES \mathcal{D}-ESTÁVEIS PARA SISTEMAS INCERTOS POSITIVOS A TEMPO DISCRETO	44
4.1	Preliminares	44
4.2	Resultado Principal	44
4.3	Experimentos Numéricos	45
4.3.1	Circuito RLC	46
4.3.1.1	Circuito RLC Instável	47
4.3.1.2	Circuito RLC Estável	49
4.3.2	Levitador Magnético	52
4.3.3	Conclusão Parcial	57

5	CONCLUSÃO	58
5.1	Trabalhos Futuros	59
	REFERÊNCIAS	60

1 Introdução

Com o crescente consumo de bens e produtos industrializados, exigindo cada vez mais a produção em massa em diversos setores da economia, faz-se necessário o desenvolvimento de estratégias de controle cada vez mais apuradas com o objetivo de otimizar os diversos processos relacionados à produção dos mais variados produtos, como alimentos, tecidos, medicamentos e até minerais.

As estratégias de controle mais utilizadas são as chamadas técnicas de controle convencional (também conhecidas como controle clássico), das quais as mais comuns são o controle proporcional integral derivativo e atraso e avanço de fase, seguidas pelas técnicas de controle moderno como controle multivariável e controle não linear e, por fim, as técnicas de controle robusto (OGATA, 2010).

Grande parte das técnicas de controle robusto são baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) que, valendo-se da modelagem em espaço de estados utilizam matrizes para a descrição dos sistemas. A ideia básica para a análise de estabilidade e o uso de LMIs inicia-se com o trabalho de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, publicado em 1890, o qual se tornou amplamente conhecida nos dias atuais como a teoria de estabilidade de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992; SHCHERBAKOV, 1992). Desde então, têm-se realizado estudos na área para desenvolver essa teoria levando à difusão de várias técnicas de controle, tais como \mathcal{D} -estabilidade, custo garantido \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , entre outras (BOYD et al., 1994; SKELTON, 2013).

Um exemplo de planta a ser controlada é um tanque de água, no qual deseja-se alterar seu valor de 0% a 100% da capacidade de acordo com a necessidade de consumidores que utilizam a água, evitando transbordo e a falta de líquido, quando necessário. Diversas técnicas de controle clássico e moderno são capazes de resolver esse problema sem maiores dificuldades, caso a modelagem da planta seja feita de forma coerente e não existam grandes divergências entre o modelo e a planta real. Porém, caso ocorra alguma variação na dinâmica da planta, não existem garantias de que o controlador desenvolvido seja capaz de manter o sistema operando em condições normais.

Diferentemente das técnicas de controle clássico e moderno, as teorias de controle robusto possibilitam o desenvolvimento de controladores capazes de lidar com variações na dinâmica dos processos. Dessa forma, são mais eficazes em plantas com imprecisões entre o sistema real em operação e o modelo utilizado para projetar o controlador. Em geral, as condições de controle robusto utilizam LMIs na resolução dos problemas, empregando, em alguns casos, as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 (BOYD et al., 1994) como métricas para a avaliação do controlador desenvolvido, além de atuar em algumas características da resposta dinâmica do sistema em malha fechada.

Outra área que tem ganhado destaque recentemente envolve os chamados sistemas

positivos, que possuem aplicações em diversos setores da engenharia, como reatores químicos, trocadores de calor, redes de reservatórios, fluxo em redes, sistemas de armazenamento ou comunicações (LEMAIRE, 2019), e também em áreas da biologia, medicina ciências sociais e economia (CACETTA; RUMCHEV, 2000). O objetivo nesse ramo de estudo é produzir um controlador que garanta a estabilidade e também promova trajetórias positivas para os estados e as saídas do sistema. Além disso, esse campo de estudo tem revelado conceitos versáteis no sentido de produzirem resultados aplicáveis em vários tipos de sistemas diferentes, como, por exemplo, sistemas chaveados (SPAGOLA et al., 2018), LPV (SPAGOLA et al., 2019) e incertos (LEMAIRE, 2019).

1.1 Motivação

De modo geral, supõe-se que os sistemas sejam lineares, entretanto, sabe-se que, devido a variações de parâmetros, perturbações externas e presença de ruídos, dinâmicas não modeladas, e imprecisão nos sensores e atuadores, os sistemas dinâmicos práticos requerem um tratamento mais adequado, para tratar possíveis incertezas. Nesses casos, plantas dinâmicas sujeitas a incertezas podem ser melhor descritas pelo emprego da teoria de sistemas incertos. Tal teoria tem se mostrado de grande aplicabilidade, pois muitos resultados teóricos, assim como aplicações, acerca do tema têm sido obtidos nas últimas décadas. Outro problema apontado neste projeto está relacionado à impossibilidade de empregar sinais de controle com valores negativos. Sendo assim, o uso da teoria de sistemas lineares positivos associada à teoria de estabilidade de Lyapunov (BOYD et al., 1994; KOCH et al., 2018; PEAUCELLE et al., 2000; FARINA; RINALDI, 2011; SPAGOLA et al., 2019), apresenta-se como uma estratégia viável para tratar esses problemas.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo utilizar os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade e positividade simultaneamente para desenvolver novas condições LMI para sistemas incertos a tempo discreto.

1.2.1 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, listam-se:

1. Desenvolver condições LMI que tratem de estabilização de sistemas lineares incertos a tempo discreto garantindo a positividade do sistema em malha fechada;
2. Realizar testes via simulação em Matlab das condições desenvolvidas para a verificação do funcionamento das condições LMI e;

3. Aplicar as condições desenvolvidas de forma prática em uma planta de nível presente no laboratório de Automação e Controle (LAC) do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas (ICEA) da UFOP.

1.3 Estrutura do Trabalho

No Capítulo 1, são apresentadas uma introdução com relação as estratégias de controle presentes na literatura, conceitos de positividade \mathcal{D} -estabilidade, bem como a motivação para o desenvolvimento do trabalho e os principais objetivos deste estudo. São apresentados, no Capítulo 2, alguns teoremas de análise e síntese canônicos, os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade, a modelagem para o projeto de um controlador PI via espaço de estados, formas de se obter uma representação em espaço de estados e também a discretização de sistemas contínuos na forma de equações de estado.

No Capítulo 3, são apresentados alguns dos resultados obtidos neste trabalho após a aplicação do Teorema 2.5 no desenvolvimento de controladores PI para dois modelos identificados (caixa branca e caixa preta) de uma planta didática de controle de nível. No Capítulo 4, é apresentado o principal resultado deste trabalho, o desenvolvimento do Teorema 4.1 que, no conhecimento dos autores, é a primeira condição da literatura que trata da unificação dos conceitos de \mathcal{D} -estabilidade e positividade, além da aplicação desse teorema para desenvolver controladores para sistemas reais apresentando suas vantagens e características principais. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e as propostas de trabalhos futuros.

2 Referencial Bibliográfico

Neste capítulo são apresentados inicialmente alguns teoremas clássicos de análise de estabilidade de sistemas e síntese de controladores e, posteriormente, os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade, seguimento de referência, discretização de equações de estado e positividade de sistemas.

2.1 Teoremas de Análise Canônicos

Considere um sistema linear incerto contínuo no tempo dado por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t), \quad (2.2)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entradas e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas. As matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $D(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ são dependentes de parâmetros e pertencem a um domínio politópico, sendo escritas como uma combinação convexa de N vértices conhecidos, isto é,

$$(A, B, C, D)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_i, C_i, D_i), \quad (2.3)$$

em que α é um vetor de parâmetros invariantes no tempo que pertence ao simplex unitário

$$\Lambda_{N_\alpha} = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{N_\alpha}) \in \mathbb{R}^{N_\alpha} : \sum_{i=1}^{N_\alpha} \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N_\alpha \right\}, \quad (2.4)$$

Em que N_α é o número de parâmetros α_i utilizados para descrever o politopo. Considere também um sistema linear incerto discreto no tempo dado por

$$x(k+1) = A_d(\alpha)x(k) + B_d(\alpha)u(k), \quad (2.5)$$

$$y(k) = C_d(\alpha)x(k) + D_d(\alpha)u(k), \quad (2.6)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entradas e $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas. As matrizes $A_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $D_d(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ são dependentes de parâmetros e pertencem a um domínio politópico, sendo escritas como uma combinação convexa de N vértices conhecidos e são descritas por

$$(A_{di}, B_{di}, C_{di}, D_{di})(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_{di}, B_{di}, C_{di}, D_{di}), \quad (2.7)$$

cujos parâmetros pertencem ao simplex unitário dado por (2.4).

A seguir são apresentados dois teoremas clássicos para a análise de estabilidade quadrática de sistemas incertos de acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov.

Teorema 2.1 (Boyd et al. (1994)). *Se existir uma matriz P que satisfaça*

$$P > 0, \quad (2.8)$$

$$A^T(\alpha)P + PA(\alpha) < 0, \quad (2.9)$$

então o sistema autônomo (2.1) é estável.

Prova: Seja a origem do sistema um ponto de equilíbrio e $D \subset \mathbb{R}^n$ uma região incluindo a origem, se existir uma função $V(x(t)) : D \Rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(0) = 0$,

$$V(x(t)) > 0,$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0,$$

$\forall x(t) \neq 0$, então o ponto de equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov. Além disso, se $\dot{V}(x(t)) < 0$ então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Definindo uma função candidata de Lyapunov quadrática dada por

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad (2.10)$$

cuja derivada temporal é

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t), \\ &= x^T(t)(A^T(\alpha)P + PA(\alpha))x(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim, se as desigualdades em (2.8) e (2.9) são satisfeitas, então (2.10) é definida positiva e (2.11) é definida negativa, $\forall x \neq 0$, atendendo as condições do teorema de estabilidade de Lyapunov. Logo, o sistema incerto contínuo autônomo $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t)$, isto é, (2.1), com $u(t) = 0$, é assintoticamente estável. \square

Analogamente, é possível formular um teorema na forma de LMIs que permite a análise de estabilidade para o sistema discreto autônomo, isto é, o sistema (2.5) com $u(k) = 0$.

Teorema 2.2 (Boyd et al. (1994)). *Se existir uma matriz P simétrica que satisfaça*

$$P > 0, \quad (2.12)$$

$$A_d^T(\alpha)PA_d(\alpha) - P < 0, \quad (2.13)$$

o sistema autônomo (2.5) é estável.

Prova: Seja a origem do sistema um ponto de equilíbrio e $D \subset \mathbb{R}^n$ uma região incluindo a origem, se existir uma função $V(x(k)) : D \Rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(0) = 0$,

$$V(x(k)) > 0,$$

$$\Delta V(x(k)) \leq 0,$$

$\forall x(k) \neq 0$, então o ponto de equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov. Além disso, se $V(0) = 0$ e $\Delta V(x(k)) < 0$, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Definindo uma função candidata de Lyapunov dada por

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k), \quad (2.14)$$

cujo diferencial de primeira ordem é dado por

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)), \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k), \\ &= x^T(k)(A_d^T(\alpha)PA_d(\alpha) - P)x(k). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Assim, se as desigualdades em (2.12) e (2.13) são satisfeitas, então (2.14) é definida positiva e (2.15) é definida negativa, $\forall x \neq 0$, atendendo as condições do teorema de estabilidade de Lyapunov. Logo, o sistema incerto discreto autônomo $x(k+1) = A(\alpha)x(k)$ é assintoticamente estável. \square

As condições descritas nos teoremas 2.1 e 2.2 são classificadas como condições de análise, pois permitem analisar se o sistema é estável ao submeter a matriz da dinâmica do sistema à verificação. Caso as condições sejam verdadeiras, obtém-se um certificado de estabilidade quadrática para o sistema em apreciação. Adicionalmente, têm-se as condições de síntese, a partir das quais é possível, em alguns casos, encontrar controladores que estabilizam o sistema em malha fechada.

2.2 Teoremas de Síntese Canônicos

Em algumas aplicações, é desejável obter matrizes de ganhos K tais que as leis de controle por realimentação de estados

$$u(t) = Kx(t), \quad (2.16)$$

$$u(k) = Kx(k), \quad (2.17)$$

estabilizem robustamente os sistemas (2.1) e (2.5), respectivamente. Para isso, apresentam-se dois teoremas.

Teorema 2.3. *Se existirem uma matriz simétrica $W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que*

$$\begin{aligned} W &> 0, \\ A(\alpha)W + WA(\alpha) + B(\alpha)Z + Z^T B^T(\alpha) &< 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

então existem ganhos estabilizantes para o sistema contínuo em malha fechada $A(\alpha) + B(\alpha)K$ que são dados por

$$K = ZW^{-1}.$$

Prova: Partindo de (2.1) e aplicando a lei de controle (2.16), $u(t) = Kx(t)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)Kx(t), \\ \dot{x}(t) &= (A(\alpha) + B(\alpha)K)x(t).\end{aligned}$$

O sistema em malha fechada é estável se (2.8) e (2.9) são factíveis, ou seja,

$$\begin{aligned}P &> 0, \\ (A(\alpha) + B(\alpha)K)^T P + P(A(\alpha) + B(\alpha)K) &< 0.\end{aligned}$$

Pré e pós-multiplicando as desigualdades anteriores por P^{-1} , têm-se

$$P^{-1} > 0,$$

e

$$\begin{aligned}P^{-1}(A(\alpha) + B(\alpha)K)^T P P^{-1} + P^{-1}P(A(\alpha) + B(\alpha)K)P^{-1} &< 0, \\ P^{-1}(A(\alpha) + B(\alpha)K)^T + (A(\alpha) + B(\alpha)K)P^{-1} &< 0, \\ P^{-1}A^T(\alpha) + P^{-1}K^T B^T(\alpha) + A(\alpha)P^{-1} + B(\alpha)K P^{-1} &< 0.\end{aligned}$$

A seguir, aplicando as seguintes mudanças de variáveis $P^{-1} = W$ e $Z = KW$, obtém-se

$$W > 0,$$

e

$$\begin{aligned}WA^T(\alpha) + WK^T B^T(\alpha) + A(\alpha)W + B(\alpha)KW &< 0, \\ WA^T(\alpha) + Z^T B^T(\alpha) + A(\alpha)W + B(\alpha)Z &< 0, \\ A(\alpha)W + WA^T(\alpha) + B(\alpha)Z + Z^T B^T(\alpha) &< 0,\end{aligned}$$

que permite encontrar o ganho estabilizante K . □

Como mencionado, existe também uma versão do Teorema 2.3 para sistemas a tempo discreto que é apresentado a seguir.

Teorema 2.4. *Se existirem uma matriz simétrica $W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que¹*

$$\begin{bmatrix} W & WA_d^T(\alpha) + Z^T B_d^T(\alpha) \\ * & W \end{bmatrix} > 0, \quad (2.19)$$

então existe uma matriz de ganhos estabilizantes para o sistema discreto em malha fechada $A(\alpha) + B(\alpha)K$ que é dada por

$$K = ZW^{-1}.$$

¹ O símbolo * representa um bloco simétrico nas LMIs.

Prova: A partir de (2.5) aplicando a lei de controle (2.17), $u(k) = Kx(k)$, obtém-se

$$x(k+1) = (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)x(k).$$

O sistema em malha fechada é estável se (2.12) e (2.13) são factíveis, portanto

$$P > 0, \\ (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)^T P (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K) - P < 0.$$

Manipulando a última desigualdade e aplicando o complemento de Shur, tem-se

$$(A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)^T P P^{-1} P (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K) - P < 0, \\ P - (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)^T P P^{-1} P (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K) > 0, \\ \begin{bmatrix} P & (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)^T P \\ P(A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K) & P \end{bmatrix} > 0.$$

O próximo passo envolve utilizar a seguinte transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)^T P \\ P(A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K) & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} > 0,$$

que produz

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}(A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)^T \\ (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)P^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix} > 0.$$

Finalmente, fazendo as mudanças de variáveis $P^{-1} = W$ e $Z = KW$, têm-se

$$\begin{bmatrix} W & WA_d^T(\alpha) + WK^T B_d^T(\alpha) \\ A_d(\alpha)W + B_d(\alpha)KW & W \end{bmatrix} > 0, \\ \begin{bmatrix} W & WA_d^T(\alpha) + Z^T B_d^T(\alpha) \\ A_d(\alpha)W + B_d(\alpha)Z & W \end{bmatrix} > 0,$$

que permite encontrar o ganho estabilizante K . □

Observação 2.1. Para sistemas precisamente conhecidos, isto é, sistemas sem incertezas, basta considerar $A(\alpha) = A$ nos teoremas 2.1 a 2.4.

As condições de sínteses que serão abordadas nas seções a seguir são de uma subcategoria mais específica conhecida como \mathcal{D} -estabilidade.

2.3 \mathcal{D} -estabilidade

\mathcal{D} -estabilidade é um termo utilizado para descrever uma área de estudo da engenharia de controle que está interessada na estabilização dos sistemas e que atendam certas condições de desempenho. Tais condições são citadas neste trabalho como “especificações de desempenho”.

As especificações de desempenho mais comuns na prática são: o tempo de pico T_p , o tempo de assentamento T_s e o máximo sobressinal MU ; e estão relacionadas com a localização dos polos de malha fechada do sistema. A partir das especificações de desempenho, é calculada a região de alocação que é definida como um subconjunto do plano complexo \mathbb{C} (PEAUCELLE et al., 2000)

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}z + R_{12}^T z^* + R_{22}zz^* \right\} < 0, \quad (2.20)$$

em que $R_{11} = R_{11}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $R_{12} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $R_{22} = R_{22}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Lema 2.1 (Peaucelle et al. (2000)). *A matriz da dinâmica $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é \mathcal{D} -estável para cada região D definida em (2.20) se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva P tal que*

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes PA + R_{12}^T \otimes A^T P + R_{22} \otimes A^T P A < 0. \quad (2.21)$$

As matrizes R_{11} , R_{12} e R_{22} são as responsáveis por fazer a descrição da região de alocação dos polos de malha fechada do sistema. Para descrever a região de alocação padrão para sistemas contínuos, utiliza-se

$$R_{11} = 0, \quad R_{12} = 1, \quad R_{22} = 0.$$

Dessa forma, obtém-se como região de alocação o semiplano esquerdo do plano complexo \mathbb{C} . Por outro lado, para descrever a região de alocação padrão para sistemas discretos, emprega-se

$$R_{11} = -1, \quad R_{12} = 0, \quad R_{22} = 1.$$

Assim, tem-se como região de alocação o interior do círculo unitário contido no plano complexo \mathbb{C} .

Note que a condição (2.21) é uma generalização das condições de Lyapunov em (2.9) e (2.13). Maiores detalhes sobre a condição podem ser encontradas em Peaucelle et al. (2000) e Rosinová e Hypiúsová (2019).

A seguir, um teorema que empregam a estratégia de \mathcal{D} -estabilidade para sistemas contínuos é apresentado. Por simplicidade, a prova é omitida, mas pode ser encontrada em Koch et al. (2018).

Teorema 2.5 (Koch et al. (2018)). *Dado um escalar $r > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sigma > 0$ e matrizes dependentes de parâmetro A_i e B_i , para $i = 1, \dots, 4$, se existir uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ de forma que*

$$A_i X + X A_i' + B_i Z + Z' B_i' + 2\sigma X < 0, \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & * \\ A_i X + B_i Z & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ * & M_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.24)$$

com

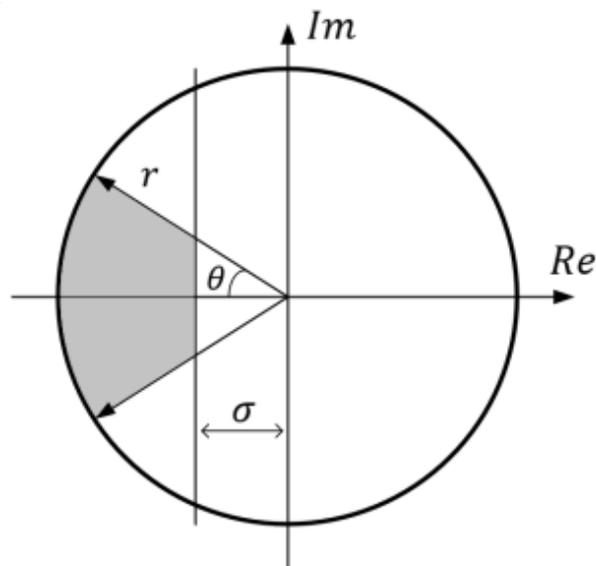
$$\begin{aligned} M_{11} &= \text{sen}(\theta)(A_i X + X A_i' + B_i Z + Z' B_i'), \\ M_{12} &= \text{cos}(\theta)(A_i X - X A_i' + B_i Z - Z' B_i'), \\ M_{22} &= M_{11}, \end{aligned}$$

sejam factíveis para $i = 1, \dots, 4$. Então,

$$K = ZX^{-1} = \begin{bmatrix} K_i & K_p \end{bmatrix},$$

são os ganhos de um controlador PI que garantem a estabilidade em malha fechada do sistema contínuo incerto, além de posicionar os polos dentro da região acinzentada descrita na Figura 1.

Figura 1 – Região de alocação do Teorema 2.5.



Fonte: Koch et al. (2018)

2.4 Otimização do Raio de uma Região de Alocação

Com o objetivo de reduzir o esforço de controle necessário, foi desenvolvida uma rotina de otimização baseada no método da bissecção (CHAPRA; CANALE, 2016) que visa encontrar um valor de raio r , como o ilustrado na Figura 1, tão pequeno quanto possível e que ainda possibilite aos resolvidores de LMI do ambiente Matlab a encontrar um conjunto de ganhos que estabilize o sistema e, em alguns casos também garantam o atendimento a outras especificações de desempenho.

De acordo com o observado na Figura 1, é definida matematicamente uma função objetivo bem como as restrições matemáticas para o problema, portanto tem-se

$$f_o = \min(r), \quad (2.25)$$

sujeito à

$$r > 0, \quad (2.26)$$

e que exista uma solução factível para o Teorema 2.5 utilizando o valor de r encontrado como parâmetro. Na sequência apresenta-se o pseudocódigo.

Algoritmo 1: Minimização do Raio de uma Região de Alocação

```

raio ← 0                                     - - Inicialização de Variáveis
tolerância ← 1 × 10-7
limiteinf ← raiomin
limitesup ← raiomax
erro ← erroini

while |erro| > tolerância do
  raio ← (limiteinf + limitesup)/2           - - Atualiza o valor do raio
  soluçãoaux ← Executar Teorema 2.5        - - Calcula a solução corrente
  if Solução Factível then
    limitesup ← raio
    solução ← soluçãoaux                   - - Atualiza a solução ótima
  end
  else if Solução Não Factível then
    limiteinf ← raio
  end
  erro ← raio - (limiteinf + limitesup)/2   - - Calcula o erro
end

```

As variáveis de raio e tolerância foram iniciadas com os valores apresentados apenas como exemplo, isto é, para outras aplicações esses valores podem ser alterados de acordo com a necessidade do projetista, os valores de limite superior e inferior são definidos baseados nos valores máximos e mínimos possíveis para o raio da região de alocação, e o valor do erro inicial pode ser escolhido respeitando a restrição de que o erro seja inicialmente diferente de zero.

Assim, o código encontrará um controlador com o menor raio possível assumindo uma tolerância de diferença entre os raios encontrados de 10^{-7} , impedindo que o sistema entre em repetição perpétua. Devido a tolerância ser muito pequena, o valor do raio da última iteração é bastante próximo do limite real para o valor de raio. Note que o valor da tolerância pode ser alterado para garantir maior precisão caso o sistema em que se esteja trabalhando exija. Além disso, uma condição adicional de quantidade máxima de iterações pode ser adicionada para evitar que o código execute por muito tempo, vale ressaltar porém que esta sugestões não foram implementadas neste trabalho por não haver necessidade.

2.5 Estrutura de Seguimento de Referência

2.5.1 Obtenção de uma Representação em Espaço de Estados para Sistemas de Primeira Ordem

A fim de utilizar o Teorema 2.5, é necessário obter uma representação em espaço de estados a partir de funções de transferência. Isto pode ser feito por meio do seguinte procedimento.

Seja $G(s)$ descrita por

$$G(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}. \quad (2.27)$$

Portanto,

$$(\tau s + 1)y(s) = Kr(s),$$

ou ainda

$$\tau sy(s) + y(s) = Kr(s).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtêm-se

$$\begin{aligned} \tau \dot{y}(t) + y(t) &= Kr(t), \\ \dot{y}(t) &= -\frac{1}{\tau}y(t) + \frac{K}{\tau}r(t). \end{aligned}$$

Definindo o vetor de estados como

$$x(t) = y(t),$$

obtêm-se a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{-1}{\tau} x(t) + \frac{K}{\tau} r(t), \\ y(t) &= x(t) + 0r(t). \end{aligned}$$

2.5.2 Estrutura para Obtenção de um Controlador Proporcional Integral

O controlador proporcional integral (PI), como o próprio nome sugere, possui dois módulos de ação. A principal função da ação integral é fazer com que processos do tipo 0, isto é, sistemas que não possuem polos na origem, sigam, com erro nulo, um sinal de referência do tipo degrau. Entretanto, a ação integral, se aplicada isoladamente, tende a piorar a estabilidade relativa do sistema. Para contrabalançar esse fato, a ação integral é em geral utilizada em conjunto com a ação proporcional constituindo-se o controlador PI, cuja lei de controle $u(t)$ é dada por (OGATA, 2010; SEBORG et al., 2010; DORF; BISHOP, 2011)

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt, \quad (2.28)$$

e função de transferência dada por

$$G_c(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad (2.29)$$

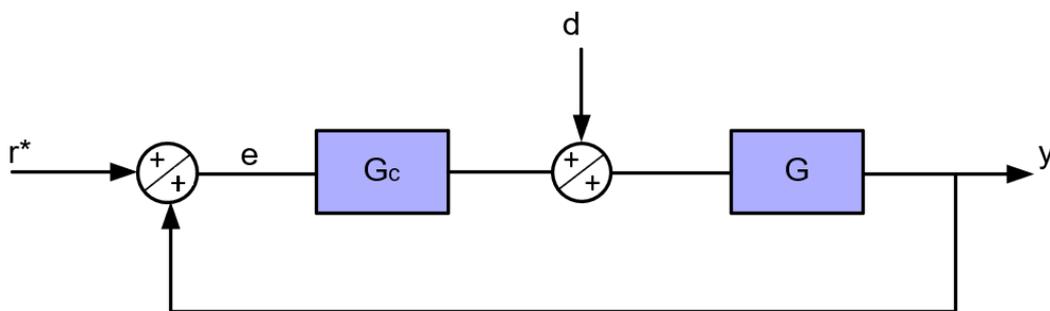
em que $e(t)$ é o sinal de erro do sistema, K_p é a parcela proporcional dos ganhos e K_i é a parcela integral dos ganhos do controlador.

Com o objetivo de projetar um controlador PI utilizando o Teorema 2.5, é necessário fazer uma alteração na representação do modelo em espaço de estados apresentada na Seção 2.5.1 para incluir a realimentação do sinal de erro, como uma nova variável de estado. O procedimento apresentado a seguir segue o que foi delineado em Koch et al. (2018).

Considere um sistema de primeira ordem que possa ser representado como na Figura 2, em que r^* é a entrada do sistema, $e = r^* + y$ é o erro, G_c representa um controlador, d_u uma entrada de perturbação e, por fim, a função de transferência da planta é

$$G(s) = \frac{b}{s + a}. \quad (2.30)$$

Figura 2 – Diagrama de blocos de uma planta de primeira ordem.



Fonte: do autor.

Com base na Figura 2, tem-se que

$$e(t) = r(t) + y(t). \quad (2.31)$$

Definindo uma nova variável $x_1(t)$ como

$$x_1(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (2.32)$$

obtém-se

$$\dot{x}_1(t) = e(t) = r(t) + y(t). \quad (2.33)$$

A seguir, empregando o desenvolvimento da Seção 2.5.1 em (2.30), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -ax_2(t) + bu(t), \\ y(t) &= x_2(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Assim, o sistema final com o novo estado $x_1(t)$ pode ser reescrito associando (2.34) e (2.33), isto é,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t).$$

2.6 Discretização de Equações de Estado

A grande maioria dos sistemas utilizados na prática são contínuos, portanto, para utilizar técnicas de controle digital é preciso obter uma representação discreta para a planta. Geralmente é utilizada a estratégia de discretização por segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *Zero Order Holder*). Dessa forma, as versões discretizadas do sistema descrito em (2.1) e (2.2) são (PHILLIPS; NAGLE; CHAKRABORTTY, 1990; SEBORG et al., 2010; DORF; BISHOP, 2011)

$$\begin{aligned} A_d(\alpha) &= \varepsilon^{A(\alpha)T}, \\ B_d(\alpha) &= \int_0^T \varepsilon^{A(\alpha)\tau} d\tau B(\alpha), \\ C_d(\alpha) &= C(\alpha), \\ D_d(\alpha) &= D(\alpha), \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que ε representa a função exponencial e T é o período de amostragem.

Empregando a expansão da série de Taylor para descrever as matrizes incertas $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$, as expressões em (2.35) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} A_d(\alpha) &= \varepsilon^{A(\alpha)T} = I + A(\alpha)T + A^2(\alpha)\frac{T^2}{2} + A^3(\alpha)\frac{T^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(\alpha)^n T^n}{n!}, \\ B_d(\alpha) &= \int_0^T \varepsilon^{A(\alpha)\tau} d\tau B(\alpha), \\ &= \int_0^T \left(I + A(\alpha)\tau + A^2(\alpha)\frac{\tau^2}{2} + A^3(\alpha)\frac{\tau^3}{3!} + \dots \right) d\tau B(\alpha), \\ &= \left(IT + A(\alpha)\frac{T^2}{2} + A^2(\alpha)\frac{T^3}{3!} + A^3(\alpha)\frac{T^4}{4!} + \dots \right) B(\alpha), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n T^{n+1}}{(n+1)!} B(\alpha). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Note que para a obtenção do modelo discreto da planta contínua é fundamental definir o período de amostragem T a ser utilizado. Assim, para a definição de T algumas regras práticas podem ser aplicadas (PHILLIPS; NAGLE; CHAKRABORTTY, 1990; DORF; BISHOP, 2011), as quais são detalhadas a seguir.

Uma delas leva em consideração as constantes de tempo do sistema em malha aberta, definindo

$$T = 0.1\tau_{mr},$$

isto é, um décimo da constante de tempo mais rápida τ_{mr} do sistema em malha aberta. Uma segunda opção é definir a frequência de amostragem ω_s com base na frequência natural amortecida do polo dominante em malha fechada tal que

$$\omega_s = N\omega_d, \quad 8 \leq N \leq 10.$$

Outra opção baseia-se na utilização de informações da banda passante ω_b do sistema em malha fechada, escolhendo a frequência de amostragem ω_s como

$$\omega_s = 10\omega_b. \quad (2.38)$$

Vale ressaltar que, uma vez definida a frequência de amostragem, o período de amostragem é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s}. \quad (2.39)$$

No presente trabalho, seguindo uma estratégia básica da literatura (MORAIS et al., 2013; JUNGERS; OLIVEIRA; PERES, 2011; LEE; WON, 2006), devido à dificuldade em lidar com a função exponencial de matrizes incertas, emprega-se uma aproximação das expressões (2.36) e (2.37), de forma que todos os valores posteriores aos termos de primeira ordem são considerados irrelevantes. A essa aproximação dá-se o nome de discretização de primeira ordem de Euler. Portanto, as matrizes da dinâmica e de entradas para sistemas discretizados possuem a forma

$$\begin{aligned} A_d(\alpha) &= I + A(\alpha)T, \\ B_d(\alpha) &= TB(\alpha). \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.7 Positividade de Sistemas Lineares

A definição de positividade de sistemas lineares pode ser dividida em dois subgrupos, positividade externa e positividade propriamente dita, sendo o segundo conceito o que será utilizado neste trabalho.

Segundo Farina e Rinaldi (2011), um sistema linear SISO (do inglês, *Single Input Single Output*) (A, b, c^T) é dito externamente positivo se, e somente se, sua saída forçada, isto é, sua saída correspondente a um estado inicial nulo, é não negativa para cada função de entrada. Além disso, há uma definição que descreve uma propriedade destes sistemas que em alguns casos pode ser utilizada para identificá-los, tal definição afirma que um sistema linear é dito externamente positivo se, e somente se, sua resposta ao impulso é não negativa (FARINA; RINALDI, 2011).

Com relação a sistemas positivos, Farina e Rinaldi (2011) afirmam que um sistema linear (A, b, c^T) é dito positivo se, e somente se, para cada condição inicial não negativa e para cada entrada não negativa, seus estados e saída são não negativos. Note que esta definição é um complemento da anterior, visto que a primeira definição trata da relação das entradas e saídas do sistema, enquanto a segunda trata da relação entre as saídas e condições iniciais do sistema.

Por fim, para descrever uma forma de identificação de sistemas positivos a partir da análise das matrizes que o compõem, Farina e Rinaldi (2011) dizem que um sistema linear discreto no tempo (A, b, c^T) é positivo se, e somente se, $A \geq 0$, $b \geq 0$, $c^T \geq 0$, isto é, cada um dos elementos das matrizes A , b , e c^T são não negativos. E um sistema linear de tempo contínuo (A, b, c^T) é positivo se, e somente se, a matriz A é Metzler, o que significa que os elementos fora da diagonal principal são não negativos, além disso, todos os elementos das matrizes b e c^T são não negativos.

3 Aplicação de Estratégias de Controle a Tempo Contínuo com \mathcal{D} -Estabilidade em uma Planta de Nível

Este capítulo trata do projeto de controladores PI robustos \mathcal{D} -estáveis para uma planta didática presente no laboratório de automação e controle do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas (ICEA) da UFOP. São evidenciadas as melhorias alcançadas com a utilização dos controladores sintetizados neste trabalho em contraste com os resultados reportados em Lage (2019).

3.1 Planta de Controle de Nível

Para a realização dos testes, foi utilizada a planta de controle de nível disponível no laboratório de automação e controle do ICEA/UFOP. Sua identificação e modelagem foram realizadas em Lage (2019), cujos dados são utilizados neste estudo.

Em Lage (2019), são apresentadas uma modelagem matemática (caixa branca) e quatro modelos identificados (caixa preta) da planta de nível. A modelagem caixa branca é o processo de obtenção do modelo que se baseia em leis e princípios físicos, na qual supõe-se que todos os parâmetros são conhecidos ou previamente determinados. Por outro lado, a modelagem caixa preta é uma estratégia que permite a obtenção da função de transferência de um sistema experimentalmente, valendo-se da relação entre os dados de entrada e saída do sistema (AGUIRRE, 2007).

3.1.1 Resultados

Com as estruturas preparadas, foram realizados testes em cada uma das modelagens da planta utilizando o Teorema 2.5. A seguir, o seu desempenho foi comparado com o dos controladores reportados em Lage (2019). Destaca-se que os controladores sintetizados em Lage (2019) utilizam a técnica de sintonia de Ziegler e Nichols (OGATA, 2010), que são denominados neste trabalho como ZN.

3.1.2 Modelo Caixa Branca

O modelo caixa branca possui função de transferência dada por

$$G(s) = \frac{b}{s + a}. \quad (3.1)$$

em que $a = 1/190$, $b = 1/380$. Considerou-se uma incerteza de 30% nos parâmetros a e b , gerando um modelo politópico de 4 vértices.

Dado que as raízes dominantes do sistema em malha fechada refletem as especificações de desempenho desejadas, por exemplo, tempo de assentamento (T_s) e máxima ultrapassagem percentual (MUP), as quais são calculadas por

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \quad (3.2)$$

e

$$MUP = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \implies \zeta = \left| \frac{\ln MUP/100}{\sqrt{\pi^2 + (\ln MUP/100)^2}} \right|, \quad (3.3)$$

então os valores de θ e σ usados no Teorema 2.5, são obtidos a partir dos valores de ζ e ω_n por meio das seguintes relações.

$$\theta = \arccos \zeta, \quad (3.4)$$

e

$$\sigma = \zeta\omega_n. \quad (3.5)$$

Sabendo que, em todos os casos, emprega-se como parâmetros de projeto $T_s = 200$ s e $MUP = 5\%$. Logo, têm-se que

$$\theta = \frac{106}{131}, \quad (3.6)$$

e

$$\sigma = \frac{1}{50}. \quad (3.7)$$

O valor de r foi otimizado a fim de se obter uma solução com o menor raio possível, reduzindo, dessa forma, o esforço de controle necessário para estabilizar o sistema.

Os testes foram realizados em cada um dos 4 vértices do politopo, adicionalmente foi gerada também uma combinação aleatória entre os vértices do politopo. Com o auxílio do Matlab, uma rotina para os cálculos foi desenvolvida obtendo os resultados reportados na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados do modelo caixa branca.

α	Controladores			
	Ziegler-Nichols (ZN) [K_p K_i] = [18, 05 0, 531]		Teorema 2.5 [K_p K_i] = [20, 3525 0, 3570]	
	MUP	T_s	MUP	T_s
[0,0723 0,5735 0,2203 0,1339]	16,5%	125 s	9,69%	158 s
[1 0 0 0]	22%	218 s	14%	196 s
[0 1 0 0]	16,5%	117 s	9,96%	149 s
[0 0 1 0]	17,3%	158 s	9,49%	145 s
[0 0 0 1]	13,5%	118 s	7,11%	141 s

A partir da Tabela 1 e das figuras 3 e 4, pode-se observar que ambos os controladores não foram capazes de produzir um sistema em malha fechada que obedeça a especificação de

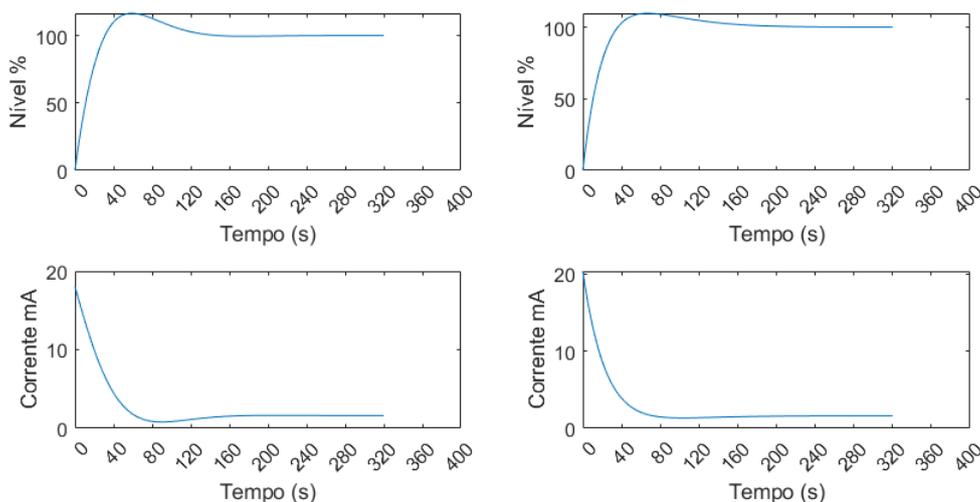
5% de máxima ultrapassagem percentual. Isto ocorre devido a algumas aproximações que foram feitas durante os cálculos para as especificações de desempenho. Tais cálculos foram realizados supondo uma planta de segunda ordem padrão. No entanto, com a introdução do controlador PI, a planta passa a ter um zero que tende a aumentar a máxima ultrapassagem.

Embora a MUP não tenha sido menor que 5% ainda houve uma melhora considerável desse parâmetro na utilização do controlador obtido via Teorema 2.5 em relação ao resultado obtido pelo controlador projetado por meio da técnica de sintonia de Ziegler-Nichols em todos os testes realizados para o modelo, sem prejudicar a outra especificação de desempenho, isto é, o tempo de assentamento máximo de 200 s, o qual foi respeitado em todos os testes.

Com relação ao tempo de assentamento, o controlador via Ziegler-Nichols apresentou um melhor desempenho, mas vale lembrar que é possível produzir um resultado melhor por meio do Teorema 2.5 se não for realizada a rotina de minimização do raio r ou se for escolhido um valor maior para esse parâmetro de forma a aumentar o esforço de controle, produzindo uma resposta mais rápida. Contudo, isso pode levar o sistema a ter um valor de MUP maior do que o que foi obtido com a minimização. Note, no entanto, que o parâmetro de projeto $T_s = 200$ s nunca foi desrespeitado pelos controladores sintetizados pelo Teorema 2.5.

Vale ainda destacar os testes realizados no primeiro e terceiro vértices do polítopo, nos quais tanto a MUP quanto o tempo de assentamento foram melhores para o sistema controlado por meio do controlador do Teorema 2.5.

Figura 3 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa branca com $\alpha = [0, 0723 \ 0, 5735 \ 0, 2203 \ 0, 1339]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.

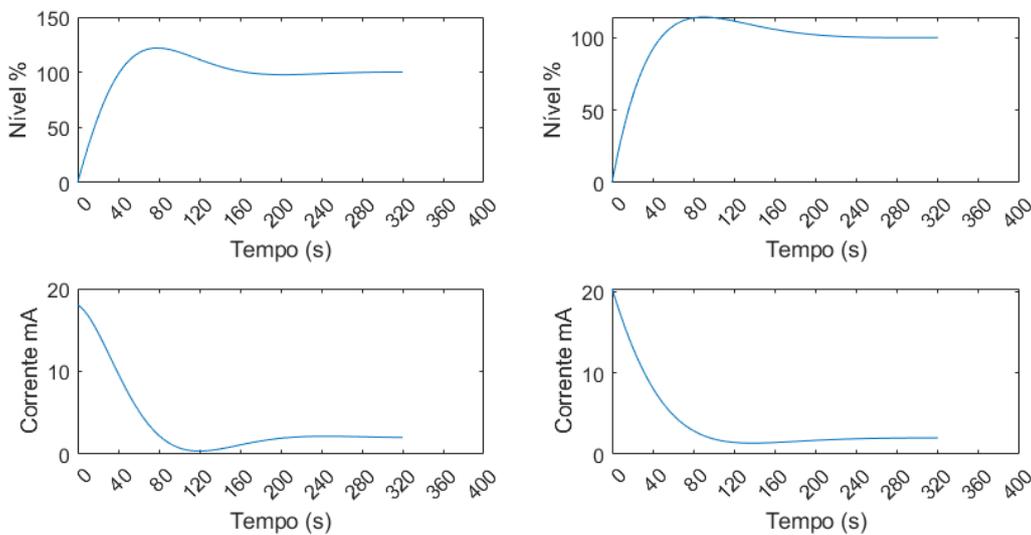


Fonte: do autor.

As figuras 3 e 4 correspondem ao sistema com $\alpha = [0, 0723 \ 0, 5735 \ 0, 2203 \ 0, 1340]$ e $\alpha = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ respectivamente e revelam uma redução no esforço de controle realizado pelo

controlador sintetizado via Teorema 2.5 em relação ao controlador ZN, além de reafirmar o discutido com relação à MUP e ao tempo de assentamento, isto é, para o sistema com $\alpha = [0, 0723 \ 0, 5735 \ 0, 2203 \ 0, 1340]$ foi possível reduzir a MUP em aproximadamente 6,5% ao custo de aumentar o tempo de assentamento em 33 s, de forma análoga para o primeiro vértice do sistema, ou seja, o sistema com $\alpha = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ apresentou uma redução com relação a MUP em 8% e o tempo de assentamento em 22 s, em comparação com o controlador ZN, que não foi capaz de atender nenhuma das especificações de projeto.

Figura 4 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa branca com $\alpha = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

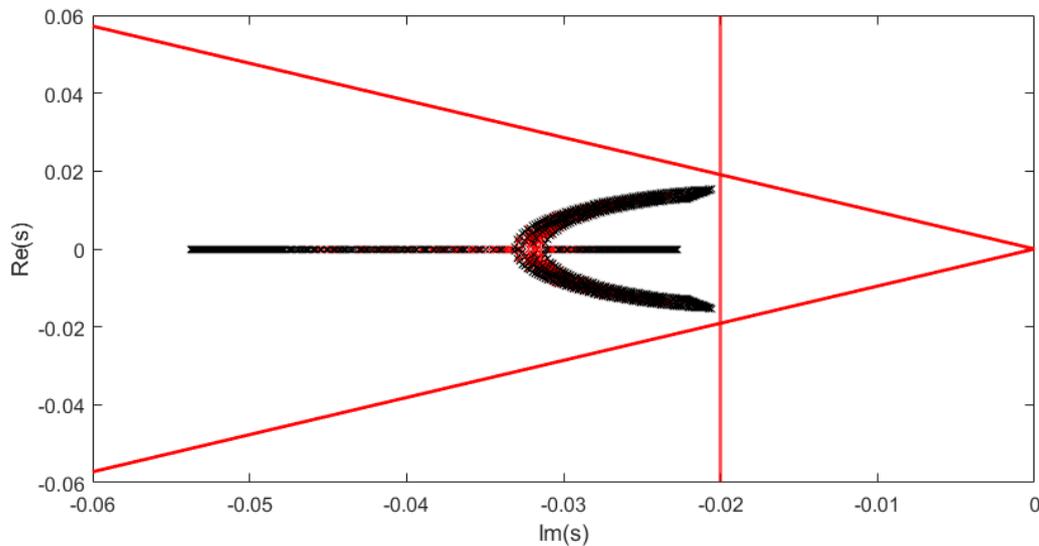
Por uma questão de simplicidade, as figuras dos outros vértices não foram incluídas, mas observou-se um comportamento semelhante nos resultados.

A Figura 5 mostra a nuvem de autovalores do politopo do modelo caixa branca, as linhas em vermelho representam os limites da região de alocação. A nuvem de autovalores foi feita utilizando as bordas do politopo tomando 2 vértices de cada vez e plotando seus polos em preto, e percorrendo o politopo com 1000 pontos aleatórios, isto é, gerando sistemas com variação a partir de diferentes valores de α mil vezes e plotando seus autovalores em vermelho. A partir dessa imagem, nota-se que o politopo é \mathcal{D} -estável pois a sua nuvem de autovalores se encontra dentro da região de alocação para todos os pontos.

3.1.3 Modelo Caixa Preta

O modelo caixa preta foi feito utilizando 4 pontos de operação diferentes, os quais são caracterizados pela posição da válvula de alimentação do tanque de água da planta, que assume porcentagens de abertura de 25%, 50%, 75% e 100%.

Figura 5 – Nuvem de autovalores da planta com controlador para o modelo caixa branca.



Fonte: do autor.

O modelo caixa preta possui função de transferência dada por

$$G(s) = \frac{b}{s + a}, \quad (3.8)$$

em que a e b assumem diferentes valores dependendo de qual ponto de operação se encontra a válvula de alimentação do tanque da planta.

Da mesma forma como feito para o modelo caixa branca, considerou-se novamente uma incerteza de 30% nos parâmetros a e b , gerando um modelo politópico de 4 vértices. Os valores de θ e σ usados no Teorema 2.5 foram calculados utilizando as mesmas especificações de desempenho e, portanto, os valores são os mesmos obtidos com as equações de (3.3) e (3.5). O valor de r foi otimizado a fim de se obter uma solução com o menor raio possível, reduzindo dessa forma o esforço de controle necessário para estabilizar o sistema.

Os testes foram realizados em cada um dos 4 vértices dos politopos de cada ponto de operação, adicionalmente foi gerada também uma combinação aleatória entre os vértices do politopo.

Ponto de Operação 25%

Para o modelo caixa preta com ponto de operação de 25%, os parâmetros em (3.8) são $a = 1/102$ e $b = 1/120$. Os resultados da aplicação dos controladores ZN e do controlador feito pela utilização do Teorema 2.5 são apresentados na Tabela 2.

A partir da Tabela 2 e das figuras 6 e 7, observa-se que somente para os vértices 3 e 4 foi possível obter um controlador utilizando o Teorema 2.5 que atende ambas as especificações de desempenho, isto é, o tempo de assentamento inferior a 200 s, e também uma máxima ultrapassagem percentual de 5%. Contudo vale ressaltar que o tempo de assentamento manteve-

Tabela 2 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 25%.

α	Controladores			
	Ziegler-Nichols (ZN)		Teorema 2.5	
	$[K_p, K_i] = [9, 38, 0, 407]$		$[K_p, K_i] = [6, 0, 481, 0, 1225]$	
	MUP	T_s	MUP	T_s
[0,1397 0,2827 0,2984 0,2792]	14,1%	84,5 s	6,51%	148 s
[1 0 0 0]	19,6%	99,9 s	11,6%	188 s
[0 1 0 0]	14,7%	76,2 s	8,82%	138 s
[0 0 1 0]	14,4%	102 s	4,63%	174 s
[0 0 0 1]	11,3%	76,1 s	4,06%	118 s

se dentro do estipulado para todos os testes, incluindo os testes que utilizaram o controlador obtido via sintonia de Ziegler e Nichols.

Vale lembrar que a máxima ultrapassagem percentual neste ponto de operação não indica transbordo, visto que o ponto de operação é de 25% faz-se necessário um sobressinal de 300% para atingir a capacidade máxima do tanque.

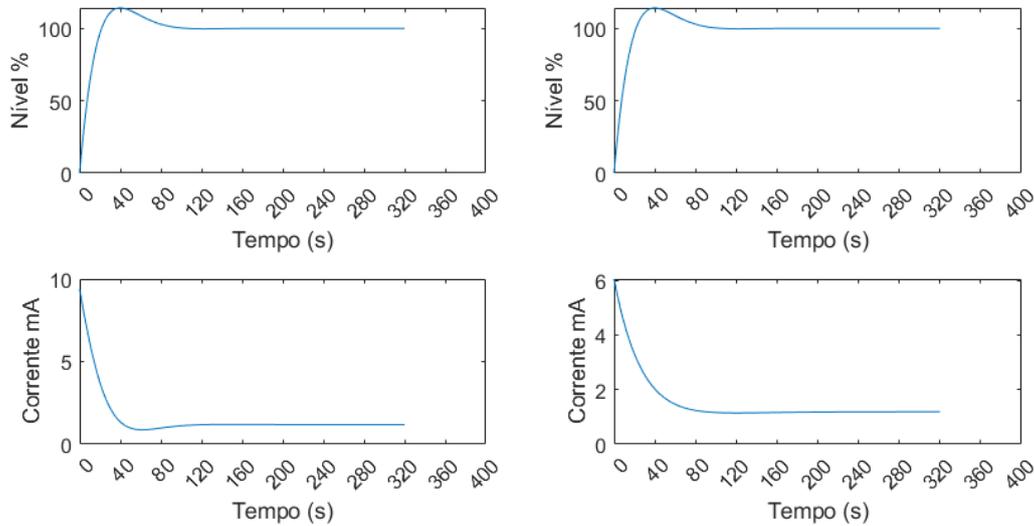
A melhoria mais relevante pode ser observada no vértice 3, isto é, o sistema com $\alpha = [0\ 0\ 1\ 0]$ que apresentou uma redução no sobressinal de 9,77%, enquanto o tempo de assentamento foi aumentado de 72 s, mas ainda assim respeitando a especificação de desempenho. Destaca-se o vértice 4 com $\alpha = [0\ 0\ 0\ 1]$ que possui os melhores resultados tanto de tempo de assentamento quanto de máxima ultrapassagem percentual. Em adicional, nota-se que o esforço de controle necessário para manter a trajetória do sistema estável é menor para o sistema que utiliza o controlador obtido por meio da utilização do Teorema 2.5.

Vale lembrar que é possível gerar resultados melhores para os sistemas acima descritos desde que não se utilize a rotina para minimizar o esforço de controle. Desta forma, pode-se encontrar soluções com melhor tempo de assentamento. Note, porém, que é necessário verificar se o sinal de controle obtido via simulação pode ser implementado de forma prática, evitando que o sistema exija operar com valores de sinais que não são possíveis de ser aplicados, não reproduzindo os valores obtidos via simulação devido à saturação do sinal de controle.

A Figura 8 mostra a nuvem de autovalores do politopo do modelo caixa preta para o ponto de operação de 25%, as linhas em vermelho representam os limites da região de alocação. A nuvem de autovalores foi gerada da mesma forma como delineado para o modelo caixa branca.

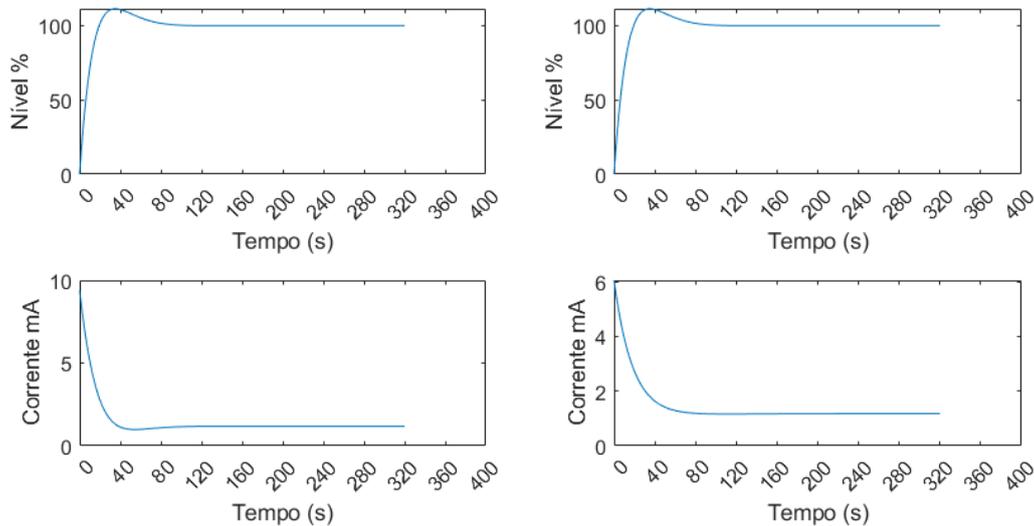
A partir desta imagem, nota-se que o politopo é \mathcal{D} -estável, pois a sua nuvem de autovalores se encontra dentro da região de alocação. Também pode-se observar porque os resultados obtidos para este ponto de operação são melhores quando comparados aos do modelo caixa branca. Isso ocorre porque a nuvem de autovalores se encontra levemente deslocada para a esquerda, levando o sistema para uma região de maior estabilidade, com melhor tempo de assentamento e com melhor MUP, devido à maior distância que pode ser observada entre a nuvem e as linhas limítrofes da região de alocação. De forma simplória, quanto mais distante (porém ainda contida dentro da região) das linhas que limitam a região, melhores são os resultados.

Figura 6 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 25% e $\alpha = [0, 1397 \ 0, 2827 \ 0, 2984 \ 0, 2792]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

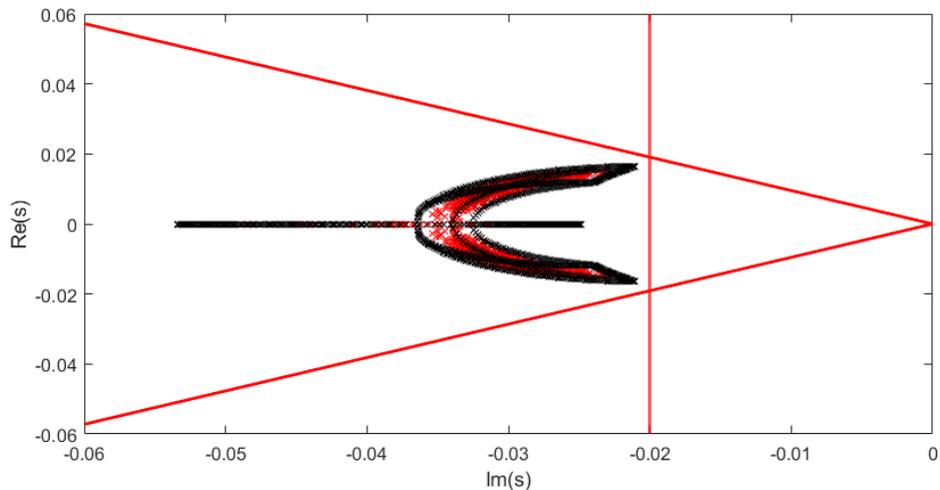
Figura 7 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 25% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

Vale ressaltar que as nuvens de autovalores de todos os pontos de operação são todas semelhantes, semelhantes também à nuvem do modelo caixa branca, por isso os resultados não são muito divergentes, apresentam alguma variação devido as ligeiras diferenças na dinâmica

Figura 8 – Nuvem de autovalores da planta com controlador para o modelo caixa preta com ponto de operação de 25%.



Fonte: do autor.

do sistema devido à modelagem ser diferente para o caso caixa branca, e devido aos pontos de operação que também alteram os parâmetros da dinâmica do sistema para o modelo caixa preta, contudo os resultados são análogos conforme o esperado.

Para fins de simplicidade e devido à grande semelhança com os resultados mostrados, as figuras correspondentes aos outros testes do ponto de operação 25% são omitidas.

Ponto de Operação 50%

Para o modelo caixa preta com ponto de operação de 50%, os parâmetros em (3.8) são $a = 1/130$ e $b = 12/1625$. Assim como feito anteriormente, considera-se uma variação de 30% nesses parâmetros gerando um polítopo composto por 4 vértices. Os resultados da aplicação dos controladores ZN e do controlador obtido por meio do Teorema 2.5 são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 50%.

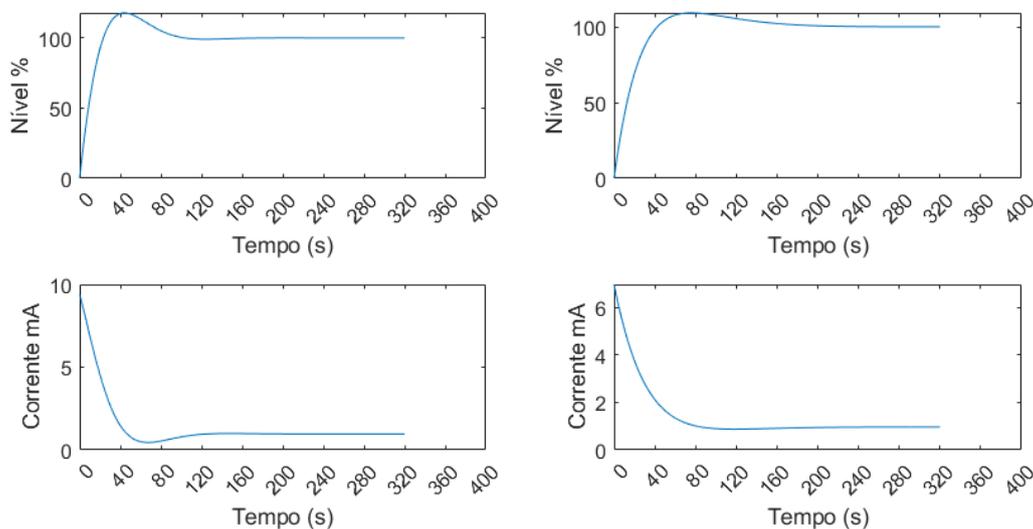
α	Controladores			
	Ziegler-Nichols (ZN) $[K_p \ K_i] = [9, 38 \ 0, 407]$		Teorema 2.5 $[K_p \ K_i] = [6, 9657 \ 0, 1322]$	
	MUP	T_s	MUP	T_s
$[0,2440 \ 0,4297 \ 0,3146 \ 0,0117]$	17,9%	91 s	9,19%	163 s
$[1 \ 0 \ 0 \ 0]$	22%	149 s	12,6%	191 s
$[0 \ 1 \ 0 \ 0]$	16,5%	79,7 s	9,3%	143 s
$[0 \ 0 \ 1 \ 0]$	17,3%	107 s	6,6%	185 s
$[0 \ 0 \ 0 \ 1]$	13,5%	80,3 s	5,34%	129 s

Da Tabela 3 e das figuras 9 e 10 nota-se da mesma forma como observado para o ponto de operação de 25%, um aprimoramento no esforço de controle exigido pela sistema, que

foi reduzido de duas unidades no momento inicial de funcionamento do sistema. Além disso, os melhores resultados apresentam-se nos vértices 3 e 4. Contudo vale ressaltar que nenhum dos controladores foi capaz de garantir que o sistema respeitasse ambas as especificações de desempenho. Dessa forma, houve apenas uma melhora na máxima ultrapassagem percentual em cada um dos vértices ao custo de um aumento no tempo de assentamento. Observe que a máxima ultrapassagem percentual neste ponto de operação não indica transbordo, visto que o ponto de operação é de 50% faz-se necessário um sobressinal de 100% para atingir a capacidade máxima do tanque.

O sistema com $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ destaca-se por apresentar a maior melhoria com relação ao sobressinal, o qual foi reduzido de 10,7% ao custo de um aumento de 78 s no tempo de assentamento do sistema. Note ainda que o sistema com $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ apresentou os melhores resultados desse grupo de testes com o menor tempo de assentamento e a menor MUP. Contudo ainda fracassou em respeitar a especificação de sobressinal por 0,34%, tal condição pode ser corrigida escolhendo outro valor de r , que é o raio da região de alocação. Desta forma, poderia ser aumentado o esforço de controle garantindo que ambas as especificações de desempenho fossem respeitadas.

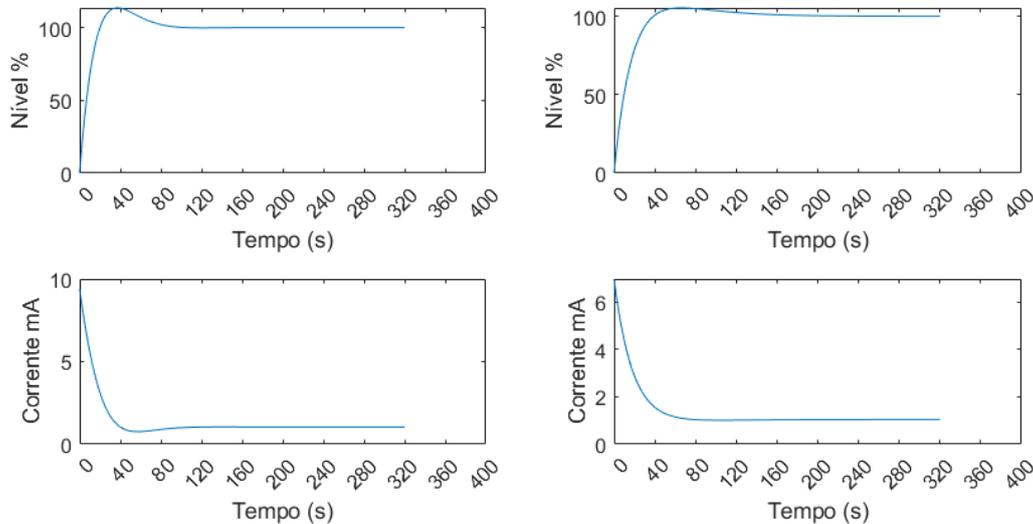
Figura 9 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 50% e $\alpha = [0, 2440 \ 0, 4297 \ 0, 3146 \ 0, 0117]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

Os resultados gráficos de alguns modelos e da nuvem de autovalores foram omitidos por simplicidade e por apresentarem resultados muito semelhantes aos que foram apresentados, isto é, uma redução da MUP e do esforço de controle ao custo de um pequeno aumento do tempo de assentamento.

Figura 10 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 50% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

Ponto de Operação 75%

Para o modelo caixa preta com ponto de operação de 75%, os parâmetros em (3.8) são $a = 1/129$ e $b = 8/1075$. Os resultados da aplicação dos controladores ZN e do controlador obtido via Teorema 2.5, apresentam-se na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 75%.

α	Controladores			
	Ziegler-Nichols (ZN) $[K_p \ K_i] = [9, 38 \ 0, 407]$		Teorema 2.5 $[K_p \ K_i] = [7, 0254 \ 0, 1331]$	
	MUP	T_s	MUP	T_s
$[0,0197 \ 0,3019 \ 0,0967 \ 0,5817]$	14,9%	82,4 s	6,76%	139 s
$[1 \ 0 \ 0 \ 0]$	22,1%	150 s	12,6%	192 s
$[0 \ 1 \ 0 \ 0]$	16,6%	79,9 s	9,31%	143 s
$[0 \ 0 \ 1 \ 0]$	17,4%	107 s	6,66%	185 s
$[0 \ 0 \ 0 \ 1]$	13,6%	80,5 s	5,38%	129 s

Na Tabela 4, pode-se notar que os controladores não foram capazes de produzir um sistema em malha fechada que obedeça a especificação de 5% de máxima ultrapassagem percentual, e pela mesma justificativa apontada para os pontos de operação anteriores, isto é, o sistema não é de segunda ordem padrão, o que implica que todos os cálculos feitos para a região de alocação são aproximações podendo não alcançarem os resultados esperados. Note que a máxima ultrapassagem percentual neste ponto de operação não indica transbordo, visto que o ponto

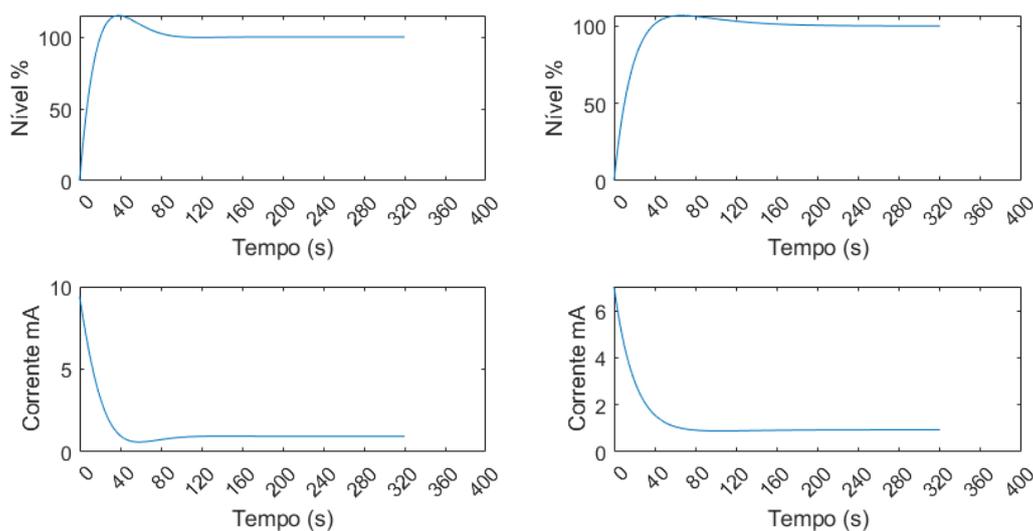
de operação é de 75% faz-se necessário um sobressinal de 33,33% para atingir a capacidade máxima do tanque.

Com relação à MUP, os vértices que apresentam o pior resultado com o controlador ZN são o primeiro e o terceiro, mas houve uma melhora considerável após a utilização do controlador obtido por meio do Teorema 2.5.

O tempo de assentamento neste grupo de testes atingiu a especificação em todas as amostras e, como destaque tem-se o sistema com $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ que apresentou os maiores aprimoramentos dos resultados no tocante à especificações e desempenho, tendo uma melhora de 10,74% na máxima ultrapassagem percentual e um aumento de 78 s no tempo de assentamento, respeitando o limite de tempo de assentamento, e ficando próximo do limite de MUP. Outro destaque é o sistema com $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ que apresenta os melhores resultados tanto em relação à MUP quanto ao T_s , não sendo capaz de atender a especificação de máxima ultrapassagem percentual por apenas 0,38%.

A partir da figuras 11 e 12 nota-se que houve também uma redução no esforço de controle do sistema que pode ser facilmente observada no momento inicial, que indica o esforço despendido para colocar o sistema em movimento, assim como destacado em testes anteriores. Caso não fosse buscada uma redução da amplitude da lei de controle, resultados melhores poderiam ter sido obtidos.

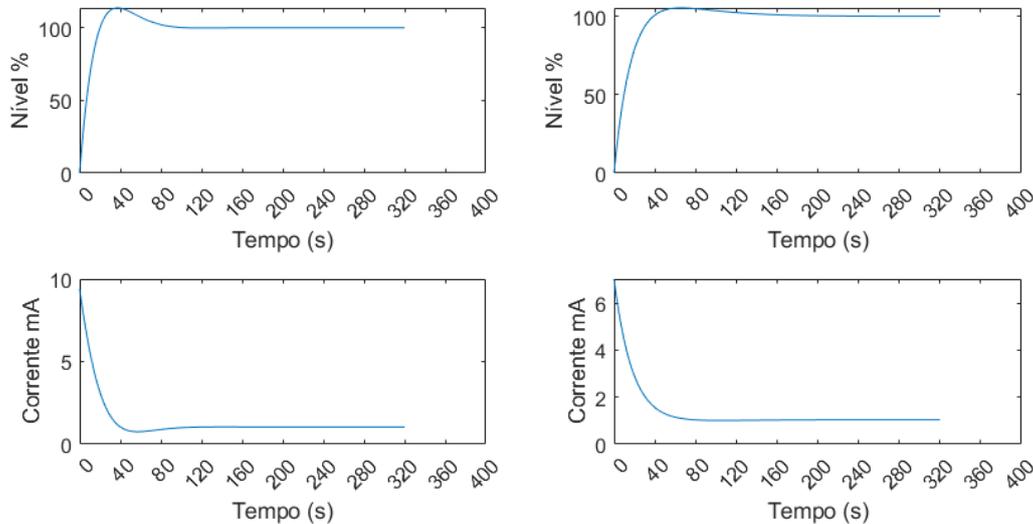
Figura 11 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0,0197 \ 0,3019 \ 0,0967 \ 0,5817]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

Da mesma forma como mencionado para os outros grupos de testes, os resultados gráficos como o da nuvem de autovalores e também de alguns vértices foram omitidos por simplicidade e por apresentarem resultados muito semelhantes aos que foram apresentados.

Figura 12 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

Ponto de Operação 100%

Para o modelo caixa preta com ponto de operação de 100%, os parâmetros em (3.8) são $a = 1/140$ e $b = 87/14000$, de forma análoga aos testes anteriores foi considerada uma variação de 30% nesses parâmetros gerando um polítopo composto por 4 vértices. Os resultados da aplicação dos controladores ZN e do controlador obtido por meio do Teorema 2.5, são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultados do modelo caixa preta com ponto de operação de 100%.

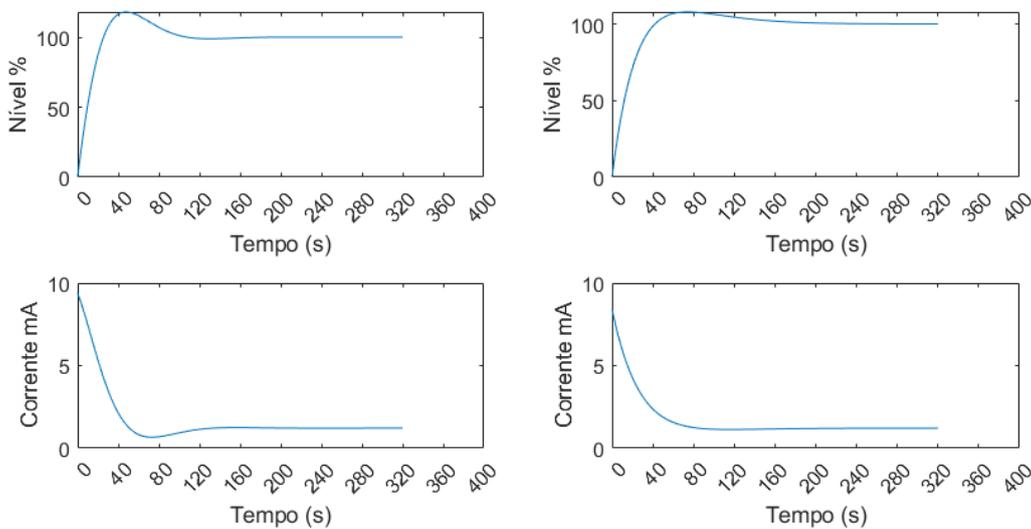
	Controladores			
	Ziegler-Nichols (ZN) $[K_p \ K_i] = [9, 38 \ 0, 407]$		Teorema 2.5 $[K_p \ K_i] = [8, 4098 \ 0, 1566]$	
α	MUP	T_s	MUP	T_s
$[0,2028 \ 0,1511 \ 0,2515 \ 0,3946]$	18,1%	96,3 s	7,84%	156 s
$[1 \ 0 \ 0 \ 0]$	24,1%	174 s	12,9%	193 s
$[0 \ 1 \ 0 \ 0]$	18,4%	85,8 s	9,46%	145 s
$[0 \ 0 \ 1 \ 0]$	19,2%	116 s	7,25%	188 s
$[0 \ 0 \ 0 \ 1]$	15,2%	86,9 s	5,75%	132 s

Na Tabela 5, novamente pode-se observar que nenhum dos controladores foi capaz de garantir a especificação de máxima ultrapassagem percentual para este ponto de operação. Contudo foram alcançadas melhorias em todos os polítopos com relação a MUP, destacando-se os modelos incertos com $\alpha = [0, 2028 \ 0, 1511 \ 0, 2515 \ 0, 3946]$, $\alpha = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ e $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$, com reduções de 10,26%, 11,2% e 11,95%, respectivamente, sempre obedecendo à especificação de

tempo de assentamento máximo de 200 s. Destaca-se que, neste ponto de operação o sobressinal indica um transbordo no nível de líquido no tanque, visto que o ponto de operação é de 100% qualquer valor de porcentagem de nível acima do indicado representa líquido além da capacidade do tanque.

Destaca-se ainda o vértice 4 que possui o melhor desempenho para este ponto de operação, apresentando o melhor tempo de assentamento e máxima ultrapassagem deste grupo, não respeitando o limite de MUP por apenas 0,75%

Figura 13 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0, 2028 \ 0, 1511 \ 0, 2515 \ 0, 3946]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

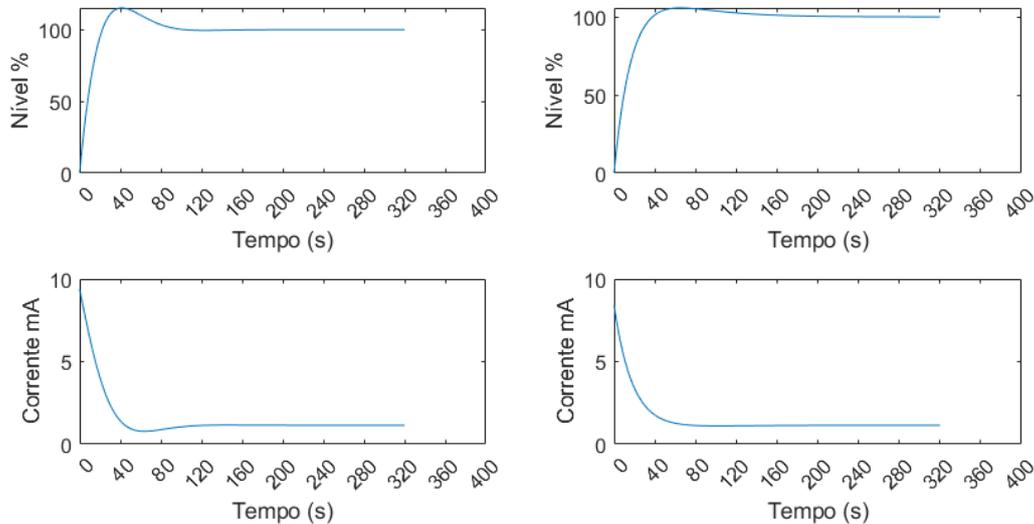
As figuras 13 e 14 apresentam a representação da saída do sistema bem como o esforço de controle para manter as trajetórias estáveis dos sistemas com $\alpha = [0, 2028 \ 0, 1511 \ 0, 2515 \ 0, 3946]$ e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, respectivamente, e revelam a redução no esforço de controle quando utilizando o controlador sintonizado pelo emprego do Teorema 2.5. Além disso explicita a redução do sobressinal e o aumento do tempo de assentamento devido à mudança na localização dos polos do sistema.

Pelas mesmas razões de todos os grupos de testes anteriores, alguns resultados gráficos deste ponto de operação não foram incluídos por apresentarem resultados semelhantes aos que estão presentes.

3.1.4 Conclusão Parcial

A partir dos testes realizados tanto para o modelo caixa branca, quanto para os modelos caixa preta, nota-se que a utilização do Teorema 2.5 permitiu sintetizar controladores PI robustos

Figura 14 – Resposta do sistema em malha fechada para um modelo incerto caixa preta com ponto de operação de 75% e $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ contendo em cada coluna a saída do sistema e o esforço de controle para o controlador Ziegler e Nichols e o controlador do Teorema 2.5, respectivamente.



Fonte: do autor.

que se mostraram melhores do que os projetados pela técnica de Ziegler-Nichols. As principais vantagens na utilização do Teorema 2.5, nesses sistemas, são o atendimento da especificação de tempo de assentamento em todos os casos e a redução da máxima ultrapassagem percentual que alcançou as especificações de desempenho para o modelo caixa preta com ponto de operação 25% nos vértices 3 e 4. Embora os controladores obtidos via Teorema 2.5 não tenham atendido a especificação de 5% de MUP em todos os testes seu desempenho, foi melhor quando comparado aos controladores projetados pela estratégia de Ziegler-Nichols. Destaca-se ainda que, devido à utilização da teoria de estabilidade de Lyapunov, é possível certificar a estabilidade do sistema em malha fechada para todo o domínio de incerteza, o que não é válido para a técnica de sintonia de Ziegler-Nichols.

4 Síntese de controladores \mathcal{D} -Estáveis para Sistemas Incertos Positivos a Tempo Discreto

Este capítulo apresenta uma nova condição LMI, que pelo conhecimento dos autores é a primeira a unificar os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade e positividade de sistemas. Dessa forma, propondo o controle de sistemas por alocação de polos em região delimitada por especificações de desempenho, além de garantir trajetória não negativa para a saída e os estados, sempre que o sistema possuir entrada positiva.

4.1 Preliminares

Para o desenvolvimento do resultado principal, apresenta-se a seguir uma condição suficiente para que um sistema discreto incerto em malha fechada seja positivo.

Lema 4.1 (Farina e Rinaldi (2011)). *Empregando a lei de controle por realimentação de estados (2.17),*

$$u(k) = Kx(k),$$

no sistema (2.5),

$$x(k+1) = A_d(\alpha)x(k) + B_d(\alpha)u(k),$$

obtém-se o sistema em malha fechada dado por

$$x(k+1) = (A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K)x(k), \quad (4.1)$$

que é positivo se, e somente se, todos os elementos da matriz $A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K$ são não negativos.

4.2 Resultado Principal

Como mencionado anteriormente, o principal objetivo desse capítulo é apresentar uma nova condição LMI capaz de unificar os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade e positividade de sistemas. A principal contribuição é a adição da característica de positividade para sistemas que utilizam técnicas de controle por alocação de polos.

Teorema 4.1. *Se existir uma matriz diagonal $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$(A_{di}H + B_{di}S) > 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11i} & M_{12i} \\ M_{12i}^T & M_{22i} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.3)$$

em que

$$\begin{aligned} M_{11i} &= R_{11} \otimes P_i + R_{12} \otimes (A_{di}H + B_{di}S) + R_{12}^T \otimes (A_{di}H + B_{di}S)^T, \\ M_{12i} &= R_{12}^T \otimes (P_i - H^T) + R_{22} \otimes (A_{di}H + B_{di}S), \\ M_{22i} &= R_{22} \otimes (P_i - H - H^T), \end{aligned}$$

sejam factíveis para $i = 1, \dots, N$. Então,

$$K = SH^{-1}, \quad (4.4)$$

são os ganhos de um controlador que garantem a estabilidade assintótica e a positividade do sistema em malha fechada, além de alocar os polos dentro da região descrita pelas matrizes R_{11} , R_{12} e R_{22} .

Prova: Admitindo que (4.2) e (4.3) sejam factíveis, então M_{22i} implica em

$$H + H^T > P(\alpha), \quad (4.5)$$

logo, existe H^{-1} . Pós-multiplicando (4.2) por H^{-1} , tem-se

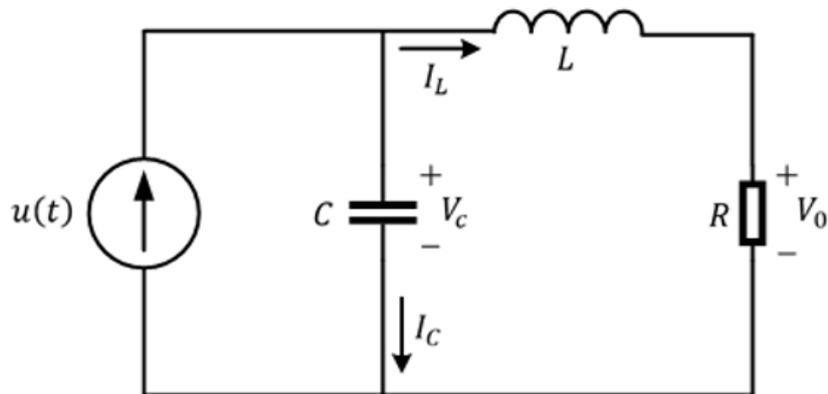
$$A_{di} + B_{di}SH^{-1} > 0, \quad (4.6)$$

que corresponde à condição do Lema 4.1, garantindo que o sistema em malha fechada, empregando o controlador $K = SH^{-1}$, seja positivo. Note que é necessário que a matriz H seja diagonal para atender a exigência de positividade do sistema conforme destacado em Ebihara, Peaucelle e Arzelier (2014). Com relação a (4.3), a prova segue os mesmos passos apresentados em Peaucelle et al. (2000), bastando definir a matriz de folga H como diagonal. \square

4.3 Experimentos Numéricos

O conjunto de testes realizados para as condições do Teorema 4.1 foi feito para um circuito RLC extraído de Dorf e Bishop (2011), o qual é mostrado na Figura 15, e também para um modelo de um levitador magnético estudado em Peixoto, Braga e Palhares (2020) e encontra-se ilustrado na Figura 23.

Figura 15 – Esquema de conexões de um circuito RLC.



Fonte: do autor

4.3.1 Circuito RLC

Dois controladores foram desenvolvidos para este sistema, o primeiro, denominado por Estabilizante, consiste em um controlador cuja região de alocação é o círculo unitário e o segundo, denominado \mathcal{D} -estável, possui como região de alocação a interseção de um círculo com raio dependente das especificações de tempo de assentamento e uma aproximação de uma cardioide por um “elipse-cone”, que está relacionada com a especificação de MUP. Para uma definição mais específica sobre o equacionamento das regiões de alocação, queira consultar Rosinová e Hypiúsová (2019).

A modelagem em espaço de estados do sistema é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (4.7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} x(t).$$

Em que os estados x_1 e x_2 são a tensão no capacitor e a corrente no indutor respectivamente, e a saída do sistema é a tensão sobre o resistor, maiores detalhes sobre a modelagem podem ser encontradas em Dorf e Bishop (2011).

Após a modelagem, e considerando que o conjunto de parâmetros R , L e C são incertos, ou seja, conhecem-se apenas os limitantes superior e inferior de cada componente, o sistema foi discretizado utilizando a técnica de discretização de primeira ordem de Euler descrita na Seção 2.6 com um período de amostragem $T = 0,01$ s.

Foram realizados dois grupos de testes. O primeiro emprega uma combinação de valores de R , L e C que torna o sistema instável em malha aberta. O segundo teste utiliza uma outra combinação de valores dos componentes para gerar um sistema estável em malha aberta. Para

ambos os circuitos foram realizados 4 experimentos utilizando as mesmas 4 combinações de parâmetros α , as quais são explicitadas na Tabela 6.

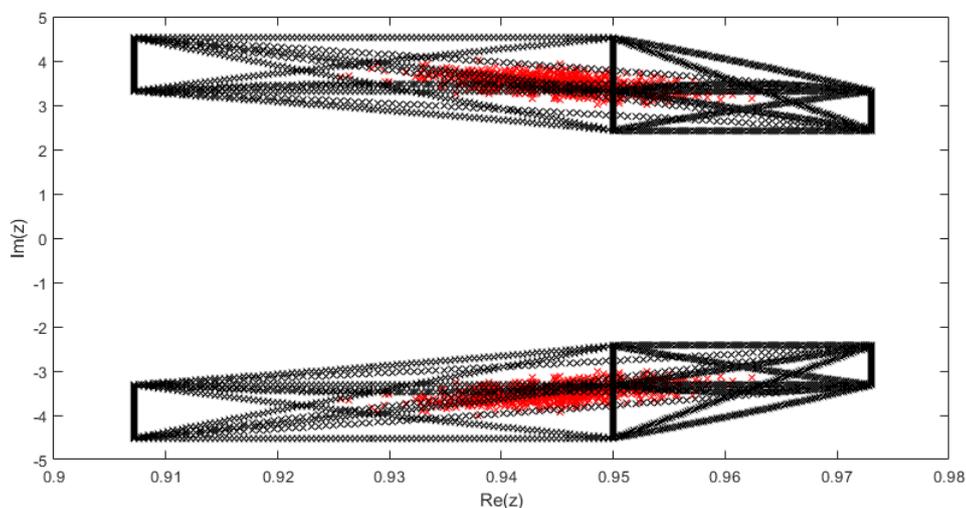
Tabela 6 – Associação de experimentos com parâmetros α para testes realizados nos circuitos RLC instável e RLC estável.

Experimentos	α
1	[0, 1550 0, 0081 0, 1246 0, 1463 0, 0457 0, 05020, 2396 0, 2305]
2	[0, 2792 0, 1132 0, 0044 0, 1363 0, 0474 0, 2264 0, 0954 0, 0977]
3	[0, 1155 0, 0582 0, 0644 0, 2000 0, 0022 0, 2111 0, 2428 0, 1058]
4	[0, 1815 0, 1629 0, 1275 0, 0201 0, 1669 0, 2421 0, 0203 0, 0787]

4.3.1.1 Circuito RLC Instável

O primeiro grupo de testes para o circuito RLC utiliza uma combinação de valores dos parâmetros que torna o sistema instável em malha aberta. Além disso, considera-se que os valores dos componentes são incertos, sendo conhecidos apenas os limitantes superiores e inferiores de cada um, os quais são dados por $R = [7 \ 13]$, $L = [0, 7 \ 1, 3]$, $C = [0, 07 \ 0, 13] \times 10^{-4}$, obtendo assim um politopo com 8 vértices. Adicionalmente define-se o período de amostragem $T = 0,01$ s.

Figura 16 – Nuvem de Autovalores do Circuito RLC Instável em Malha Aberta.



Fonte: do autor

A Figura 16 mostra a nuvem de autovalores do sistema em malha aberta, revelando sua instabilidade, visto que para sistemas discretos é necessário que toda a nuvem de autovalores esteja dentro do círculo de raio unitário do plano complexo para que o sistema seja estável. Dessa forma, deseja-se obter um controlador que estabilize o sistema bem como atenda às especificações de desempenho de 1 segundo de tempo de assentamento e 5% de MUP.

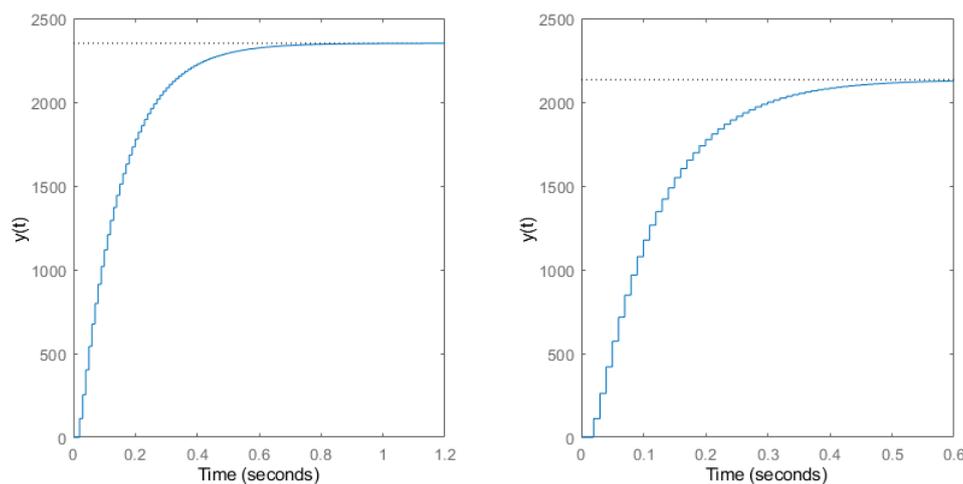
Tabela 7 – Resultados do modelo de um circuito RLC instável com $R = [7 \ 13]$, $L = [0, \ 7 \ 1, \ 3]$, $C = [0, \ 07 \ 0, \ 13] \times 10^{-4}$ e $T = 0, \ 01$.

Experimentos	Controladores			
	Estabilizante $K = [-0, \ 00054379 \ 1, \ 0011]$		\mathcal{D} -estável $K = [-0, \ 00056832 \ 1, \ 0001]$	
	MUP	T_s	MUP	T_s
1	0%	0,528 s	0%	0,417 s
2	0%	0,446 s	0%	0,343 s
3	0%	0,479 s	0%	0,377 s
4	0%	0,401 s	0%	0,311 s

A Tabela 7 mostra os resultados da aplicação dos controladores no sistema. O principal ganho que ocorre com a aplicação dos controladores é a remoção da MUP. Destaca-se também a vantagem de se utilizar o controlador \mathcal{D} -estável por ele apresentar os melhores tempos de assentamento. Embora ambos os controladores atinjam as especificações de desempenho, o controlador \mathcal{D} -estável apresenta os melhores resultados.

Outro ponto de observação é a pequena diferença que existe entre os valores dos ganhos dos controladores, note que ocorre a partir da quinta e terceira casa decimal, respectivamente, o que implica que o microcontrolador no qual esses controladores seriam implementados deve possuir alta resolução, ou não será capaz de implementar ganhos tão pequenos de modo que a diferença entre eles seja notada de forma prática.

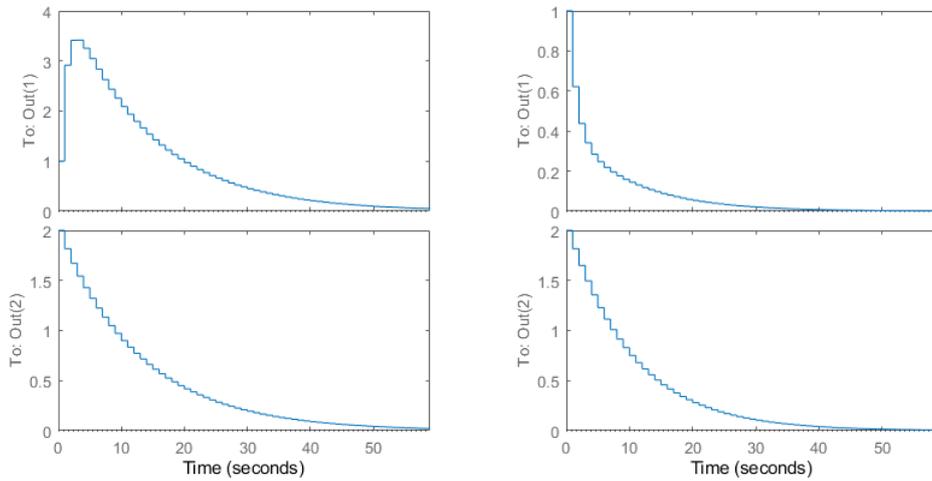
Figura 17 – Resposta ao degrau do circuito RLC instável em malha aberta, para o experimento 1 com controlador estabilizante e com controlador \mathcal{D} -estável, respectivamente.



Fonte: do autor

A Figura 17 apresenta um comparativo visual das respostas ao degrau para o sistema utilizado no experimento 1, na qual observa-se novamente a melhoria que ocorre com a aplicação do controlador \mathcal{D} -estável em relação ao estabilizante quando se trata do tempo de assentamento.

Figura 18 – Resposta à condição inicial $x_0 = [1 \ 2]$ do circuito RLC instável em malha aberta, para o experimento 1 com controlador estabilizante e com controlador \mathcal{D} -estável, respectivamente.



Fonte: do autor

A Figura 18 expõe um comparativo da resposta à condição inicial do sistema, na qual observa-se a melhora no tempo de assentamento e destaca-se a trajetória positiva dos estados.

Como os experimentos 2, 3 e 4 apresentam resultados semelhantes e apenas reafirmam as conclusões já citadas, suas representações gráficas foram omitidas para fins de simplicidade.

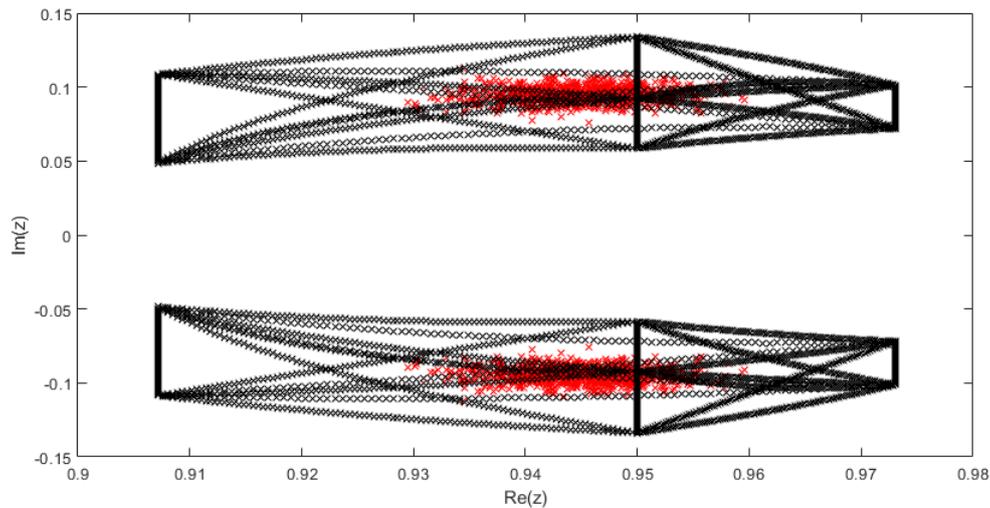
4.3.1.2 Circuito RLC Estável

O segundo grupo de testes para o circuito RLC utiliza uma combinação de valores dos parâmetros que torna o sistema estável em malha aberta. Novamente, supõem-se conhecidos apenas os limitantes superiores e inferiores de cada componente elétrico, cujos valores empregados são $R = [0,7 \ 1,3]$, $L = [0,07 \ 0,13]$, $C = [0,07 \ 0,13]$. Similarmente, obteve-se um politopo com 8 vértices. De forma análoga ao circuito RLC instável, define-se o período de amostragem $T = 0,01$ s.

A Figura 19 mostra a nuvem de autovalores do sistema em malha aberta, revelando que o sistema é estável. Contudo, é desejável fazer melhorias na operação do sistema. Para isso, foram estipuladas como condições de funcionamento um tempo de assentamento de 1 segundo e uma máxima ultrapassagem percentual de 5%.

Foram feitos 2 controladores, sendo o primeiro apenas estabilizante, isto é, um controlador que busca somente alocar os polos dentro do círculo unitário. Por outro lado, o segundo controlador leva em conta as especificações de desempenho mencionadas, gerando como região de alocação a intersecção entre um círculo com raio definido pelo tempo de assentamento e uma região aproximada de uma cardioide definida pela MUP. Ressalta-se que ambos os controladores são positivos, isto é, garantem a trajetória positiva dos estados e da saída do sistema, para todas

Figura 19 – Nuvem de Autovalores do Circuito RLC Estável em Malha Aberta.



Fonte: do autor

as entradas e condições iniciais não negativas aplicadas.

Tabela 8 – Resultados do modelo de circuito RLC estável com $R = [0, 7 \ 1, 3]$, $L = [0, 07 \ 0, 13]$, $C = [0, 07 \ 0, 13]$ e $T = 0, 01$.

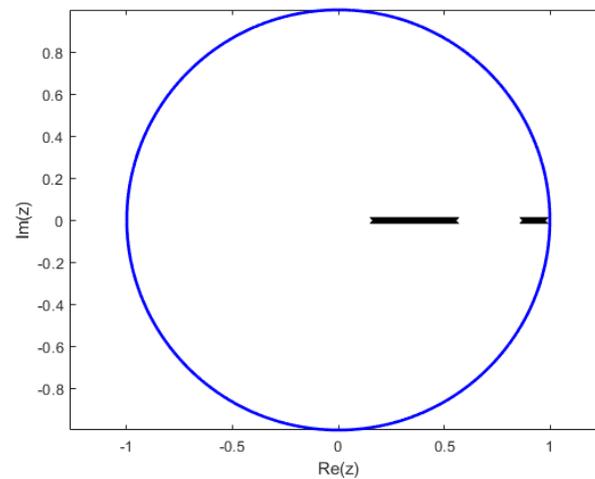
Experimentos	Controladores					
	Malha Aberta		Estabilizante $K = [-5, 4217 \ 2, 8502]$		\mathcal{D} -estável $K = [-4, 5965 \ 1, 7224]$	
	MUP	T_s	MUP	T_s	MUP	T_s
1	24%	0,788s	0%	0,646 s	0%	0,498 s
2	16,3%	0,670 s	0%	0,556 s	0%	0,392 s
3	18,7%	0,783 s	0%	0,585 s	0%	0,426 s
4	18,3%	0,717 s	0%	0,495 s	0%	0,354 s

A Tabela 8 mostra os resultados da aplicação dos controladores neste sistema. Observa-se que o sistema em malha aberta possui alto valor de máxima ultrapassagem percentual em todos os testes, mas com um tempo de assentamento inferior a 1 segundo. O principal ganho que ocorre com a aplicação dos controladores é a remoção da MUP. Destaca-se também a vantagem de se utilizar o controlador \mathcal{D} -estável por apresentar os melhores tempos de assentamento. Embora ambos os controladores atinjam as especificações de desempenho, o controlador \mathcal{D} -estável apresenta os melhores resultados.

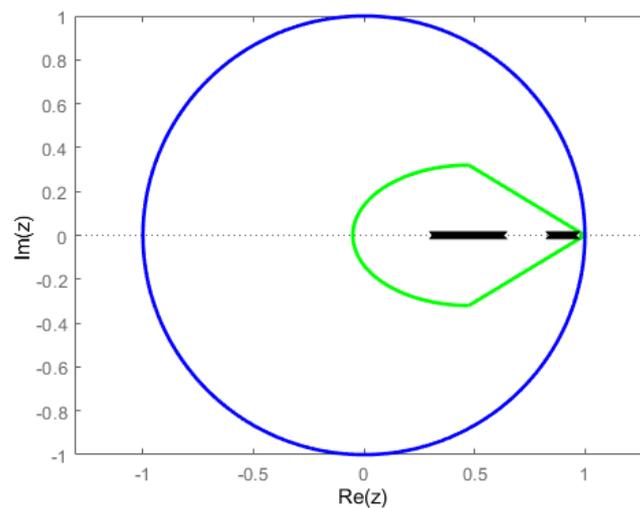
As figuras 20(a) e 20(b) mostram as nuvens de autovalores do sistema em malha fechada para o controlador estabilizante e o controlador \mathcal{D} -estável, respectivamente. Pela comparação das figuras, é possível notar uma ligeira alteração na localização dos polos que agora se encontram mais próximos da origem com a aplicação do controlador \mathcal{D} -estável, explicando assim o melhor tempo de assentamento que o sistema apresenta após a aplicação desse controlador.

A Figura 21 explicita um comparativo visual das respostas ao degrau para o sistema

Figura 20 – Nuvem de autovalores do circuito RLC estável em malha aberta com: (a) Controlador estabilizante; (b) Controlador \mathcal{D} -estável.



(a)



(b)

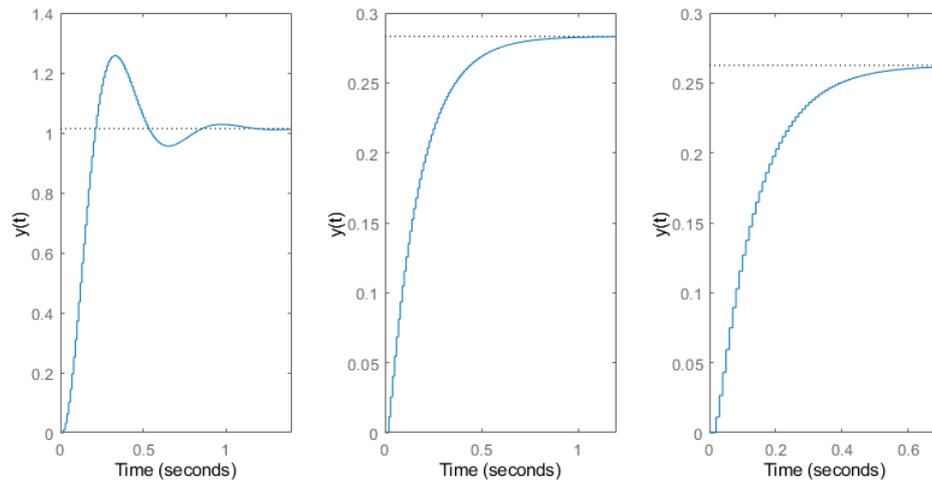
Fonte: do autor.

utilizado no experimento 2, em que observa-se novamente a melhoria que ocorre com a aplicação dos controladores, principalmente com relação à MUP.

A Figura 22 apresenta um comparativo da resposta à condição inicial do sistema na qual observa-se a melhora no tempo de assentamento e destaca-se outra melhora com relação a trajetória dos estados. Em malha aberta, o sistema apresenta trajetórias negativas, porém com a aplicação dos controladores, os estados agora estabilizam mais rapidamente e possuem trajetórias sempre positivas.

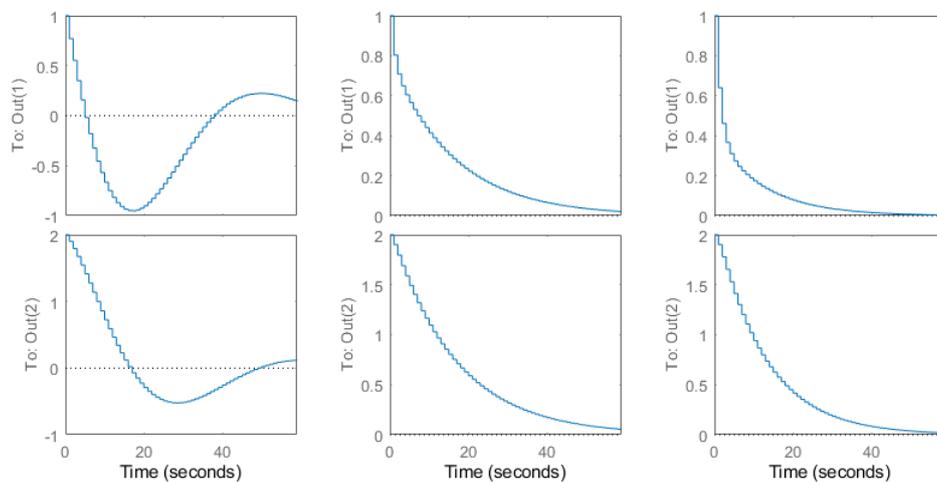
Destaca-se ainda as melhorias com relação às trajetórias positivas dos estados para os sistemas em malha fechada. Fica evidente, como constatado anteriormente, que não se trata de um fator dependente de uma escolha particular dos parâmetros α ou de condição inicial, desde

Figura 21 – Resposta ao degrau do circuito RLC estável, para o experimento 1 em: (a) Malha Aberta; (b) Malha fechada com controlador estabilizante; (c) Malha fechada com controlador \mathcal{D} -estável.



Fonte: do autor

Figura 22 – Resposta à condição inicial $x_0 = [1 \ 2]$ do circuito RLC estável, para o experimento 1 em: (a) Malha Aberta; (b) Malha fechada com controlador estabilizante; (c) Malha fechada com controlador \mathcal{D} -estável.



Fonte: do autor

que positiva, mas se deve ao adequado funcionamento das condições LMI apresentadas.

4.3.2 Levitador Magnético

O experimento seguinte consiste em um sistema de levitação magnética, no qual deseja-se controlar a posição de uma bola a partir do controle do sinal de corrente que excita uma bobina responsável por gerar o campo magnético que causa o movimento vertical da bola. Este tipo

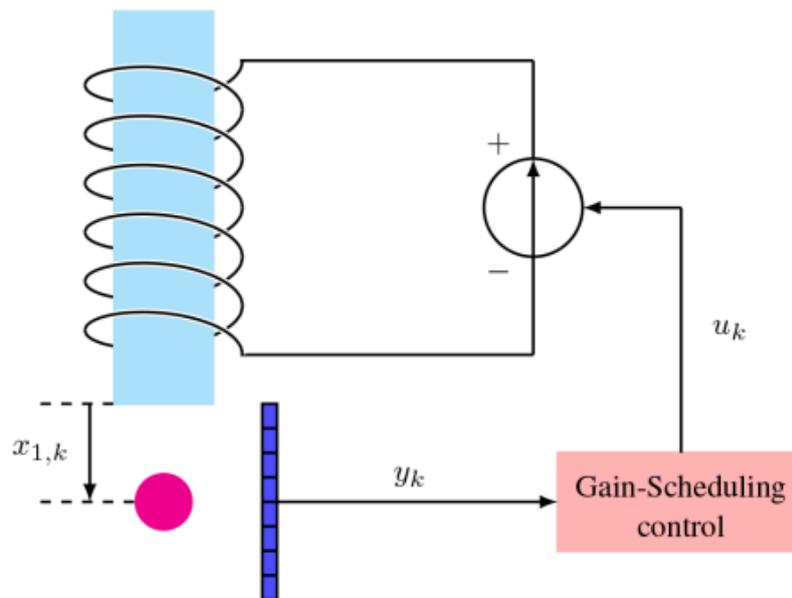
de sistema pode ser encontrado em giroscópios, acelerômetros, trens de alta velocidade, entre outras tecnologias.

Um diagrama típico de um sistema de levitação pode ser visto na Figura 23, e os parâmetros associados ao levitador são definidos de acordo com o explicitado na Tabela 9.

Tabela 9 – Parâmetros do Levitador Magnético

Descrição	Parâmetro	Valor	Unidade
Massa da bola	m	0,068	kg
Aceleração Gravitacional	g	9,8	m/s^2
Coefficiente de Fricção Viscosa	k_m	0,001	Nsm^{-1}
Indutância	λ	0,46	H
Coefficiente de Variação de Indutância	μ	2	m^{-1}
Posição Desejada para a Bola	y_0	0,05	m

Figura 23 – Diagrama Simplificado de um Levitador Magnético.



Fonte: Peixoto, Braga e Palhares (2020)

Considere o modelo em espaço de estados, adaptado do estudo realizado em Peixoto, Braga e Palhares (2020),

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \rho g \mu \phi & \frac{-k_m}{m} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda \mu \rho}{2m} \end{bmatrix} u(k), \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k),
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

em que ρ e ϕ são definidas como

$$\rho = \frac{1}{(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2}, \tag{4.9}$$

$$\phi = (\mu x_{1,k} + 2\mu y_0 + 2)x_{1,k}. \quad (4.10)$$

O primeiro estado $x_1(k)$ é o desvio da bola em torno da posição desejada e o segundo estado $x_2(k)$, a velocidade vertical da bola. Os parâmetros ρ e ϕ podem ser limitados nos intervalos fechados

$$\rho = [0, 6944 \ 1], \quad (4.11)$$

$$\phi = [0 \ 2, \ 3], \quad (4.12)$$

gerando um politopo com 4 vértices. Adicionalmente, o sistema foi discretizado, de acordo com o explicitado na Seção 2.6, utilizando o período de amostragem proposto em Peixoto, Braga e Palhares (2020), isto é, $T = 0,01s$.

Definindo como especificações de desempenho um tempo de assentamento T_s de 0,1 s e uma máxima ultrapassagem percentual de 5% e aplicando (3.4) a (3.5), obtêm-se os valores de θ e σ como

$$\theta = 106/131, \quad (4.13)$$

$$\sigma = 40. \quad (4.14)$$

Após a execução do Teorema 4.1 foi encontrado o seguinte conjunto de ganhos

$$K = \begin{bmatrix} -60,938 & 13,325 \\ 0,62994 & -9,5097 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

que foram utilizados para realizar 5 experimentos com diferentes composições de α de forma a verificar a funcionalidade dos ganhos encontrados em cada um dos vértices do politopo, e também em uma composição ponderada dos 4 vértices. Os valores de α utilizados podem ser vistos na Tabela 10.

Adicionalmente, são calculados os valores do conjunto matricial que representa a malha fechada do sistema após aplicação do controlador K dado pela equação (4.15) para a composição de α do experimento 4, isto é, $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$. Como resultado obteve-se,

$$A_d(\alpha) + B_d(\alpha)K = \begin{bmatrix} 0,3906 & 0,1433 \\ 0,0426 & 0,3567 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Note que, como todos os elementos da matriz de malha fechada são positivos esta é uma matriz positiva segundo Farina e Rinaldi (2011), adicionalmente como a matriz $C_{mf} = C_d(\alpha) + D_d(\alpha)K$ é uma matriz identidade, tem-se que todas as matrizes do sistema em malha fechada são positivas, e portanto, o sistema é positivo, o que garante a característica de garantir trajetórias positivas para os estados e para a saída do sistema sempre que este for excitado por uma entrada ou condição inicial não negativa.

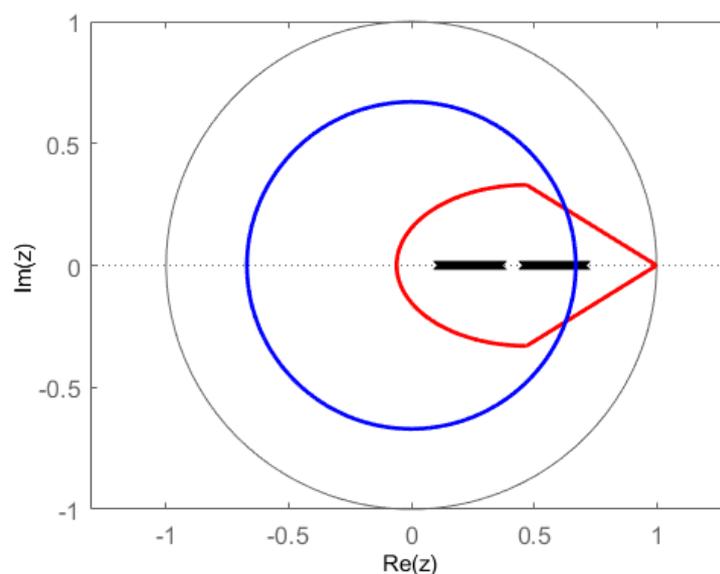
Tabela 10 – Associação de experimentos com parâmetros α para testes realizados no levitador magnético.

Experimentos	α
1	[0,6065 0,2147 0,0386 0,1402]
2	[1 0 0 0]
3	[0 1 0 0]
4	[0 0 1 0]
5	[0 0 0 1]

A Figura 24 apresenta a nuvem de autovalores do sistema em malha fechada. O círculo mais externo na cor cinza possui raio unitário, portanto todo autovalor que se encontra dentro dessa curva é estável. Como toda a nuvem de autovalores está dentro do círculo unitário conclui-se que o sistema é estável em malha fechada.

A região de alocação foi definida como a intersecção de duas regiões distintas. A primeira é representada pela aproximação de uma cardioide por um “elipse-cone” (curva em vermelho), que limita a região na qual o máximo sobressinal ficará limitado em 5%, de forma análoga, como toda a nuvem de autovalores se encontra dentro desta região, todo o politopo deve respeitar esta especificação de desempenho. A segunda região é dada por um círculo de raio $r \approx 0,67032$, representado pela curva em azul, que está relacionada com a especificação de tempo de assentamento. Como neste caso, nem todos os autovalores se encontram dentro da região, o sistema não será capaz de respeitar o critério de tempo de acomodação para todas as composições de α possíveis, visto que algumas dessas composições terão pólos fora da região de alocação.

Figura 24 – Nuvem de Autovalores do Modelo de Levitador Magnético em Malha Fechada.



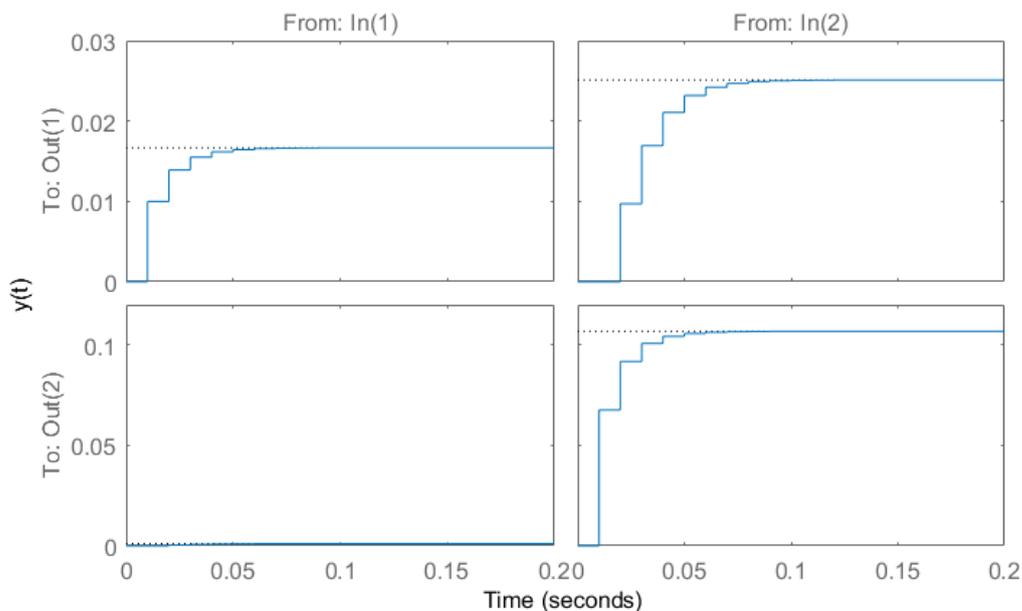
Fonte: do autor

Os resultados dos testes podem ser vistos de forma detalhada na Tabela 11, que relaciona a dinâmica de cada saída, para cada entrada separadamente. Conforme o esperado após a análise da nuvem de autovalores, nota-se da Tabela 11 que o sistema respeitou a condição de máxima ultrapassagem percentual em todos os experimentos para todas as 4 combinações de entrada e saída do sistema. Além disso, observa-se que a especificação de tempo de assentamento foi respeitada em quase todos os experimentos, com exceção do experimento 3 que corresponde a uma composição de α que seleciona o segundo vértice do modelo, e o par de pólos do segundo vértice é $P_o = [0, 23595 \ 0, 70795]^T$. Logo um de seus pólos está fora da região em azul, e por isso, o tempo de assentamento não foi respeitado neste experimento.

Tabela 11 – Resultados do Modelo do Levitador Magnético.

Experimentos	Controlador \mathcal{D} -estável com Ganhos Definidos pela Equação (4.15)							
	Entrada 1 para Saída 1		Entrada 1 para Saída 2		Entrada 2 para Saída 1		Entrada 2 para Saída 2	
	MUP	Ts	MUP	Ts	MUP	Ts	MUP	Ts
1	0%	0,066s	0%	0,0981s	0%	0,0981s	0%	0,0778s
2	0%	0,0474s	0%	0,0911s	0%	0,0911s	0%	0,0697s
3	0%	0,0969s	0%	0,1280s	0%	0,1280s	0%	0,1090s
4	0%	0,0462s	0%	0,0684s	0%	0,0684s	0%	0,0425s
5	0%	0,0811s	0%	0,0994s	0%	0,0994s	0%	0,0794s

Figura 25 – Resposta ao Degrau para o Modelo do Levitador Magnético para o experimento 4 com $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$.

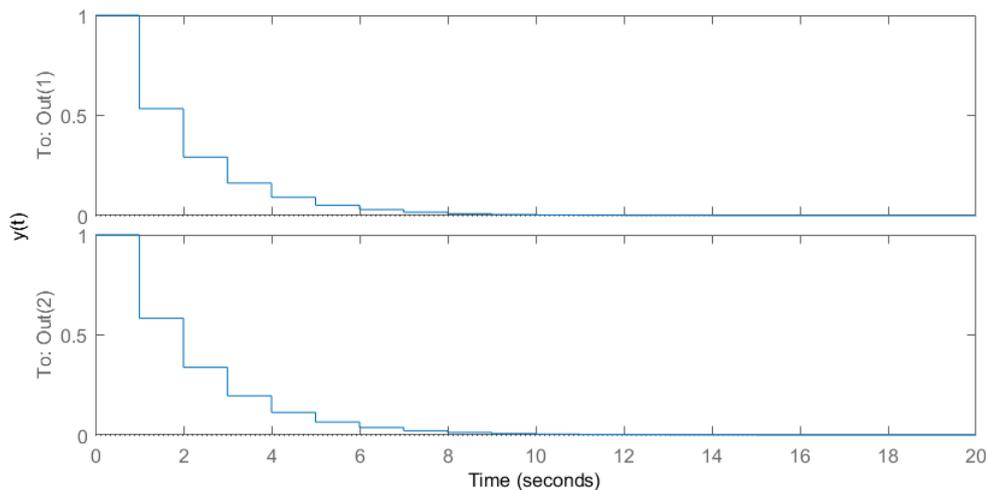


Fonte: do autor

Destaca-se o experimento 4 que seleciona o terceiro vértice do modelo por apresentar os melhores resultados de tempo de assentamento. A Figura 25 ilustra a resposta ao degrau do

sistema em cada saída devido à influência de cada uma das entradas separadamente gerado pelo vértice 3. Conforme os resultados apresentados na Tabela 11, o melhor tempo de assentamento se deve ao fato de que, ao selecionar o terceiro vértice, o par de autovalores do sistema em malha fechada é $P_o = [0, 45361 \ 0, 2937]^T$, que se encontram mais próximos do centro da região de alocação delimitada pela curva em azul, e por isso, apresentam bom tempo de assentamento.

Figura 26 – Resposta a condição inicial $x_o = [1 \ 1]^T$ para o Modelo do Levitador Magnético para o Experimento 4 com $\alpha = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$.



Fonte: do autor

A Figura 26 apresenta a resposta a condições iniciais do modelo para o experimento 4. A partir desta nota-se que o sistema manteve com sucesso uma trajetória positiva para os estados do sistema em ambas as saídas, mostrando a eficácia das condições propostas pelo Teorema 4.1. As figuras referentes aos outros experimentos foram omitidas devido a sua semelhança com o exposto pelas figuras 25 e 26.

4.3.3 Conclusão Parcial

O capítulo apresentou uma nova condição LMI que unifica os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade e positividade. A partir dos testes realizados com os modelos de circuito RLC estável e instável, e também no modelo do levitador magnético, observa-se a aplicabilidade do Teorema 4.1 em sistemas reais. Por meio dos resultados apresentados, nota-se que a condição cumpre com os objetivos propostos, isto é, calcula um controlador K que estabiliza assintoticamente o sistema respeitando as especificações de desempenho estipuladas, além de promover trajetórias não negativas para os estados para qualquer condição inicial não negativa e escolhas dos parâmetros α .

5 Conclusão

O principal objetivo do presente trabalho foi testar e desenvolver condições de \mathcal{D} -estabilidade para aplicação em sistemas reais. Inicialmente, utilizando o Teorema 2.5 apresentado no Capítulo 2, foram realizados testes em modelos caixa branca e caixa preta de uma planta didática de controle de nível presente no laboratório de automação e controle do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas (ICEA) da UFOP, em que foi possível projetar controladores PI robustos que se mostraram melhores do que os projetados pela técnica de Ziegler e Nichols. Destacam-se como vantagens da utilização do Teorema 2.5, o atendimento às especificações de tempo de assentamento e redução da máxima ultrapassagem percentual. Ainda que os controladores obtidos a partir do Teorema 2.5 não tenham atingido a especificação de 5% de máxima ultrapassagem, seu desempenho foi melhor. Vale lembrar que, devido à utilização da teoria de estabilidade de Lyapunov, os controladores sintetizados por meio do Teorema 2.5 possuem certificado de estabilidade do sistema em malha fechada para todo o domínio de incerteza, característica ausente para a técnica de sintonia de Ziegler e Nichols.

O Teorema 2.5 apresentou bons resultados em simulação, embora não tenha atingido as especificações de projeto exigidas em todos os casos, o que se deve à aproximação do modelo do sistema como sendo de segunda ordem padrão, quando de fato não o é. Vale lembrar também que em todos os testes realizados, o controlador obtido pela utilização do Teorema 2.5 apresentou resultados melhores do que o controlador sugerido em Lage (2019) que foi obtido por sintonia de Ziegler-Nichols.

Como principal resultado deste trabalho, destaca-se o Teorema 4.1 apresentado no Capítulo 4, o qual apresenta uma nova condição LMI que unifica os conceitos de \mathcal{D} -estabilidade e positividade de sistemas. Dessa forma, tornando possível a síntese de controladores por alocação de polos que garantem o atendimento de especificações de desempenho, bem como de trajetórias positivas para a saída e os estados do sistema controlado, para qualquer condição inicial não negativa e escolha dos parâmetros α . Os controladores obtidos por meio do Teorema 4.1 apresentaram bons resultados em simulação de sistemas reais, atingindo em todos os testes realizados as especificações de desempenho exigidas, tanto para a alocação, utilizando apenas um controlador estabilizante, quanto para utilização dos conceitos de \mathcal{D} -estabilidade, evidenciando, inclusive, as vantagens de se utilizar regiões mais restritivas com o intuito de produzir no mesmo sistema resultados mais interessantes. Em contrapartida, exige-se maior cuidado e esforço no desenvolvimento das matrizes de alocação, que podem ser complexas dependendo do tipo de região escolhida. Portanto, o Teorema 4.1 apresenta-se como uma estratégia viável para utilização em aplicações reais, para produzir refinamento no desempenho de sistemas com relação à especificação de projeto e por produzir trajetória de saída e estados não negativos.

5.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, sugerem-se os seguintes pontos de investigação:

- Inserir nas condições do Teorema 4.1 um parâmetro escalar, com o objetivo de relaxar as condições e torná-las menos conservadoras;
- Adaptar as condições do Teorema 4.1 e empregar uma reestruturação nas matrizes do sistema para prover controladores PI robusto que garantam a positividade do sistema e erro nulo para o seguimento de uma referência do tipo degrau;
- Aplicar os controladores sintetizados pelos teoremas 2.5 e 4.1 em sistemas reais de forma prática.
- Realizar testes de validação utilizando os sistemas físicos presentes no laboratório de automação e controle do instituto de ciências exatas e aplicadas (ICEA) da UFOP.

Referências

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas — Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2007.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994.
- CACCETTA, L.; RUMCHEV, V. G. A survey of reachability and controllability for positive linear systems. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 98, n. 1-4, p. 101–122, 2000.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia-7ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern control systems*. [S.l.]: Pearson, 2011.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. LMI approach to linear positive system analysis and synthesis. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 63, p. 50–56, 2014.
- FARINA, L.; RINALDI, S. *Positive linear systems: Theory and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- JUNGERS, M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. MPC for LPV systems with bounded parameter variations. v. 84, p. 24–36, jan. 2011.
- KOCH, G. G. et al. Linear matrix inequality based synthesis of PI controllers for PMSM with uncertain parameters. *Revista Eletrônica de Potência*, v. 23, n. 3, p. 310–319, 2018.
- LAGE, R. L. *Projeto de um sistema de controle de nível para tanques industriais*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Departamento de Engenharia Elétrica (Universidade Federal de Ouro Preto), 2019.
- LEE, S.; WON, S. Model Predictive Control for linear parameter varying systems using a new parameter dependent terminal weighting matrix. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E89-A, n. 8, p. 2166–2172, 2006.
- LEMAIRE, A. A. *Métodos iterativos baseados em desigualdades matriciais lineares para controle de sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo*. 66 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (UNICAMP), Campinas, SP., 2019.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992.
- MORAIS, C. F. et al. Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter. In: . Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 3876–3881.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2010.
- PEAUCELLE, D. et al. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 21–30, 2000.

- PEIXOTO, M. L.; BRAGA, M. F.; PALHARES, R. M. Gain-scheduled control for discrete-time non-linear parameter-varying systems with time-varying delays. *IET Control Theory & Applications*, IET, v. 14, n. 19, p. 3217–3229, 2020.
- PHILLIPS, C. L.; NAGLE, H. T.; CHAKRABORTTY, A. *Digital control system analysis and design*. [S.l.]: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1990. v. 2.
- ROSINOVÁ, D.; HYPIUSOVÁ, M. LMI pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design. *Algorithms*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 12, n. 8, p. 167, 2019.
- SEBORG, D. E. et al. *Process Dynamics and Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- SHCHERBAKOV, P. Alexander Mikhailovitch Lyapunov: On the centenary of his doctoral dissertation on stability of motion. *Automatica*, v. 5, n. 28, p. 865–871, 1992.
- SKELTON, R. E. Linear matrix inequality techniques in optimal control. In: _____. *Encyclopedia of Systems and Control*. London: Springer London, 2013. p. 1–11.
- SPAGOLA, A. et al. Controle por realimentação de estados para sistema lineares positivos chaveados discretos no tempo. In: *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*. João Pessoa, PB: [s.n.], 2018.
- SPAGOLA, A. et al. Realimentação estática de saída de sistemas LPV positivos a tempo discreto. In: *Anais do 14° Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Ouro Preto, MG: [s.n.], 2019.