DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Natália Aparecida de Sousa Maia

Uma aplicação pouco divulgada das funções logarítmicas e exponenciais: matemática financeira

Ouro Preto - MG, Brasil

Abril 2021

Natália Aparecida de Sousa Maia

Uma aplicação pouco divulgada das funções logarítmicas e exponenciais: matemática financeira

Monografia apresentada como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática (DEMAT)
Graduanda em Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof.ª Érica Resende Malaspina

Ouro Preto - MG, Brasil
Abril 2021

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

M217a Maia, Natalia Aparecida de Sousa .
Uma aplicação pouco divulgada das funções logarítmicas e exponenciais [manuscrito]: matemática financeira. / Natalia Aparecida de Sousa Maia. - 2021.
78 f.

Orientadora: Profa. Ma. Érica Resende Malaspina.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Funções exponenciais. 2. Logarítmos. 3. Matemática financeira. I. Malaspina, Érica Resende . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51:37

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Natália Aparecida de Sousa Maia

Uma aplicação pouco divulgada das funções logarítmicas e exponenciais: matemática financeira

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em matemática

Aprovada em 08 de abril de 2021

Membros da banca

Ms.ª Érica Resende Malaspina (orientadora) - Orientadora - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr.ª Marli Regina dos Santos - Universidade Federal de Ouro Preto

Érica Resende Malaspina, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 19/04/2021

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

Agradecimentos

Agradeço à Deus, primeiramente, por ser fonte de força, inspiração e sabedoria ao longo desses anos. Agradeço aos meus pais, Lúcia e Manoel, pelo carinho, cuidado e apoio incondicional que foram a base para que conseguisse chegar até esse momento. Agradeço à minha família e amigos que sempre estiveram do meu lado. Agradeço imensamente à professora e orientadora Érica, pela presença, atenção, paciência e valiosa contribuição durante a realização desse trabalho. Agradeço à professora Marli por ter aceito participar da banca de defesa, bem como pelas suas contribuições para a melhoria deste trabalho. Aos demais professores do Curso de Licenciatura em Matemática e aos projetos que tive o prazer de participar, agradeço por todo aprendizado.

Resumo

A função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, ferramentas utilizadas para descrever a variação de duas grandezas, em que o crescimento ou decrescimento da variável independente é muito rápido, possuem grande aplicabilidade dentro da matemática e em outras áreas do conhecimento. Neste trabalho, cujo objetivo é explorar a matemática de forma contextualizada, a partir das conexões entre conteúdos distintos, buscamos apresentar as aplicações das funções logarítmicas e exponenciais à matemática financeira, em situações cotidianas, como descontos, financiamentos e parcelamentos. Antes de tratar propriamente das aplicações, é feito o desenvolvimento da teoria dessas funções, de modo a abranger os aspectos históricos, as definições e as propriedades. O número e, um dos números irracionais mais importantes na matemática, tem um destaque especial, pois surge naturalmente em problemas aplicados como, por exemplo, a capitalização contínua de juros. As funções logarítmica e exponencial de base e, denominadas naturais, amplamente utilizadas em aplicações, foram tratadas de forma geométrica, com a vantagem da simplicidade conceitual. Com a realização desse trabalho foi possível perceber que a abordagem de conteúdos distintos, de forma conectada, constitui uma proposta interessante a ser trabalhada tanto no ensino médio, como em cursos de graduação.

Palavras-chave: Aplicações; Exponencial; Logaritmo; Matemática financeira.

Sumário

INTRODUÇÃO

As funções, conteúdo de grande relevância tanto no ensino médio, como na graduação ou formação de professores, são instrumentos fundamentais para modelar fenômenos variados, em diversos campos do conhecimento. Dentre elas se destacam as funções logarítmicas e exponenciais, ferramentas utilizadas para descrever a variação de duas grandezas, em que o crescimento ou decrescimento da variável independente é muito rápido. Aliado a isto, essas funções possuem grande aplicabilidade dentro da matemática e em outras áreas do conhecimento, como geografia, química, física, astronomia, economia e engenharia. Com o objetivo de apresentar a utilização prática no dia a dia, de maneira a atribuir significado para o estudo de tais funções, pretende-se explorar, de forma contextualizada, as suas aplicações no campo da matemática financeira.

A motivação inicial para a realização deste trabalho se deu, primeiramente, por uma questão pessoal, devido à minha falta de familiaridade com o assunto. No ensino médio, em razão da inexistência de um planejamento que abrangesse uma grande variedade de conteúdo, não tive a oportunidade de estudar as funções exponenciais e logarítmicas. Na graduação, tive um contato muito superficial com o assunto e, por isso, surgiu o desejo de aprofundar os meus conhecimentos sobre o tema em questão, de modo a sanar as lacunas de aprendizagem relacionadas a este tópico e contribuir com os que tiverem interesse pelo tema: licenciandos ou alunos do ensino médio.

Dentre os componentes curriculares de matemática previstos para o ensino básico, logaritmos, em particular, é um conteúdo considerado muito abstrato e sem aplicações no dia a dia devido, muitas vezes, ao modo como é abordado. Quando abordado de forma isolada, com o foco na resolução de equações, se torna um assunto chato, desinteressante e distante da realidade, já que não é possível visualizar, de forma clara, a possibilidade de aplicações no cotidiano. Assim sendo, buscamos trabalhar as funções logarítmicas e exponenciais, de modo a estabelecer conexões com a matemática financeira, outro campo muito importante para a matemática. Em consonância com a proposta do trabalho, vejamos a seguir o que sugerem os documentos oficiais, norteadores da educação básica no Brasil, quanto ao ensino aprendizagem do tema.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) [2], discorrem sobre a importância em se estabelecer relações entre conhecimentos disciplinares. Propõe como competência a ser alcançada no ensino básico:

> Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada (BRASIL, 2006, p.66).

Quanto ao tema deste estudo, especificamente, segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [1], é interessante destacar:

> Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial. (...) O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. (BRASIL, 2006, p.75).

Tendo em vista tudo o que foi supracitado, pretende-se com este trabalho fazer um estudo aprofundando sobre as funções logarítmicas e exponenciais, articulando estes conhecimentos com a matemática financeira. O trabalho foi organizado em três capítulos, da seguinte maneira:

O capítulo 1, inicialmente, traz uma abordagem histórica a respeito dos logaritmos, destacando as suas origens e os principais responsáveis pelo seu desenvolvimento ao longo dos séculos. Em seguida é desenvolvida a teoria dos logaritmos e funções logarítmicas, de forma algébrica, como é tradicionalmente encontrada na literatura. Por último, mas não menos importante, os logaritmos são definidos de forma geométrica, a partir da área de faixas da hipérbole $y = \frac{1}{x}$. Em posição de destaque, foi definido o logaritmo natural, cuja base é o número e e, a partir daí, a definição foi estendida para uma base qualquer. Em relação a bibliografia adotada, foram utilizadas as referências [5] e [6] para a parte histórica e [13] para a teoria dos logaritmos.

No capítulo 2 é feita uma explanação sobre a função exponencial, inversa da função logarítmica, tendo como base as referências [13] e [14] . A função exponencial de base e ganha um destaque especial, devido ao fato de ser muito utilizada em aplicações, pois modelam situações de crescimento e decrescimento contínuos ao longo do tempo. O número e também é definido como limite, a partir da análise do comportamento da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ no infinito.

O capítulo 3, traz um breve apanhado sobre a história da matemática financeira, destacando como se deu as primeiras trocas comerciais, a evolução do dinheiro ao longo do tempo e o surgimento das primeiras instituições financeiras. São apresentados alguns conceitos importantes, que servirão de base para um bom entendimento do assunto, sendo central a ideia de juros. Por fim, são apresentados problemas comerciais que fazem parte do dia a dia, como lucro e prejuízo, descontos, parcelamentos e empréstimos, que envolvem aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, tema central deste trabalho.

É interessante notar, como veremos a seguir, que a história da matemática é muito valorizada neste trabalho. Em relação a importância dessa temática, destaca a referência [1]:

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. (...) A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática (BRASIL, 2006, p.86).

Ao entender a origem dos logaritmos e da matemática financeira, como resultado do avanço tecnológico oriundo das grandes navegações e da necessidade em acumular dinheiro ao longo do tempo, respectivamente, pode-se conceber a matemática como ferramenta para a resolução de problemas práticos, em momentos diversos da humanidade, com o potencial de se desenvolver para além deles.

Segundo [3], a oferta da disciplina de Matemática Financeira é obrigatória em grande parte dos cursos de licenciatura em matemática. A formação docente pode impactar significativamente no processo de ensino e aprendizagem na educação básica. Durante a graduação, os discentes têm a oportunidade de refletir sobre a prática, enquanto futuros professores, e formas de trabalho dos conteúdos específicos. Desse modo, este trabalho apresenta uma proposta de abordagem contextualizada, com a interligação das funções logarítmica e exponencial à matemática financeira, visando agregar significado a aprendizagem dos educandos, tanto do ensino superior, como do ensino médio.

CAPÍTULO 1

Logaritmos

1.1 História

No fim do século XVI, devido ao desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, cálculos aritméticos eram exigidos constantemente. Os problemas ligados a essas áreas exigiam cálculos aritméticos muito complexos para a época, embora a invenção das frações decimais naquele período, tivesse contribuído, mesmo não sendo uma ideia ainda muito difundida. Encontrar um método que permitisse reduzir cada operação em uma operação inferior mais simples, facilitando assim os cálculos aritméticos, se tornou naquela época, um problema fundamental.

Segundo [5], os primeiros indícios do surgimento dos logaritmos estão vinculados aos povos da Antiguidade. Existem evidências de que os babilônios, cerca de quatro milênios antes de Cristo, construíram tabelas logarítmicas e Arquimedes de Siracusa (287 a. C. - 212 a. C.) criou notações para tratar de números muito grandes, contribuindo para a elaboração dos conceitos iniciais sobre logaritmos. Uma noção mais próxima do que se tem hoje a cerca dos logaritmos, foi fruto do trabalho dos grandes matemáticos John Napier e Jobst Burgi, os quais desenvolveram seus estudos separadamente, quase ao mesmo tempo.

John Napier (1550-1617), era um nobre teólogo escocês, não era matemático profissional, mas a tinha como lazer. Ele se interessava apenas por determinados aspectos matemáticos, em particular, aqueles que se referiam a simplificação de cálculos e a trigonometria. Por mais de 20 anos, trabalhou em sua invenção dos logaritmos e em 1614 publicou seus resultados na obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Nesta obra, Napier introduziu os logaritmos e também forneceu uma tábua de logaritmos dos senos de 1° a 90°. Por este feito, de acordo com [16], ele alcançou reconhecimento em diversos países.

Os logaritmos, sem dúvida, foram uma invenção extraordinária para a época, chegando ao conhecimento de muitos amantes da Matemática. Um dos primeiros a utilizar os logaritmos com êxito, foi Johannes Kepler, em seus cálculos das órbitas planetárias.

Figura 1 – Jonh Napier. Fonte: https://www.revistac2.com/elnumeroe/johnnapier/

Uma grande inspiração para as descobertas de Napier foram as regras de *prostaférese*, também conhecidas como *fórmulas de Werner*, que consistiam em quatro identidades trigonométricas que transformavam um produto em uma soma ou diferença, utilizadas nos observatórios astronômicos da Dinamarca. São elas:

i) $2\cos(x)\cdot\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

ii) $2\,\text{sen}(x)\cdot\cos(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$

iii) $2\,\text{sen}(x)\cdot\cos(y) = \text{ sen}(x+y) + \text{ sen}(x-y)$

iv) $2\cos(x)\cdot\text{ sen}(y) = \text{ sen}(x+y) - \text{ sen}(x-y)$

De acordo com [6], as *fórmulas de Werner* eram usadas do seguinte modo: Para multiplicar dois números a e b, a posição da vírgula deles era ajustada, com o uso de potências de 10, de modo que os novos valores obtidos ficassem compreendidos entre 0 e 1. Uma tabela trigonométrica era consultada, a fim de se obter os valores mais próximos daqueles que se pretendiam multiplicar, de tal modo que $\cos A = a$ e $\text{sen}B = b$, a depender de qual regra fosse a utilizada. Em posse dos valores de A e B, bastava apenas aplicá-los na *fórmula de Werner* desejada, lembrando de fazer os ajustes na posição da vírgula no final dos cálculos. Vejamos um exemplo:

Exemplo: Vamos fazer a multiplicação de 34218 por 615703. Primeiro, dividiremos esses números por 10^5 e 10^6, respectivamente, e no final dos cálculos, ajustaremos a posição da vírgula novamente. Vejamos:

Sejam $\text{sen}(A) = 0,34218$ e $\cos(B) = 0,615703$. Consultando uma tabela trigonométrica, podemos encontrar os valores de A e B. Então, $\text{sen}(20°) = 0,34218$ e $\cos(52°) = 0,615703$. Pela identidade $iii)$, temos

$$2 \cdot \text{sen}(20°) \cdot \cos(52°) = \text{sen}(20° + 52°) + \text{sen}(20° - 52°)$$

$$2 \cdot 0,34218 \cdot 0,68203 = \text{sen}(72°) + \text{sen}(-32°)$$

Como $\text{sen}(-32°) = \text{sen}(328°) = -\text{sen}(32°)$, basta consultar a tabela trigonométrica mais uma vez. Daí temos,

$$2 \cdot \frac{34218}{10^5} \cdot \frac{615703}{10^6} = 0,9511 + (-0,5299)$$

$$34218 \cdot 615703 \approx \frac{0,4212}{2} \cdot 10^{11} = 2106000000$$

Os quocientes eram tratados de maneira semelhante, porém usavam-se tabelas de secantes e cossecantes. Por exemplo, para efetuar a divisão de dois números, a identidade $i)$ poderia ser manipulada para usar a divisão no lugar do produto:

$$\frac{2\cos x}{\cos y} = 2\cos x \sec y.$$

Em nosso exemplo de multiplicação por *prostaférese*, é possível notar que não houve economia significativa de esforço e tempo. No entanto, lembremos que naquela época as tabelas trigonométricas com até 15 casas decimais eram comuns, o que possibilitou a *prostaférese* se tornar um método atraente.

Ainda segundo [6], outra grande inspiração para Napier, foram as tabelas de potências sucessivas de um dado número, contidas na obra *Arithmetica Integra* de Michael Stifel (1487-1567). Nessa obra encontra-se o cálculo com potências de expoente racional e, em particular, a regra da multiplicação:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \text{ para todo } m \text{ e } n\ racionais$$

Muito antes de publicar a obra mencionada anteriormente, Napier já havia adquirido um vasto conhecimento com relação a correspondência entre as progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), o que serviu de base para o desenvolvimento de sua maior descoberta. Por exemplo, observemos a tabela a seguir, em que a primeira e a segunda linha representam os termos em progressão aritmética, de razão 1, e progressão geométrica, de razão 2, respectivamente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Para multiplicar dois termos da progressão geométrica (por exemplo, $16 \cdot 32$), basta somar os seus correspondentes na progressão aritmética (no caso, $4 + 5 = 9$) e verificar a qual termo da PG essa soma correspondente (no exemplo, é o número 512). Esse procedimento nada mais era do que a regra $a^m a^n = a^{m+n}$.

Um inconveniente era que essa tabela permitia apenas um número restrito de operações. Napier desejou preencher os "espaços"entre os números inteiros, observados na linha de PG. Em vista disso, ele decidiu utilizar como razão, um número muito próximo a 1, com o intuito de conservar próximos os termos em uma progressão geométrica de potências inteiras de um dado número. O número escolhido foi $1 - 10^{-7}$ (ou $0,9999999$). Para evitar números decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^7. Assim sendo, ele criou uma tabela, em que a primeira coluna era composta por termos, chamados de N, em progressão geométrica, sendo 10^7 o primeiro termo, e a última coluna era formada por termos em progressão aritmética, a qual ele chamou de L.

Desse modo,

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L,$$

em que L é o "logaritmo"de Napier, do número N.

Logo, o logaritmo de 10^7 é 0, o logaritmo de $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ é 1, o logaritmo de $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2$ é 2, e assim por diante. Foi assim construída a primeira tábua de logaritmo que se tem notícia, com 101 linhas, como pode ser observado na tabela a seguir.

PG (N)	Aproximação	**PA** (L)
10^7	10000000	0
$10^7(1 - 10^{-7})$	9999999	1
$10^7(1 - 10^{-7})^2$	9999998	2
$10^7(1 - 10^{-7})^3$	9999997	30
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7(1 - 10^{-7})^{100}$	9999900	100

Tabela 1 – Primeira tábua de logaritmos de Napier

Segundo [5], Napier não possuía o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois a sua definição era diferente da atual. Dividindo cada um dos seus números e logaritmos por 10^7, teríamos, em notações modernas, um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, pois o número real $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ se aproxima de $\frac{1}{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Em princípio, Napier chamou os índices das potências de "números artificiais" e, à medida que seus estudos foram avançando, ele fez a composição de duas palavras gregas *Logos* (razão) e *arithmos* (número). Suas tabelas eram compiladas por multiplicações repetidas, equivalente a potências de $1 - 10^{-7}$. Nota-se que a potência decrescia à medida que o índice (ou logaritmo) crescia.

Após a publicação da obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Napier ganhou diversos admiradores e entre eles se destaca Henry Briggs, professor de geometria em Oxford. Em 1615 eles se encontraram e Briggs propôs o uso de potências de expoente 10, ao invés de potências de 7, tendo a aprovação de Napier. Ambos concordaram que o logaritmo de 1 deveria ser 0 e que o logaritmo de 10 deveria ser 1. Em 1617 Napier faleceu e coube a Briggs o aperfeiçoamento dessas ideias. Briggs definiu seus logaritmos de forma semelhante ao que conhecemos hoje por logaritmos decimais.

Além de Napier, o suíço Jobst Burgi (1552-1632) também contribuiu para o surgimento dos logaritmos, produzindo trabalhos a respeito desse tema. Burgi foi um matemático e fabricante de instrumentos ligados à astronomia. Suas ideias acerca dos logaritmos foram desenvolvidas de maneira semelhante as de Napier, embora desconhecesse o seu trabalho.

Figura 2 – Jobst Burgi. Fonte:http://ecalculo.if.usp.br/historia/burgi.htm

Burgi usou demonstrações aritméticas e com os mesmos fundamentos que Napier. Porém, ao invés de usar a proporção $(1 - 10^{-7})$, ele usou $(1 + 10^{-4})$, que é um pouco maior do que 1. Desse modo, os logaritmos de Burgi aumentavam a medida que os números aumentavam, o que é o oposto do que acontecia com os logaritmos de Napier. Além disso, Burgi multiplicava as potências desses números por 10^8 (e não por 10^7) e os índices das potências por 10. Seus estudos foram publicados na obra *Arithmetische und Geometrische Progress Tabules*. Na tabela 2, está representada a tábua de logaritmos proposta por ele.

PG	Aproximação	**PA**
10^8	100000000	0
$10^8(1+10^{-4})$	100010000	10
$10^8(1+10^{-4})^2$	100020001	20
$10^8(1+10^{-4})^3$	100030003	30
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2 – Tabela de logaritmo de Burgi

Napier e Burgi lançaram suas tábuas de logaritmos em 1614 e 1620, respectivamente. A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior do que à de Burgi, devido a suas publicações e seu relacionamento com professores universitários.

Uma tábua de logaritmos, tal como as publicadas por Napier e Burgi, compõe-se de duas colunas e números, onde cada número à esquerda relaciona-se com um número à sua direita, denominado o seu *logaritmo*. Comparado a terminologia matemática atual, uma correspondência estabelecida através de uma tábua de logaritmos como essa é o que denominamos *função*. É interessante notar que a invenção dos logaritmos foi anterior à definição de função, no sentido atual, que foi desenvolvida por Leibniz, em 1673 . O trabalho de elaborar uma tábua de logaritmos por mais longo e cansativo que seja, é um só. Depois dele feito, não era mais necessário, digamos, efetuar multiplicações, pois adições bastavam.

O *logaritmo natural* foi descrito primeiramente pelo alemão Nicholas Mercator (1620-1687), em seu tratado, *Logaritmo Technica*, publicado em 1668. O que surpreende neste trabalho é o fato de que o termo "logaritmo natural"antecede o desenvolvimento do cálculo, período em que as propriedades desse logaritmo foram mais desenvolvidas.

A invenção de Napier não contemplava logaritmos de números negativos. Segundo [5], no final do século XVII e início do século XVIII, diversos matemáticos se debruçaram sobre esse assunto. Entre eles se destacam Jean Bernoulli (1667-1748) e Gottfried Leibniz (1646-1716). Leibniz argumentava que números negativos não possuíam logaritmos reais, enquanto Bernoulli acreditava erroneamente que $\log(-n) = \log(n)$. A solução foi dada pelo brilhante aluno de Jean Bernoulli, Leonhard Euler.

Euler (1707-1783) padronizou o uso do número e para representar a base dos logaritmos naturais, embora o conceito por trás desse número fosse conhecido há mais de um século, desde o surgimento dos logaritmos. Para ele, e era o número cujo logaritmo hiperbólico, definido a partir da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, era igual a 1.

Figura 3 – Leonhard Euler. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard-Euler

Enunciados como $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$, equivalente a $2\log(-1) = 2\log(+1)$, intrigaram os melhores matemáticos no início do século XVIII. Euler, em 1747, explicou de forma satisfatória a questão dos logaritmos de números negativos. Nessa época, ele enunciou a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta$, embora alguns matemáticos já a conhecessem. Essa identidade vale para todos os ângulos (medidos em radianos). Em particular, para $\theta = \pi$, tem-se $e^{i\theta} = -1$, o que significa que o logaritmo natural de -1 é igual a πi. Portanto, os logaritmos dos números negativos não são reais, e sim imaginários puros.

Por volta de 1730, Euler definiu a função exponencial e o logaritmo natural da seguinte forma:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

e também, mostrou que uma função é a inversa da outra.

Entre os séculos XVI e XVII, os logaritmos surgiram como ferramenta de cálculo, que transformavam complexas operações de multiplicação e divisão em operações mais simples de adição e subtração. A partir do século XVIII, houve o desenvolvimento do cálculo e o estabelecimento das funções logarítmicas e exponenciais, tal como conhecemos hoje. O conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier e - a falta de semelhança com a notação atual de logaritmos - não diminui em nada a relevância dos estudos desse estudioso tão importante para a evolução da matemática.

1.2 Logaritmos

Os logaritmos desempenharam por mais de três séculos o papel de grande instrumento para simplificar o cálculo aritmético. Devido ao grande avanço da tecnologia no último século, eles perderam esse posto de eficiente calculador, sendo substituído por dispositivos eletrônicos, como calculadoras e computadores. Apesar disso, os logaritmos continuam merecendo uma posição de destaque no ensino da matemática, principalmente por causa das suas aplicações.

Antes de apresentar a definição de logaritmo, faremos algumas considerações acerca do conceito de potência.

Definição 1.1. *Seja a um número real positivo não nulo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n, é definida como o produto de n fatores iguais a a. Ou seja,*

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a \ \ \textit{(n fatores)}$$

Analogamente, para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$a^m = a \cdot a \cdot a \ldots a \ \ \text{(m fatores)}$$

Então,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \ldots a)}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \ldots a)}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{(m+n) \text{ fatores}} = a^{m+n}$$

Portanto, vale a *propriedade fundamental* da potenciação:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \ \text{para todo } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } m, n \in \mathbb{N}.$$

Claramente, a *propriedade fundamental* vale para o produto de várias potências. Por exemplo, $a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdot a^q = a^{m+n+p+q}$. Em particular, tomando um produto de p fatores iguais a a^n, obtemos

$$\underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{p \text{ fatores}} = (a^n)^p,$$

ou seja, $(a^n)^p = a^{np}$.

Se $a > 1$, então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$. Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \ldots < a^n < a^{n+1} < \ldots$$

Por outro lado,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \ldots > a^n > a^{n+1} > \ldots$$

Para definirmos a^0 de modo que a propriedade fundamental da potenciação continue válida, devemos convencionar $a^0 = 1$, pois desse modo teremos $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$.

Se quisermos estender a noção de potência de modo a abranger também expoentes negativos, devemos ter:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \text{daí}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Assim, a única maneira de definir a potência a^n de tal modo que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ continue verdadeira, com m e n inteiros positivos ou negativos, consiste em considerar $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Agora, vamos estender a noção de potência de um número real $a > 0$, de modo a incluir expoentes fracionários, da forma $n = \dfrac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$. Para garantir a validade das propriedades anteriores, devemos definir a potência $a^{\frac{p}{q}}$ para que se tenha um número real positivo atendendo a condição:

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{(\frac{p}{q})\cdot q} = a^p$$

Logo, $a^{\frac{p}{q}}$ deve ser o número real positivo cuja *q-ésima* potência é igual a a^p. Por definição de raiz, isso significa que $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Observemos que, dado um número real $a > 0$, $r = \dfrac{p}{q}$ e $s = \dfrac{u}{v}$, com $q, v > 0$, a propriedade fundamental continua válida, isto é, $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
De fato, sabemos que

$$(a^r)^q = a^p \text{ e } (a^s)^v = a^u$$

Logo:

$$(a^r \cdot a^s)^{q\cdot v} = (a^r)^{qv} \cdot (a^s)^{qv} = a^{pv} \cdot a^{uq} = a^{pv+uq}$$

Vemos que $a^r \cdot a^s$ é o número cuja *qv-ésima* potência vale a^{pv+uq}. Ou seja, $a^r \cdot a^s = a^{\frac{pv+uq}{qv}}$.

Em resumo, dado $a > 0,\ a^r$ está definido para todo número racional r.

Para que a noção de potência abranja todos os números reais, devemos entender o significado de potência com expoente irracional. Números irracionais são aqueles que não podem ser expressos na forma $\dfrac{p}{q}$, em que *p* e *q* são números inteiros e $q \neq 0$, como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \pi$, entre outros.

Dado um número real $a > 0$ e um número irracional r, a potência a^r pode ser definida, tomando-se aproximações racionais do número r. Por exemplo, a potência $10^{\sqrt{2}}$ pode ser obtida, tomando-se aproximações do número irracional $\sqrt{2}$, tais como,

$$10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1{,}41421...}$$

$$10^{1{,}4} \approx 25{,}1188$$

$$10^{1,41} \approx 25,7039$$

$$10^{1,414} \approx 25,9417$$

$$10^{1,4142} \approx 25,9537$$

$$10^{1,41421} \approx 25,9543$$

Portanto, $10^{\sqrt{2}} \approx 25,9543$. Quanto mais próximo r estiver de $\sqrt{2}$, mais próximo estará 10^r de $10^{\sqrt{2}}$.

Feitas as devidas observações em relação a potenciação,vamos apresentar a definição de logaritmo. Tradicionalmente, logaritmo é definido do seguinte modo:

Definição 1.2. *Dado um número real $a > 0$, com $a \neq 1$, o logaritmo de um número real $x > 0$ é o expoente y a que se deve elevar a, de tal modo que $a^y = x$.*

Escreve-se $\log_a x = y$, em que a e x representam, respectivamente, base e logaritmando.

Lê-se: O logaritmo de x na base a é igual a y.

Podemos escrever então:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Da definição anterior, decorre a propriedade fundamental dos logaritmos:

Propriedade: *Em qualquer base a, com $0 < a \neq 1$, o logaritmo do produto de dois números reais positivos é igual a soma dos logaritmos desses números. Isto é,*

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

De fato, tomando $\log_a x = u$, $\log_a y = v$, pela definição de logaritmo, temos:

i) $\log_a x = u \Rightarrow a^u = x$

ii) $\log_a y = v \Rightarrow a^v = y$.

Então, usando $i)$ e $ii)$, obtemos $a^u \cdot a^v = x \cdot y$.

Fazendo uso das propriedades de potência, segue então que $x \cdot y = a^{u+v}$.

Essa última igualdade significa que $u + v = \log_a(x \cdot y)$, isto é,

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

Seguem outras duas propriedades que tornam vantajoso o emprego dos logaritmos nos cálculos.

Propriedade A. *Em qualquer base* $a,\ 0 < a \neq 1$*, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor. Isto é,*

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Propriedade B. *Em qualquer base* $a,\ 0 < a \neq 1$*, o logaritmo de uma potência de base e expoente reais positivos é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Isto é,*

$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$$

As demonstrações das propriedades A e B podem ser encontradas em [10].

Consequências diretas da definição de logaritmo:

1. O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

2. O logaritmo da base na própria base é igual a 1.

$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

3. A potência de base *a* e expoente $(\log_a b)$ é igual a *b*, isto é

$$a^{\log_a b} = b$$

De fato, seja $c = \log_a b$. Fazendo a substituição na equação anterior, temos

$$a^c = b$$

Pela definição de logaritmo, temos

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Portanto, tem-se $a^{\log_a b} = b$.

4. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais, ou seja,

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Vejamos:
Pela definição de logaritmo, $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow a^{\log_a c} = b$. Pela consequência 3, temos $c = b$.

1.3 Função logarítmica

Definição 1.3. *Uma função real $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, chama-se função logarítmica quando tem as seguintes propriedades:*

A) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$

B) $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

O número $L(x)$ chama-se o *logaritmo* de *x*, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Como consequência de A) e B) seguem as propriedades:

Propriedade 1. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, ou seja, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.*

De fato. Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ com $x \neq y$. Temos então que $x < y$ ou $y < x$. Se $x < y$, segue de A) que $L(x) < L(y)$. Analogamente, se $y < x$, temos que $L(y) < L(x)$. Em qualquer um dos casos, temos $x \neq y \Rightarrow L(x) \neq L(y)$.

Propriedade 2. *O logaritmo de 1 é 0.*

Pela propriedade B), temos $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$.

Logo, pela lei do cancelamento, temos $L(1) = 0$.

Propriedade 3. *Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.*

Seja x um número real positivo.

Se $x < 1$, temos $L(x) < L(1)$, pois L é crescente. Pela propriedade 2, sabemos que $L(1) = 0$. Logo, $L(x) < 0$.

Por outro lado, se $x > 1$, temos $L(x) > L(1)$, portanto, $L(x) > 0$.

Propriedade 4. *Para todo $x > 0$, tem-se $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.*

De fato, de $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, decorre da propriedade B) que $L\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = L(1)$. Como $L(1) = 0$, tem-se $L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, isto é, $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

Propriedade 5. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, vale*

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

De fato,

$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right)$, *pela propriedade B).*

Pela propriedade 4, $L\left(\frac{1}{y}\right) = -L(y)$. *Logo,* $L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y)$.

Propriedade 6. *Para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *e todo número racional* $r = \frac{p}{q}$ *tem-se* $L(x^r) = r \cdot L(x)$.

A demonstração será feita por etapas. Primeiramente é possível notar que a propriedade B) se estende para o produto de um número qualquer de fatores.

Por exemplo: $L(x \cdot y \cdot z) = L((x \cdot y) \cdot z) = L(x \cdot y) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z)$.

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$, então

$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot \cdots \cdot x) = L(x) + L(x) + \cdots + L(x) = n \cdot L(x)$

Portanto, a propriedade 6 vale para $r = n$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos agora o caso em que $r = -n$, com $n \in \mathbb{N}$, isto é, r é um inteiro negativo.

Para todo $x > 0$, temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Então,

$$L(x^n \cdot x^{-n}) = L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0.$$

E daí,

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = 0 \Rightarrow L(x^{-n}) = -L(x^n) = -n \cdot L(x), \text{ pela parte anterior.}$$

Por fim, o caso geral em que $r = \frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ temos,

$$(x^r)^q = x^p \Rightarrow L((x^r)^q) = L(x^p) \Rightarrow q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x) \Rightarrow L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x) = rL(x)$$

Observação: A propriedade também é válida quando $r = 0$. Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se que $x^0 = 1$. Logo, $L(x^0) = L(1) \Rightarrow 0L(x) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Propriedade 7. *Uma função logarítmica* $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é ilimitada, superior e inferiormente.*

Afirmação 1: $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente.

Dado um número real β, devemos exibir um número $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(x) > \beta$.

Tomemos um número natural n suficientemente grande tal que $n > \frac{\beta}{L(2)}$.

Como $L(2)$ é positivo (Propriedade 3), temos que $n \cdot L(2) > \beta$. Pela propriedade 6, temos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > \beta$.

Assim, escolhendo $x = 2^n$, conclui-se que $L(x) > \beta$.

Isso mostra que L é ilimitada superiormente.

Afirmação 2: $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é ilimitada inferiormente.

Dado um número real α, desejamos exibir um número $y \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(y) < \alpha$.

Como vimos anteriormente, dado qualquer número real α, podemos encontrar $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(x) > -\alpha$, ou ainda,$-L(x) < \alpha$.

Pela propriedade 4, temos que $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$. Então, escolhendo $y = \frac{1}{x}$, temos $L(y) < \alpha$.

Isso mostra que L é ilimitada inferiormente.

Observação 1.1. *Uma função logarítmica não pode ser definida para $x = 0$. Com efeito, se esse fosse o caso, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, teríamos*

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0)$$

e, portanto,

$$L(0) = L(x) + L(0) \Rightarrow L(x) = 0$$

Logo, L seria identicamente nula, contrariando a condição A, da definição.

Também não é possível estender satisfatoriamente o domínio de uma função logarítmica para todo $x < 0$, de modo que $L(x)$ seja um número real. De acordo com [15], logaritmo de números negativos estão definidos apenas no conjunto dos números complexos.

Notemos que, se $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c é uma constante positiva qualquer, então a função $M : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $M(x) = c \cdot L(x)$ também é uma função logarítmica.

O teorema a seguir mostra que esta é a única maneira de obter funções logarítmicas, uma vez que se conheça uma delas. Em outras palavras, após provarmos o teorema a seguir, é fato que, para estudarmos logaritmo, basta obtermos uma função crescente $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$. Todas as demais funções logarítmicas (ou sistema de logaritmos) resultarão de L pela multiplicação de uma constante conveniente.

Teorema 1.1. *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, existe uma constante c > 0 tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo x > 0.*

Demonstração. Vamos supor inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Provaremos que, neste caso, $L(x) = M(x)$, para todo $x > 0$.

Como $L(a) = M(a)$, podemos concluir que $L(a^r) = M(a^r)$, para todo $r \in Q$. Com efeito, pela propriedade 6, temos $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Neste caso, $L(b) < M(b)$ ou $L(b) > M(b)$. Consideremos, sem perda de generalidade, o caso em que $L(b) < M(b)$ (o outro caso é análogo).

Seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de modo que

$$n \cdot \big(M(b) - L(b)\big) > L(a) \Rightarrow M(b) - L(b) > \frac{1}{n} \cdot L(a) \Rightarrow M(b) - L(b) > L(a^{\frac{1}{n}})$$

Para simplificar o desenvolvimento dos cálculos, façamos $c = L(a^{\frac{1}{n}})$.

Os números da forma $c, 2c, 3c, \ldots$, dividem a reta real em intervalos justapostos de mesmo comprimento c.

Como $M(b) - L(b) > c$, para algum $m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$L(b) < m \cdot c < M(b)$$

Como,

$$m \cdot c = m \cdot L(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}})$$

então, usando a última desigualdade, temos

$$L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b)$$

Como L e M são crescentes, as duas desigualdades anteriores implicam, respectivamente, $b < a^{\frac{m}{n}}$ e $a^{\frac{m}{n}} > b$, o que é um absurdo.

Logo, b não existe e para todo $x > 0$, devemos ter $L(x) = M(x)$.

O caso geral reduz-se ao caso particular anterior. Dadas L e M funções logarítmicas arbitrárias, pela propriedade 3, temos que $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$.

Consideremos $c = \dfrac{M(2)}{L(2)}$ e a função auxiliar $N : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $N(x) = c \cdot L(x)$.

Como $N(2) = c \cdot L(2)$, então $N(2) = \dfrac{M(2)}{L(2)} \cdot L(2) = M(2)$.

Logo, $N(2) = M(2)$ e pelo que foi provado anteriormente, temos $N(x) = M(x)$, para todo $x > 0$. Portanto, $M(x) = c \cdot L(x)$, para todo $x > 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 1.2. *Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um único número real positivo x tal que* $L(x) = c$*.*

A demonstração deste teorema foi omitida neste trabalho, mas pode ser encontrada em [13].

Como consequência dos resultados obtidos anteriormente, segue um importante corolário.

Corolário 1.1. *Toda função logarítmica* $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre* $\mathbb{R}_+^*$ *e* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. Como $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é injetiva (Propriedade 1) e sobrejetiva (Teorema 1.2), segue que é bijetiva. □

1.3.1 Mudança de base

Como consequência do teorema 1.2, segue um importante resultado: dada uma função $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, existe um único número $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Chamamos esse número de *base* do sistema de logaritmos L.

Para explicitar a base de um sistema de logaritmos, podemos utilizar a notação $L_a(x)$ em vez de $L(x)$.

Consequentemente, se L_a e L_b são funções logarítmicas, então temos que $L_a(a) = 1$ e $L_b(b) = 1$. Pelo teorema 1.1, existe uma constante $c > 0$, de modo que $L_b(x) = c \cdot L_a(x)$, para todo $x > 0$. Fazendo $x = a$, resulta em $L_b(a) = c$. Portanto, temos

$$L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x)$$

Chamamos o procedimento anterior de *mudança de base*. Por ele, podemos transformar uma função logarítmica de *base a* em outra de *base b*, bastando conhecer apenas o valor de $L_a(b)$, isto é, o logaritmo de b calculado na base a. As bases mais utilizadas são a base 10, pois o nosso sistema de numeração é decimal, e a base $e \approx 2,718281$, dos logaritmos naturais, que estudaremos mais adiante.

1.4 Área de uma faixa de hipérbole

A definição de logaritmo como expoente, embora bastante difundida, apresenta alguns inconvenientes, como por exemplo: ao tratar todas as bases da mesma forma, não permite apresentar com naturalidade o número e como uma base especial; apresenta inúmeras restrições no desenvolvimento da teoria de potências com expoente real; além das dificuldades em se estabelecer certas desigualdades fundamentais, como $L(1+x) < x$, válida para logaritmos de base e. A definição geométrica apresenta uma vantagem inegável, devido a sua simplicidade conceitual e depende apenas do conceito de área de uma figura plana.

Em meados do século XVII, o padre jesuíta Gregory Saint Vicente e Isaac Newton reconheceram uma pequena relação entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos. Embora nenhum deles tenham de fato identificado essa área com os logaritmos naturais e nem reconhecido o número e, as suas observações constituíram uma ótima introdução ao cálculo integral. Isso mostra que a concepção geométrica de uma função logarítmica é uma ideia muito antiga, com mais de três séculos de existência.

Nesta seção será introduzida a definição de área de uma faixa de hipérbole. Para isso, vamos relembrar o que é uma hipérbole:

Dados dois pontos fixos F_1 e F_2 e um ponto arbitrário P, define-se hipérbole de focos F_1 e F_2 como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

em que a constante $2a$ é um número positivo, tal que $2a < d(F_1, F_2)$.

Considere a função $y = \dfrac{1}{x}$, cujo gráfico está representado na figura 4.

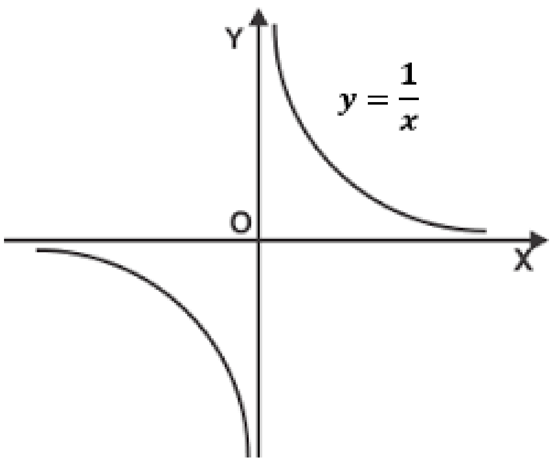


Figura 4 – gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$

Afirmação: o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$ é uma hipérbole. Vejamos:

Primeiramente, vamos verificar que, de fato, a equação $xy = 1$ refere-se à uma cônica.

De acordo com [11], cônica é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano, cujas coordenadas (x, y) satisfazem à equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

em que A, B, C, D, E e F são números reais e A, B e C não são todos nulos simultaneamente.

Comparando os coeficientes da equação $xy - 1 = 0$ com os coeficientes da equação anterior, percebemos que $B \neq 0$, o que nos leva a concluir que ela é mesmo uma cônica. Para confirmar que se trata de uma hipérbole, o discriminante, $\Delta = B^2 - 4AC$, da equação $xy - 1 = 0$, deve ser maior que 0. Como $\Delta = 1^2 - 0 = 1 > 0$, tem-se que o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$ é uma hipérbole.

A seguir definiremos faixa de hipérbole e veremos métodos para o cálculo de áreas fornecidas por essas faixas.

Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$. Desse modo, H é o subconjunto do plano formado pelos pontos da forma $\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$, em que $x > 0$. Logo,

$$H = \left\{(x, y);\ x > 0,\ y = \frac{1}{x}\right\}.$$

Geometricamente, H é o ramo positivo $xy = 1$, que está contido no primeiro quadrante. Em outras palavras, um ponto (x, y) do plano pertence ao conjunto H se e somente se $x > 0$ e $xy = 1$.

Definição 1.4. *Uma faixa de hipérbole é a região do plano limitada superiormente pelo ramo positivo de uma hipérbole, inferiormente pelo eixo das abscissas e lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo a e b números reais positivos, com $a < b$, conforme a figura 5.*

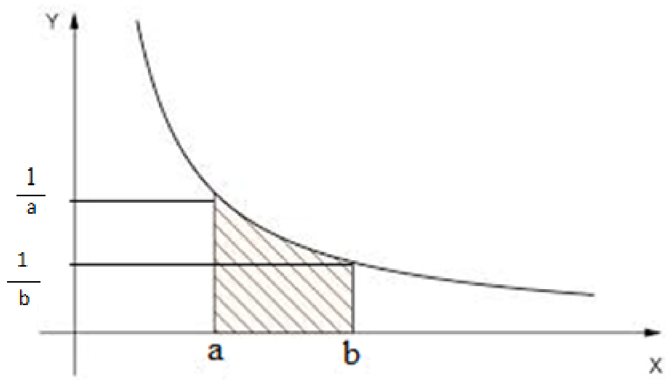


Figura 5 – Faixa de hipérbole

Essa região será representada por H_a^b, a qual denotaremos

$$H_a^b = \left\{(x,y);\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

A área de uma faixa de hipérbole pode ser estimada por aproximações, através de retângulos ou trapézios, construídos a partir da decomposição de $[a,b]$ em intervalos justapostos, conforme veremos a seguir.

1.5 Aproximação por retângulos

Vamos calcular uma aproximação, por falta, para a área de H_a^b, através de retângulos inscritos. Devemos dividir o intervalo $[a,b]$ em n intervalos justapostos, sendo n um número finito, por meio de pontos intermediários. Com base em cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da decomposição, em que i é um número inteiro tal que $1 \leq i \leq n$, consideremos o retângulo de altura $\frac{1}{x_i}$. O vértice superior direito desse retângulo tangencia a hipérbole H. Tal retângulo será denominado *retângulo inscrito* na faixa H_a^b. Em cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ formados, a reunião dos retângulos inscritos constitui um *polígono retangular* inscrito na faixa H_a^b, o que pode ser observado na figura 6.

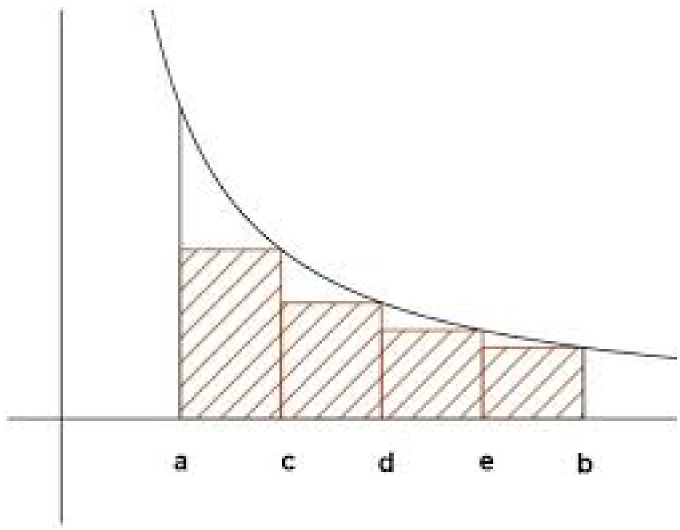


Figura 6 – Polígono retangular inscrito na faixa H_a^b

Conhecendo os pontos de subdivisão do intervalo $[a,b]$, é possível calcular facilmente a área de um *polígono retangular* inscrito numa faixa, já que esta corresponde a soma das áreas dos retângulos inscritos. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo: Considere a faixa H_1^3. Se tomarmos a decomposição do intervalo $[1,3]$ através dos pontos intermediários $1,\ \dfrac{3}{2},\ 2,\ \dfrac{5}{2},\ 3$, obteremos um *polígono retangular* cuja área é igual à soma das áreas dos quatro retângulos formados, ou seja:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}\approx 0,95.$$

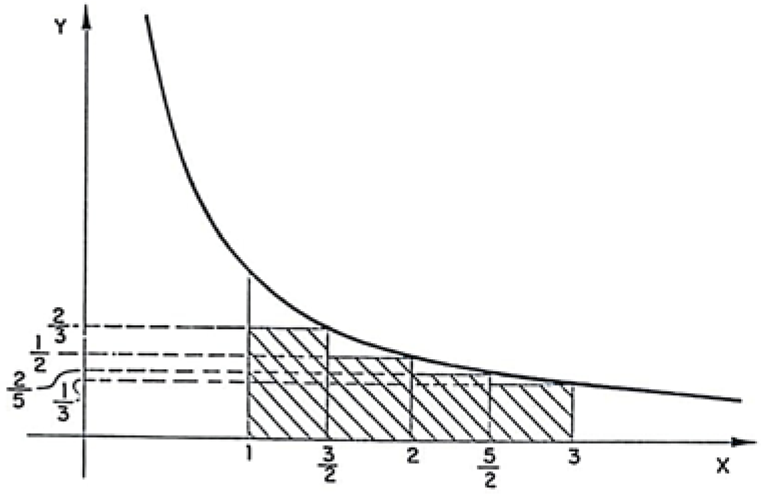


Figura 7 – Uma aproximação para a área de H_1^3

É possível obter uma aproximação melhor para a área de H_1^3. Para isso, precisaremos utilizar mais pontos para dividir o intervalo $[1,3]$. Podemos fazer isso por meio dos pontos

$$1,\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{4},\ 2,\ \frac{9}{4},\ \frac{10}{4},\ \frac{11}{4},\ 3,$$

obtendo um *polígono retangular* inscrito em H_1^3, formado por 8 retângulos justapostos, cuja área é:

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{11}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{84813}{83160}\approx 1,019.$$

Cada *polígono retangular* inscrito na faixa H_a^b apresenta um valor aproximado por falta para a área de H_a^b. Quanto mais subdivisões forem feitas no intervalo $[a,b]$, mais aproximado será o valor da área, ou seja, menor será a diferença entre o valor exato da área de H_a^b e a área do polígono inscrito. Dessa forma, a área de H_a^b pode ser assim definida:

Definição 1.5. *A área de H_a^b é o número real cujas aproximações, por falta, são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b.*

Independente de qual seja o polígono retangular inscrito na faixa H_a^b, a área do polígono será sempre menor ou igual a área de H_a^b.

Podemos obter polígonos retangulares cujas áreas sejam tão próximas da área de H_a^b quanto queiramos, basta refinar suficientemente a subdivisão do intervalo $[a, b]$. Voltando ao exemplo, observamos que $\dfrac{84813}{83160} \approx 1,019$ é uma aproximação melhor para a área de H_1^3. Embora não saibamos com exatidão o valor da área de H_1^3, podemos garantir que H_1^3 possui uma área superior a 1, pois Área$(H_1^3) > 1,019$.

1.6 Aproximação por trapézios

Dada uma decomposição de $[a, b]$ em n intervalos justapostos, sendo n um número finito, sobre cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, em vez do retângulo inscrito com base $[x_{i-1}, x_i]$, consideremos o *trapézio secante* de mesma base e lados verticais (base maior e base menor) de comprimento $\dfrac{1}{x_{i-1}}$ e $\dfrac{1}{x_i}$, respectivamente, de modo que dois de seus vértices toquem *H*. Como *H* tem a concavidade voltada para cima, já que é o ramo positivo da curva $y = \dfrac{1}{x}$, esse trapézio contém a faixa H_c^d em seu interior. A reunião dos trapézios assim obtidos forma um *polígono trapezoidal* secante à faixa H_a^b.

Definição 1.6. *A área de H_a^b é o número real cujas aproximações, por excesso, são as áreas dos polígonos trapezoidais secantes a H_a^b.*

Para ilustrar o método, vamos calcular uma aproximação para a área de H_1^3, decompondo o intervalo $[1, 3]$ através dos pontos

$$1, \ \frac{5}{4}, \ \frac{6}{4}, \ \frac{7}{4}, \ 2, \ \frac{9}{4}, \ \frac{10}{4}, \ \frac{11}{4}, \ 3,$$

como indica a figura 8.

Assim obtemos oito trapézios cujo lado horizontal (altura) tem medida $\dfrac{1}{4}$ e os lados verticais tem medida $\dfrac{1}{x}$, em que x representa cada um dos pontos anteriores.

A área do polígono trapezoidal é dada pela soma das áreas dos oito trapézios e portanto, vale:

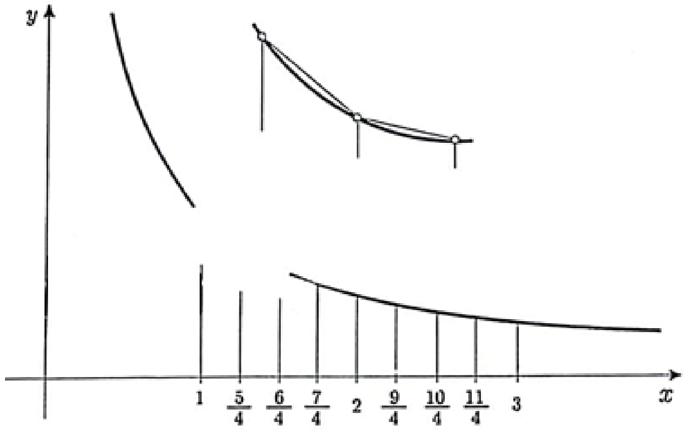


Figura 8 – Aproximação de H_1^3 por trapézios secantes

$$\frac{1}{8}\left[\left(1+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{4}{7}+\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4}{10}+\frac{4}{11}\right)+\left(\frac{4}{11}+\frac{4}{12}\right)\right]=\frac{1}{8}\left(\frac{30581}{6930}\right)\approx 1,1025$$

Se compararmos este resultado com a aproximação feita usando retângulos, cuja divisão em intervalos justapostos é a mesma, concluímos que

$$1,0198\ <\text{Área}(H_1^3)\ <1,1025.$$

Uma outra possibilidade para o cálculo da área de uma faixa H_a^b é através de *trapézios tangentes*. Podemos considerar, sobre cada intervalo $[c,d]$ da decomposição de $[a,b]$, o trapézio com base $[c,d]$ e cujo lado inclinado é tangente à hipérbole, pelo ponto de abscissa $\dfrac{c+d}{2}$, como mostra a figura 9.

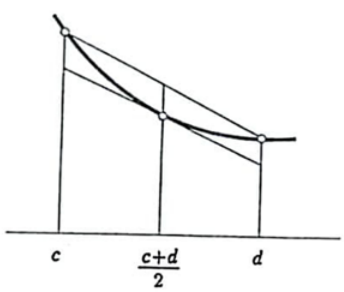


Figura 9 – Aproximação por trapézios tangentes

A área do *trapézio tangente* é dada pelo produto entre a altura e a base média. Percebemos claramente que a altura mede $d - c$, enquanto a base média tem medida $\dfrac{2}{c+d}$. Portanto, a área do trapézio tangente é dada por

$$2 \cdot \frac{d-c}{c+d}$$

A reunião dos *trapézios tangentes* é denominada *polígono trapezoidal* tangente à faixa H_a^b. Sua área é uma aproximação, por falta, da área de H_a^b.

Vamos utilizar este método para calcular uma aproximação inferior para a área de H_1^3, considerando os mesmos pontos utilizados no método de aproximação por *trapézios secantes*. Portanto, uma aproximação por falta para a área de H_1^3 é

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15} + \frac{2}{17} + \frac{2}{19} + \frac{2}{21} + \frac{2}{23} = 1,0963.$$

Comparando este valor com aquele obtido no método de aproximação por trapézios secantes, podemos escrever $1,0963 <$ Área$H_1^3 < 1,1025$.

Se fizermos uma subdivisão do intervalo $[1,3]$ com mais pontos, podemos notar que a área de H_1^3 com quatro casas decimais aproximadas é $1,0986$, o que nos permite concluir que a aproximação dada pelos *trapézios tangentes* é melhor do que a dada pelos *trapézios secantes*.

Uma propriedade fundamental que se conclui da teoria das áreas das faixas de hipérbole, pode ser observada no seguinte teorema:

Teorema 1.3. *Seja qual for o número real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.*

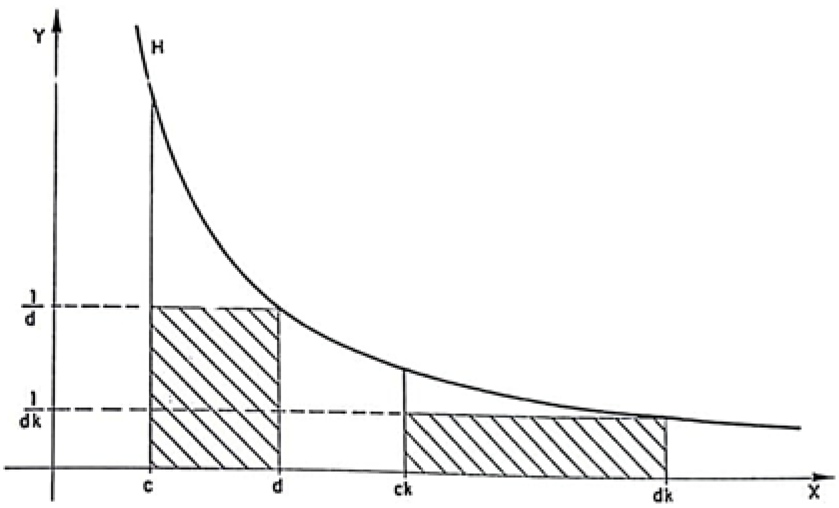


Figura 10 – As áreas dos retângulos hachuradas são iguais

Demonstração. Dado um retângulo inscrito em H, cuja base é o segmento $[c, d]$, tem-se que o retângulo inscrito em H, com base no segmento $[ck, dk]$ possui mesma área que o retângulo anterior.

De fato, a área do primeiro é:

$$(d - c) \cdot \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$$

enquanto a área do segundo é:

$$(dk - ck) \cdot \frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}.$$

Agora, consideremos um polígono retangular inscrito em H_a^b. Se multiplicarmos por k cada uma das abcissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$, obteremos um outro polígono retangular, inscrito em H_{ak}^{bk}, a partir da subdivisão do intervalo $[ak, bk]$.

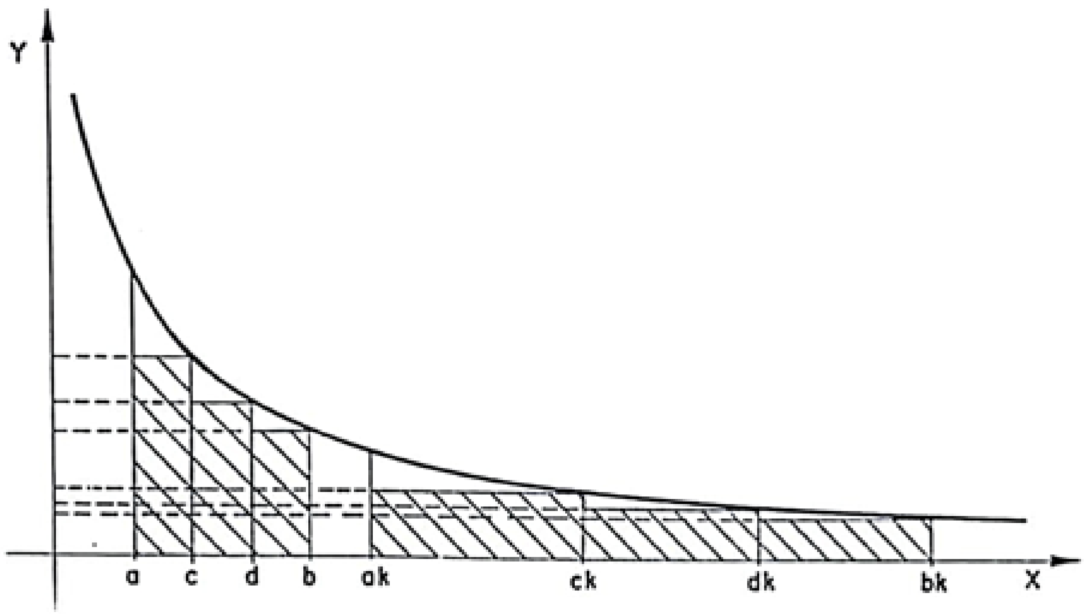


Figura 11 – As áreas das faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} são iguais

Podemos concluir que para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe outro com a mesma área, inscrito em $[ak, bk]$. Isso significa que as duas faixas possuem a mesma aproximação inferior para as áreas. □

Do teorema 1.3, podemos restringir nossa observação, sem perda de generalidade, a áreas da forma H_1^c, pois

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_1^{\frac{b}{a}}) = \text{Área}(H_1^c), \text{ com } c = \frac{b}{a}.$$

Além disso, dados a, b e c números reais, tais que $a < b < c$, temos

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c) \tag{1.1}$$

Para manter a validade da igualdade 1.1 para quaisquer a, b e c reais, convencionaremos que:

i. $\text{Área}(H_a^a) = 0$

   Isto é obvio, pois a faixa (H_a^a) reduz-se a um segmento de reta.

ii. $\text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a)$

   Na definição da faixa de hipérbole H_a^b, fixamos $a < b$ e percorremos o intervalo $[a, b]$ no sentido de a para b. Mantendo $a < b$, ao escrever H_b^a, realizamos uma mudança ao percorrer o mesmo intervalo $[a, b]$, agora no sentido de b para a. Como em valor absoluto o resultado é o mesmo, segue então que a aproximação obtida para a área de H_b^a é o simétrico do resultado obtido para H_a^b.

1.7 Logaritmos naturais

Nesta seção, definiremos o *logaritmo natural* de um número x como sendo a área da faixa H_1^x e mostraremos que o logaritmo natural é de fato uma função logarítmica.

Definição 1.7. *Seja x um número real positivo. O logaritmo natural de x é o número real dado pela área da faixa H_1^x.*

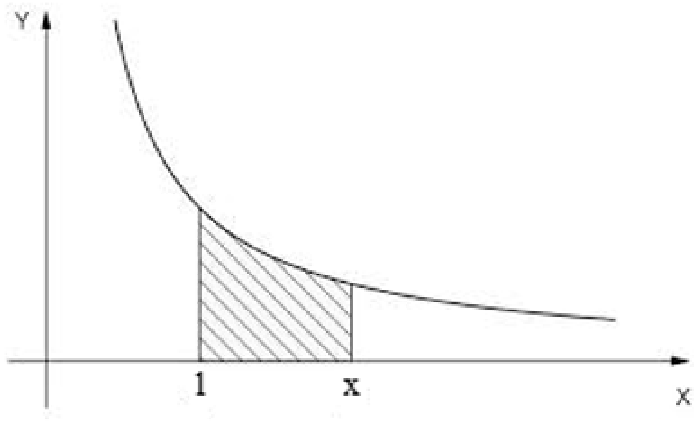


Figura 12 – A área hachurada é igual a logaritmo natural de x.

O logaritmo natural de x é representado por $\ln x$. *Desse modo:*

$$\ln x = \textit{Área}(H_1^x).$$

Alguns autores chamam o logaritmo natural de "logaritmo neperiano", em homenagem a John Napier. Entretanto, tal denominação é equivocada, pois o logaritmo definido por Napier não coincide com o logaritmo natural

Nos casos em que $0 < x < 1$, o *logaritmo natural* de *x* será dado pelo número real simétrico à área da faixa H_1^x, ver figura 13.

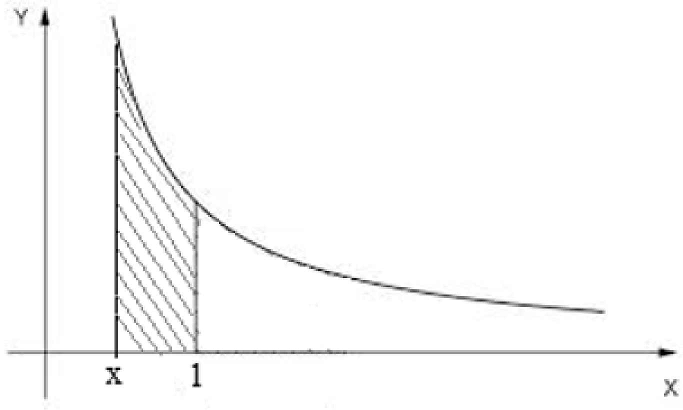


Figura 13 – Quando $0 < x < 1$, ln *x* é a área hachurada, com o sinal de menos

Em particular, quando $x = 1$, a faixa H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero. Logo, $\ln 1 = 0$.

Em resumo, temos:

$$\text{se } x > 1, \ln x > 0;$$

$$\text{se } 0 < x < 1, \ln x < 0;$$

$$\text{se } x < 0, \ln x \text{ não está definido.}$$

Exemplo: calculemos um valor aproximado para ln 2, utilizando a definição 1.7.

Isto é, ln $2 =$ Área(H_1^2).

Vamos decompor o intervalo $[1, 2]$ em 10 partes iguais, por meio dos pontos de subdivisão:

$$1 \quad 1,1 \quad 1,2 \quad 1,3 \quad 1,4 \quad 1,5 \quad 1,6 \quad 1,7 \quad 1,8 \quad 1,9 \quad 2.$$

Quando x assume cada um dos valores acima, os valores aproximados de $\dfrac{1}{x}$ são:

$$1 \quad 0,909 \quad 0,833 \quad 0,769 \quad 0,714 \quad 0,666 \quad 0,625 \quad 0,588 \quad 0,555 \quad 0,526 \quad 0,500.$$

Com o objetivo de obter uma aproximação inferior para ln 2 , vamos calcular a área do polígono retangular inscrito na faixa H_1^2. Para isso, temos que somar as áreas dos 10 retângulos formados, cujas bases medem $0,1$ e as alturas são os valores da lista anterior. Vejamos:

$(0,1\ \cdot\ 0,909) + (0,1\ \cdot\ 0,833) + (0,1\ \cdot\ 0,769) + (0,1\ \cdot\ 0,714) + (0,1\ \cdot\ 0,666) + (0,1\ \cdot\ 0,625) + (0,1\ \cdot\ 0,588) + (0,1\ \cdot\ 0,555) + (0,1\ \cdot\ 0,526) + (0,1\ \cdot\ 0,500) \approx 0,6685$

Podemos também obter uma aproximação para ln 2, por excesso, através do cálculo da área do polígono trapezoidal secante à faixa H_1^2. Por essa razão, consideraremos os 10 trapézios secantes à faixa, determinados pelo mesma subdivisão. A área de cada trapézio é dada pelo produto entre a soma dos lados verticais e a metade do lado horizontal, cuja medida é $\frac{1}{10}$. Portanto,

$(1 + 0,909) + (0,909 + 0,833) + (0,833 + 0,769) + (0,769 + 0,714) + (0,714 + 0,666) + (0,666 + 0,625) + (0,625 + 0,588) + (0,588 + 0,555) + (0,555 + 0,526) + (0,526\ +\ 0,5) \approx 13,87 \Rightarrow 13,87 \cdot \frac{1}{20} \approx 0,6935$

Portanto, podemos afirmar que $0,6685 <$ ln $2 < 0,6935$.

Se calcularmos o valor de ln 2 com o auxílio de uma calculadora, obtemos o número $0,6931$, com aproximação de 4 casas decimais. É evidente que as aproximações trapezoidais são melhores que as retangulares.

Teorema 1.4. $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica.*

Demonstração. Mostraremos que *ln* satisfaz as propriedades A) e B), especificadas na seção 1.3. Inicialmente, provaremos que

$$\text{ln}(x \cdot y) = \text{ln}\, x + \text{ln}\, y.$$

Vimos que

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_x^{xy}) \tag{1.2}$$

Pelo teorema 1.3, sabemos que

$$\text{Área}(H_x^{xy}) = \text{Área}(H_1^y) \tag{1.3}$$

De 1.2 e 1.3, segue que

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_1^y),$$

isto é,

$$\text{ln}(x \cdot y) = \text{ln}\, x + \text{ln}\, y.$$

Agora, provaremos que $\ln$ é uma função crescente.

Dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*,$ se $x < y$, podemos afirmar que existe um número $a > 1$, tal que $y = a \cdot x$. Aplicando $\ln$ em ambos os lados da igualdade anterior, temos

$$\ln y = \ln{(a \cdot x)} = \ln a + \ln x$$

Logo,

$$\ln y = \ln a + \ln x$$

Como $a > 1$, temos que $\ln a > 0$, e daí segue que $\ln y > \ln x$.

Portanto, $\ln$ é crescente.

Desse modo, fica assim demonstrado que $\ln$ é uma função logarítmica. $\square$

Na figura 14, temos o gráfico da função logaritmo natural.

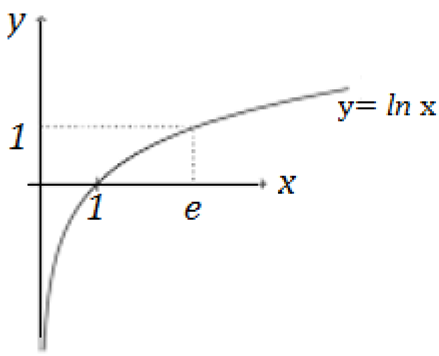


Figura 14 – Gráfico da função logaritmo natural

Como consequência do teorema 1.4, a função logaritmo natural, por ser uma função logarítmica, herda todas as propriedades vistas na seção 1.3. Em particular, destaco as seguintes propriedades:

1. $\ln\,(x \cdot y) = \ln\,x + \ln\,y$
2. $\ln\,\left(\frac{1}{y}\right) = -\,\ln\,y$
3. $\ln\,\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\,x - \ln\,y$
4. $\ln\,(x)^m = m \cdot \ln\,x$
5. $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{\ln\,x}{n}$

em que x e y são números reais positivos, m é real e n é natural. Estas propriedades são de grande interesse computacional, pois elas possibilitam simplificar diversas operações. Além disso, $\ln$ é bijetiva.

1.8 O número *e*

Em razão do teorema 1.2, existe um único número real positivo cujo *logaritmo natural* é igual 1. Tal número é representado pela letra e. Ele é a base do sistema de logaritmos naturais. Portanto,

$$ln\ x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

.

Com base no significado geométrico dos logaritmos naturais, podemos notar que a faixa H_1^e tem área igual a 1, como ilustra a figura 15.

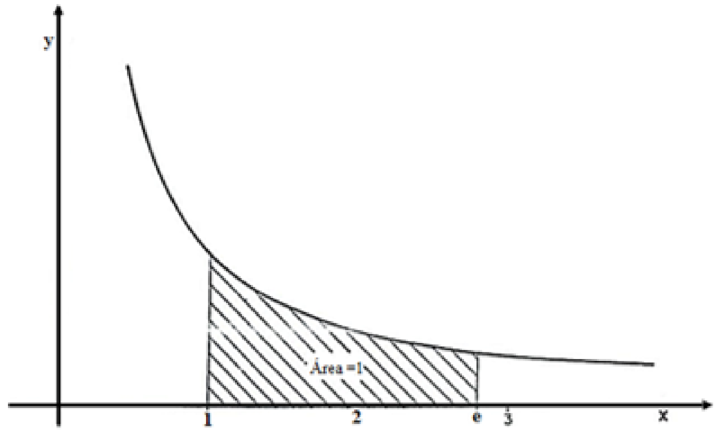


Figura 15 – $\ln e = 1$

Já vimos anteriormente que a faixa H_1^2 tem área menor do que 1 e a faixa H_1^3 tem área maior do que 1. Isto é, ln $2 < 1 <$ ln 3. Como ln $e = 1$, temos que ln $2 <$ ln $e <$ ln 3. Portanto, podemos concluir que $2 < e < 3$, pois ln é uma função crescente.

O número e, uma das constantes mais importantes na matemática, é irracional e sua aproximação com 10 casas decimais é $2,7182818284$, sendo que atualmente já são conhecidas bilhões de casas decimais. Esse número é comumente chamado "número de Néper", em homenagem a John Napier, já que sua origem está ligada ao desenvolvimento dos logaritmos. Mas foi Euler, no século XVIII, quem deu o nome "e", fazendo uma referência a palavra exponencial e por isso, ele também é conhecido como número de Euler.

Teorema 1.5. *Seja* $r = \dfrac{p}{q}$ *um número racional. Tem-se* $y = e^r$ *se, e somente se, ln* $y = r$

Demonstração. Seja $y = e^r$. Aplicando a função ln em ambos os lados, temos

$$\text{ln } y = \text{ln } e^r = r \cdot \text{ln } e.$$

Como ln $e = 1$, concluímos que ln $y = r$.

Reciprocamente, consideremos um número real $y > 0$ tal que ln $y = r$. Como ln$(e^r) = r \cdot$ ln $e = r$ e ln é uma função bijetiva, podemos concluir que $y = e^r$.

Portanto, o logaritmo natural de um número é o expoente a que se deve elevar a base e a fim de obter esse número. Isso vale pelo menos para expoentes racionais. □

Observação 1.2. *Tradicionalmente, o número e é dado por uma aproximação, a qual chamaremos limite, da seguinte forma:*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

No próximo capítulo daremos uma justificativa mais elaborada para este fato.

1.9 Outras bases

Até o momento consideramos a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ para definirmos logaritmos. Se tomarmos uma constante $k > 0$, podemos considerar a hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$ e, para cada k escolhido, teremos um novo sistema de logaritmos. A escolha que nos parece mais natural é tomar $k = 1$, por isso os logaritmos que estudamos anteriormente chamam-se *naturais*.

Dados dois pontos de abscissas a e b, indicaremos por $H(k)_a^b$ a faixa da hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$, compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Afirmação: *A área de $H(k)_a^b$ é igual a k vezes a área de H_a^b.*

Com efeito, dado um segmento $[c, d]$ contido em $[a, b]$, um retângulo de base $[c, d]$, inscrito na hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, tem altura $\dfrac{1}{d}$, enquanto um retângulo de mesma base, inscrito na hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$, tem altura $\dfrac{k}{d}$.

A área do primeiro retângulo é $(d - c) \cdot \dfrac{1}{d}$, ao passo que a área do segundo retângulo é $(d - c) \cdot \dfrac{k}{d}$. Comparando as áreas dos dois retângulos e observando que elas tem as mesmas aproximações inferiores, podemos constatar que a área do segundo é k vezes a área do primeiro. Portanto,

$$\text{Área}(H(k)_a^b) = k \cdot \text{Área}(H_a^b).$$

Dada uma constante $k > 0$, vamos introduzir uma novo sistema de logaritmos.

Definição 1.8. *Para cada $x > 0$, define-se*

$$\log x = \textit{Área}\big(H(k)_1^x\big).$$

Vimos anteriormente que Área$(H(k)_1^x) = k \cdot$ Área(H_1^x). Pela definição 1.7, temos $\ln x =$ Área(H_1^x). Logo,

$$\log x = k \cdot \ln x$$

A *base* desse sistema de logaritmos é o número a, tal que $\log a = 1$.

Notemos que

$$\log a = k \cdot \ln a = 1$$

Isto significa que

$$k = \frac{1}{\ln a}$$

A notação para o logaritmo de base a de um número $x > 0$ é $\log_a x$, em que

$$\log_a x = k \cdot \ln x$$

Como $k = \dfrac{1}{\ln a}$, temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Em relação à escolha da base a, segue uma importante observação.

Observação 1.3. *Em princípio, qualquer número real positivo a poderia ser escolhido para base de um sistema de logaritmos. Como assumimos anteriormente que $k > 0$, em que $k = \dfrac{1}{\ln a}$, estamos considerando apenas logaritmos cuja base a é maior do que 1. Isto porque*

$$k = \frac{1}{\ln a} \Rightarrow \ln a = \frac{1}{k}$$

Como $\dfrac{1}{k} > 0$, segue que $\ln a > 0$ e pelo que vimos anteriormente, isso ocorre se $a > 1$. A expressão $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ pode ser utilizada para definir $\log_a x$, mesmo quando $0 < a < 1$. No entanto, como neste caso $\ln a < 0$, os números entre 0 e 1 teriam logaritmos positivos, enquanto os números maiores que 1 teriam logaritmos negativos. Quando $0 < a < 1$, podemos tomar $b = \dfrac{1}{a}$ e portanto, temos $b > 1$ e $\log_a x = -\log_b x$. Desse modo, não há necessidade de estudarmos logaritmos com base $a < 1$. A rigor, se considerarmos $0 < a < 1$, então $\log_a x$ será uma função decrescente.

Teorema 1.6. $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica.*

Demonstração. Provaremos que $\log_a$ satisfaz as propriedades A) e B) da seção 1.3. A propriedade A) decorre imediatamente da relação

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Com efeito,

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

Provaremos agora que $\log_a$ é uma função crescente.

Dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, se $x < y$ podemos afirmar que existe um número $c > 1$ tal que $y = c \cdot x$. Aplicando $\log_a$ em ambos os lados da igualdade anterior, temos

$$\log_a y = \log_a(c \cdot x) = \log_a c + \log_a x$$

Como $a > 1$, temos que $\log_a c > 0$. Então, $log_a y > \log_a x$, o que nos leva a concluir que $\log_a$ é crescente.

Portanto, $\log_a$ é uma função logarítmica, como queríamos demonstrar. $\square$

Como vimos na seção 1.3, vale a fórmula de mudança de bases, expressa na propriedade a seguir.

Propriedade 8. *Sejam a e b números maiores do que 1. Para todo $x > 0$, tem-se*

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$$

Observação 1.4. *Em particular, antes do advento das calculadoras, o sistema de logaritmos mais utilizado era o de base 10, ou seja, os logaritmos decimais. A grande vantagem de utilizá-los se deve ao fato de adotarmos o sistema decimal de numeração. Comumente, a notação $\log x$ é usada para indicar os logaritmos decimais, em vez de $\log_{10} x$. O nosso objetivo é apenas usá-los em aplicações matemáticas, como veremos mais adiante.*

CAPÍTULO 2

Função exponencial

De acordo com a referência [18], na antiguidade, os homens, a partir de suas experiências cotidianas, começaram a perceber a possibilidade de se realizar associações e relações de semelhanças entre conjuntos variados e ao estabelecerem uma correspondência entre eles, um processo de contagem podia ser gerado. Com isso, surgem as primeiras ideias de função, que estão associadas a momentos distintos da história da humanidade. Foram as experiências e necessidades dos povos que se somaram e caracterizaram, no decorrer dos séculos, o que se tem hoje como função. O conceito de função exponencial, que também é dependente do conceito de potência, está intimamente associado ao conceito de logaritmo. Após as descobertas de Napier, no século XVII, vários matemáticos se debruçaram no estudo dos logaritmos e na evolução do conceito de função, consequentemente das funções exponenciais.

A função exponencial aparece em situações em que uma grandeza varia em função do tempo, de tal maneira que o acréscimo sofrido em um determinado instante é proporcional ao valor da própria grandeza naquele instante. São exemplos desses tipos de situações o decaimento radioativo e os juros compostos. Neste trabalho, dedicaremos ao estudo voltado para matemática financeira, área da matemática em que muito utiliza as funções exponenciais.

Vimos anteriormente, na seção 1.2, que dado $a > 0$, a potência a^x está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, dado $a \in \mathbb{R}_+^*$, podemos definir uma função que a cada $x \in \mathbb{R}$, associa $a^x \in \mathbb{R}_+^*$.

Definição 2.1. *Dado um número real a, tal que* $0 < a \neq 1$, *chama-se função exponencial de base* a, *a função* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *que associa a cada* x *real o número real positivo* a^x, *com as seguintes propriedades:*

a) *F é crescente, quando* $a > 1$, *isto é,* $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$, *e*

F é decrescente, quando $0 < a < 1$, *isto é,* $x < y \Rightarrow F(x) > F(y)$.

b) $F(x + y) = F(x) \cdot F(y)$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Observação 2.1. *A expressão $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ corresponde à expressão $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Observação 2.2. *É interessante observar também que, se uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tem a propriedade $b)$ anterior, isto é $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$, então F não pode assumir o valor 0, pois se fosse, F seria identicamente nula.*

Com efeito, se existe algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_0) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$, teríamos:

$$F(x) = F\big(x_0 + (x - x_0)\big) = F(x_0) \cdot F(x - x_0) = 0 \cdot F(x - x_0) = 0 \Rightarrow F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Outras propriedades surgem em decorrência da definição anterior:

Propriedade 9. $F(1) = a$

Com efeito, $a^1 = a$.

Propriedade 10. *Uma função exponencial $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é injetiva*

De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$. Então, $x < y$ ou $x > y$. Consideremos, primeiramente, o caso em que $x < y$. Temos que analisar as situações em que $0 < a < 1$ e $a > 1$.

i) $a > 1 \Rightarrow a^x < a^y \Rightarrow F(x) < F(y)$

ii) $0 < a < 1 \Rightarrow a^x > a^y \Rightarrow F(x) > F(y)$

Em ambas as situações, $x \neq y \Rightarrow F(x) \neq F(y)$.

Por outro lado, se $x > y$, obtém-se o mesmo resultado, respeitando as devidas desigualdades.

Propriedade 11. *Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $F(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*

Sendo $a > 1$, quando $x > 0,\ a^x$ cresce sem limites, isto é,

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty, \text{ quando } a > 1.$$

Por outro lado, se $0 < a < 1,\ a^x$ cresce se $x < 0$, ou seja,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty, \text{ quando } 0 < a < 1.$$

Para exemplificar, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty} = \infty$

Propriedade 12. *A função exponencial $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é sobrejetiva.*

A demonstração pode ser encontrada em [14].

Propriedade 13. *Toda função exponencial $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$.*

De fato, como vimos em propriedades anteriores, a função exponencial $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é injetiva e sobrejetiva. Logo, segue que F é uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$.

Pela propriedade 13, temos que F é bijetiva e, por isso, admite inversa. A observação a seguir, mostra-nos o conceito de função inversa, necessário para o estabelecimento de mais uma propriedade.

Observação 2.3. *A função $f : X \to Y$ é inversível se f é bijetiva. Neste caso, f tem inversa $g : Y \to X$. Quando isso ocorre, as funções f e g são tais que $g\big(f(x)\big) = x$ e $f\big(g(y)\big) = y$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é a inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.*

Se $g\big(f(x)\big) = x$ para todo $x \in X$, então a função f é injetiva, pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Por sua vez, a igualdade $f\big(g(y)\big) = y$, para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva, pois dado $y \in Y$, podemos tomar $x = g(y) \in X$ de tal modo que $f(x) = y$.

Portanto, se a função $f : X \to Y$ possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, f é uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Propriedade 14. *Seja $0 < a \neq 1$. As funções $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definidas por $L(x) = \log_a x$ e $F(x) = a^x$, respectivamente, são inversas uma da outra.*

De fato, pela observação 2.3, temos

$$F\big(L(x)\big) = a^{\log_a x} = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_+^*$$

e

$$L\big(F(x)\big) = \log_a a^x = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Como $L \circ F = F \circ L = x$, temos que F e L são inversas uma da outra.

Com todas as propriedades vistas anteriormente, toda tábua de logaritmos (tábua dos valores de uma função logarítmica) pode ser lida tanto da esquerda para a direita, o que é usual, como da direita para a esquerda. Dado um número real y, podemos procurar, na tábua, o número $x > 0$, de tal modo que y é o seu logaritmo. A "tabela inversa", lida da direita para a esquerda é, na verdade, a tábua dos valores da função exponencial.

2.1 A função exponencial de base e

Uma função exponencial muito importante na matemática é aquela cuja base é o número e. O número e, também base dos logaritmos naturais, foi definido anteriormente como o único número real positivo tal que a área da faixa de hipérbole H_1^e é igual a 1. Esse número, conforme vimos na observação 1.2, também é o limite da expressão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, quando n tende ao infinito.

Esta expressão pode ser entendida sem precisarmos ver formalmente o conceito de limite. A ideia é calcular o valor da expressão para um n cada vez maior. Vejamos na tabela 3 alguns valores aproximados para $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Quando tomamos um número n suficientemente grande, a potência $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ se aproxima de $e = 2,7182818284$ (aproximação com 10 casas decimais).

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5	$2,48832$
10	$2,593742$
1000	$2,716923$
10^5	$2,718268$
10^{10}	$2,718282$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3 – Aproximações para $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Provaremos a seguir que, de fato,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Façamos $x = \dfrac{1}{n}$, em que $n \neq 0$. Desse modo, x é um número real diferente de zero. Como $x = \dfrac{1}{n}$, dizer que $n \to \infty$ é o mesmo que $x \to 0$, pois quando n é um número suficientemente grande, o termo $\dfrac{1}{n}$ tende a zero. Portanto, demostrar a validade do limite anterior equivale a provar que, para todo $x \neq 0$, tem-se

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Vamos analisar os casos em que $x > 0$ e $x < 0$.

Primeiramente, suponhamos $x > 0$.

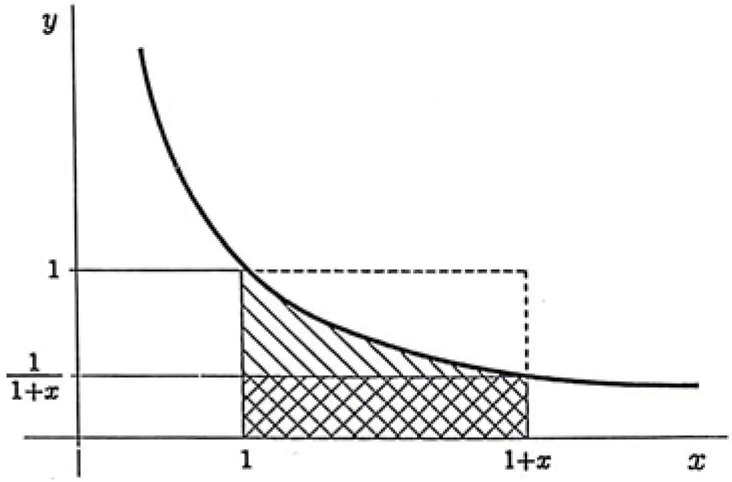


Figura 16 – Área da faixa H_1^{1+x}

Então $\ln(1+x)$ corresponde a área da faixa H_1^{1+x}. Observando a figura 16, podemos notar que a faixa está contida no retângulo de base x e altura 1. A área desse retângulo é x. Então

$$\ln(1+x) < x$$

Por outro lado, a faixa H_1^{1+x} contém o retângulo de base x e altura $\dfrac{1}{1+x}$. A área desse retângulo é $\dfrac{x}{1+x}$. Logo,

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$$

Portanto, podemos escrever

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Dividindo as desigualdades anteriores por x, obtemos

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

Pela propriedade 6, de logaritmos, podemos escrever

$$\frac{1}{1+x} < [\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}} < 1.$$

Tomando exponenciais, de base e, temos

$$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e, \text{ para todo } x > 0.$$

Aplicando limite, quando x tende a 0, em todos os membros das desigualdades, obtemos:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1+x}} < \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} < \lim_{x\to 0} e$$

Então, quando x tende a zero, percebemos que $e^{\frac{1}{1+x}}$ tende para e. Dessa forma,

$$e < \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} < e$$

Pelo Teorema do Confronto, concluímos que

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ para todo } x > 0.$$

Seja agora $x < 0$. Como faremos x tender para 0, suponhamos que $x > -1$ e portanto, $x + 1 > 0$.

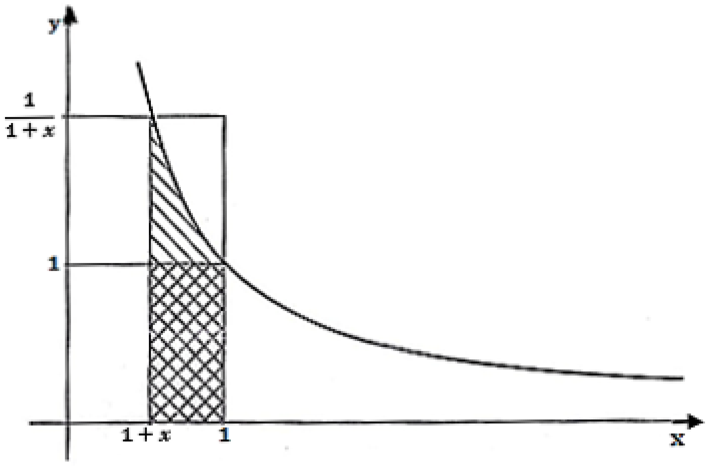


Figura 17 – Área da faixa H_{1+x}^1

Assim sendo, podemos considerar que $\ln(x+1)$ é um número real.

Como $-1 < x < 0$, a área da faixa de hipérbole H_{1+x}^1 é igual ao simétrico da área da faixa H_1^{1+x}, isto é,

$$\text{Área}(H_{1+x}^1) = -\ln(1+x).$$

Mais ainda, $-\ln(1+x)$ é a área da faixa de hipérbole H_{1+x}^1, a qual contém um retângulo cuja base é o número positivo $-x$ e altura é 1. A área desse retângulo é $-x$. Esta faixa está contida em um retângulo de base $-x$ e altura $\dfrac{1}{1+x}$. A área desse retângulo é igual ao número positivo $\dfrac{-x}{1+x}$. Podemos escrever então:

$$-x < -\ln(1+x) < \frac{-x}{1+x},$$

o que pode ser observado na figura 17.

Dividindo os três lados da desigualdade anterior por $-x$, temos

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}$$

ou ainda,

$$1 < [\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{1+x}.$$

Logo, tomando a exponencial de base e nas últimas desigualdades,

$$e < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{1+x}}$$

Pelo que vimos anteriormente, concluímos que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ para todo } x < 0.$$

Mais ainda, para $x \neq 0$, vale também a igualdade $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, conforme definiu Euler.

Funções desse tipo são muito utilizadas em aplicações matemáticas, pois servem para modelar situações de crescimento e decrescimento contínuos ao longo do tempo. As origens do número e e da função exponencial de base e, segundo a referência [16], podem estar associadas ao modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo:

> não deve surpreender a ninguém que algum matemático anônimo — ou talvez um mercador, ou um prestamista —, no início do século XVII, tenha notado uma ligação curiosa entre o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de uma certa expressão matemática no infinito (MAOR, 2008, p.34).

Antes de definirmos a função exponencial de base e, vejamos como motivação, um exemplo em que as funções exponenciais de base e surgem em problemas naturais.

Exemplo: Um investidor aplica um capital c_0 a uma taxa de k por cento ao ano. Se escrevermos $\alpha = \frac{k}{100}$, para cada real aplicado, o investidor receberá $(1+\alpha)$ reais, no final de um ano, de modo que o total a ser resgatado será $c_0(1+\alpha)$ reais. O acréscimo (juro), $c_0 \cdot \alpha$, é uma espécie de aluguel de dinheiro.

Sendo assim, raciocina o investidor: se eu resgatar meu capital depois de um semestre, terei direito a metade dos juros, logo receberei $c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$ reais. Então reinvestirei essa soma por mais um semestre e, no final do ano, ao invés de $c_0(1+\alpha)$, vou receber $c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2$, que é uma quantia maior (tal conclusão se dá pela desigualdade de Bernoulli).

Pensando melhor, diz o investidor, posso resgatar e reinvestir meu capital mensalmente, recebendo, no final de um ano, o total de $c_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$.

Como α é conhecido, o investidor, com o auxilio de uma calculadora, verifica que

$$\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}.$$

Animado com o resultado, o ambicioso investidor imagina que, resgatando e reaplicando seu dinheiro em um número n cada vez maior de intervalos de tempo iguais, poderá aumentar ilimitadamente o seu capital.

Na verdade, fazendo o que imagina, o investidor receberá, no final de um ano, o total acumulado igual a

$$c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = c_0 \cdot e^{\alpha}.$$

O investidor estava correto ao pensar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\alpha > 0$, tem-se

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n < \left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ao conceber esse processo imaginário de resgatar e reinvestir a cada instante seu capital, o investidor foi conduzido a noção de juros compostos, acumulados continuamente. Porém, ele cometeu um equívoco ao acreditar que com sua estratégia, seu capital aumentaria ilimitadamente.

O mesmo raciocínio é válido se considerarmos, para um número real $t > 0$, o capital c_0 aplicado durante t anos à mesma taxa α. Dividindo o intervalo $[0, t]$ em n partes iguais, resgatando e investindo n vezes, no final de t anos obteríamos $c_0\left(1+\dfrac{\alpha t}{n}\right)^n$, e fazendo n crescer indefinidamente chegamos a

$$c(t) = c_0 \cdot e^{\alpha t} = c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha t}{n}\right)^n$$

como o resultado da aplicação do capital c_0, durante t anos, a uma taxa de $\alpha = \dfrac{k}{100}$ ao ano, de juros compostos, acumulados continuamente.

Definição 2.2. *Dado o número real x, e^x é o único número real positivo cujo logaritmo natural é x. Isto é,*

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

O corolário 1.1 assegura a existência e a unicidade de e^x.

Geometricamente, $y = e^x$ é a abcissa que devemos considerar para que a área da faixa de hipérbole H_1^y tenha área igual a x, conforme ilustra a figura 18.

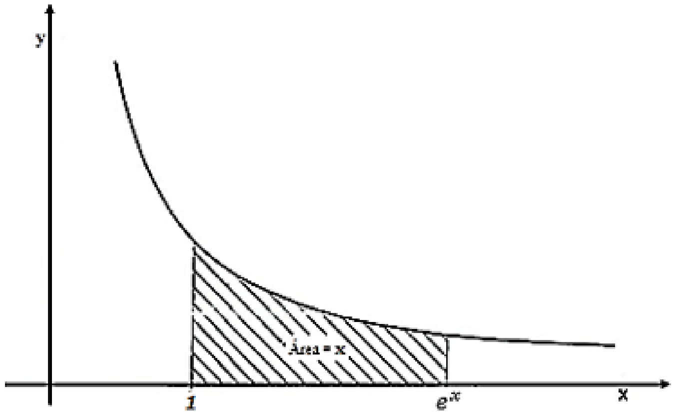


Figura 18 – Área da faixa de hipérbole $H_1^{e^x}$

Como $e > 0$, temos que $e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notemos que:

$$e^x > 1, \text{ se } x > 0$$

$$e^x < 1 \text{ se } x < 0$$

.

Em razão do teorema 1.5, quando $x = \frac{p}{q}$ é um número racional, o número y, cujo logaritmo é x, é dado por $y = \sqrt[q]{e^p}$. Logo, $e^x = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$.

Em particular, para $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot e \cdot \ldots \cdot e}_{n \text{ fatores}}$$

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

Por outro lado, agora faz sentido tomar e^x quando x é irracional. Para exemplificar, consideremos o número $e^{\sqrt{2}}$. Pelo que vimos anteriormente, este número é simplesmente o número $y > 0$, tal que a área da faixa H_1^y é igual a $\sqrt{2}$.

Sabemos que $\sqrt{2} \approx 1,414$. Para encontrar um valor aproximado para $e^{\sqrt{2}}$, basta procurar em uma tábua de logaritmos naturais, o número cujo logaritmo mais se aproxima de $1,414$. Uma aproximação por falta e uma aproximação por excesso são dadas por

$$\ln(4,11) = 1,413 \text{ e } \ln(4,12) = 1,416.$$

Logo,

$$4,11 < e^{\sqrt{2}} < 4,12,$$

sendo melhor, neste caso, a aproximação por falta $4,11$.

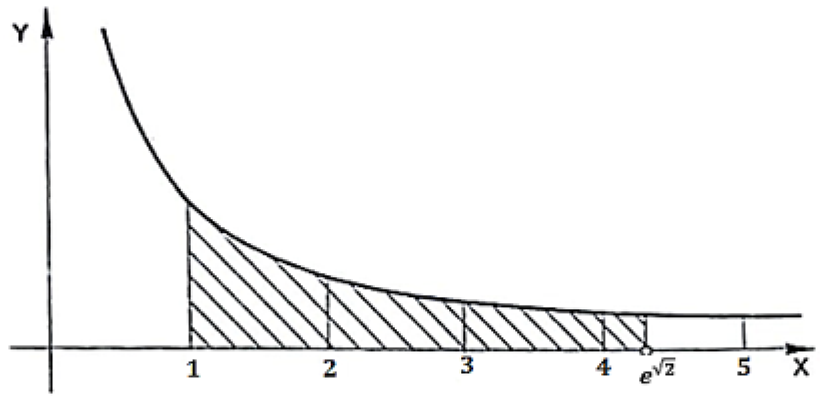


Figura 19 – A área da região hachurada é igual a $\sqrt{2}$

Teorema 2.1. *A função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por e^x, para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função exponencial.*

Demonstração. Provaremos que a função E satisfaz as propriedades $a)$ e $b)$ da definição 2.1.

Primeiramente, vamos mostrar que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

De fato, como $\ln$ é uma função logarítmica, temos

$$\ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$$

.

Desse modo, $e^x \cdot e^y$ é o número cujo logaritmo natural é igual a $x + y$.

Portanto, pela definição 2.1, temos:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \tag{2.1}$$

Para mostrar que E é uma função crescente, consideremos os números reais x e y, com $x < y$. Como $x = \ln(e^x)$ e $y = \ln(e^y)$, não podemos ter $e^x = e^y$, pois implicaria em $x = y$. Também não podemos ter $e^y < e^x$, pois se assim fosse teríamos $\ln(e^y) < \ln(e^x)$, ou seja, $y < x$.

Portanto, quando $x < y$, devemos ter $e^x < e^y$. □

Definição 2.3. *A função exponencial $y = e^x$ é a função inversa da função logaritmo natural. Isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $y > 0$, são válidas as igualdades:*

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln y} = y$$

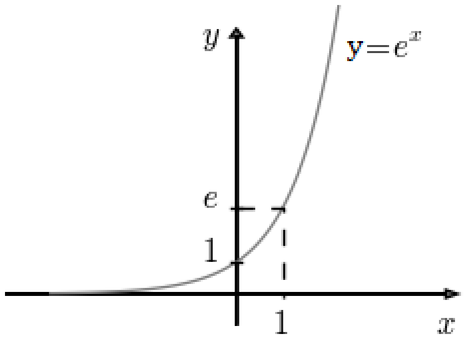


Figura 20 – Gráfico da exponencial de base e

O gráfico da função exponencial de base e está representado na figura 20.

Voltando ao exemplo anterior, a expressão $f(t) = c \cdot e^{\alpha t}$ pode também ser escrita sob a forma $f(t) = c \cdot a^t$, em que $a = e^{\alpha}$. Portanto, $\alpha = \ln a$. Matemáticos e cientistas, geralmente preferem utilizar as funções do tipo exponencial sob a forma $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, em que b exibe o valor inicial da função, isto é, $b = f(0)$.

CAPÍTULO 3

Aplicações das funções logarítmica e exponencial à matemática financeira

3.1 Breve histórico

A matemática financeira é a área da matemática que estuda a variação do dinheiro ao longo do tempo. Historicamente, ela está associada ao desenvolvimento do comércio e surgiu da necessidade que os homens tiveram de fazer transações financeiras não somente no tempo presente, mas também pensando no futuro. Faremos um breve histórico sobre o início das relações comerciais, bem como o surgimento das moedas, juros e bancos.

De acordo com [12], nas civilizações primitivas, em que os homens tiravam da natureza os produtos para a sua sobrevivência, as trocas comerciais não eram muito comuns. A partir do momento em que diferentes grupos de pessoas passaram a se comunicar, começaram as trocas de mercadorias, com os excedentes de cada grupo, porém neste momento não havia uma preocupação com o valor dos produtos. Assim, surgiu a primeira forma de comércio que se tem notícias, prática esta denominada escambo.

Mais tarde, com o crescimento da população e com o desenvolvimento do artesanato e da cultura, começaram a surgir dificuldades nas trocas de mercadorias, devido a ausência de uma medida padrão de valor entre os objetos permutados. Daí, houve a necessidade de se estabelecer um sistema de equivalência, com unidades chamadas de "moeda-mercadoria". Segundo [8], a primeira unidade de escambo conhecida foi o boi, admitida na Grécia, por volta do século VIII a.C.

Outro padrão de equivalência utilizado na época foi o sal, cujo valor decorria do seu uso na conservação de alimentos. Acredita-se que a palavra "salário" teve a sua origem, no império romano, creditada à utilização do sal como "moeda-mercadoria". Diversos objetos ou produtos foram usados ao longo do tempo como critério de troca comercial: na América Central pré-colombiana, os maias usavam algodão, cacau e cerâmicas; os astecas, pedaços de tecido, semente de cacau, pequenos machados e tubos de plumas preenchidos com ouro; os chineses, entre os séculos XVI-XI a.C., trocavam mercadoria por dentes ou chifres de animais, carapaças de tartarugas, conchas, couros e peles; no Egito faraônico, usavam-se metais (cobre, bronze, ouro e prata) na forma de pepitas ou anéis.

A moeda de troca, no sentido moderno, começou a ser utilizada quando o metal passou a ser fundido em pequenas peças, de peso igual e seladas com a marca oficial de uma autoridade pública, conferindo a ela a certificação de bom preço e quilate. A invenção desse sistema foi atribuída à Grécia da Ásia (ou Ásia menor) e à Lídia, no século VII a.C. Em virtude das inúmeras vantagens, seu uso rapidamente se espalhou entre os mais variados povos, como Grécia, Fenícia e Roma, que foram os primeiros centros comerciais.

A partir do século XV, o comércio prosperou e países como Holanda, Espanha e Portugal fortaleceram-se e tornaram-se protagonistas no cenário mundial, principalmente por realizarem o transporte marítimo para suas mercadorias, o que proporcionava mais segurança e rapidez.

Nesse período, o comércio começava a atingir o ápice e uma nova atividade teve destaque: o comércio do próprio dinheiro, na época, ouro e prata. Cada vez mais as relações entre os países iam aumentando e, com isso, a troca de moedas entre eles era frequente. Assim, surgiu um problema: como estabelecer a relação entre os valores das moedas nas relações internacionais? Definiu-se, então, o primeiro critério para determinar a equivalência entre moedas, o qual foi baseado na quantidade de ouro em domínio de cada país - o chamado "padrão-ouro". Alguns comerciantes se interessavam pelo acúmulo de grandes quantidades de moedas estrangeiras para, então, realizar atividades de troca ou câmbio de dinheiro, surgindo então os "cambistas". Também ocorreu aos cambistas a ideia de emprestar "dinheiro" por um determinado período e, posteriormente, além do recurso emprestado, recebiam uma recompensa.

A partir do procedimento de cobrar uma soma adicional, evidencia-se o lucro, o ganho, ou, então, os juros. Assim, ficaram caracterizados, de uma forma bem elementar, o que seriam as primeiras operações de crédito. Um fato curioso é que o modo como os cambistas atuavam, sentados em um banco de madeira em algum lugar do mercado, deu origem às palavras "banqueiro" e "banco", muito empregadas na atualidade. No mundo antigo, era um costume dos cidadãos mais abastados confiarem à custódia de seu ouro aos sacerdotes. Desse modo, conforme mostra a referência [7], os primeiros bancos foram criados pelos sacerdotes pois emprestavam quantias, através de suas organizações, e depois de um certo tempo, eram devolvidas com juros, em ouro e prata. A igreja católica criou então, o Banco do Espírito Santo com o objetivo de facilitar a cobrança de impostos, dízimo e indulgências, como também realizar operações de empréstimos. De certa maneira, a igreja tentou controlar o monopólio da atividade de cobrança de juros, porém não conseguiu controlar a ambição dos homens por lucros. O próprio desenvolvimento do comércio exigia a criação de uma rede bancária mais vasta e organizada. O primeiro Banco privado foi criado em 1157, em Veneza, Itália. Nos séculos XIV e XV houve a criação de toda uma rede bancária e a igreja teve de aceitar o fato de que não estava mais sozinha nesse tipo de negócio.

Conforme [8], após a descoberta da América, que teve como consequência um impetuoso florescimento do comércio na Europa Ocidental, surgiram poderosas instituições bancárias, no final do século XVI e uma nova espécie de transação, a conta corrente. Em posse de uma conta corrente, o comerciante quando precisasse efetuar um pagamento, preenchia um formulário impresso pelo próprio banco, chamado cheque. O cheque, considerado a primeira forma de uso do papel-moeda, nada mais é que uma ordem que o correntista atribui ao Banco para que este pague ao portador o valor estipulado, deduzindo-o de sua conta ou transferindo-o para a conta de outros depositantes. Posteriormente, surgiram as letras de câmbio, através da qual, vendedor e comprador estabelecem um prazo, sendo o comprador obrigado a pagar a dívida no prazo determinado. A partir do século XVI, segundo [4], devido às necessidades apresentadas pelas instituições financeiras, surgiram os bancos centrais, sobretudo na Europa. O monopólio de emissões (certificados de depósito, moedas, etc.) e o papel de banqueiro do governo foram as primeiras funções que ajudaram a desenhar o perfil dos bancos centrais.

O primeiro banco a adotar tais práticas foi o Banco da Inglaterra, fundado em 1694. Ele emprestava dinheiro para o governo inglês, na época em guerra com a França, e em troca, conquistou o monopólio de emissão em Londres. Com o passar do tempo, ele foi ganhando participação de destaque como emissor e sua posição de agente do governo foi se fortalecendo. Com isso, tornou-se receptor de depósitos de outros bancos, objetivando a proteção contra ondas especulativas, que acarretavam em quebras das instituições menores. A partir de meados do século XIX, passou a prestar serviços de "compensação" das operações realizadas entre os bancos, apoiando com crédito, quando necessário. Desse modo, convergiram as funções que caracterizam a ação de um banco central como banco dos bancos.

No século XIX, as principais nações europeias já possuíam instituições que desempenhavam o papel de banco central. Por outro lado, as nações da América Latina, recém-independentes, não possuíam regulamentação estatal e as funções de um banco central encontravam-se descoordenadas. Somente após a Primeira Guerra Mundial, mais precisamente após a Conferência Financeira Internacional de 1920, realizada em Bruxelas, que a região avançou na regulamentação e no controle de seus sistemas monetários.

No Brasil, de acordo com a referência [4], o Banco Central foi criado em 1964, pela lei nº 4595, chamada Lei de Reforma Bancária, com a missão institucional de assegurar a estabilidade de poder de compra da moeda e um sistema financeiro sólido e eficiente. O presidente e os diretores são escolhidos pelo presidente da República e sabatinados pelo Senado Federal.

A política monetária é o que confere o sentido de um banco central. Sua principal função consiste em regular o volume dos meios de pagamento à real capacidade da economia de absorver recursos sem causar desequilíbrio nos preços. No Brasil, tal política é executada dentro do Sistema de Metas Para a Inflação (SMPI). A partir dessa meta, o Comitê de Política Monetária do Banco Central (COPOM) reúne-se periodicamente para analisar a economia brasileira e a tendência futura para a inflação, para assim decidir a taxa de juros para atingir a referida meta.

De modo geral, o surgimento dos bancos está diretamente associado ao cálculo de juros e ao uso da matemática financeira. De acordo com [7], durante os séculos X e XV, os bancos foram um dos propulsores para o avanço da matemática comercial e financeira. Sem essa motivação para o aperfeiçoamento dos cálculos, esse campo da matemática não teria avançado tanto. Diversas situações comerciais que fazem parte do nosso cotidiano, como lucro e prejuízo, aumentos e descontos sucessivos, financiamentos, empréstimos e aplicações financeiras, exigem um conhecimento mais sofisticado das várias implicações que abrangem o uso da matemática financeira.

A matemática financeira, em sua natureza, trata do estudo do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo primordial é fazer análises e comparações do dinheiro em momentos distintos.

3.2 Conceitos importantes

O valor do dinheiro no tempo e a existência dos juros são elementos relevantes ao estudo da matemática financeira. Veremos, a seguir, alguns conceitos importantes muito utilizados em matemática financeira e os quais usaremos neste capítulo. As notações aqui adotadas estão em conformidade com a referência [17].

Capital: É o valor aplicado através de alguma transação financeira e é sobre ele que incidirão os encargos financeiros. Também pode ser chamado de valor presente ou principal e será denotado por PV (Present Value).

Fluxo de caixa: Denomina-se fluxo de caixa o conjunto de entradas e saídas de dinheiro ao longo do tempo. A elaboração de um fluxo de caixa, sejam de empresas, investimentos, operações financeiras, etc, é indispensável na análise de rentabilidade e custos de projetos e operações financeiras.

Juros: Define-se juros como sendo a remuneração do capital, utilizado por determinado período de tempo.

Os juros são fixados por meio de uma taxa de juros, expressa na forma percentual, a qual se refere a uma unidade de tempo (ano, semestre, mês, dia), por exemplo, $4,4\%$ ao mês ou

$12,56\%$ ao ano. Usaremos a notação i para representar a taxa de juros.

As taxas de juros devem ser eficientes de maneira a remunerar o risco envolvido nas operações financeiras (empréstimo, financiamentos ou aplicações), a perda do poder de compra do dinheiro (inflação) e o capital aplicado (retornando um lucro ao proprietário, pela privação do capital por determinado período).

Montante: é a soma do capital com os juros. Pode também ser chamado de Valor Futuro e será denotado por FV (Future Value).

Regimes de capitalização: Os regimes de capitalização demonstram como os juros são formados e incorporados ao capital ao longo do tempo. São conhecidos dois sistemas de capitalização de juros: simples e composto.

No sistema de juros simples, apenas o capital inicial rende juros. Desse modo, os juros de cada período não são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes.

No regime de juros compostos, os juros de cada período são incorporados ao capital ou saldo anterior e passam a gerar juros nos períodos seguintes. Na próxima seção apresentaremos esse sistema de maneira mais aprofundada.

É importante ressaltar que só faz sentido falar em capitalização de juros quando estes não forem pagos no final do período, mas sim somados ao capital para o cálculo de novos juros em períodos seguintes.

A matemática financeira está inteiramente ligada ao valor do dinheiro no tempo. Para fins de cálculos, valores expressos em uma mesma data são grandezas que podem ser comparadas e somadas algebricamente. Por outro lado, valores de datas diferentes só podem ser comparados ou somados após serem ajustados para uma mesma data.

Para efeito de comparação entre os dois regimes de capitalização, vejamos um exemplo:

Um investidor aplicou $R\$\ 1000,00$ no Banco ABC, pelo prazo de 5 anos, com taxa de juros de 8% ao ano, no regime de juros simples. Calcule o montante da operação.

Ano	Saldo no início do ano	Juros do ano	Saldo no final do ano antes do pagamento	Pagamento do ano	Saldo, no final do ano, após pagamento
1	$1000,00$	$8\% \cdot 1000 = 80,00$	$1080,00$	$0,00$	$1080,00$
2	$1080,00$	$8\% \cdot 1000 = 80,00$	$1160,00$	$0,00$	$1160,00$
3	$1160,00$	$8\% \cdot 1000 = 80,00$	$1240,00$	$0,00$	$1240,00$
4	$1240,00$	$8\% \cdot 1000 = 80,00$	$1320,00$	$0,00$	$1320,00$
5	$1320,00$	$8\% \cdot 1000 = 80,00$	$1400,00$	$1400,00$	$0,00$

Tabela 4 – Crescimento de $R\$\ 1000,00$ a juros simples de 8% ao ano

Vale lembrar que o Banco sempre utilizou a taxa de 8% ao ano, sobre o capital inicial de $R\$\ 1000,00$, embora os juros de cada período ficassem retidos no banco. Desse modo, apesar de os juros permanecerem no banco durante todo o prazo de operação, eles nunca foram remunerados, apenas o valor aplicado.

Agora, consideremos que o investidor tivesse aplicado $R\$\ 1000,00$ no Banco XYZ, pelos mesmos 5 anos, a uma taxa de 8% ao ano, no regime de juros compostos. Vamos calcular o saldo credor desse investidor no final da operação.

Ano	Saldo no início do ano	Juros do ano	Saldo no final do ano antes do pagamento	Pagamento do ano	Saldo, no final do ano, após pagamento
1	$1000,00$	$8\% \cdot 1000 = 80,00$	$1080,00$	$0,00$	$1080,00$
2	$1080,00$	$8\% \cdot 1080 = 86,40$	$1166,40$	$0,00$	$1166,40$
3	$1166,40$	$8\% \cdot 1166,40 = 93,31$	$1259,71$	$0,00$	$1259,71$
4	$1259,71$	$8\% \cdot 1259,71 = 100,78$	$1360,49$	$0,00$	$1360,49$
5	$1360,49$	$8\% \cdot 1360,49 = 108,84$	$1469,33$	$1469,33$	$0,00$

Tabela 5 – Crescimento de $R\$\ 1000,00$ a juros compostos de 8% ao ano

Comparando as duas situações apresentadas pelo exemplo é possível perceber que o dinheiro cresce mais rapidamente quando aplicados sob o regime de juros compostos, conforme pode ser observado na figura 21. A diferença de $R\$\ 69,30$, entre os dois regimes, corresponde ao rendimento de juros sobre juros.

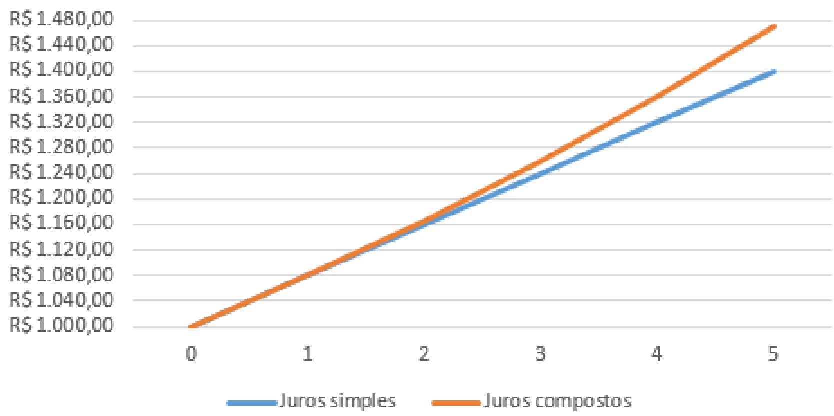


Figura 21 – Comparativo entre os dois regimes de capitalização

Taxa efetiva: É a taxa de juros em que a unidade referencial do tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. Por exemplo, 2% ao mês, capitalizados mensalmente; 7% ao semestre, capitalizados semestralmente.

Taxa nominal: é a taxa de juros em que a unidade referencial de seu tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. A taxa nominal é sempre referencial ao ano e os períodos podem ser semestrais, trimestrais, mensais ou diárias.

Taxas equivalentes: são taxas de juros referenciadas em unidades de tempo diferentes, mas que ao serem aplicadas a um mesmo capital, durante um mesmo prazo, produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros compostos.

3.3 Aplicações

3.3.1 Juros compostos

No regime de juros compostos, os juros de cada período, quando não são pagos no final do período referido, devem ser somados ao capital e, consequentemente, também passam a render juros. Esse processo é denominado capitalização de juros ou ainda, capitalização composta.

No regime de juros compostos, os juros de cada período são obtidos pela aplicação da taxa de juros i, sobre o capital aplicado no início do período de capitalização. Desse modo, temos que:

a) No 1º período de capitalização, isto é, quando $n = 1$

capital no início do período = PV

juros do período = $PV \cdot i$

capital no final do período $= FV = PV + (PV \cdot i) = PV(1 + i)$

b) No 2º período de capitalização $(n = 2)$

capital no início do período = $PV(1 + i)$

juros do período = $PV(1 + i) \cdot i$

capital no final do período $= FV = PV(1 + i) + PV(1 + i) \cdot i = PV(1 + i) \cdot (1 + i)$

Logo, para $n = 2$,

$$FV = PV(1 + i)^2$$

c) No 3º período de capitalização $(n = 3)$

capital no início do período = $PV(1 + i)^2$

juros do período = $PV(1 + i)^2 \cdot i$

capital no final do período $= FV = PV(1 + i)^2 + PV(1 + i)^2 \cdot i = PV(1 + i)^2 \cdot (1 + i)$

Logo, para $n = 3$,

$$FV = PV(1+i)^3$$

d) No enésimo período de capitalização

O valor futuro FV, ou montante, pode ser encontrado de maneira análoga aos períodos anteriores, ou pode ser provado usando indução finita. Portanto, o valor futuro resultante da aplicação de um capital PV, durante n períodos de capitalização, com uma taxa de juros i por período, é obtido pela expressão:

$$FV = PV(1+i)^n \tag{3.1}$$

Nesta expressão, a taxa de juros i refere-se à mesma unidade de tempo utilizada para os n períodos. Além disso, ela exprime o montante, ao final de n períodos, como uma *função exponencial* do capital aplicado. Cada movimentação de um valor presente PV, por um período para o futuro, é obtida pela sua multiplicação por $(1+i)$.

Problema 1: Um Certificado de Depósito Bancário (CDB) tem um valor de resgate de $R\$10000,00$ e um prazo de 90 dias, a decorrer até o seu vencimento. Calcule o valor a ser aplicado nesse papel para que a sua taxa de remuneração efetiva seja de 10% ao ano.

Solução:

Primeiramente, vamos calcular a taxa de juros diária, equivalente a 10% ao ano.

Em um ano, com uma taxa de 10% ao ano, $R\$\ 100,00$ se transformam em $R\$\ 110,00$. A taxa diária procurada é aquela que faz $R\$\ 100,00$ se transformarem em $R\$\ 110,00$, em um prazo de 360 dias.

$PV = R\$\ 100,00$,

$FV = R\$\ 110,00$,

$n = 360$ dias,

$i =?$ ($\%$ ao dia).

Em posse desses dados, vamos aplicá-los na equação 3.1.

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$110 = 100(1+i)^{360}$$

$$1,1 = (1+i)^{360}$$

Aplicando a função logaritmo natural (ln), em ambos os membros da igualdade anterior, temos:

$$\ln(1,1) = \ln(1+i)^{360},$$

Pela propriedade 6, de logaritmos,

$$\ln(1,1) = 360 \cdot \ln(1+i)$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos $\ln(1,1) = 0,09531$, com aproximação de 5 casas decimais. Logo,

$$\frac{0,09531}{360} = \ln(1+i)$$
$$0,000265 = \ln(1+i)$$

Aplicando a exponencial de base e, em ambos os lados da igualdade anterior, temos:

$$e^{0,000265} = e^{\ln(1+i)}$$

Pela definição 2.2, $e^{\ln(1+i)} = 1+i$. Então,

$$1,000265 = 1+i$$

$$i = 0,000265$$
$$i = 0,0265\% \text{ ao dia.}$$

Agora vamos fazer o cálculo do valor de aplicação, utilizando os dados do enunciado e a taxa diária encontrada.

$$10000 = PV(1+0,000265)^{90}$$
$$10000 = PV(1,000265)^{90}$$
$$\frac{10000}{(1,000265)^{90}} = PV$$

Vamos aplicar ln na igualdade anterior, assim como as suas propriedades operatórias.

$$\ln\left(\frac{10000}{(1,000265)^{90}}\right) = \ln(PV)$$

$$\ln(10000) - \ln(1,000265)^{90} = \ln(PV)$$

$$\ln(10000) - 90\ln(1,000265) = \ln(PV)$$

Agora, aplicaremos a função exponencial de base e.

$$e^{(\ln(10000) - 90\ln(1,000265)} = e^{\ln(PV)}$$

o que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$e^{\left(\ln(10000)\right) + \left(-90\ln(1,000265)\right)} = e^{\ln(PV)}$$

Pela equação 2.1, temos:

$$e^{\ln(10000)} \cdot e^{-90\ln(1,000265)} = PV$$

$$10000 \cdot e^{-90 \cdot 0,000265} = PV$$

$$10000 \cdot e^{-0,0238} = PV$$

$$10000 \cdot 0,976435 = PV$$

$$9764,35 = PV$$

Portanto, o valor de aplicação no CDB deve ser de $R\$ \ 9764,35$.

Problema 2: calcule o número de meses necessários para fazer um determinado capital dobrar de valor, quando aplicado a uma taxa de juros de 6% ao ano.

Solução:

Seja x o capital investido. Desse modo, após o prazo de aplicação, o montante será $2x$.

$PV = x$

$FV = 2x$

$n = ?$

$i = 6\%$ ao ano

Aplicando os dados fornecidos pelo problema na equação 3.1, temos:

$$2x = x(1 + 0,06)^n$$

$$2 = (1,06)^n$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$\ln(2) = \ln(1,06)^n$$

$$\ln(2) = n \cdot \ln(1,06)$$
$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,06)} = \frac{0,6931}{0,0583} = 11,89$$

Portanto, para fazer um determinado capital dobrar são necessários $n = 12$ anos (aproximação de $11,89$ para o próximo inteiro superior), o que equivale a 144 meses.

Da igualdade $2 = (1,06)^n$, podemos enxergar a função exponencial $y = 1,06^n$, em que $1 \leq n \leq 20$, cujo gráfico está representado na figura 22.

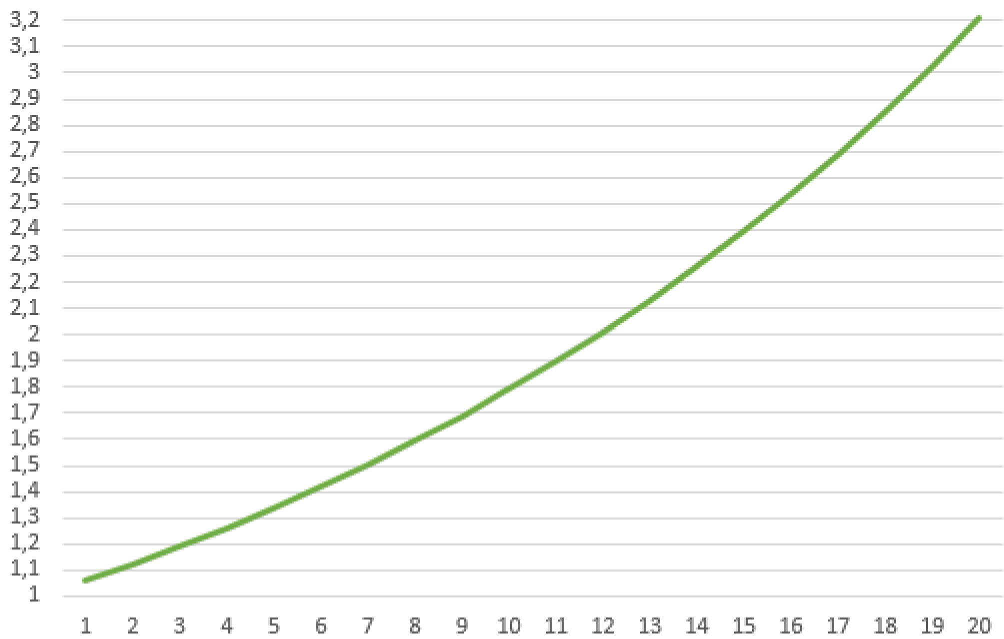


Figura 22 – Representação gráfica da função $y = 1,06^n$

Nota-se pelo gráfico, que o capital vai crescendo ao longo do tempo e, como indica o enunciado, dobra de valor ao final de 12 anos. Mais ainda, é possível perceber que o dinheiro tem o valor triplicado em 19 anos.

Problema 3: João pretende vender um veículo por $R\$\ 40000,00$, porém Ana, a compradora, dispõe de $R\$\ 5000,00$, que estão aplicados em um investimento que rende 28% a cada dois anos. O carro de João sofre uma desvalorização de 19% a cada dois anos, calculada sobre o período de dois anos imediatamente anteriores. Calcule o tempo mínimo em que Ana possuirá dinheiro suficiente para comprar o veículo. (Aproximações a serem utilizadas: $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$)

Solução:

Devemos calcular o instante n em que o montante obtido pela aplicação do dinheiro se iguala ao montante resultante da desvalorização do veículo.

As expressões que representam os valores futuros correspondentes à aplicação do dinheiro e à desvalorização do veículo, são representadas, respectivamente, por:

$VF_1 = 5000(1 + 0,28)^n$

$VF_2 = 40000(1 - 0,19)^n$

Como em ambas as situações os juros são capitalizados a cada dois anos, o tempo n será dado em biênios, para que a unidade referencial de tempo e taxa coincidam.

A partir da relação $VF_1 = VF_2$, vamos encontrar o valor de n. Vejamos a seguir.

$$5000(1 + 0,28)^n = 40000(1 - 0,19)^n$$
$$\left(\frac{1,28}{0,81}\right)^n = \frac{40000}{5000}$$

Aplicando logaritmo na base 10 (log) aos dois membros da igualdade anterior, temos:

$$\log\left(\frac{1,28}{0,81}\right)^n = \log(8)$$

Conhecemos os valores de $\log 2$ e $\log 3$. Podemos manipular os valores da igualdade anterior e escrevê-los como potências de base 2 ou 3, da seguinte forma:

$$\frac{1,28}{0,81} = \frac{128}{81} = \frac{2^7}{3^4};\ \text{e } 8 = 2^3.$$

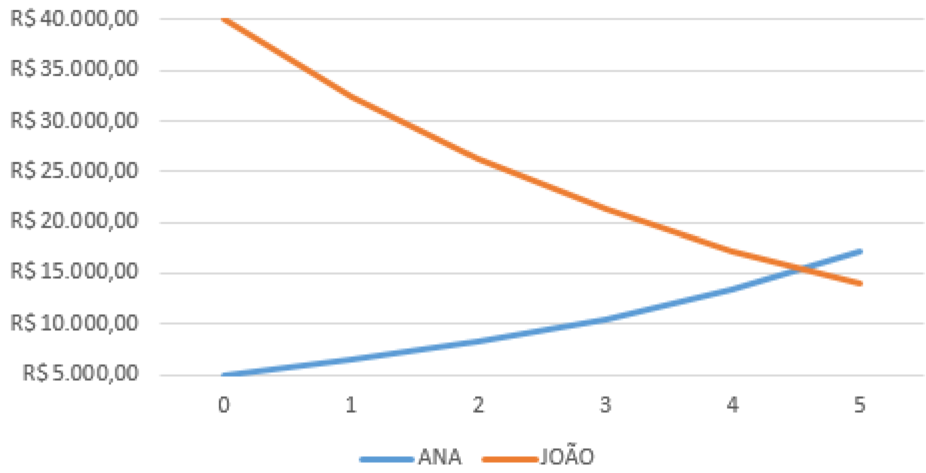
Assim,

$$\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^n = \log(2^3)$$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$n \cdot \log\left(\frac{2^7}{3^4}\right) = \log(2^3)$$
$$n \cdot \left[\log(2^7) - \log(3^4)\right] = 3 \cdot \log(2)$$
$$n \cdot \left[7 \cdot \log(2) - 4 \cdot \log(3)\right] = 3 \cdot \log(2)$$
$$n = \frac{3 \cdot \log(2)}{7 \cdot \log(2) - 4 \cdot \log(3)}$$
$$n = \frac{3 \cdot 0,30}{7 \cdot 0,30 - 4 \cdot 0,48}$$
$$n \approx 5$$

O tempo n se refere a biênios. Portanto, são necessários, no mínimo, 10 anos para que Ana possua dinheiro suficiente para comprar o carro de João, como pode ser observado na imagem a seguir.



3.3.2 Descontos

O valor nominal de um título corresponde ao seu valor de resgaste, definido para a sua data de vencimento. Em outras palavras, pode ser entendido como o próprio montante da operação.

O ato de liquidar um título antes de seu vencimento envolve uma recompensa ou um prejuízo, devido ao pagamento antecipado. Desse modo, desconto pode ser compreendido como a diferença entre o valor nominal de um título e o seu valor atualizado n períodos antes de seu vencimento.

As operações de desconto podem ser realizadas em ambos os regimes de capitalização, sendo de nosso interesse o desconto na capitalização composta. São identificados dois tipos de desconto: desconto "por dentro", ou racional, e desconto "por fora", ou comercial.

Desconto "por dentro" ou racional

A expressão 3.1 nos fornece a seguinte relação:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} \tag{3.2}$$

Cada movimentação de um valor futuro, para um valor presente, é obtida pela sua divisão por $(1+i)$.

O valor do desconto "por dentro", ou racional, é obtido pela expressão:

$$D_d = FV - PV$$

que em combinação com a expressão 3.2, nos fornece a seguinte relação:

$$D_d = FV - \left[\frac{FV}{(1+i)^n}\right] = FV \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right] \tag{3.3}$$

Desconto "por fora" ou comercial

No regime de juros compostos, os descontos de cada período são obtidos pela aplicação da taxa d de desconto por período, sobre o capital existente no início do período de desconto. Desse modo, temos:

a) no 1º período de desconto

capital do início do período: FV

desconto do período: $FV \cdot d$

capital no final do período: $PV = FV - (FV \cdot d) = FV(1 - d)$

b) no 2º período de desconto

capital do início do período: $FV(1 - d)$

desconto do período: $FV(1 - d) \cdot d$

capital no final do período: $PV = FV(1 - d) - FV(1 - d) \cdot d = FV(1 - d) \cdot (1 - d)$

e portanto,

$$PV = FV(1 - d)^2$$

c) no 3º período de desconto

capital do início do período: $FV(1 - d)^2$

desconto do período: $FV(1 - d)^2 \cdot d$

capital no final do período: $PV = FV(1 - d)^2 - FV(1 - d)^2 \cdot d = FV(1 - d)^2 \cdot (1 - d)$

e portanto,

$$PV = FV(1 - d)^3$$

d) no enésimo período de desconto

A expressão para o valor presente PV pode ser deduzida de maneira análoga, ou por indução finita.

O valor presente PV, resultante do desconto de um valor futuro FV, durante n períodos de desconto, com uma taxa de desconto d por período, no regime de juros compostos, é obtido pela expressão:

$$PV = FV(1 - d)^n \tag{3.4}$$

em que a unidade referencial de tempo da taxa de desconto “por fora” d, deve coincidir com a unidade referencial de tempo utilizada para definir o número de períodos.

É interessante notar que a taxa de desconto d ("por fora") é aplicada sobre o valor futuro FV para produzir o valor presente PV, ao passo que a taxa de desconto i ("por dentro"), ou taxa de rentabilidade, é aplicada sobre o valor presente PV para produzir o valor futuro FV.

O valor do desconto por fora (D_f) é dado ela expressão:

$$D_f = FV - PV = FV - FV(1-d)^n = FV\big[1-(1-d)^n\big] \tag{3.5}$$

Problema 4: Por um cheque pré-datado no valor de $R\$ \ 4.650,00$, depositado 3 meses antes do vencimento, foram pagos $R\$ \ 4.371,00$. Calcule a taxa de desconto comercial mensal aplicada na operação.

Solução:

$FV = R\$ \ 4.650,00$

$PV = R\$ \ 4.371,00$

$n = 3$ meses

$i =?$ ao mês

$$4371 = 4650(1-d)^3$$
$$0,94 = (1-d)^3$$

Aplicando $\ln$ em ambos os membros da igualdade anterior, temos:

$$\ln(0,94) = \ln(1-d)^3$$
$$-0,0618 = 3\ln(1-d)$$
$$-0,0206 = \ln(1-d)$$

Agora, aplicaremos a exponencial de base e. Desse modo,

$$e^{-0,0206} = e^{\ln(1-d)}$$
$$0,9796 = 1-d$$
$$d = 1-0,9796$$
$$d = 0,0204$$

Portanto, a taxa mensal de desconto aplicada na operação é de $2,04\%$ ao mês.

Problema 5: Um banco libera a um cliente $R\$\ 6800,00$, provenientes do desconto racional de um título, de valor nominal de $R\$$ $9000,00$, descontado a uma taxa de 4% ao mês. Calcule o prazo de antecipação do desconto deste título.

Solução:

$FV = R\$$ $9000,00$

$PV = R\$$ $6800,00$

$i = 4\%$ ao mês

$n =?$ meses

$D_d = 9000,00 - 6800,00 = R\$$ $2200,00$

Vamos aplicar os dados do problema na equação 3.3.

$$2200 = 9000 \cdot \left[\frac{(1+0,04)^n - 1}{(1+0,04)^n}\right]$$
$$0,24444 = \left[\frac{(1,04)^n - 1}{(1,04)^n}\right]$$
$$0,24444 = 1 - (1,04)^{-n}$$
$$(1,04)^{-n} = 0,75556$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados da igualdade anterior, obtemos:

$$\ln(1,04)^{-n} = \ln(0,75556)$$

Pela propriedade de potência dos logaritmos naturais, temos:

$$-n\ln(1,04) = \ln(0,75556)$$
$$-n = \frac{\ln(0,75556)}{\ln(1,04)}$$
$$-n = -7,14663$$
$$n = 7,14663$$

o que corresponde a um prazo aproximado de 7 meses.

Problema 6 (ENEM 2018): Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Neste caso, paga-se o valor presente, que é o valor naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de $R\$\ 820,00$, a uma taxa de juros de $1,32\%$ ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela. Qual é a primeira parcela que poderá ser antecipada junto com a 30ª? Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ e 0,0131 como aproximação para $\ln(1,0132)$.

Solução:

$i = 1,32\%$ ao mês

$FV = R\$\ 820,00$

Como não foi especificado a modalidade de desconto, utilizaremos o desconto racional, já que este é o mais adotado no meio financeiro. O desconto D_d deve ser superior a 25% do valor da parcela a ser antecipada (o que corresponde ao valor futuro que deve ser trazido para o presente), isto é, $D_d > \frac{25}{100} \cdot 820$.

Vamos efetuar os cálculos considerando $D_d = \frac{25}{100} \cdot 820$ e, no final, realizamos os ajustes necessários.

Aplicando os dados na expressão 3.3, temos:

$$D_d = FV \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]$$

$$\frac{25}{100} \cdot 820 = 820\left[\frac{(1+0,0132)^n - 1}{(1+0,0132)^n}\right]$$

$$\frac{25}{100} = \frac{(1,0132)^n - 1}{(1,0132)^n}$$

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{(1,0132)^n}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{(1,0132)^n}$$

$$\frac{4}{3} = (1,0132)^n$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados, temos:

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln(1,0132)^n$$

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) = n \cdot \ln(1,0132)$$

$$0,2877 = n \cdot 0,0131$$

$$n = \frac{0,2877}{0,0131}$$
$$n = 21,9618$$

Como $D_d > \frac{25}{100} \cdot 820$, então $n > 21,9618$. Considerando o próximo inteiro superior a $21,9618$, concluímos que $n = 22$.

Portanto, a primeira parcela a ser antecipada juntamente com a 30ª é a 52ª parcela.

3.3.3 Prestações iguais

Vamos desenvolver as fórmulas usadas nas soluções de problemas envolvendo uma série uniforme de valores monetários (pagamentos ou recebimentos), no regime de juros compostos. Essa modalidade de prestações é geralmente conhecida como Modelo Price, no qual todas as parcelas têm um mesmo valor. O valor dessas prestações é genericamente representado por PMT (Periodic PayMenT), o que faz referência aos pagamentos periódicos.

O fato de as prestações terem um mesmo valor e serem equidistantes, permite a obtenção de fórmulas para a capitalização e o desconto dessas parcelas, mediante a utilização da expressão para a soma de termos de uma progressão geométrica.

A partir da capitalização das n prestações iguais, com uma taxa de juros i por período, seremos capazes de determinar o montante acumulado FV, no final de n períodos. O montante acumulado por essas prestações, corresponde à soma dos montantes calculados individualmente, para cada prestação, até esse mesmo período. Desse modo, no final do período n, temos:

a) a 1º prestação capitaliza juros durante $(n-1)$ períodos. Logo,

$$FV = PMT(1+i)^{n-1}$$

b) a 2º prestação capitaliza juros durante $(n-2)$ períodos. Logo,

$$FV = PMT(1+i)^{n-2}$$

c) a penúltima prestação capitaliza juros durante 1 período. Logo,

$$FV = PMT(1+i)$$

d) a última prestação não capitaliza juros e seu valor é igual a PMT.

Assim, o montante FV é obtido pela soma dessas parcelas, isto é,

$$FV = PMT\big[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i) + 1\big] \tag{3.6}$$

Os termos entre colchetes correspondem à soma dos termos de uma progressão geométrica, cuja fórmula pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados da expressão 3.6 por $(1+i)$. Assim temos:

$$FV(1+i) = PMT\big[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^2 + (1+i)\big] \tag{3.7}$$

Subtraindo a equação 3.6 da equação 3.7, temos:

$$FV \cdot i = PMT\big[(1+i)^n - 1\big]$$

e portanto,

$$FV = \frac{PMT\big[(1+i)^n - 1\big]}{i} \tag{3.8}$$

Também é possível determinar o valor presente PV, a partir do desconto das n prestações PMT iguais, com uma taxa de juros i por período.

Pela expressão 3.1, $FV = PV(1+i)^n$. Substituindo esse valor de FV na expressão 3.8, obtemos

$$PV(1+i)^n = \frac{PMT\big[(1+i)^n - 1\big]}{i}$$

e finalmente,

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \tag{3.9}$$

Problema 7: Um tapete persa é vendido por $R\$\ 15000,00$ à vista. Pode ser adquirido também em prestações mensais de $R\$\ 885,71$ a juros de 3% ao mês. Sabendo que as prestações vencem a partir do mês seguinte ao da compra, calcule o número de prestações a pagar.

Solução:

$PV = R\$\ 15000,00$

$PMT = R\$\ 885,71$

$n = ?$ meses

$i = 3\%$ ao mês

Vamos inserir estes dados na equação 3.9.

$$15000 = 885,71 \cdot \left[\frac{(1+0,03)^n - 1}{0,03(1+0,03)^n}\right]$$

$$\frac{15000}{885,71} = \frac{(1,03)^n - 1}{0,03(1,03)^n}$$

$$16,93557 = \frac{(1,03)^n - 1}{0,03(1,03)^n}$$
$$16,93557 = \frac{1 - (1,03)^{-n}}{0,03}$$
$$0,50807 = 1 - (1,03)^{-n}$$
$$(1,03)^{-n} = 0,49193$$

Aplicando $\log$ em ambos os lados da igualdade anterior, temos:

$$\log(1,03)^{-n} = \log(0,49193)$$

$$-n \cdot \log(1,03) = \log(0,4919)$$
$$-n = \frac{\log(0,4919)}{\log(1,03)}$$
$$-n = \frac{-0,3081}{0,0128}$$
$$n = 24$$

Portanto, o tapete pode ser adquirido em 24 parcelas.

Problema 8: Um investidor deposita anualmente a quantia de $R\$ \ 1200,00$, no final de dezembro de cada ano, num banco que remunera seus depósitos com a taxa efetiva de 10% ao ano. Assuma o ano comercial com 360 dias e calcule o saldo credor desse investidor imediatamente antes da efetivação de seu quarto depósito anual.

Solução:

Inicialmente, vamos calcular o saldo credor após o 4º depósito anual.

$PMT = R\$ \ 1200,00$

$n = 4$ anos

$i = 10\%$ ao ano

$FV = ?$

Pela equação 3.8, temos:

$$FV = \frac{PMT\big[(1+i)^n - 1\big]}{i}$$
$$FV = \frac{1200 \cdot \big[(1+0,1)^4 - 1\big]}{0,1}$$
$$FV = \frac{1200 \cdot \big[(1,1)^4 - 1\big]}{0,1}$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados, obtemos:

$$\ln(FV) = \ln\left(\frac{1200 \cdot \left((1,1)^4 - 1\right)}{0,1}\right)$$

$$\ln(FV) = \ln\left(1200 \cdot \left((1,1)^4 - 1\right)\right) - \ln(0,1)$$

$$\ln(FV) = \ln(1200) + \ln\left(1,4641 - 1\right) - \ln(0,1)$$

$$\ln(FV) = \ln(1200) + \ln(0,4641) - \ln(0,1)$$

$$\ln(FV) = 7,0901 - 0,7677 + 2,3026$$

$$\ln(FV) = 8,625$$

Aplicando a função exponencial de base e, temos:

$$e^{\ln(FV)} = e^{8,625}$$

$$FV = 5569,08$$

Após o 4º depósito, o saldo credor corresponde a $R\$\ 5569,08$. Para obter o saldo credor antes do 4º depósito, basta subtrair, do saldo encontrado, o valor do depósito,isto é:

$$R\$\ 5569,08 - R\$\ 1200,00 = R\$\ 4369,08$$

Logo, o saldo credor do investidor imediatamente antes do quarto depósito corresponde a $R\$\ 4369,08$.

Considerações finais

Os logaritmos, descobertos no século XVI por Napier, ocuparam por muito tempo o posto de instrumento simplificador de cálculos e também contribuíram para o desenvolvimento do conceito de função, tal como conhecemos hoje. Devido ao avanço tecnológico proporcionado pelo advento dos dispositivos eletrônicos, esse cenário se modificou de forma drástica. As tábuas logarítmicas se tornaram obsoletas, em razão das facilidades promovidas pelos eletrônicos portáteis, sendo seu uso restrito a programação de computadores e calculadoras. No entanto, os logaritmos continuam merecendo um papel relevante na matemática, sobretudo porque as funções logarítmicas e exponenciais modelam diversos fenômenos presentes em variadas situações físicas, econômicas e sociais.

As funções logarítmicas e exponenciais são de grande aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento e, neste trabalho, destacamos as aplicações em matemática financeira. A matemática financeira é muito presente nas mídias em geral e se encontra inserida no dia a dia das pessoas, seja uma dona de casa ou um economista. Através da abordagem de situações cotidianas, por meio de exemplos práticos, como descontos e parcelamentos, foi possível visualizar algumas das aplicabilidades da teoria estudada. A partir da experiência obtida com a realização deste trabalho, é possível perceber que a matemática, quando trabalhada de maneira contextualizada, com a articulação entre conteúdos distintos e vivenciados no cotidiano, torna-se mais interessante e maleável, o que contribui para a aprendizagem se tornar mais concreta e significativa.

A aplicação das funções logarítmicas e exponenciais à matemática financeira se mostrou uma importante ferramenta de cálculo, sem a qual muitos problemas se tornariam de difícil resolução sem o auxílio de uma calculadora financeira. Sendo assim, a abordagem desses elementos matemáticos de forma interligada deve ser destacada e constitui uma proposta interessante a ser trabalhada nos cursos de graduação, em especial na licenciatura em matemática, considerando que a própria abordagem sugerida, pode contribuir também com a sua inserção no ensino médio.

Referências

[1] BRASIL. Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica*, 2006. Dísponivel em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 19 fev. 2021.

[2] BRASIL. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. *Brasília: MEC*, 2006. Dísponivel em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 18 fev. 2021.

[3] COINSPIRAÇÃO. Revista de professores que ensinam matemática. v. 1, n. 1. p. 63-77. *Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Mato Grosso*, Janeiro a Junho 2018. Disponível em: http://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao. Acesso em 19 mar. 2021.

[4] Banco Central do Brasil. Banco Central do Brasil: fique por dentro, 4. ed. *Brasília: BCB*, p.36, 2008. Disponivel em: https://www.abscm.com.br/uploads/publicacoes/Banco%20Central%20do%20Brasil _Fique%20por%20dentro.pdf. Acesso em: 12 jan. 2021.

[5] BOYER, C. B. *História da matemática;*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

[6] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 5ª edição. Campinas: Editora UNICAMP, 2011.

[7] GONÇALVES, J. P. A história da matemática comercial e financeira. *Só Matemática*, 2007. Disponivel em: https://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php. Acesso: 10 jan. 2021.

[8] GRANDO, N. I; SCHNEIDER, I. J. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. *Zetetike, Campinas, SP*, v.18, n.1, dez. 2010. Dísponivel em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646693. Acesso em: 10 jan. 2021.

[9] GRANERO, C. Função logarítmica e exponencial: Aplicação à matemática financeira. *Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São João del-Rei, São João Del-Rei*, 2017.

[10] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar, volume 2 (Logaritmos)*. São Paulo: Atual, 1997.

[11] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar, volume 7 (Geometria Analítica)*. São Paulo: Atual, 1997.

[12] IFRAN, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*, volume 1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[13] LIMA, E. L. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

[14] LIMA, E. L.; CARVALHO. P. C. P.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*, volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

[15] LIMA, E.L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[16] MAOR, E. *e: A História de um Número, 5ª edição*. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

[17] PUCCINI, A. de L. *Matemática financeira objetiva e aplicada. 6ª edição*, volume 1. São Paulo, SP: Saraiva, 2011.

[18] SILVA, R. J. A. Contexto e aplicações das funções exponenciais no ensino médio: uma abordagem interdisciplinar. *86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes*, 2015.