

DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



UFOP
Universidade Federal
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Stefani Rose Teixeira

**Estudo de superfícies de revolução com curvatura
média prescrita.**

Ouro Preto

2021

STEFANI ROSE TEIXEIRA

Estudo de superfícies de revolução com curvatura média prescrita.

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisitos para conclusão do curso de Bacharelado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.

**Ouro Preto
2021**

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

T266e Teixeira, Stefani Rose .
Estudo de superfícies de revolução com curvatura média prescrita.
[manuscrito] / Stefani Rose Teixeira. - 2021.
55 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Geometria diferencial. 2. Superfícies (Matemática). 3. Curvatura. 4.
Espaços de curvatura constante. I. Souza, Gil Fidelix de. II. Universidade
Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 514.7

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589



FOLHA DE APROVAÇÃO

Stefani Rose Teixeira

Estudo de superfícies de revolução com curvatura média prescrita

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Matemática

Aprovada em 08 de março de 2021

Membros da banca

Dr. Gil Fidelix de Souza - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Josué Geraldo Damasceno - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Wanderson Costa e Silva - Universidade Federal de Ouro Preto

Gil Fidelix de Souza, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 30/03/2021



Documento assinado eletronicamente por **Gil Fidelix de Souza, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 30/03/2021, às 17:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0139339** e o código CRC **6B230CF5**.

“Se o conhecimento científico fosse tudo o que buscávamos no espaço, a Federação teria construído uma frota de sondas, não de naves estelares.

Exploração é ver as coisas com seus próprios olhos. ”

Capitã Kathryn Janeway -Star Trek: Voyager.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador Gil Fidelix de Souza por mostrar o mundo maravilhoso da Geometria Diferencial e como é gostoso estudar um tema em conjunto. Por toda dedicação, paciência, compreensão e atenção, foram essenciais para que este trabalho fosse concluído.

À banca composta pelos professores Geraldo, Josué e Wanderson; que leram o nosso trabalho e contribuíram para o enriquecimento do mesmo, em especial o professor Josué pelas sugestões.

Agradeço à minha mãe Rosilene, ao meu pai Luiz, ao meu irmão Luigi, aos meus avós maternos Washington e Zilda, os meus tios Ronildo e Cristine, as minha afilhadas Íris e Karine, pelos momentos de cuidados e dedicação que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir.

Aos meus colegas de curso Ana, Ana Luiza, Bárbara, Érica, Mônica, Pedro, Paulo, Rodolfo, ao grupo PETMAT, aos professores do departamento de Matemática em especial Edney, Éder, Geraldo e Monique, quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também academicamente.

Quero deixar meu agradecimento a todos que em meio a pandemia Covid-19, sempre me apoiaram e foram essenciais para que eu não desistisse, em especial ao meu irmão Luigi por sempre me alegrar, ao Pedro que está ao meu lado me apoiaram em todas as áreas da minha vida, a Bárbara que é a minha fiel companheira de quarentena, ao Claudemir e o Gil que estão sempre dispostos a ajudar e à minha psicóloga Marana.

A todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

Resumo

Baseamos os estudos desta monografia no artigo de Kenmotsu [2], cujo principal objetivo é obter uma família de três parâmetros, ou menos, da geratriz de superfícies de revolução com curvatura média constante. Obtemos ao decorrer do trabalho as superfícies do Tipo Delaunay, que são: cilindros retos, esferas, catenóides, ondulóides e nodóides; devemos ressaltar que os cálculos são diferentes do que Delaunay trabalhou em [1].

Palavras-chave: Geometria Diferencial, Superfície de Revolução, Curvatura Média, Curvatura Média Constante, Superfícies do Tipo Delaunay.

Abstract

We base the studies of this monograph on the article by Kenmotsu [2], whose main objective is to obtain a family of three parameters, or less, of the generatrix of surfaces of revolution with constant mean curvature. During the work, we obtain Delaunay Type surfaces, which are: straight cylinders, spheres, catenoids, unduloids and nodoids; we must point out that the calculations are different from what Delaunay worked in [1].

Keywords: Differential Geometry, Revolution Surface, Mean Curvature, Constant Mean Curvature, Delaunay Type Surfaces.

Lista de Figuras

2.1 Curva parametrizada	13
2.2 Derivada.	14
2.3 Hipotrocóide.	14
2.4 Comprimento do arco determinado de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$	15
2.5 Comprimento de arco $\gamma(t)$ de $t = 0$ até $t = \frac{\pi}{3}$	15
2.6 mudança de variável.	17
2.7 Representação de $X(u_0, v_0)$ no espaço euclidiano.	18
2.8 Traço de X	18
2.9 Curvas coordenadas.	19
2.10 Vetores tangentes às curvas coordenadas $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$	19
2.11 Helicóide.	20
2.12 $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$	21
2.13 Rotação de $\alpha(s)$ em torno de x	21
2.14 Relação.	21
2.15 Vetor normal ao cilindro.	23
2.16 Esfera unitária.	25
2.17 Cilindro de raio r	26
3.1 $H = 0$	37
3.2 Plano.	38
3.3 $D = 0$	48
3.4 $D = 1$	50
3.5 $0 < D < 1$	51
3.6 $D > 1$	52

Conteúdo

1	Introdução	11
2	Fundamentos teóricos	13
2.1	Curvas planas regulares	13
2.2	Superfícies parametrizadas regulares	18
2.2.1	Superfície de Revolução	21
2.2.2	Curvatura média	23
3	A curvatura média de uma Superfície de Revolução	27
3.1	Superfície de revolução com curvatura média constante	36
3.2	Análise de $\gamma(s, H, D)$	43
4	Conclusão	53
	Referências Bibliográficas	54

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar as superfícies de revolução com curvatura média constante (CMC), que é um tema de grande relevância em Geometria Diferencial. Uma superfície S com curvatura média H pode ser descrita em \mathbb{R}^3 , por exemplo, como uma bolha ou película de sabão onde a pressão exterior e interior são forças de tensão que estão balanceadas. A matemática Sophie Germain utilizou esse conceito na Teoria de elasticidade, que contribuiu para a construção da Torre Eiffel [5].

Determinar superfícies com CMC pode ser complicado, por isso devemos impor algumas restrições a sua natureza visando facilitar a obtenção de algumas soluções. A restrição proposta neste trabalho é que as superfícies sejam de revolução, isto é, vamos trabalhar com superfícies CMC que são obtidas pela rotação de uma curva geratriz em torno de um eixo. Charles-Eugène Delaunay [1] em 1841, provou que ao rolarmos uma cônica sobre uma reta tangente sem que haja deslizamentos, o seu foco descreve uma curva, que quando rotacionada forma uma superfície de revolução com curvatura média constante, que é dada por

$$X(s, t) = (x(s), y(s) \cos(t), y(s) \sin(t)), \quad (1.1)$$

em que s é o parâmetro comprimento de arco. Com isso, as funções $x(s)$ e $y(s)$ satisfazem a equação diferencial ordinária

$$y(s) \pm 2ay(s)x'(s) \pm b^2 = 0, \quad (1.2)$$

sendo a e b constantes positivas [1]. Delaunay estudou a trajetória do foco da parábola, elipse e hipérbole que geram, respectivamente, o catenóide, a ondulóide e a nodóide.

O texto deste trabalho está organizado de modo que no segundo capítulo, são desenvolvidos conceitos que serão utilizados durante o texto, especialmente a parametrização de uma superfície de revolução, cuja curva geratriz é regular e parametrizada pelo comprimento de arco. Em particular, a expressão da curvatura média de uma superfície de revolução com geratriz $(x(s), y(s), 0)$ satisfaz a equação

$$H = \frac{1}{2} \left[x''y' - x'y'' + \frac{x'}{y} \right] \quad (1.3)$$

O terceiro capítulo é baseado no trabalho [2] de Katsuei Kenmotsu. Pela análise da equação (1.3), concluímos que a superfície (1.1) possui curvatura média constante $H \neq 0$ então as possíveis geratrizes dessa superfície constituem uma família de dois parâmetros (H, D) de curvas

$$\gamma(s, H, D) = \left(\int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt, \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \quad (1.4)$$

em que H, D são constantes e s é o parâmetro comprimento de arco. Após a análise da dependência da curva $\gamma(s, H, D)$ em relação a D e H , concluímos que basta considerar $D \geq 0$ em (1.4). De modo que $\gamma(s, H, 0)$ é uma reta e o traço de $X(s, t)$ é um cilindro reto de raio $\frac{1}{2|H|}$.

Para $D = 1$, $\gamma(s, H, 1)$ é um semicírculo de raio $\frac{1}{|H|}$ que gera uma esfera. A análise de (1.2) e (1.3), nos leva que para $0 < D < 1$ as superfícies obtidas são as ondulóides e para $D > 1$ as nodóides.

2 Fundamentos teóricos

Neste capítulo vamos estabelecer algumas anotações e definições que serão utilizadas ao longo do trabalho.

2.1 Curvas planas regulares

Uma aplicação diferenciável (de classe C^∞)

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

com I um intervalo aberto da reta ($I \subset \mathbb{R}$), é dita uma *curva parametrizada*. O traço da aplicação é gerado pelo conjunto imagem de $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$, como está esquematizado na figura [2.1](#).

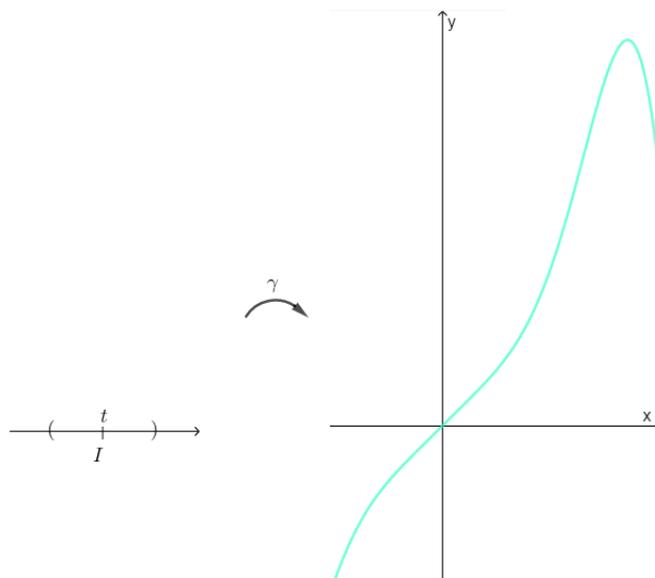


Figura 2.1: Curva parametrizada .

Para cada $t \in I$, $\gamma(t)$ é dado por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

em que $x(t)$ e $y(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ . O vetor tangente à curva $\gamma(t)$ é

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)), t \in I,$$

se $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, pode-se afirmar que $\gamma(t)$ é uma *curva regular* para todos $t \in I$.

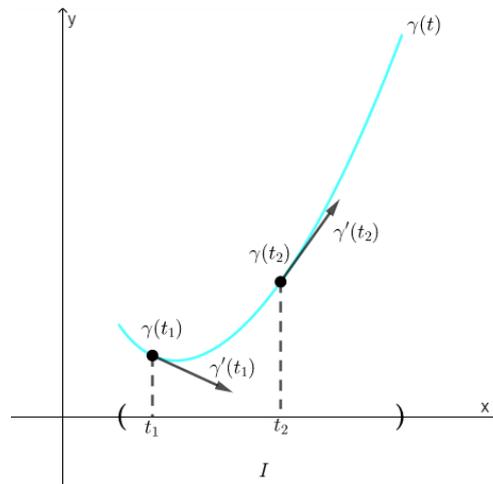


Figura 2.2: Derivada.

Exemplo 2.1.1. $\gamma(t) = (\cos(t) - 1.2\cos(10t), \sin(t) - 1.2\sin(10t))$ com $t \in (0, 2\pi)$, é a parametrização do Hipotrocóide que está representado na figura [2.3](#). O Hipotrocóide é uma curva regular, para todo $t \in (0, 2\pi)$.

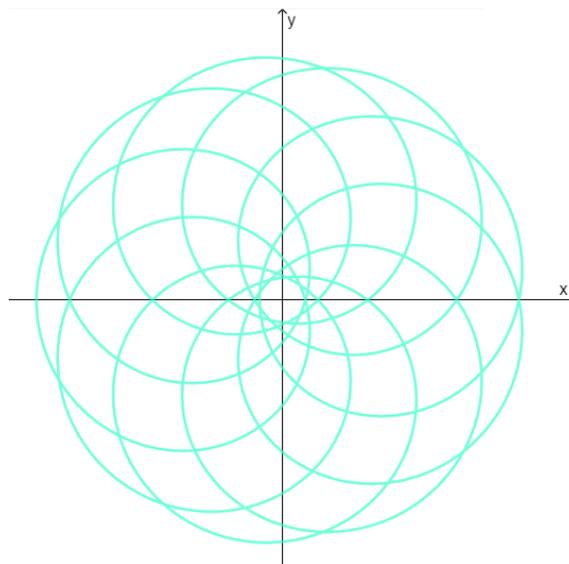


Figura 2.3: Hipotrocóide.

Definição 2.1.1 (Comprimento de arco e função comprimento de arco). O comprimento de arco de uma curva regular $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, entre o ponto inicial $t_0 \in I$ e o ponto final $t \in I$ é dado por

$$l = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du. \quad (2.1)$$

A função comprimento de arco iniciando em t_0 até t é dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du,$$

para $t \geq t_0$. No caso $t \leq t_0$ a função comprimento de arco de t até t_0 é

$$s(t) = - \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du = \int_t^{t_0} \|\gamma'(u)\| du.$$

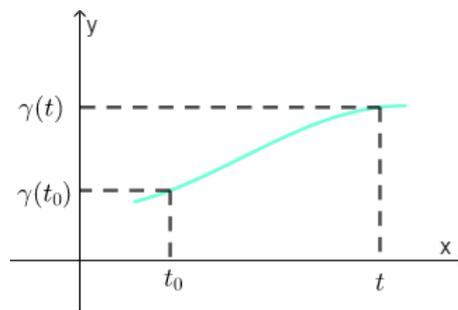


Figura 2.4: Comprimento do arco determinado de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$.

Exemplo 2.1.2. O comprimento de arco da curva $\gamma(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ com $t \in I$, iniciando em $t_0 = 0$ e terminando em $t = \frac{\pi}{3}$ é:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(3\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [9(\sin^2(t) + \cos^2(t))]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [9]^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 dt = 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \pi. \end{aligned}$$

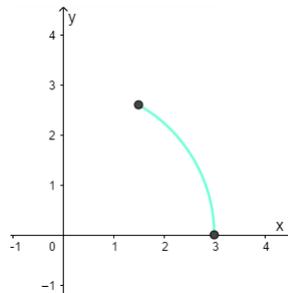


Figura 2.5: Comprimento de arco $\gamma(t)$ de $t = 0$ até $t = \frac{\pi}{3}$.

Definição 2.1.2. Dada uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada $t_0, t \in I, t \geq t_0$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t é

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0.$$

Proposição 2.1.1. *Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, uma curva regular $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco $s \in J$ se, e só se,*

$$\|\alpha'(s)\| = 1.$$

Demonstração. Seja α parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0, \\ \Rightarrow s(t) &= t - t_0 \end{aligned}$$

derivando obtemos

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1.$$

Reciprocamente, se $\|\alpha'(t)\| = 1$ e com $t_0 \in I$ fixo então para cada $t \in I$ com $t \geq t_0$, a função comprimento de arco é:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0$$

Portanto α está parametrizada pelo comprimento de arco. Para $t \leq t_0$ a demonstração é análoga. \square

Exemplo 2.1.3. *Considere a Catenária*

$$\gamma(t) = (t, \cosh(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Temos que a primeira derivada é

$$\gamma'(t) = (1, \sinh(t))$$

e a norma

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = |\cosh(t)| = \cosh(t)$$

portanto a função comprimento de arco de γ , a partir de $t_0 = 0$, é

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\| \, du \\ &= \int_0^t \cosh(u) \, du \\ &= \sinh(t). \end{aligned}$$

Definição 2.1.3. Seja a curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $h: J \rightarrow I$, uma função diferenciável (C^∞) tal que $h'(t) \neq 0$ em J e $h(J) = I$, com I e J intervalos de \mathbb{R} . A aplicação é

$$\alpha = \gamma \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.2)$$

é uma curva regular que possui o mesmo traço de γ , temos que h é uma mudança de parâmetros e dita uma reparametrização de α por h , como visto na figura 2.6.

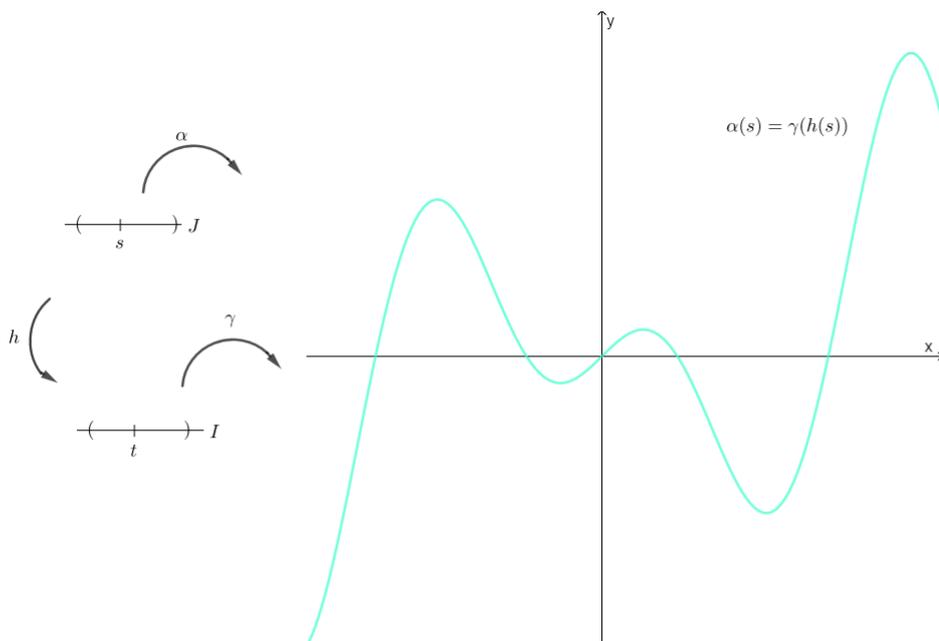


Figura 2.6: mudança de variável

Exemplo 2.1.4. A curva $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ com $r > 0$, possui reparametrização pelo comprimento de arco (s),

$$\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right).$$

em que $h(s) = \frac{s}{r}$, com $r > 0$.

2.2 Superfícies parametrizadas regulares

Dada a aplicação diferencial de classe C^∞

$$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

com U um aberto de \mathbb{R}^2 . Para cada par ordenado $(u, v) \in U$ construímos um ponto

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3, (u, v) \in U.$$

Se fixarmos $(u_0, v_0) \in U$ obtemos o ponto $X(u_0, v_0)$ como está representado na figura [2.7](#)

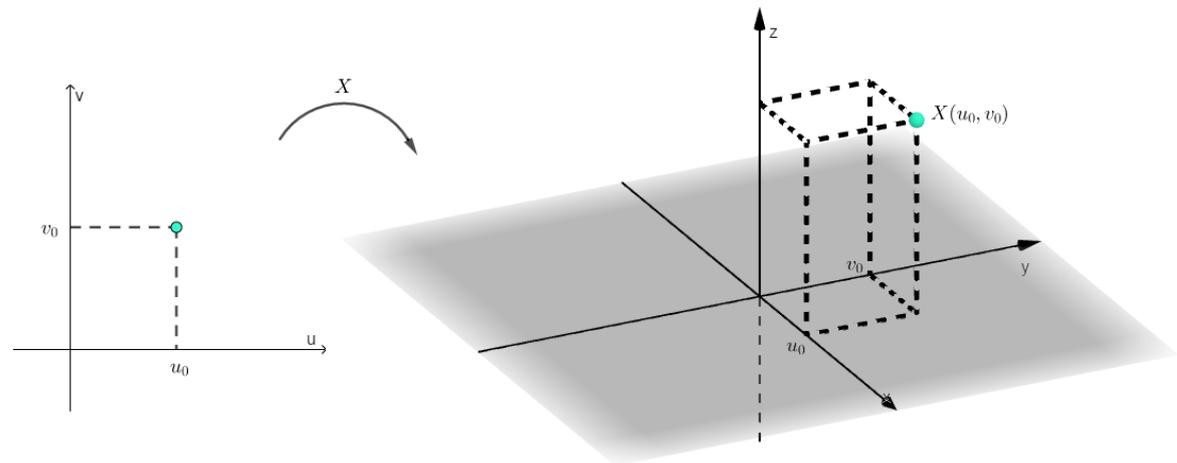


Figura 2.7: Representação de $X(u_0, v_0)$ no espaço euclidiano.

Variando u e v no aberto U obtemos S que é o traço da imagem de X .

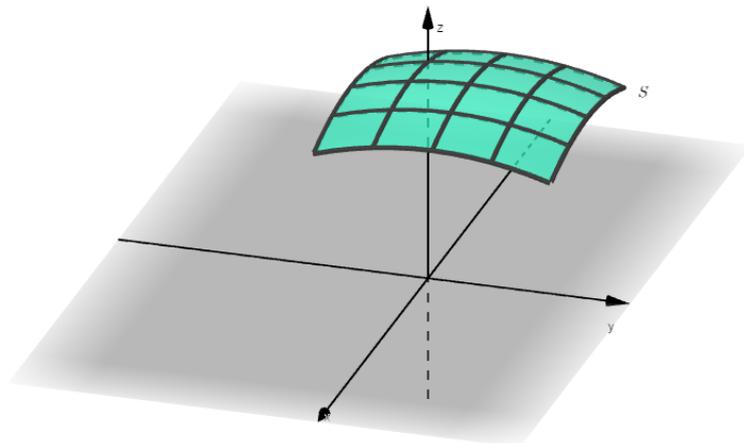


Figura 2.8: Traço de X .

A aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ produz uma superfície parametrizada, fixando $u_0 \in U$ e variando $v \in U$ obtemos

$$\begin{aligned} X(u_0, \cdot) : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_0, v) &\mapsto X(u_0, v), \end{aligned}$$

fixando $v_0 \in U$ e variando $u \in U$ obtemos

$$\begin{aligned} X(\cdot, v_0) : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v_0) &\mapsto X(u, v_0). \end{aligned}$$

$X(u_0, v)$ e $X(u, v_0)$ são chamadas *curvas coordenadas*.

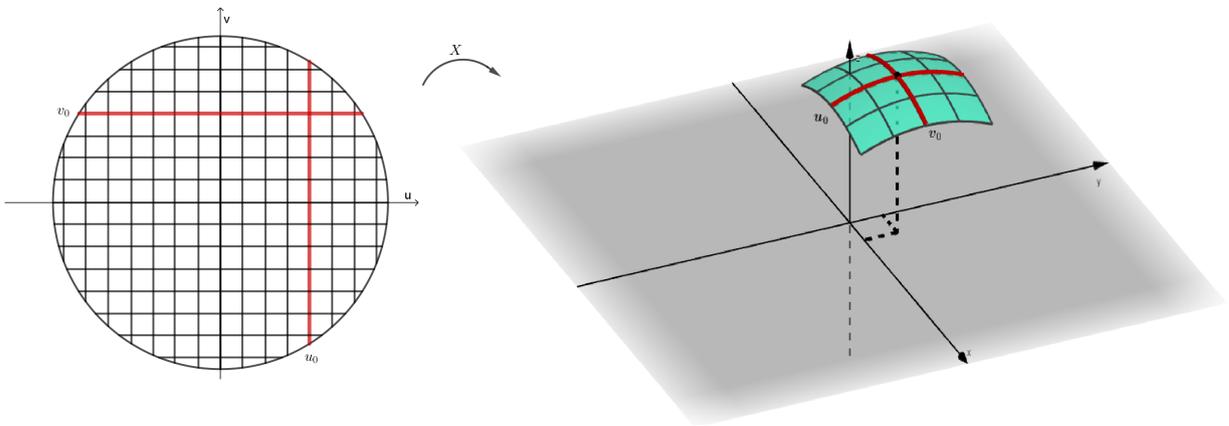


Figura 2.9: Curvas coordenadas.

Como X é uma aplicação diferenciável de classe C^∞ , podemos obter os vetores tangentes às curvas coordenadas $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

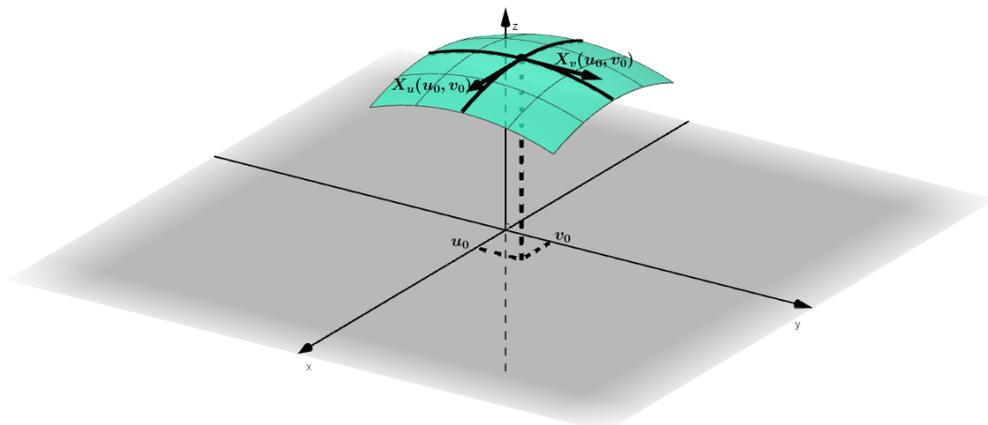


Figura 2.10: Vetores tangentes às curvas coordenadas $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Definição 2.2.1. Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, em que U é um aberto de \mathbb{R}^2 ,

- X é diferenciável de classe C^∞ ;
- Para todo $q = (u_0, v_0) \in U$, $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$.

Exemplo 2.2.1. Considere a aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u).$$

Possui as seguintes derivadas parciais:

- $X_u = (-v \sin(u), v \cos(u), 1)$;
- $X_v = (\cos(u), \sin(u), 0)$.

Em que

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -v \sin(u) & v \cos(u) & 1 \\ \cos(u) & \sin(u) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\sin(u), \cos(u), -v) \neq 0, \forall (u, v) \in U. \end{aligned}$$

$X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular pois é de Classe C^∞ e $X_u \times X_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in U$. O traço de X é o Helicóide.

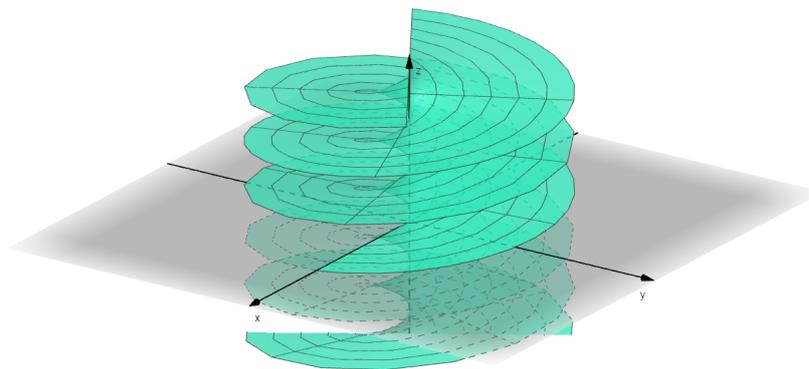


Figura 2.11: Helicóide.

2.2.1 Superfície de Revolução

Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, contida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 , de classe C^∞ , por exemplo a figura [2.12](#).

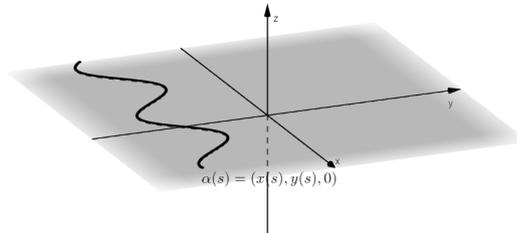


Figura 2.12: $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$.

Rotacionando a curva α em torno do eixo x , obtemos a parametrização da superfície em função de s (parâmetro comprimento de arco) e $u \in \mathbb{R}$, como nas figura [2.14](#).

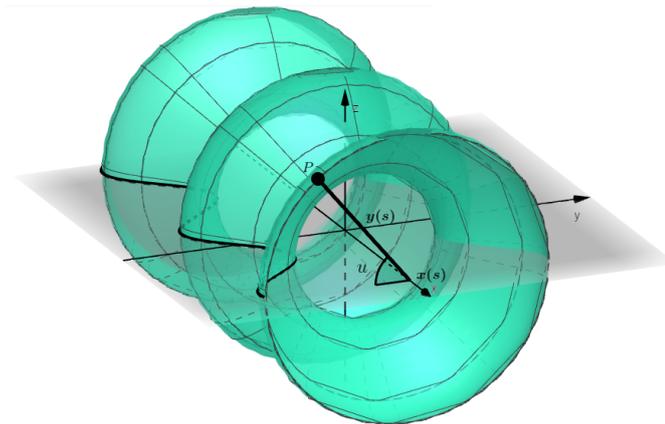


Figura 2.13: Rotação de $\alpha(s)$ em torno de x .

Pela figura [2.13](#) conseguimos a relação para qualquer ponto P pertencente a superfície de revolução em que $y(s) \neq 0$, com

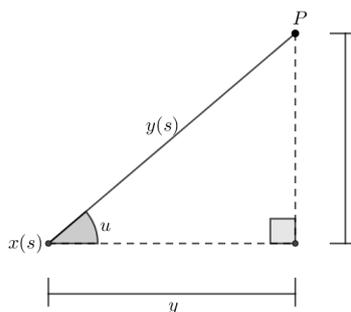


Figura 2.14: Relação.

- $\cos(u) = \frac{y}{y(s)} \Rightarrow y = y(s) \cos(u)$;
- $\text{sen}(u) = \frac{z}{y(s)} \Rightarrow z = y(s) \text{sen}(u)$.

Obtemos que a parametrização da superfície é dada por,

$$X(s, u) = (x(s), y(s) \cos(u), y(s) \text{sen}(u)).$$

Realizando as derivadas parciais em relação a u e s .

$$\begin{aligned} X_s &= (x'(s), y'(s) \cos(u), y'(s) \text{sen}(u)) \\ X_u &= (0, -y(s) \text{sen}(u), y(s) \cos(u)) \end{aligned}$$

Verificaremos se a superfície é regular através do produto vetorial entre X_s e X_u .

$$X_s \times X_u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(s) & y'(s) \cos(u) & y'(s) \text{sen}(u) \\ 0 & -y(s) \text{sen}(u) & y(s) \cos(u) \end{vmatrix} = (y(s)y'(s), -x'(s)y(s) \cos(u), -x'(s)y(s) \text{sen}(u))$$

(2.3)

Como $\alpha(s)$ é uma curva regular com,

$$\begin{aligned} \|X_s \times X_u\| &= \sqrt{[y(s)y'(s)]^2 + [-x'(s)y(s) \cos(u)]^2 + [-x'(s)y(s) \text{sen}(u)]^2} \\ &= \sqrt{[y(s)]^2[y'(s)]^2 + [x'(s)]^2[y(s)]^2 \cos^2(u) + [x'(s)]^2[y(s)]^2 \text{sen}^2(u)} \\ &= \sqrt{[y(s)]^2[y'(s)]^2 + [x'(s)]^2[y(s)]^2[\cos^2(u) + \text{sen}^2(u)]} \\ &= \sqrt{[y(s)]^2[y'(s)]^2 + [x'(s)]^2[y(s)]^2} = \sqrt{[y(s)]^2[[y'(s)]^2 + [x'(s)]^2]} \\ &= \sqrt{[y(s)]^2} = y(s) \neq 0, \end{aligned}$$

portanto X é uma superfície parametrizada regular.

Definição 2.2.2 (Vetor normal). *Um vetor normal a uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$ em $q = (u_0, v_0) \in X(u, v)$ se, somente se, é ortogonal ao plano tangente de $T_q X$, isto é, ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q . Definimos a aplicação normal de Gauss como*

$$\begin{aligned} N: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ q = (u, v) &\mapsto N(q) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Exemplo 2.2.2. *Dada a superfície parametrizada regular $X(u, v) = (\cos(u), \text{sen}(u), v)$, temos que*

$$X_u = (-\text{sen}(u), \cos(u), 0) \quad e \quad X_v = (0, 0, 1)$$

o vetor normal ao ponto $X\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ na superfície do cilindro é dado por

$$\begin{aligned} N\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) &= \frac{(-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\operatorname{sen}(u), \cos(u), 0) \times (0, 0, 1)\|} \left(\frac{\pi}{2}, 2\right) \\ &= \frac{(0, 1, 0)}{\|(0, 1, 0)\|} = (0, 1, 0). \end{aligned}$$

Como está representado na figura [2.15](#).

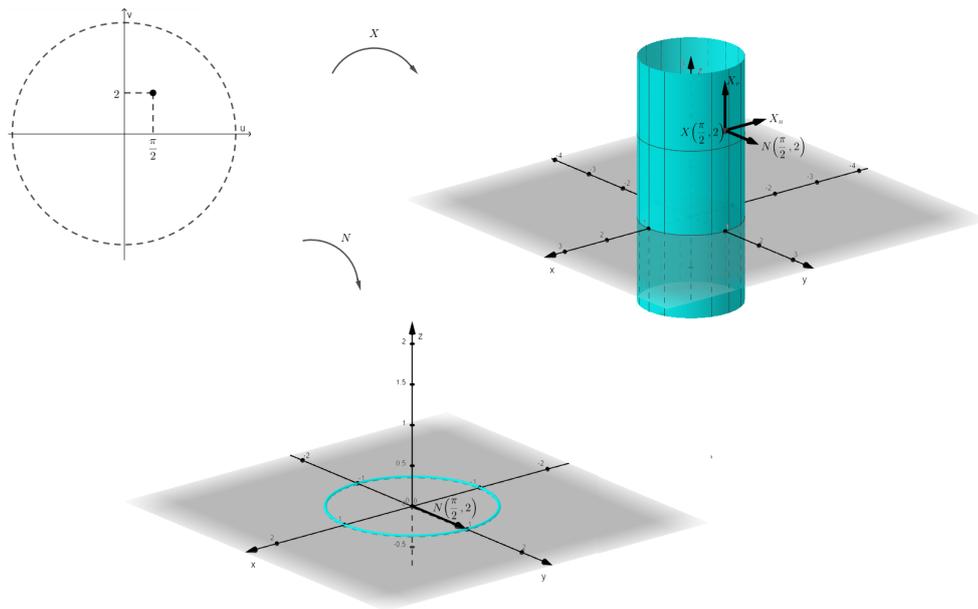


Figura 2.15: Vetor normal ao cilindro.

Dada a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um conjunto aberto, tem-se que $T_q X$ é o *plano tangente* que possui o conjunto de vetores tangentes a X em $q = (u_0, v_0)$.

2.2.2 Curvatura média

Dada a superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um conjunto aberto, podemos calcular a curvatura média com os coeficientes da primeira e segunda forma, como descrito na equação [\(2.5\)](#),

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}, \quad (2.5)$$

as funções $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$ diferenciável são denominado coeficientes da primeira forma e $e = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f = \langle X_{uv}, N \rangle$ e $g = \langle X_{vv}, N \rangle$ coeficientes da segunda forma.

Exemplo 2.2.3. Um exemplo clássico de uma superfície parametrizada regular é a esfera unitária

$$X(u, v) = (\cos(u) \operatorname{sen}(v), \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v), \cos(v)), \quad u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi,$$

que possui as seguintes derivadas parciais:

- $X_u = (-\operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v), \cos(u) \operatorname{sen}(v), 0)$;
- $X_v = (\cos(u) \cos(v), \operatorname{sen}(u) \cos(v), -\operatorname{sen}(v))$;
- $X_{uu} = (-\cos(u) \operatorname{sen}(v), -\operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v), 0)$;
- $X_{vv} = (-\cos(u) \operatorname{sen}(v), -\operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v), -\cos(v))$;
- $X_{uv} = (-\operatorname{sen}(u) \cos(v), \cos(u) \cos(v), 0)$

e o vetor normal:

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v) \\ &= \frac{(-\operatorname{sen}^2(v) \cos(u), -\operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(u), -\operatorname{sen}(v) \cos(v))}{\|(-\operatorname{sen}^2(v) \cos(u), -\operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(u), -\operatorname{sen}(v) \cos(v))\|} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen}^2(v) \cos(u), -\operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(u), -\operatorname{sen}(v) \cos(v))}{|\operatorname{sen}(v)|} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen}^2(v) \cos(u), -\operatorname{sen}^2(v) \operatorname{sen}(u), -\operatorname{sen}(v) \cos(v))}{\operatorname{sen}(v)} \\ &= (-\operatorname{sen}(v) \cos(u), -\operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), -\cos(v)). \end{aligned}$$

Com esse dados podemos estabelecer os coeficientes da primeira e da segunda forma:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \operatorname{sen}^2(v); & e &= \langle X_{uu}, N \rangle = \operatorname{sen}^2(v); \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0; & f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0; \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1; & g &= \langle X_{vv}, N \rangle = 1. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.5) para obter a curvatura média

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2(v) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + \operatorname{sen}^2(v) \cdot 1}{\operatorname{sen}^2(v) \cdot 1 - 0^2} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}^2(v)}{2 \operatorname{sen}^2(v)} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a esfera unitária possui curvatura média igual a 1.

Exemplo 2.2.4. Considere cilindro circular reto de raio r com parametrização

$$X(u, v) = (r \cos(u), v, r \operatorname{sen}(u)), \quad u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi,$$

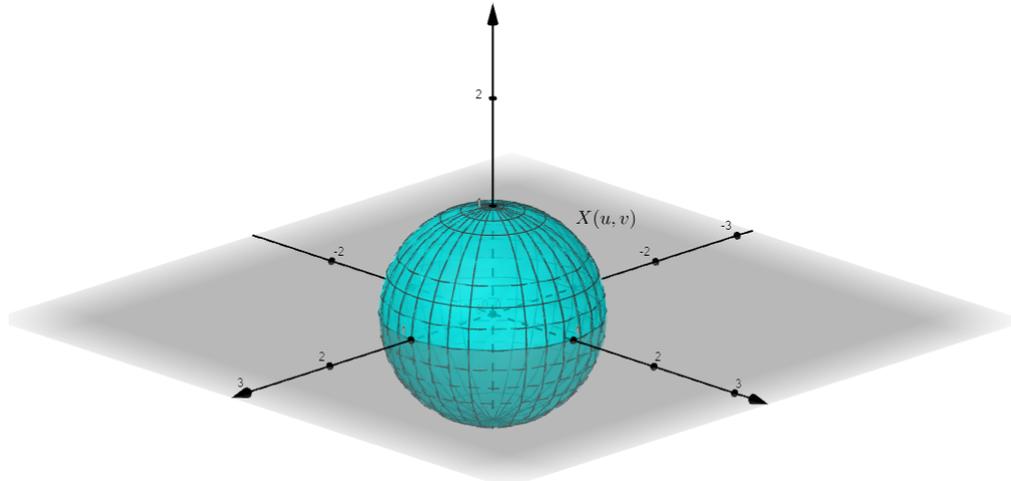


Figura 2.16: Esfera unitária.

que possui as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \operatorname{sen}(u), 0, r \operatorname{cos}(u)); & X_{uu} &= (-r \operatorname{cos}(u), 0, -r \operatorname{sen}(u)); \\ X_v &= (0, 1, 0); & X_{uv} &= (0, 0, 0); \\ & & X_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

e o vetor normal:

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v) = \frac{(-r \operatorname{cos}(u), 0, -r \operatorname{sen}(u))}{\|(-r \operatorname{cos}(u), 0, -r \operatorname{sen}(u))\|} \\ &= \frac{(-r \operatorname{cos}(u), 0, -r \operatorname{sen}(u))}{\|r\|} = \frac{(-r \operatorname{cos}(u), 0, -r \operatorname{sen}(u))}{r} \\ &= (-\operatorname{cos}(u), 0, -\operatorname{sen}(u)). \end{aligned}$$

Com esse dados podemos estabelecer os coeficientes da primeira e da segunda forma:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2; & e &= \langle X_{uu}, N \rangle = r; \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0; & f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0; \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = r^2; & g &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.5) para obter a curvatura média

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{r \cdot r^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + r^2 \cdot 0}{r^2 \cdot r^2 - 0^2} \\ &= \frac{r^3}{2r^4} = \frac{1}{2r}. \end{aligned}$$

Concluimos que a curvatura média é igual a $\frac{1}{2r}$.

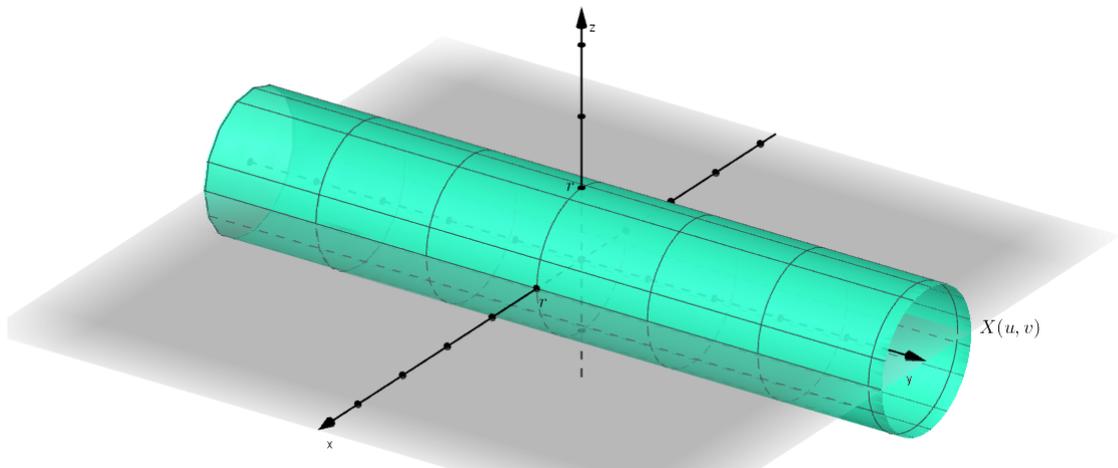


Figura 2.17: Cilindro de raio r .

3 A curvatura média de uma Superfície de Revolução

Seja $X(s, u) = (x(s), y(s) \cos(u), y(s) \sin(u))$, $(s, u) \in I \times (0, 2\pi)$, a superfície obtida pela revolução de $(x(s), y(s), 0)$ em torno do eixo x . Para obter a expressão de curvatura média desta superfície, sem perda de generalidade, podemos supor que γ é parametrizada pelo comprimento de arco. Com

$$\begin{aligned} N(s, u) &= \frac{X_s \times X_u}{\|X_s \times X_u\|} = \frac{(y(s)y'(s), -x'(s)y(s) \cos(u), -x'(s)y(s) \sin(u))}{y(s)} \\ &= (y'(s), -x'(s) \cos(u), -x'(s) \sin(u)), \end{aligned}$$

e os coeficientes da primeira forma quadrática são:

- $E = \langle X_s, X_s \rangle = [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1$;
- $F = \langle X_s, X_u \rangle = 0$;
- $G = \langle X_u, X_u \rangle = [y(s)]^2$.

Para o cálculo dos coeficientes da segunda forma quadrática precisamos das derivadas parciais X_{ss} , X_{su} e X_{uu} .

- $X_{ss} = (x''(s), y''(s) \cos(u), y''(s) \sin(u))$;
- $X_{su} = (0, -y'(s) \sin(u), y'(s) \cos(u))$;
- $X_{uu} = (0, -y(s) \cos(u), y(s) \sin(u))$,

enquanto os coeficientes da segunda fórmula quadrática são:

- $e = \langle X_{ss}, N \rangle = x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s)$;
- $f = \langle X_{su}, N \rangle = 0$;
- $e = \langle X_{uu}, N \rangle = x'(s)y(s)$.

Substituindo na fórmula de curvatura média da equação (2.5),

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{[x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s)][y(s)]^2 + x'(s)y(s)}{[y(s)]^2}.$$

Portanto,

$$2H(s)y(s) - x'(s) - x''(s)y'(s)y(s) + x'(s)y''(s)y(s) = 0. \quad (3.1)$$

Através da equação (3.1) provaremos o Teorema principal desse capítulo que será apresentado a seguir.

Teorema 3.0.1. *Seja $(x(s), y(s), 0)$, $s \in I$, a geratriz regular, parametrizada pelo comprimento de arco, de uma superfície cuja a curvatura média no ponto $(x(s), y(s), 0)$ é $H(s)$. Então para algumas constantes c_1, c_2 e c_3 temos*

$$(x(s), y(s), 0) = \gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = \left(\int_0^s \frac{F'(t)(G(t) + c_2) - G'(t)(F(t) + c_1)}{[(F(t) + c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3, [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right), \quad (3.2)$$

$$\text{em que } F(s) = \int_0^s \sin \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt \text{ e } G(s) = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt.$$

Reciprocamente para qualquer função contínua $H(s)$, $s \in I$, e qualquer vetor

$$(c_1, c_2, c_3) \in T \times \mathbb{R} := \{(-F(s), -G(s)), s \in I\}^C \times \mathbb{R},$$

podemos construir uma superfície de revolução por meio da equação (3.2) de tal modo que sua curvatura média seja $H(s)$ e condições iniciais dadas por:

- $\gamma(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = (c_3, [(c_1)^2 + (c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0)$;
- $\gamma'(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = (c_1[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, c_2[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, 0)$.

Dividiremos a demonstração do Teorema 3.0.1 em 7 passos.

Passo 1. A equação (3.1) pode ser descrita como

$$2H(s)y(s)x'(s) + (y(s)y'(s))' - 1 = 0. \quad (3.3)$$

Demonstração. Multiplicando (3.1) por $x'(s)$,

$$2H(s)y(s)x'(s) - [x'(s)]^2 - x'(s)x''(s)y'(s)y(s) + [x'(s)]^2y''(s)y(s) = 0.$$

Colocando $[x'(s)]^2$ em evidencia,

$$2H(s)y(s)x'(s) + [x'(s)]^2[y''(s)y(s) - 1] - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) = 0. \quad (3.4)$$

Como $(x(s), y(s), 0)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se que:

$$\|\alpha(s)\| = 1 \Rightarrow [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1 \Rightarrow [x'(s)]^2 = 1 - [y'(s)]^2. \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.4),

$$\begin{aligned} \Rightarrow & H(s)y(s)x'(s) + [1 - y'(s)]^2[y(s)y''(s) - 1] - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) \\ = & 2H(s)y(s)x'(s) + y(s)y''(s) - 1 - y(s)y''(s)[y'(s)]^2 + [y'(s)]^2 - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) \\ = & 2Hy(s)x'(s) - 1 - y(s)y''(s)[y'(s)]^2 - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) + \underbrace{y(s)y''(s) + [y'(s)]^2}_{(y(s)y'(s))'} \\ = & 2H(s)y(s)x'(s) - 1 - y(s)y''(s)[y'(s)]^2 - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) + (y(s)y'(s))' \\ = & 2H(s)y(s)x'(s) - 1 - y(s)y'(s)[y'(s)y''(s) - x'(s)x''(s)] + (y(s)y'(s))' \\ = & 2H(s)y(s)x'(s) - 1 - y(s)y'(s)\langle(x'(s), y'(s)), (-x''(s), y''(s))\rangle + (y(s)y'(s))' = 0. \end{aligned}$$

Tem-se que o vetor tangente é $t = (x'(s), y'(s))$ e $t' = (x''(s), y''(s))$, desta forma $t \perp t' \Rightarrow \langle t, t' \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} 2H(s)y(s)x'(s) - 1 - y(s)y'(s)\underbrace{\langle(x'(s), y'(s)), (-x''(s), y''(s))\rangle}_{\langle t, t' \rangle = 0} + (y(s)y'(s))' = \\ 2H(s)y(s)x'(s) + (y(s)y'(s))' - 1 = 0. \end{aligned}$$

□

O passo 2 a seguir é uma reformulação da equação (3.1), com uma estrutura diferente do passo 1.

Passo 2. Podemos reescrever a equação (3.1) como

$$2H(s)y(s)y'(s) - (x'(s)y(s))' = 0 \quad (3.6)$$

Demonstração. multiplicando (3.1) por $y'(s)$,

$$2H(s)y(s)y'(s) - x'(s)y'(s) - x''(s)[y'(s)]^2y(s) + x'(s)y'(s)y''(s)y(s) = 0$$

Utilizando o fato de que $[y'(s)]^2 = 1 - [x'(s)]^2$,

$$\begin{aligned}
& 2H(s)y(s)y'(s) - x'(s)y'(s) - x''(s)[1 - [x'(s)]^2]y(s) + x'(s)y'(s)y''(s)y(s) \\
= & 2H(s)y(s)y'(s) - x'(s)y'(s) - x''(s)y(s) + [x'(s)]^2x''(s)y(s) + x'(s)y(s)y'(s)y''(s) \\
= & 2H(s)y(s)y'(s) - \underbrace{[x'(s)y'(s) + x''(s)y(s)]}_{(x'(s)y(s))'} + [x'(s)]^2x''(s)y(s) + x'(s)y(s)y'(s)y''(s) \\
= & 2H(s)y(s)y'(s) - (x'(s)y(s))' + x'(s)y(s)[x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s)] \\
= & 2H(s)y(s)y'(s) - (x'(s)y(s))' + x'(s)y(s)\langle(x'(s), y'(s)), (-x''(s), y''(s))\rangle \\
= & 2H(s)y(s)y'(s) - (x'(s)y(s))' + x'(s)y(s)\underbrace{\langle t, t' \rangle}_{t \perp t'} \\
= & 2H(s)y(s)y'(s) - (x'(s)y(s))' = 0
\end{aligned}$$

□

Utilizaremos os passos 1 e 2, para estabelecer uma função auxiliar $Z(s)$, cuja expressão possui as coordenadas da geratriz da superfície de revolução com curvatura média $H(s)$ e verificaremos que esta função é a solução de uma equação diferencial ordinária (EDO).

Passo 3. Como $x(s)$ e $y(s)$ são coordenadas da geratriz de uma superfície de revolução de curvatura $H(s)$. A função auxiliar $Z(s) = y(s)y'(s) + iy(s)x'(s)$ é solução da EDO

$$Z'(s) - 2iH(s)Z(s) = 1 \quad (3.7)$$

Demonstração. Definindo

$$Z(s) = y(s)y'(s) + iy(s)x'(s). \quad (3.8)$$

Calculando $Z'(s)$, obtemos

$$Z'(s) = y'(s)y'(s) + y(s)y''(s) + i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s)].$$

Somando $-2iH(s)Z(s)$ de ambos os lados da igualdade.

$$\begin{aligned}
& Z'(s) - 2iH(s)Z(s) = \\
= & y'(s)y'(s) + y(s)y''(s) + i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s)] - 2iH(s)[y(s)y'(s) + iy(s)x'(s)] \\
= & [y'(s)]^2 + y(s)y''(s) + i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s)] - 2iH(s)y(s)y'(s) - 2iH(s)[iy(s)x'(s)] \\
= & [y'(s)]^2 + y(s)y''(s) + i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s)] - 2iH(s)y(s)y'(s) - 2iH(s)[iy(s)x'(s)] \\
= & [y'(s)]^2 + y(s)y''(s) + 2H(s)y(s)x'(s) + i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s)] - 2H(s)y(s)y'(s).
\end{aligned}$$

Substituindo as equação (3.3) e (3.6) obtemos,

$$\begin{aligned} Z'(s) - 2iH(s)Z(s) &= \underbrace{[y'(s)]^2 + y(s)y'(s) + 2H(s)y(s)x'(s)}_{(3.3)} + \underbrace{i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s) - 2H(s)y(s)y'(s)]}_{(3.6)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

No passo 4 a seguir, utilizaremos técnicas elementares de equação diferencial ordinária para obter uma solução explícita de (3.7).

Passo 4. A solução de (3.7) é

$$Z(s) = [F'(s) - iG'(s)][F(s) + iG(s) + iC], \quad (3.9)$$

com:

$$\bullet F(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt; \quad (3.10)$$

$$\bullet F'(s) = \operatorname{sen} \left(2 \int_0^s H(u) du \right); \quad (3.11)$$

$$\bullet G(s) = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt; \quad (3.12)$$

$$\bullet G'(s) = \cos \left(2 \int_0^s H(u) du \right). \quad (3.13)$$

Demonstração. Utilizando um fator integrante para resolver a EDO (3.7)

$$\underbrace{Z'(s)\mu - 2iH(s)Z(s)\mu}_{(Z\mu)'} = \mu \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow (Z\mu)' = Z'(s)\mu + Z(s)\mu' = Z'(s)\mu - 2iH(s)Z(s)\mu = \mu. \quad (3.15)$$

Tem-se que,

$$Z(s)\mu' = -2iH(s)Z(s)\mu \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -2iH(s),$$

portanto

$$\ln(\mu) = -2i \int_0^s H(u) du + K.$$

Escolhendo $K = 0$, obtemos

$$\ln(\mu) = -2i \int_0^s H(u) du \Rightarrow \mu = \exp \left(-2i \int_0^s H(u) du \right). \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.15)

$$[Z\mu]' = \mu \Rightarrow \left[Z \exp \left(-2i \int_0^s H(u) du \right) \right]' = \exp \left(-2i \int_0^s H(u) du \right)$$

$$\Rightarrow Z \exp \left(-2i \int_0^s H(u) du \right) = \int_0^s \exp \left(-2i \int_0^t H(u) du \right) dt + C$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\exp(-2i \int_0^s H(u) du)} \left[\int_0^s \exp \left(-2i \int_0^t H(u) du \right) dt + C \right]$$

$$\Rightarrow Z = \exp \left(2i \int_0^s H(u) du \right) \left[\int_0^s \exp \left(-2i \int_0^t H(u) du \right) dt \right] + C \exp \left(2i \int_0^s H(u) du \right).$$

Segue da fórmula de Euler para números complexos que,

- $\int_0^s \exp \left(2i \int_0^t H(u) du \right) dt = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt + i \int_0^s \sen \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt$
 $= G(s) + iF(s);$
- $\int_0^s \exp \left(-2i \int_0^t H(u) du \right) dt = \int_0^s \cos \left(-2 \int_0^t H(u) du \right) dt + i \int_0^s \sen \left(-2 \int_0^t H(u) du \right) dt$
 $= \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt - i \int_0^s \sen \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt = G(s) - iF(s);$
- $\exp \left(2i \int_0^s H(u) du \right) = \cos \left(2 \int_0^s H(u) du \right) + i \sen \left(2 \int_0^s H(u) du \right) = G'(s) + iF'(s).$

Visando simplificar o formato $Z(s)$, definimos

- $F(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt;$
- $F'(s) = \operatorname{sen} \left(2 \int_0^s H(u) du \right);$
- $G(s) = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt;$
- $G'(s) = \cos \left(2 \int_0^s H(u) du \right).$

de modo que a substituição de $F(s)$, $G(s)$, $F'(s)$ e $G'(s)$ em (3.9) resulta em,

$$\begin{aligned}
 Z(s) &= [G(s) - iF(s)][G'(s) + iF'(s)] + C[G'(s) + iF'(s)] \\
 &= [G'(s) + iF'(s)][G(s) - iF(s) + C] \\
 &= (i)(-i)[G'(s) + iF'(s)][G(s) - iF(s) + C] \\
 &= (-i)[G'(s) + iF'(s)](i)[G(s) - iF(s) + C] \\
 &= [F'(s) - iG'(s)][F(s) + iG(s) + iC].
 \end{aligned}$$

□

No próximo passo, escrevemos as coordenadas $x(s)$ e $y(s)$ em termos das funções $F(s)$ e $G(s)$ que foram estabelecidos no passo 4.

Passo 5. Seja s o parâmetro comprimento de arco da geratriz $(x(s), y(s), 0) = \gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ de uma superfície de revolução cuja a curvatura média é $H(s)$, então

$$x(s) = x(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = \int_0^s \frac{F'(t)(G(t) + c_2) - G'(t)(F(t) + c_1)}{[(F(t) + c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3 \quad (3.17)$$

e

$$y(s) = y(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.18)$$

com c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Realizando $iC = c_1 + ic_2$.

$$\begin{aligned} Z(s) &= [F'(s) - iG'(s)][F(s) + iG(s) + c_1 + ic_2] \\ &= [F'(s) - iG'(s)][F(s) + c_1 + i(G(s) + c_2)]. \end{aligned}$$

Temos que

$$\|Z(s)\|^2 = \|F'(s) - iG'(s)\|^2 \|F(s) + c_1 + i(G(s) + c_2)\|^2. \quad (3.19)$$

Pela equação 3.8 obtemos,

$$\begin{aligned} \|Z(s)\|^2 &= y^2(s)[(x'(s))^2 + (y'(s))^2] \\ &= y^2(s), \end{aligned}$$

a comparação com (3.19) resulta em

$$y(s) = [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Para obter $x(s)$, realizamos $\frac{Z - \bar{Z}}{2i}$ em (3.8).

$$\begin{aligned} \frac{Z - \bar{Z}}{2i} &= y(s)x'(s) = F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1) \\ \Rightarrow y(s)x'(s) &= F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1) \\ \Rightarrow x'(s) &= \frac{F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1)}{y(s)} = \frac{F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1)}{[(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Logo

$$x(s) = x(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = \int_0^s \frac{F'(t)(G(t) + c_2) - G'(t)(F(t) + c_1)}{[(F(t) + c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3.$$

Portanto

$$\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = \left(\int_0^s \frac{F'(t)(G(t) + c_2) - G'(t)(F(t) + c_1)}{[(F(t) + c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3, [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right),$$

com c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$.

□

A seguir verificaremos se a curva geratriz $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ da superfície de revolução $X(s, u)$ é uma curva regular e qual é seu domínio.

Passo 6 A geratriz $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ é regular e satisfaz a equação (3.4), em que as constantes c_1 e c_2 estão definidas no domínio aberto

$$T = \{(-F(s), -G(s)), s \in I\}^C \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } c_3 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. A curva geratriz $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ é diferenciável de modo que $c_1 \neq -F(s)$ e $c_2 \neq -G(s)$. Supondo por absurdo que a curva geratriz não é regular, temos que:

$$x'(s) = \frac{F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1)}{[(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (3.20)$$

e

$$y'(s) = \frac{F'(s)(F(s) + c_1) + G'(s)(G(s) + c_2)}{[(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0. \quad (3.21)$$

Como $[(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}} \neq 0$ nas equações (3.20) e (3.21), então

$$\begin{cases} F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1) = 0 \\ F'(s)(F(s) + c_1) + G'(s)(G(s) + c_2) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior obtemos que $c_1 = -F(t)$ e $c_2 = -G(t)$ que é um absurdo pois contradiz a hipótese de que $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ é diferenciável. Logo $\gamma'(s, H(s), c_1, c_2, c_3) \neq 0$, conseqüentemente $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ é regular no domínio aberto $T = \{(-F(s), -G(s)), s \in I\}^C \subset \mathbb{R}^2$. Para qualquer vetor $(c_1, c_2, c_3) \in T \times \mathbb{R}$ e dada uma função contínua $H(s)$ que satisfaz a (3.4), nos definimos a curva $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$. \square

Na seqüência, verificaremos as condições iniciais em $s = 0$.

Passo 7 Realizando $s = 0$ na equação (3.2) obtemos as seguintes condições iniciais:

- $\gamma(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = (c_3, [(c_1)^2 + (c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0)$;
- $\gamma'(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = (c_1[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, c_2[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, 0)$.

Demonstração. Tomando $s = 0$ em (3.2) obtemos,

$$\gamma(0, H(0), c_1, c_2, c_3) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^0 \frac{F'(t)(G(t) + c_2) - G'(t)(F(t) + c_1)}{[(F(t) + c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3, [(F(0) + c_1)^2 + (G(0) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \\
&= (c_3, [(c_1)^2 + (c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0).
\end{aligned}$$

Derivando a equação (3.2),

$$\begin{aligned}
&\gamma'(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = \\
&= \left(\frac{F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1)}{[(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}}, [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}(F'(s) + G'(s)), 0 \right)
\end{aligned}$$

fazendo $s = 0$.

$$\begin{aligned}
&\gamma'(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = \\
&= \left(\frac{F'(0)(G(0) + c_2) - G'(0)(F(0) + c_1)}{[(F(0) + c_1)^2 + (G(0) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}}, [(F(0) + c_1)^2 + (G(0) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}(F'(0) + G'(0)), 0 \right) \\
&= \left(c_1[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, c_2[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, 0 \right).
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração do teorema 3.0.1. □

3.1 Superfície de revolução com curvatura média constante

Nessa seção vamos analisar um caso particular do Teorema 3.0.1, em que, a superfície de revolução possui curvatura média constante $H(s) = H$.

Começamos com o caso em que a curvatura média é nula.

Proposição 3.1.1. *A curva geratriz*

$$\gamma(s, 0, c_1, c_2, c_3) = \left(\int_0^s -c_1[(c_1)^2 + (t + c_2)^2]^{-\frac{1}{2}} dt + c_3, [(c_1)^2 + (s + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right),$$

com $c_1 \neq 0$, $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ e $s > 0$, é uma catenária que gera uma superfície com curvatura média nula que é o Catenóide.

Demonstração. Realizando $H = 0$ nas expressões de $F(s)$ e $G(s)$ que são respectivamente (3.10) e (3.12),

$$\begin{aligned} \bullet F(s) &= \int_0^s \operatorname{sen} \left(2 \int_0^t 0 du \right) dt = \int_0^s \operatorname{sen}(0) dt = 0; \\ \bullet G(s) &= \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t 0 du \right) dt = \int_0^s \cos(0) dt = \int_0^s dt = s; \end{aligned}$$

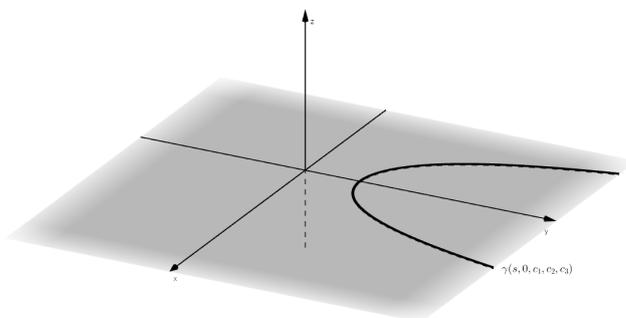
substituindo na equação (3.2) obtemos,

$$\begin{aligned} \gamma(s, 0, c_1, c_2, c_3) &= \left(\int_0^s -c_1 [(c_1)^2 + (t + c_2)^2]^{-\frac{1}{2}} dt + c_3, [(c_1)^2 + (s + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \\ &= \left(\pm c_1 \left[\operatorname{arcsenh} \left(\frac{s + c_2}{c_1} \right) - \operatorname{arcsenh} \left(\frac{c_2}{c_1} \right) \right] + c_3, [(c_1)^2 + (s + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right); \end{aligned}$$

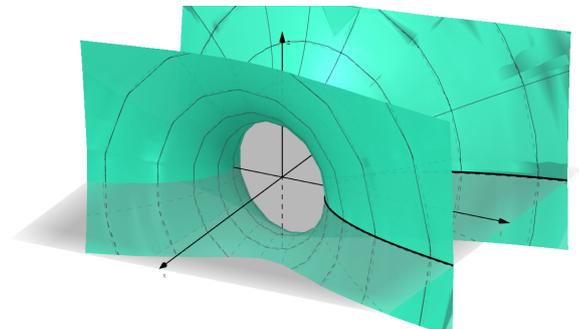
$c_1, c_2, c_3, s \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 \neq 0$ e $s > 0$. Realizando $c_4 = \pm c_1 \operatorname{arcsenh} \left(\frac{c_2}{c_1} \right) + c_3$ e a mudança de variável $\operatorname{senh}(t) = \frac{s + c_2}{c_1}$, reescrevemos a curva $\gamma(s, 0, c_1, c_2, c_3)$ como:

$$\bar{\gamma}(t, 0, c_1, c_2, c_3) = (\pm c_1 t + c_4, c_1 \cosh(t), 0)$$

que é a catenária, quando rotacionada em torno do eixo x produz o catenóide que está representado na figura 3.1.



(a) Catenária.



(b) Catenóide.

Figura 3.1: $H = 0$

□

Na proposição 3.1.2 a seguir, analisaremos o caso $H(s) = c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Proposição 3.1.2. *A curva regular $\gamma(s, 0, 0, 0, 0) = (0, s, 0)$, $s > 0$, é uma semirreta que, ao ser rotacionada em torno do eixo x , produz um plano.*

Demonstração. Iniciaremos essa demonstração realizando nas equações $G(s)$ e $F(s)$ que são respectivamente (3.10) e (3.12), a curvatura média nula.

- $F(s) = \int_0^s \text{sen} \left(2 \int_0^t 0 du \right) dt = \int_0^s \text{sen}(0) dt = 0;$
- $G(s) = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t 0 du \right) dt = \int_0^s \cos(0) dt = \int_0^s dt = s;$

Substituindo nas equações (3.17) e (3.18) as constante igual a zero ou seja $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

$$x(s) = x(s, 0, 0, 0, 0) = 0$$

e

$$y(s) = y(s, 0, 0, 0, 0) = |s| = s,$$

consequentemente, $\gamma(s, 0, 0, 0, 0) = (0, s, 0)$ é uma semirreta que quando rotacionada em torno do eixo x produz um plano, como está caracterizada na figura 3.2.

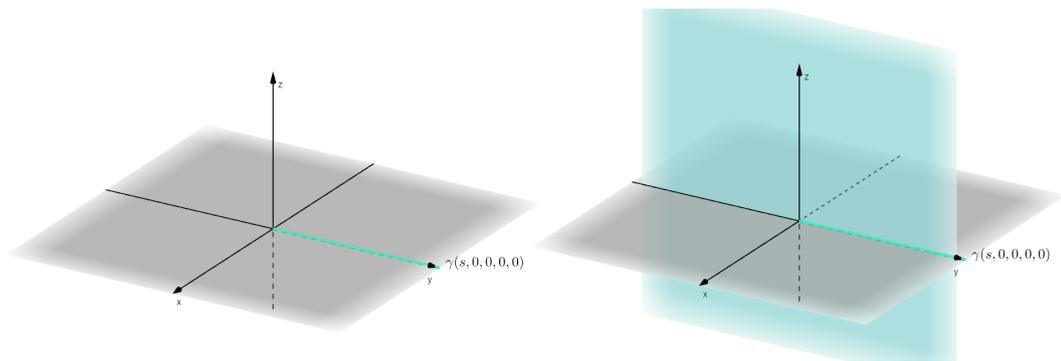


Figura 3.2: Plano.

□

Daqui por diante, iremos estudar o caso para curvatura não nula ($H \neq 0$) e com $D \neq \pm 1$.

Teorema 3.1.1. Com as hipóteses do Teorema 3.0.1, se $H(s) = H \neq 0$, então

$$\gamma(s, H, D) = (x(s, H, D), y(s, H, D), 0), \quad s > 0,$$

em que

$$x(s, H, D) = \int_0^s \left[\frac{1 + D \text{sen}(2Ht)}{[2D \text{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \quad (3.22)$$

e

$$y(s, H, D) = \frac{1}{2|H|} [2D \text{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

é a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média H .

Demonstração. Com a curvatura média $H \neq 0$ as funções $F(s)$ e $G(s)$ dadas por (3.10) e (3.12) dadas:

- $F(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(2 \int_0^t H du \right) dt = \int_0^s \operatorname{sen}(2Ht) dt = \frac{-\cos(2Hs) + 1}{2H};$
- $F'(s) = \operatorname{sen} \left(2 \int_0^s H du \right) = \operatorname{sen}(2Hs);$
- $G(s) = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t H du \right) dt = \int_0^s \cos(2Ht) dt = \frac{\operatorname{sen}(2Hs)}{2H};$
- $G'(s) = \cos \left(2 \int_0^s H du \right) = \cos(2Hs).$

Substituindo em $x(s)$ e $y(s)$ da equação (3.2).

$$\begin{aligned}
 y(s) &= [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\left(\frac{-\cos(2Hs) + 1}{2H} + c_1 \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}(2Hs)}{2H} + c_2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\left(\frac{\cos^2(2Hs) - 2c_1 \cos(2Hs) + 1}{4H^2} - \frac{2c_1(\cos(2Hs) + 1)}{2H} + (c_1)^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\operatorname{sen}(2Hs)}{2H} + c_2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\frac{\cos^2(2Hs) - 2c_1 \cos(2Hs) + 1 + 4Hc_1(-\cos(2Hs) + 1) + 4H^2(c_1)^2}{4H^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\operatorname{sen}(2Hs)}{2H} + c_2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\frac{(-2 - 4Hc_1) \cos^2(2Hs) + \cos(2Hs) + 1 + 4Hc_1 + 4H^2(c_1)^2}{4H^2} + \frac{\operatorname{sen}^2(2Hs)}{4H^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2c_2 \operatorname{sen}(2Hs)}{2H} + (c_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\frac{1 + (-2 - 4Hc_1) \cos(2Hs) + 4Hc_2 \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + 4Hc_1 + 4H^2(c_1)^2 + 4H^2(c_2)^2}{4H^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\frac{(-2 - 4Hc_1) \cos(2Hs) + 4Hc_2 \operatorname{sen}(2Hs) + 2 + 4Hc_1 + 4H^2((c_1)^2 + (c_2)^2)}{4H^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2|H|} [(-2 - 4Hc_1) \cos(2Hs) + 4Hc_2 \operatorname{sen}(2Hs) + 2 + 4Hc_1 + 4H^2((c_1)^2 + (c_2)^2)]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Definindo $A = 4Hc_2$ e $B = -2 - 4Hc_1$.

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{2|H|} \left[B \cos(2Hs) + A \sin(2Hs) - B + \frac{(B+2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|H|} \left[\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(2Hs) + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(2Hs) \right) - B + \frac{(B+2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como as funções seno e cosseno possuem as seguintes propriedades:

- imagens definidas no intervalo $[-1, 1]$;
- $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Podemos afirmar que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sin(r) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ e } \cos(r) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

podemos reescrever a ultima equação como,

$$y(s) = \frac{1}{2|H|} \left[\sqrt{A^2 + B^2} (\sin(r) \cos(2Hs) + \cos(r) \sin(2Hs)) - B + \frac{(B+2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Tomando $2D = \sqrt{A^2 + B^2}$.

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{2|H|} \left[2D (\sin(r) \cos(2Hs) + \cos(r) \sin(2Hs)) - B + \frac{(B+2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|H|} \left[2D (\sin(r) \cos(2Hs) + \cos(r) \sin(2Hs)) + 1 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|H|} \left[2D \sin(2Hs + r) + 1 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Obtemos que

$$y(s) = \frac{1}{2|H|} \left[2D \sin(2Hs + r) + 1 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned}
 x(s) &= \int_0^s \frac{F'(t)(G(t) + c_2) - G'(t)(F(t) + c_1)}{[(F(t) + c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{\text{sen}(2tH) \left(\frac{\text{sen}(2Ht)}{2H} + c_2 \right) - \cos(2Ht) \left(\frac{-\cos(2Ht)+1}{2H} + c_1 \right)}{y(t)} \right] dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{\text{sen}(2Ht) \left(\frac{\text{sen}(2Ht)}{2H} + c_2 \right) - \cos(2Ht) \left(\frac{-\cos(2Ht)+1}{2H} + c_1 \right)}{y(t)} \right] dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{\frac{\text{sen}(2Ht) \text{sen}(2Ht)}{2H} + c_2 \text{sen}(2Ht) + \frac{\cos(2Ht)(\cos(2Ht)-1)}{2H} - c_1 \cos(2Ht)}{y(t)} \right] dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{\frac{\text{sen}^2(2Ht) + 2c_2H \text{sen}(2Ht) + \cos^2(2Ht) - \cos(2Ht) - 2c_1H \cos(2Ht)}{2H}}{y(t)} \right] dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{1 + 2c_2H \text{sen}(2Ht) + (-1 - 2c_1H) \cos(2Ht)}{2H y(t)} \right] dt + c_3.
 \end{aligned}$$

Como $A = 4Hc_2 \Rightarrow \frac{A}{2} = 2Hc_2$ e $B = -2 - 4Hc_1 \Rightarrow \frac{B}{2} = -1 - 2Hc_1$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \int_0^s \left[\frac{\frac{1}{2H} \left(1 + \frac{A}{2} \text{sen}(2Ht) + \frac{B}{2} \cos(2Ht) \right)}{y(t)} \right] dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{\frac{1}{2H} \left(1 + \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{sen}(2Ht) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos(2Ht) \right) \right)}{y(t)} \right] dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{\frac{1}{2H} \left(1 + \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2} (\cos(r) \text{sen}(2Ht) + \text{sen}(r) \cos(2Ht)) \right)}{y(t)} \right] dt + c_3.
 \end{aligned}$$

Como $D = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \int_0^s \left[\frac{\frac{1}{2H} (1 + D (\cos(r) \text{sen}(2Ht) + \text{sen}(r) \cos(2Ht)))}{y(t)} \right] dt + c_3 \\
 &= \int_0^s \left[\frac{\frac{1}{2H} (1 + D \text{sen}(2tH + r))}{y(t)} \right] dt + c_3.
 \end{aligned}$$

Pela equação (3.24) temos que $y(t) = \frac{1}{2H} [2D \text{sen}(2Ht + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \left[\frac{\frac{1}{2H} (1 + D \text{sen}(2Ht + r))}{\left[\frac{1}{2H} [2D \text{sen}(2Ht + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \right]} \right] dt + c_3 \\ &= \int_0^s \left[\frac{1 + D \text{sen}(2Ht + r)}{[2D \text{sen}(2Ht + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$(x(s), y(s), 0) = \left(\int_0^s \left[\frac{1 + D \text{sen}(2Ht + r)}{[2D \text{sen}(2Ht + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3, \frac{1}{2|H|} [2D \text{sen}(2Hs + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right).$$

Definindo $t = \frac{-r}{2H} + \bar{t}$ em $x(s)$,

$$x(s) = \int_{\frac{r}{2H}}^{\frac{r}{2H} + s} \left[\frac{1 + D \text{sen}(2H\bar{t})}{[2D \text{sen}(2H\bar{t}) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} + c_3.$$

Como \bar{t} variável de integração podemos definir $\bar{t} = t$,

$$(x(s), y(s), 0) = \left(\int_{\frac{r}{2H}}^{\frac{r}{2H} + s} \left[\frac{1 + D \text{sen}(2Ht)}{[2D \text{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3, \frac{1}{2|H|} [2D \text{sen}(2Hs + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right).$$

Analogamente, escrevendo $s = \frac{-r}{2H} + \bar{s}$

$$(x(\bar{s}), y(\bar{s}), 0) = \left(\int_{\frac{r}{2H}}^{\frac{r}{2H} + \bar{s}} \left[\frac{1 + D \text{sen}(2Ht)}{[2D \text{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3, \frac{1}{2|H|} [2D \text{sen}(2H\bar{s}) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right).$$

Escolhendo

$$c_3 = \int_0^{\frac{r}{2H}} \left[\frac{1 + D \text{sen}(2Ht)}{[2D \text{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt,$$

podemos reescrever $x(\bar{s})$ como,

$$\begin{aligned} x(\bar{s}) &= \int_{\frac{r}{2H}}^{\bar{s}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3 \\ &= \int_{\frac{r}{2H}}^{\bar{s}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + \int_0^{\frac{r}{2H}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= \int_0^{\bar{s}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt. \end{aligned}$$

Como \bar{s} é um parâmetro comprimento de arco, podemos redefinir $\bar{s} = s$ com o intuito de limpar a notação,

$$\begin{aligned} (x(\bar{s}), y(\bar{s}), 0) &= \left(\int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt, \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2H\bar{s}) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \\ &= \left(\int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt, \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \\ &= (x(s), y(s), 0). \end{aligned}$$

Portanto, a curva

$$\gamma(s, H, D) = (x(s, H, D), y(s, H, D), 0),$$

em que

$$x(s, H, D) = \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt$$

e

$$y(s, H, D) = \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}.$$

é a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média constante $H \neq 0$. □

3.2 Análise de $\gamma(s, H, D)$.

Nessa seção, considerando a aplicação $\gamma(s, H, D)$ dada por (3.1), (3.22) e (3.23), estudaremos a sua dependência em termos de s, H e D .

Proposição 3.2.1. A aplicação $\gamma(s, H, D)$ satisfaz a igualdade

$$\gamma(s, -H, D) = \gamma(s, H, -D).$$

Demonstração. Primeiramente observamos que

$$\gamma(s, -H, D) = (x(s, -H, D), y(s, -H, D)).$$

A partir disso, analisamos $x(s, -H, D)$,

$$\begin{aligned} x(s, -H, D) &= \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(-2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(-2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt = \int_0^s \left[\frac{1 - D \operatorname{sen}(2Ht)}{[-2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= \int_0^s \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt = x(s, H, -D). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} y(s, -H, D) &= \frac{1}{2|-H|} [2D \operatorname{sen}(-2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2|H|} [-2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|H|} [2(-D) \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}} = y(s, H, -D). \end{aligned}$$

Obtemos que

$$\gamma(s, -H, D) = (x(s, -H, D), y(s, -H, D), 0) = (x(s, H, -D), y(s, H, -D), 0) = \gamma(s, H, -D).$$

□

Na próxima proposição vamos analisar o que ocorre quando deslocamos o parâmetro comprimento de arco.

Proposição 3.2.2. Seja $\gamma(s, H, D)$ como no Teorema 3.1.1 então vale a igualdade

$$\gamma\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) = \gamma(s, H, -D) - \vec{a}$$

em que

$$\vec{a} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt, 0, 0 \right).$$

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$\gamma\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) = \left(x\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right), y\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right), 0\right),$$

com essa informação podemos analisar separadamente as coordenadas da curva regular, começando com

$$x\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) = \int_0^{s - \frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt$$

realizando $t = \bar{t} + \frac{\pi}{2H}$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2H}}^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}\left(2H\left(\bar{t} + \frac{\pi}{2H}\right)\right)}{[2D \operatorname{sen}\left(2H\left(\bar{t} + \frac{\pi}{2H}\right)\right) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2H}}^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2H\bar{t} + \pi)}{[2D \operatorname{sen}(2H\bar{t} + \pi) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2H}}^s \left[\frac{1 + D[\operatorname{sen}(2H\bar{t}) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(2H\bar{t})]}{[2D[\operatorname{sen}(2H\bar{t}) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(2H\bar{t})] + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2H}}^s \left[\frac{1 - D \operatorname{sen}(2H\bar{t})}{[-2D \operatorname{sen}(2H\bar{t}) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} \\ &= \int_0^s \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt - \int_0^{\frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= x(s, H, -D) - \int_0^{\frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= x(s, H, -D) - a. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 y\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) &= \left[2D \operatorname{sen}\left(2H\left(s - \frac{\pi}{2H}\right)\right) + 1 + D^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[2D \operatorname{sen}(2Hs - \pi) + 1 + D^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[2D[\operatorname{sen}(2Hs) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(2Hs)] + 1 + D^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[-2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[2(-D) \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + (-D)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= y(s, H, -D).
 \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
 \gamma\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) &= \left(x\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right), y\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right), 0\right) \\
 &= \left(x(s, H, -D) - a, y(s, H, -D), 0\right) \\
 &= \left(x(s, H, -D), y(s, H, -D), 0\right) + (-a, 0, 0) \\
 &= \left(x(s, H, -D), y(s, H, -D), 0\right) - (a, 0, 0) \\
 &= \gamma(s, H, -D) - \vec{a}.
 \end{aligned}$$

□

Na próxima proposição vamos analisar o comportamento do parâmetro H em $\gamma(s, H, D)$ em relação à multiplicação por um número real positivo.

Proposição 3.2.3. *Seja $\gamma(s, H, D)$ como no Teorema [3.1.1](#), a igualdade*

$$\gamma(s, \lambda H, D) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \gamma(\lambda s, H, D), \lambda > 0.$$

é válida.

Demonstração. Tem-se que,

$$\gamma(s, \lambda H, D) = \left(x(s, \lambda H, D), y(s, \lambda H, D), 0\right).$$

Primeiramente vamos verificar para a primeira coordenada da curva,

$$\begin{aligned}
 x(s, \lambda H, D) &= \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2\lambda H t)}{[2D \operatorname{sen}(2\lambda H t) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\
 &= \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2\lambda H t)}{[2D \operatorname{sen}(2\lambda H t) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt.
 \end{aligned}$$

Realizando substituição simples $u = \lambda t$ com $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} x(s, \lambda H, D) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda s} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Hu)}{[2D \operatorname{sen}(2Hu) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] du \\ &= \frac{1}{\lambda} x(\lambda s, H, D). \end{aligned}$$

Vamos analisar a segunda coordenada da curva,

$$\begin{aligned} y(s, \lambda H, D) &= \frac{1}{2|\lambda H|} [2D \operatorname{sen}(2\lambda H s) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\lambda > 0}{=} \frac{1}{2\lambda |H|} [2D \operatorname{sen}(2\lambda H s) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\lambda} y(\lambda s, H, D). \end{aligned}$$

Obtemos que,

$$\begin{aligned} \gamma(s, \lambda H, D) &= (x(s, \lambda H, D), y(s, \lambda H, D), 0) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} x(\lambda s, H, D), \frac{1}{\lambda} y(\lambda s, H, D), 0 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} (x(\lambda s, H, D), y(\lambda s, H, D), 0) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} \right) \gamma(\lambda s, H, D), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

□

Observação 3.2.1. Segue das Proposições (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3) que é suficiente e considerar $D \geq 0$ e $H > 0$ no Teorema (3.1.1).

Daqui por diante, analisaremos o comportamento da curva geratriz $\gamma(s, H, D)$ para diversos valores de D . Começamos com $D = 0$.

Proposição 3.2.4. A superfície gerada pela rotação de

$$\gamma(s, H, 0) = \left(s, \frac{1}{2H}, 0 \right),$$

em torno do eixo x é um cilindro circular reto de raio $\frac{1}{2H}$.

Demonstração. Fazendo $D = 0$ em (3.1),

$$\gamma(s, H, 0) = (x(s, H, 0), y(s, H, 0), 0) = \left(\int_0^s dt, \frac{1}{2H}, 0 \right) = \left(s, \frac{1}{2H}, 0 \right)$$

que forma uma linha reta que ao ser rotacionada em torno do eixo x gera um cilindro de raio $\frac{1}{2H}$, como está na figura 3.3.

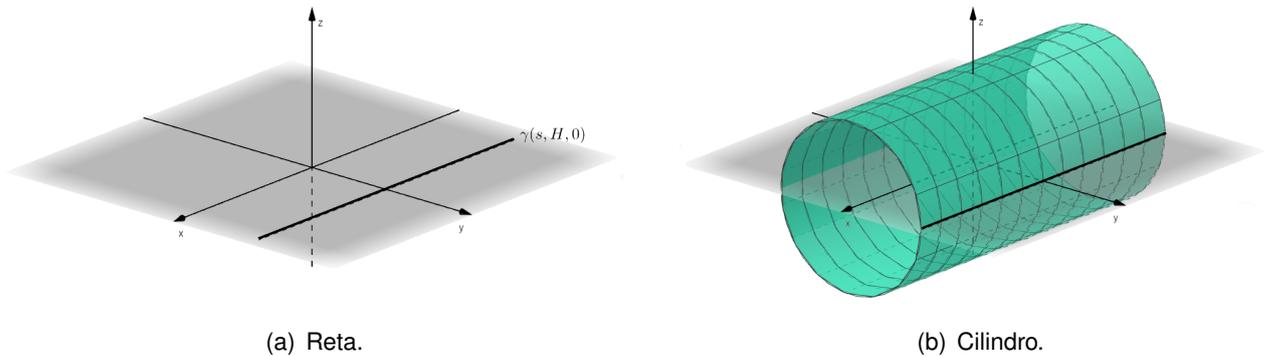


Figura 3.3: $D = 0$

□

Restringindo a variação do parâmetro comprimento de arco no intervalo $\left(0, \frac{3\pi}{4H}\right)$, podemos analisar o caso quando $D = 1$.

Proposição 3.2.5. A rotação de um arco de círculo com $s \in \left(0, \frac{3\pi}{4H}\right)$ é

$$\gamma(s, H, 1) = \left(\frac{\sqrt{1 - \sin(2Hs)}}{2\sqrt{2H}} - \frac{1}{2\sqrt{2H}}, \frac{1}{\sqrt{2H}} [\sin(2Hs) + 1]^{\frac{1}{2}}, 0 \right)$$

em torno do eixo x é uma esfera de raio $\frac{1}{H}$.

Demonstração. Seja $D = 1$ em (3.1),

$$\gamma(s, H, 1) = (x(s, H, 1), y(s, H, 1), 0).$$

Analisando a coordenada $x(s, H, 1)$,

$$\begin{aligned}
 x(s, H, 1) &= \int_0^s \frac{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}{\sqrt{2 + 2\operatorname{sen}(2Ht)}} dt = \int_0^s \frac{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}{\sqrt{2(1 + \operatorname{sen}(2Ht))}} dt \\
 &= \int_0^s \frac{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \sqrt{1 + \operatorname{sen}(2Ht)} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \sqrt{1 + \operatorname{sen}(2Ht)} \left(\frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{sen}(2Ht))(1 - \operatorname{sen}(2Ht))}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{\sqrt{(1 - \operatorname{sen}(2Ht))^2}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{\sqrt{(\cos(2Ht))^2}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{\cos(2Ht)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt
 \end{aligned}$$

Realizando a substituição simples com $u = \sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}$ e

$$du = \frac{H \cos(2Ht)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \Rightarrow \frac{u}{H} du = \cos(2Ht) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u(0)}^{u(s)} \frac{u}{uH} du = \frac{1}{\sqrt{2}H} \int_{u(0)}^{u(s)} 1 du = \frac{u}{\sqrt{2}H} \Bigg|_{u(0)}^{u(s)} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Hs)}}{\sqrt{2}H} - \frac{1}{\sqrt{2}H}$$

Então temos que

$$x(s, H, 1) = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Hs)}}{\sqrt{2}H} - \frac{1}{\sqrt{2}H},$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
 y(s, H, 1) &= \frac{1}{2H} [2 \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + 1]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2H} [2 \operatorname{sen}(2Hs) + 2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2H} [\operatorname{sen}(2Hs) + 1]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2H}} [\operatorname{sen}(2Hs) + 1]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Obtemos que a curva geratriz com $D = 1$ é dada por

$$\gamma(s, H, 1) = \left(\frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Hs)}}{\sqrt{2H}} - \frac{1}{\sqrt{2H}}, \frac{1}{\sqrt{2H}} [\operatorname{sen}(2Hs) + 1]^{\frac{1}{2}}, 0 \right),$$

em que s pertence ao intervalo $\left(0, \frac{3\pi}{4H}\right)$ conseqüentemente a geratriz é regular ($\gamma'(s, H, 1) \neq 0$). Geometricamente $\gamma(s, H, 1)$ é um semi-circulo com centro em $\left(-\frac{1}{\sqrt{2H}}, 0, 0\right)$ e raio $\frac{1}{H}$, quando rotacionada em torno do eixo x gera uma esfera como está representado na figura [3.4](#).

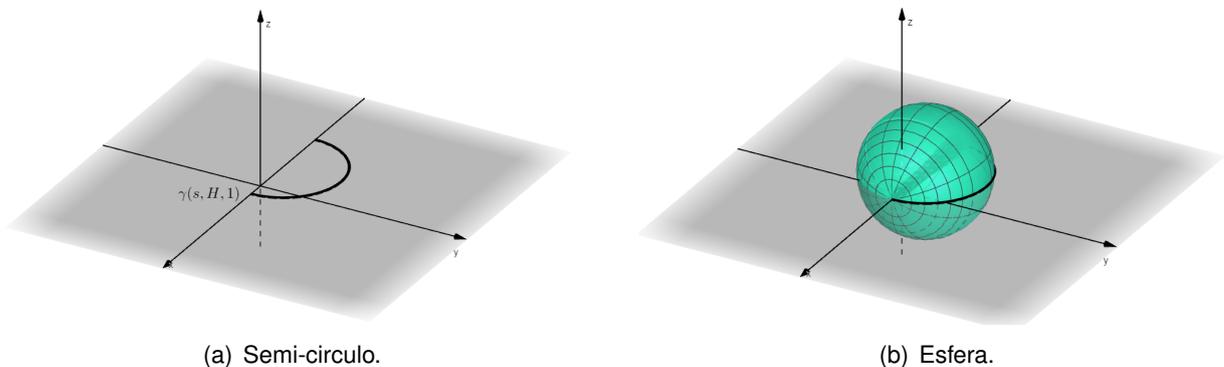


Figura 3.4: $D = 1$

□

Pelo texto *The Surfaces of Delaunay* [\[3\]](#), temos que se rolamos uma cônica sobre a reta tangente sem que haja deslize, o seu foco descreve uma curva que quando rotacionada em torno do eixo x forma uma superfície de revolução com curvatura média constante. A trajetória do foco da elipse com $a, b \in \mathbb{R}$ é a ondulária caracterizada pela equação

$$y^2 \pm 2ayx' + b^2 = 0, a > b. \quad (3.25)$$

Por outro lado, o foco da hipérbole gera a nodóide com

$$y^2 \pm +2ayx' - b^2 = 0, a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

Estabelecemos uma relação entre as constante $a, b \in \mathbb{R}$ referente as equações (3.25) e (3.26), com a equação diferencial estudada por Kenmotsu [2]

$$y^2(s) - \frac{1}{H}y(s)x'(s) + \frac{1-D^2}{4H^2} = 0. \quad (3.27)$$

Para que ocorra a ligação das constantes da equação (3.25) e (3.27), D deve pertencer ao intervalo $(0, 1)$ consequentemente obtemos

$$a = \pm \frac{1}{2H} e b^2 = \frac{1-D^2}{4H^2},$$

como essa associação e a equação (3.25) podemos afirmar que a geratriz é uma ondulária. Por outro lado, se D é maior que 1 conseguimos vincular as equações (3.27) e (3.26), de modo que

$$a = \pm \frac{1}{2H} e b^2 = - \left[\frac{1-D^2}{4H^2} \right]$$

e como (3.27) podemos garantir que a geratriz é a nodóide. As proposições 3.2.6 e 3.2.7 resumizam as afirmações anteriores.

Proposição 3.2.6. Para $0 < D < 1$, obtemos a ondulária que gera a Ondulóide.

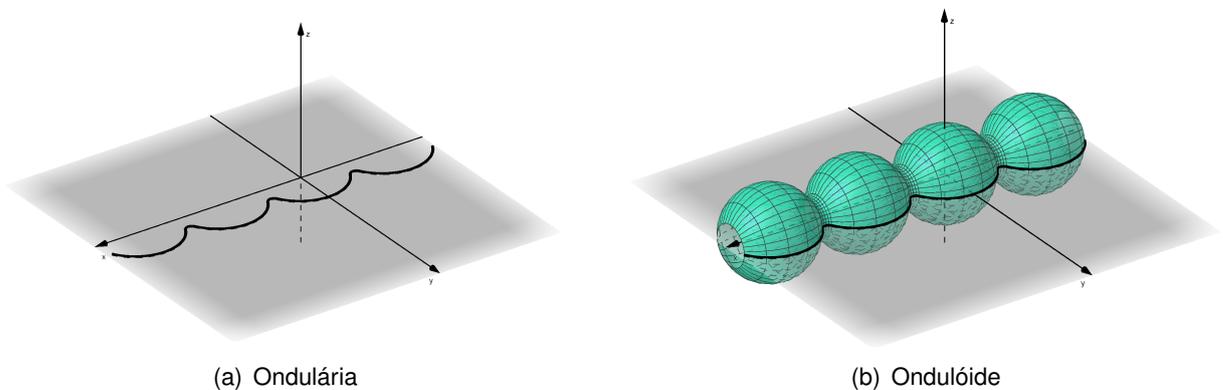
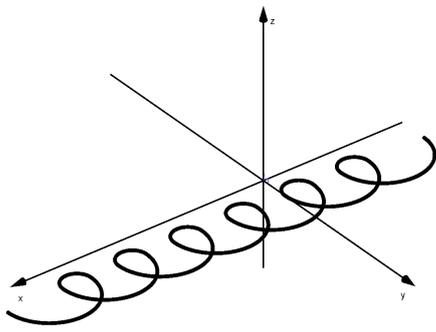
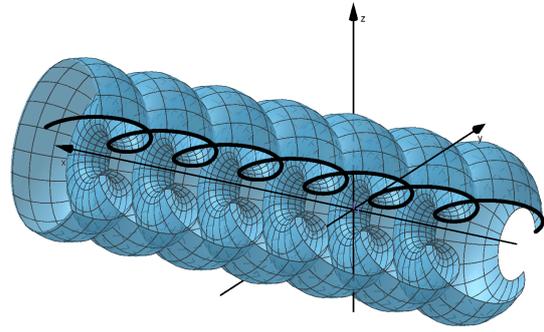


Figura 3.5: $0 < D < 1$

Proposição 3.2.7. Para $D > 1$, obtemos a nodária que gera a Nodóide.



(a) Nodária



(b) Nodóide

Figura 3.6: $D > 1$

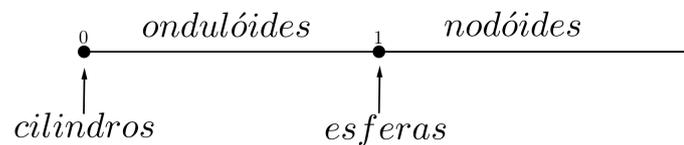
4 Conclusão

Graças aos resultados fornecidos pelo Teorema (3.0.1) e as Proposições (3.2.1) até (3.2.7), verificamos que a expressão

$$\gamma(s, H, D) = \left(\int_0^s \frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right)$$

fornece uma parametrização à 1-parâmetro das superfícies do tipo Delaunay Σ_H em que:

1. se $D = 0$, temos cilindros retos de raio $\frac{1}{2H}$;
2. se $0 < D < 1$, temos ondulóides;
3. se $D = 1$, temos esferas de raio $\frac{1}{H}$;
4. se $D > 1$, temos nodóides.



Ou seja, dada

$$X(s, t, H, D) = (x(s, H, D), y(s, H, D) \cos(t), y(s, H, D) \operatorname{sen}(t))$$

a aplicação

$$\begin{aligned} X(s, t, H, \cdot) : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \Sigma_H \\ D &\mapsto X(s, t, H, D) \end{aligned}$$

é sobrejetiva.

Bibliografia

- [1] DELAUNAY, C. **Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante**, J. Math. Pures. Appl. Ser. 1, 6 (1841), 309-320. Com uma nota por Sturm. M.
- [2] KENMOTSU, K. **Surfaces of revolution with prescribed mean curvature**. Tohoku Math. J. (2) 32 (1980), 147-153.
- [3] EELLS, J. **The Surfaces of Delaunay**. The Mathematical Intelligencer, vol. 9, n° 1, 1987, 53-57.
- [4] TENENBLAT, K. (1988). **Introdução à Geometria Diferencial**, ed. Brasília: UnB.
- [5] FERNANDEZ, C.S. e VIANA, I. V. **A Vida de Sophie Germain** . Disponível em: <<http://mulheresnamatematica.sites.uff.br/wp-content/uploads/sites/237/2018/07/A-Vida-de-Sophie-Germain.pdf>>. Acesso em: 21 setembro. 2020.