Lavínia Martins Cunha

Estudo das Equações Diferenciais e Aplicações em Modelos na Física

Ouro Preto, Minas Gerais

2021

Lavínia Martins Cunha

Estudo das Equações Diferenciais e Aplicações em Modelos na Física

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Orientador: Dr. Sebastião Martins Xavier

Coorientador: Dr. Thiago Fontes Santos

Ouro Preto, Minas Gerais

2021

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C972e Cunha, Lavínia Martins .
Estudo das equações diferenciais e aplicações em modelos na física. [manuscrito] / Lavínia Martins Cunha. - 2021.
106 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier.
Coorientador: Prof. Dr. Thiago Fontes Santos.
Monografia (Licenciatura). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Modelagem matemática. 2. Física. 3. Equações diferenciais ordinárias . I. Santos, Thiago Fontes. II. Xavier, Sebastião Martins. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 517.9

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Lavínia Martins Cunha

Estudo das equações diferenciais e aplicações em modelos na Física

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática

Aprovada em 1º de março de 2021

Membros da banca

Dr. Sebastião Martins Xavier - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Thiago Fontes Santos - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Rodrigo Geraldo do Couto - Universidade Federal de Ouro Preto

Sebastião Martins Xavier, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 06/03/2021

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado resiliência diante aos desafios encontrados e por ter permitido que eu chegasse até aqui. Em segundo lugar, agradeço aos meus pais, irmãos, namorado e amigos que sempre estiveram ao meu lado. Agradeço em especial ao meu orientador Sebastião, que com muita compreensão me incentivou a persistir, e que em nenhum momento desistiu de mim. Por fim, à todos os meus professores, aos projetos PIBID, NEI e PETMAT, que contribuíram diretamente em minha formação acadêmica, e que com toda certeza impactaram positivamente minha trajetória enquanto profissional.

"A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o Universo."(Galileu Galilei)

Resumo

A modelagem matemática consiste num conjunto de procedimentos cujo objetivo final é fornecer uma descrição matemática de um dado fenômeno presente na realidade. Uma poderosa ferramenta matemática utilizada para descrever e modelar inúmeros fenômenos provenientes das ciências físicas, biológicas e econômicas, são as Equações Diferenciais Ordinárias.

Seguindo este contexto, o presente trabalho objeta o estudo de alguns modelos matemáticos presentes na física, que podem ser descritos através de Equações Diferenciais Ordinárias. Para tal, fez-se necessário uma breve revisão no Capítulo 2 sobre os principais métodos de resolução de Equações Diferencias de primeira e segunda ordem que servirão de base para a resolução de alguns modelos da física abordados no Capítulo 3. Por fim, apenas por curiosidade, foi escrito no apêndice, um pouco sobre as equações de Bernoulli e equações de Ricatti.

Palavras-chave: Modelagem. Aplicações na Física. Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

Abstract

Mathematical modeling consists of a set of procedures whose ultimate goal is to provide a mathematical description of a given phenomenon present in reality. A powerful mathematical tool used to describe and model innumerable phenomena from the physical, biological, and economic sciences are the Ordinary Differential Equations.

Following this context, the present work aims to study some mathematical models present in Physics, which can be described through Ordinary Differential Equations. To this end, a brief review was required in Chapter 2 on the main methods of solving Differential Equations of first and second-order that will serve as the basis for solving some models of physics covered in Chapter 3. Finally, just out of curiosity, a short introduction to Bernoulli's and Ricatti's equations was written in the appendix.

Keywords: Modeling. Applications in Physics. Ordinary Differential Equations

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Há milhares de anos antes de Cristo, o ser humano já fazia uso da matemática para tarefas cotidianas, seja contar e registrar quantidade de pessoas, de animais em um rebanho, ou ainda o número de dias decorridos desde um determinado evento.

Em civilizações como a egípcia e a mesopotâmica, por exemplo, a matemática tinha caráter concreto e prático. A análise de milhares de tabuletas com escrita cuneiforme revelam que

> a matemática mesopotâmica tinha um aspecto eminentemente — mas não exclusivamente — prático. Os babilônicos desenvolveram um extenso conhecimento de cálculos e medidas, que se aplicava, sobretudo, a problemas de natureza econômica e comercial: câmbio de moedas, troca de mercadorias, taxas de juros simples e compostos, cálculos de impostos e problemas de divisão de colheitas. (MOL, 2013, p. 17)

As necessidades práticas tiveram um papel crucial no estímulo para o desenvolvimento da matemática egípcia, "O historiador grego Heródoto (c. 484-420 a.C.) atribuiu a origem da geometria egípcia à necessidade de, após cada inundação do rio Nilo, redistribuir os campos cultiváveis entre seus proprietários (MOL, 2013, p. 23)."Além disso, as habilidades aritméticas necessárias para a organização do calendário egípcio que foi feito a partir da comparação entre observações astronômicas e o ciclo de cheias do rio Nilo, também é um exemplo de como os conhecimentos matemáticos podiam ser utilizados para solucionar problemas de natureza prática (MOL, 2013).

A partir dos parágrafos anteriores, é possível notar o caráter prático e a vasta aplicação da matemática no cotidiano daquelas civilizações. No entanto, ao fazer um paralelo com os dias atuais observa-se que muitos alunos possuem dificuldade em perceber a aplicação da matemática em seu cotidiano, fato este que pode ser facilmente comprovado por alguns professores de matemática, ou até mesmo alunos, que em algum momento já ouviram o seguinte questionamento numa aula de matemática "Para que serve isso?", "onde vou usar isso na minha vida?".
Baseado nisso, surge o seguinte questionamento: será que os alunos estão totalmente errados ao fazer esses relatos?
Os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que os alunos

> saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69)

Já (D'AMBROSIO, 2009, p. 95) explica que: "O caráter experimental da matemática foi removido do ensino e isso pode ser reconhecido com um dos fatores que mais contribuíram para o mau rendimento escolar."

Com tais relatos pode-se perceber a importância do caráter prático da matemática no ensino. Entretanto, por muitas vezes o ensino da matemática segue uma abordagem estritamente teórica em que pouco se aborda elementos práticos, dificultando o processo de aprendizagem dos alunos que enxergam tais conceitos como um emaranhado de fórmulas e teoremas, levando-os a taxar a disciplina como difícil, mecanizada e limitada.
A partir disso, durante a escolha do tema, optei pela modelagem matemática, que consiste num conjunto de procedimentos cujo objetivo final é fornecer uma descrição matemática de um dado fenômeno presente na realidade. Para a realização de tal tarefa, foram utilizadas as equações diferenciais, um importante ramo da matemática no que se diz respeito à modelagem de fenômenos físicos presentes em diversas áreas das ciências exatas, como ressalta Boyce e Diprima:

> A importância das equações diferenciais reside no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, tais como crescimento e decaimento exponenciais, os sistemas mola-massa ou de circuitos elétricos.(BOYCE; DIPRIMA, 2015, prefácio)

Desta forma, este trabalho tem como objetivo apresentar alguns modelos matemáticos presentes na física, que podem ser descritos através de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Este estudo nos permitirá uma melhor compreensão acerca da importância das EDO para o desenvolvimento científico, sobretudo para a resolução de problemas provenientes das ciências físicas, biológicas, econômicas, etc.

Para apresentar esses modelos matemáticos cujas resoluções passam pelo uso das equações diferenciais ordinárias revisamos, no capítulo 2 deste trabalho, as equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem com seus principais métodos de resolução. No capítulo 3 apresentamos os modelos, que são na sua totalidade modelos da física que exploram com bastante clareza os métodos de resoluções aprendidos no capítulo 2. Por fim, apenas por curiosidade, escrevemos no apêndice, um pouco sobre as equações de Bernoulli e equações de Ricatti.

2 Equações Diferenciais

O estudo das equações diferenciais atraiu a atenção dos maiores matemáticos do mundo durante três séculos. Essas equações são usadas para investigar uma grande variedade de problemas na Engenharia, Química, Biologia e tem aplicações diretas na Física. Além disso, elas também fazem parte do currículo educacional dessas e de muitas outras áreas.

Nesse capítulo, serão abordados conceitos fundamentais, como a classificação das equações diferenciais, os principais métodos de resolução das mesmas, e alguns exemplos.

2.1 Introdução às Equações Diferenciais

Na Matemática dos anos inicias é introduzido o conteúdo de equações, que são igualdades envolvendo uma ou mais incógnitas, que são valores até então desconhecidos. Não muito diferente, as equações diferenciais são equações que envolvem a derivada de uma ou mais funções. Essas funções apresentam variáveis dependentes e independentes.

Quando o valor de uma variável pode mudar de maneira arbitrária numa equação, essa variável é denominada independente. Quando o valor de uma variável depende dos valores de outras variáveis esta é denominada variável dependente.

Exemplo 1.

$$y = x^2 + 1$$

Nesse exemplo, x é a variável independente e y é a variável dependente.

Exemplo 2.

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \tag{2.1}$$

onde x é a variável independente e y é a variável dependente.

Exemplo 3. *(Equação de Laplace)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

onde x e y são as variáveis independentes e u é a variável dependente.

2.2 Classificação das Equações Diferenciais

As equações diferenciais são classificadas quanto ao tipo, ordem e linearidade. Quanto ao tipo, uma equação diferencial pode ser ordinária ou parcial. Ela será uma equação diferencial ordinária (EDO) se as variáveis dependentes dependem somente de uma única variável, caso contrário, trata-se de uma equação diferencial parcial (EDP). Nos exemplos acima, a equação 2.1 é uma EDO, e a equação 2.2 é uma EDP.

A ordem de uma equação diferencial é dada pela ordem mais alta das derivadas que aparecem na equação. A equação do exemplo 2 é de primeira ordem. Já a equação do exemplo 3 é de segunda ordem.

Quanto a linearidade, uma equação diferencial pode ser linear ou não linear. Assim como na álgebra, uma equação diferencial é linear, se o grau da variável dependente e suas derivadas é igual a 1, e se os coeficientes são constantes ou funções que dependem apenas da variável independente, ou seja, uma equação diferencial ordinária de ordem n é linear quando pode ser escrita na forma:

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

As equações diferenciais que não podem ser escritas na forma anterior, são classificadas como não-lineares.

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são equações que podem ser escritas da seguinte forma geral:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y).$$

Estudaremos neste trabalho equações de primeira ordem sob a forma:

$$F(t, y, y') = 0.$$

2.3.1 Equações Lineares de 1ª Ordem

As equações lineares de 1ª ordem são equações que possuem como forma geral:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + p(t)y = g(t) \tag{2.3}$$

onde p, g são funções reais contínuas em $(a, b) \to \mathbb{R}$. É importante ressaltar o caso particular em que $p(t) = 0$. Caso a função $p(t)$ seja igual a zero, a equação 2.3 torna-se:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t).$$

A equação anterior pode ser resolvida através de uma integração em relação a t. Dessa forma, a solução geral para este caso é dada por:

$$y(t) = \int g(t)\mathrm{dt} + c$$

onde c é a constante de integração.

Exemplo 4. *Obtenha a solução geral da equação*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos 5t \tag{2.4}$$

Observe que a equação 2.4 é uma equação diferencial linear de primeira ordem, onde a função $p(t) = 0$, logo, a solução geral da mesma pode ser facilmente encontrada ao integrando ambos os lados da equação 2.4:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \int \cos 5t\mathrm{dt} \\ y(t) &= \frac{\mathrm{sen}(5t)}{5} + c \end{aligned}$$

2.4 Principais Métodos de Resolução de Equações Diferenciais

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma igualdade que relaciona a variável independente com os valores da variável dependente e de suas suas derivadas de grau menor ou igual que n. Assim, uma forma geral para a equação diferencial de ordem n com variável independente t e variável dependente y pode ser expressa por:

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Sendo F uma função que depende de t, y e das derivadas de y até a ordem n. Consideramos que a equação se aplica para todo t tal que $a \leq t \leq b$. Muitas vezes é preferível isolar o termo de mais alta ordem e escrevemos

$$\frac{d^ny}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right). \tag{2.6}$$

Sendo $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua em D.

Uma solução explícita para a equação diferencial 2.6 é uma função $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ (com extremos $a \geq -\infty$ e $b \leq \infty$) que quando substituída por y e suas derivadas satisfaz a equação para $t \in (a, b)$.

De um modo geral, explicitar as soluções de equações diferenciais não é tarefa fácil. No entanto, alguns métodos tradicionais nos permitem a resolução de maneira satisfatória de alguns tipos de equações diferenciais. Neste capítulo serão expostos alguns dos principais métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira e de segunda ordem.

2.4.1 Problema de Valor Inicial

O problema definido por:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \\ \\ y(t_0) = y_0, \\ \\ y'(t_0) = y_1, \\ ... \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

é denominado Problema de Valor Inicial (PVI) de ordem n ou problema de Cauchy.

O Problema de Valor Inicial é um problema composto por uma equação diferencial e condições iniciais previamente estabelecidas. Uma solução desse problema em um intervalo I contendo t_0 é uma função definida neste intervalo, de forma que a derivada dessa função também esteja definida nesse intervalo, e que satisfaz tanto a equação diferencial, quanto as n condições iniciais indicadas em t_0: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Quando consideramos um problema de valor inicial, surgem algumas "questões"em relação à(s) soluções deste problema. A solução desse problema existe? Caso exista, a solução é única? Essas "questões"são respondidas abaixo pelo Teorema da Existência e Unicidade. Enunciaremos e demonstraremos o teorema para as equações diferenciais de primeira ordem.

Teorema 1. *(Teorema da Existência e Unicidade)*
Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas no retângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta\}$ contendo (t_0, y_0) então o problema de valor inicial tem uma única solução em um intervalo contendo t_0.

Demonstração. **Existência**
Para demonstrarmos a existência, consideremos $y_0(t) = y_0$. Em seguida, definamos

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, y_0(s)]ds$$

De forma análoga, temos

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, y_1(s)]ds$$

Iterando esse processo, obtemos a $(n+1)$-ésima aproximação

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, y_{n-1}(s)]ds,$$

para $n = 1, 2, ...$

Pelo fato de $f(t, y)$ ser contínua no retângulo $\mathbb{R}$, e portanto, limitada, existe uma constante b positiva tal que, $-b \leq f(t, y) \leq b$, ou seja, $|f(t, y)| \leq b$ para (t,y) $\in \mathbb{R}$.

Calculando $y_1(t) - y_0(t)$ obtemos:

$$y_1(t) - y_0(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, y_0(s)]ds - y_0$$

$$y_1(t) - y_0(t) = \int_{t_0}^{t} f[s, y_0(s)]ds$$

Como $|f(t, y)| \leq b$, então

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \int_{t_0}^{t} bds$$

Pelo teorema fundamental do Cálculo, $\int_{t_0}^{t} bds = b \cdot (t - t_0)$. Assim, temos,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq b \cdot (t - t_0)$$

para $\alpha < t < \beta$.

Pelo fato de que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua e derivável no retângulo R e pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe um número a em $\alpha < t < \beta$, tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a\,|y - z|$$

para $\alpha < t < \beta$ e $\delta < y, z < \gamma$. Dessa forma,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_0(s)|\, ds$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s)|\, ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0(s)|\, ds \\
&\leq a^2 b \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds = ab\frac{|t - t_0|^2}{2} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
|y_3(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s)| \, ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)| \, ds \\
&\leq a^2 b \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^2}{2} ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Vamos supor por indução que $|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \dfrac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$.
Então

$$\begin{aligned}
|y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s)| \, ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| \, ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{2} ds = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Estas desigualdades são válidas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$ em que α' e β' são tais que $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$.
Segue-se de 2.9 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k(t) - y_{k-1}(t))$$

então $y_n(t)$ é convergente. Seja

$$y(t) = \lim_{n \to \infty} y_n(t).$$

Visto que

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k(t) = y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!},$$

passando ao limite quando m tende a infinito obtemos

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!} \tag{2.10}$$

Logo, dado um $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$, para α', t, β'.
Assim $y(t)$ é contínua, pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente próximo de t, temos que $|y_n(t) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}$ e para n suficientemente grande $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$ e $|y(s) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}$, o que implica que

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \epsilon.$$

pois, por 2.10, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{to}^{t} f(s, y_n(s))ds - \int_{to}^{t} f(s, y(s))ds \right| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)| \, ds \\ &\leq a \int_{t_0}^{t} |y_n(s) - y(s)| \, ds \\ &\leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!} \end{aligned} \tag{2.11}$$

que tende a zero quando n tende a infinito. Portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) \\ &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(s))ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \end{aligned} \tag{2.12}$$

Derivando em relação a t esta equação vemos que $y(t)$ é solução do problema de valor inicial.
Unicidade
Para a unicidade suporemos que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial.Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| \, ds.$$

Assim, como

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} z'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds,$$

então

$$u'(t) = |y(t) - z(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |y'(s) - z'(s)|\, ds = \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| \leq a \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|\, ds$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t).$$

Subtraindo-se $au(t)$ e multiplicando-se por e^{-at} obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) \leq 0$$

com $u(t_0) = 0$.
Como $u(t) \geq 0$, então $e^{-at}u(t) = 0$. Dessa forma $u(t) = 0$, para todo t.
Assim $y(t) = z(t)$, para todo t. □

Nas próximas subseções mostraremos alguns métodos de solução das EDO's, os quais serão cruciais para resolução das modelagens que abordaremos mais à frente no Capítulo 3.

2.4.2 Método dos Fatores Integrantes

Tomando a forma padrão para a equação linear de primeira ordem, temos:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t). \tag{2.13}$$

onde p e g são funções reais contínuas em um intervalo I.

O método dos fatores Integrantes consiste em multiplicar a equação 2.13 por uma função escolhida $\mu(t)$, denominada fator integrante:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \tag{2.14}$$

de tal forma que a derivada do produto de μ por y, seja a expressão que se encontra à esquerda da igualdade na equação 2.14, ou seja, sabendo que

$$\frac{d}{dt}[\mu(t) \cdot y] \quad = \quad \frac{d}{dt}\mu(t) \cdot y + \mu(t) \cdot \frac{dy}{dt} \tag{2.15}$$

temos que

$$\frac{d}{dt}\mu(t)\cdot y+\mu(t)\cdot\frac{dy}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt}+\mu(t)p(t)y. \tag{2.16}$$

Assim, para que haja a igualdade, é necessário que:

$$\frac{d}{dt}\mu(t)=\mu(t)p(t).$$

Dividindo ambos os lados da igualdade da equação anterior por $\mu(t)$, obtemos:

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d}{dt}\mu(t)=p(t).$$

Pela regra da cadeia, tem-se que a equação anterior é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}\ln|\mu(t)|=p(t).$$

Integrando ambos os lados da igualdade em relação a t, temos:

$$\ln|\mu(t)|=\int p(t)dt+c.$$

Considerando a constante arbitrária c= 0, obtemos a função mais simples para $\mu(t)$ e aplicando-se a exponencial em ambos os lados da equação, temos que o fator integrante $\mu(t)=e^{\int p(t)dt}$.

Exemplo 5. *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} ty'+2y=4t^2 \\ y(1)=2. \end{cases} \tag{2.17}$$

Primeiramente, devemos dividir por t ambos os lados da igualdade na equação 2.17, afim de que a mesma esteja na forma geral 2.13. Reescrevendo, temos:

$$y'+\frac{2}{t}y=4t \tag{2.18}$$

Vimos anteriormente que, $\mu(t)=e^{\int p(t)dt}$, assim, analisando a equação 2.18, temos que, $p(t)=\frac{2}{t}$ e $g(t)=4t$, de forma que o fator integrante da equação 2.18 é:

$$\mu(t)=e^{\int\frac{2}{t}dt}=e^{2\int\frac{1}{t}dt}=e^{2\ln|t|}=e^{\ln t^2}=t^2$$

.

Multiplicando a equação 2.18 por $\mu(t)$, temos:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3$$

Notemos que, $\dfrac{d}{dt}(t^2y)$ = $t^2y' + 2ty$ = $4t^3$, assim, reescrevendo a equação anterior:

$$\frac{d}{dt}(t^2y) = 4t^3$$

Integrando em relação a t, ambos os lados da igualdade obtemos:

$$t^2y = t^4 + c$$

onde c é uma arbitrária.

Dividindo por t^2 ambos os membros da igualdade, temos que

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

é a solução geral da equação 2.17.

Para encontrar a solução particular do Problema de Valor Inicial, devemos encontrar o valor de c, que é obtido ao substituir na solução geral o valor de t e y apresentados na condição inicial 2.17. Substituindo temos,

$$2 = 1^2 + \frac{c}{1^2}$$
$$2 = 1 + c$$
$$c = 2 - 1$$

Portanto, para satisfazer a condição inicial, temos que $c = 1$, dessa forma :

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

é a solução do Problema de Valor Inicial.

2.4.3 Equações Separáveis

Considere a função $h(t, y) = f(t) \cdot p(y)$, ou seja, h pode ser expressa como uma função $f(t)$ que depende apenas de t multiplicada por uma função $p(y)$ que depende apenas de y. As equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = h(t, y) = f(t) \cdot p(y) \tag{2.19}$$

são chamadas de equações separáveis.

Observe que, dividindo a equação anterior por $p(y)$, obtemos:

$$\frac{1}{p(y)} \cdot \frac{dy}{dt} = f(t) \tag{2.20}$$

Tomando $g(y) = \dfrac{1}{p(y)}$ podemos reescrever a equação como

$$g(y)\frac{dy}{dt} = f(t) \tag{2.21}$$

Essas equações são assim denominadas devido à possibilidade de serem escritas utilizando formas diferenciais. Assim, podemos escrever a equação 2.21 como:

$$g(y)dy = f(t)dt. \tag{2.22}$$

Para se obter a solução geral da equação 2.21, integraremos a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a y, e a expressão à direita em relação a t, obtendo:

$$\int g(y)dy = \int f(t)dt$$

Assim, $G(y) = F(t) + c$ fornece uma solução geral (implícita) da equação separável.

A Justificativa desse método é a seguinte:

Tomando a equação na forma $g(y)\dfrac{dy}{dt} = f(t)$, denotamos por $G(y)$ e $F(t)$ as primitivas de $g(y)$ e $f(t)$, respectivamente.

Assim, $\dfrac{dG}{dy} = g(y)$ e $\dfrac{dF}{dt} = f(t)$. Então reescrevemos a equação original 2.21 como

$$\frac{dG}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

Pela regra da cadeia para a diferenciação, temos que o lado esquerdo é a derivada da função composta $G(y(t))$, isto é,

$$\frac{dG(y(t))}{dt} = \frac{dG(y(t))}{dy}\frac{dy}{dt}$$

Logo, sendo $y(t)$ uma solução da equação diferencial, temos que as funções $G(y(t))$ e $F(t)$ possuem as mesmas derivadas. Portanto, elas se diferem por uma constante, ou seja, $G(y(t)) = F(t) + c$.

Exemplo 6. *Encontre a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2y - 2} \\ \quad y(0) = -1. \end{cases} \tag{2.23}$$

Podemos reescrever a equação 2.23 como:

$$(2y - 2)\mathrm{dy} = (3t^2 + 4t + 2)\mathrm{dt}$$

que está no formato da equação 2.22.
Assim, integrando a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a t, e a expressão à direita em relação a y, obtemos:

$$y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t + c. \tag{2.24}$$

que é a solução geral da equação 2.23 dada implicitamente.

Para encontrar a solução particular do Problema de Valor Inicial, devemos encontrar o valor de c, que é obtido ao substituir na solução geral (2.24) o valor de t e y apresentados na condição inicial. Substituindo temos,

$$(-1)^2 - 2(-1) = (0)^3 + 2(0)^2 + 2(0) + c$$

Portanto, c = 3, e assim sendo, a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t + 3.$$

2.4.4 Equações Exatas

Dada a função $\psi(t, y)$, vamos calcular a inclinação $f(t, y)$ de uma reta tangente à curva de nível $C = \psi(t, y(t))$. Derivando $\psi(t, y(t)) = C$ em relação à variável t de ambos lados, temos que:

$$\frac{d\psi(t, y(t))}{dt} = \frac{dC}{dt}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0, \tag{2.25}$$

Assim,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) = -\frac{\partial\psi/\partial t}{\partial\psi/\partial y}.$$

A diferencial total da função ψ é dada por

$$d\psi := \frac{\partial\psi}{\partial t}dt + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$

Observe que esta expressão é obtida multiplicando formalmente o lado esquerdo de 2.25 por dt. Portanto, o procedimento para obter a inclinação $f(t, y)$ da curva de nível $\psi(t, y) = C$ pode ser expresso como definindo a diferencial total $d\psi = 0$ e resolvendo.

Qualquer equação diferencial de primeira ordem podem ser escrita da forma $M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$. No entanto, se o lado esquerdo desta equação puder ser identificado como uma diferencial total $d\psi(t, y)$, ou seja:

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = \frac{\partial\psi}{\partial t}dt + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy,$$

então as soluções da equação diferencial serão dadas implicitamente pelas curvas de nível $\psi(t, y) = C$.

Definição 1. *A forma diferencial $M(t, y)dt + N(t, y)dy$ é considerada exata em um retângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha < t < \beta; \gamma < y < \delta\}$ se houver uma função $\psi(t, y)$ tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = M(t, y) \\ \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t, y) = N(t, y) \end{cases} \tag{2.26}$$

para todo $(t, y) \in R$.

Quando a diferencial $M(t, y)dt + N(t, y)dy$ for exata, a equação

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$$

será chamada de equação exata.

Teorema 2. *Sejam $M(t, y)$ e $N(t, y)$ funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial t}$ contínuas no retângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha < t < \beta; \gamma < y < \delta\}$. A forma diferencial $M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$ é exata se e somente se, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Primeiramente provaremos que se $M(t, y)dt + N(t, y)dy$ for exata então $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$:
Suponhamos que $M(t, y)$ e $N(t, y)$ sejam funções contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas para todo (t, y).
Se $M(t, y)dt + N(t, y)dy$ for exata, então pela definição 1 temos que essa expressão corresponde à diferencial de alguma função ψ definida em R, assim,

$$M(t, y) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(t, y)$$

Observe que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \cdot \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \tag{2.27}$$

mas $N(t, y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, assim, substituindo $N(t, y)$ na equação 2.27 temos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

É importante ressaltar que $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right)$ pois ambas as funções $M(t, y)$ e $N(t, y)$

possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em R.

($\Leftarrow$) Provaremos agora que se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ então $M(t,y)dt + N(t,y)dy$ é exata.
Se $\dfrac{\partial}{\partial y}M = \dfrac{\partial}{\partial t}N$ precisamos garantir que existe uma função ψ tal que,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(t,y) = N(t,y) \tag{2.28}$$

Se isto acontecer a EDO:

$$M(t,y) + N(t,y)\cdot\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = 0 \tag{2.29}$$

assume a forma:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}}(t,y(t)) = 0$$

que por integração é igual a

$$\psi(t,y(t)) = C \tag{2.30}$$

Integrando a primeira equação da expressão 2.28 em relação a t, obtendo:

$$\psi(t,y) = \int M(t,y)dt + g(y) \tag{2.31}$$

onde $g(y)$ é uma função a ser determinada.
Derivando parcialmente a equação anterior em relação a y, temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt + g'(y)$$

Identificando a derivada $\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ com a função $N(t,y)$:

$$\begin{aligned} N(t,y) &= \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt + g'(y) \\ g'(y) &= N(t,y) - \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt \end{aligned} \tag{2.32}$$

Agora, integrando a equação 2.32 em relação a y e substituindo o resultado na equação 2.31:

$$\psi(t,y) = \int M(t,y)dt + \int N(t,y)dy - \int \left(\int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt \right) dy$$

Dessa forma, por 2.30, temos que a solução geral da equação 2.29 é:

$$\psi(t,y) = \int M(t,y)dt + \int N(t,y)dy - \int \left(\int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt \right) dy = C$$

É importante notar que:

- A expressão $N(t,y) - \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt$ em 2.32 não depende de t,pois

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[N(t,y) - \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt\right] = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int M(t,y)\mathrm{dt}\right) = \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

- Nessa demonstração supomos que $\frac{\partial \psi}{\partial t} = M(t,y)$, no entanto, também poderíamos ter suposto que $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(t,y)$, pois a demonstração é feita de forma análoga.

$\square$

Portanto, podemos escrever que as equações diferenciais exatas são aquelas que podem ser escritas na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.33}$$

com $M, N,$ $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial t}$ contínuas no retângulo $\{$(t,y)$\in \mathbb{R}^2 | \alpha < t < \beta; \gamma < y < \delta\}$ e que satisfazem a condição $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$.

O passo chave na resolução de equações do tipo 2.33, consiste em encontrar uma função ψ da definição 1.

Exemplo 7. *Considere a equação diferencial*

$$(ycos(t) + 2te^y) + (sen(t) + t^2e^y - 1)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.34}$$

Analisando esta equação, temos que $M(t,y) = ycos(t) + 2te^y$ e $N(t,y) = sen(t) + t^2e^y - 1$. Derivando parcialmente $M(t,y)$ em relação a y e $N(t,y)$ em relação a t a fim de determinar se a equação dada é exata, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) = cos(t) + 2te^y$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}N(t,y) = cos(t) + 2te^y.$$

Como $\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}N(t,y)$ temos que a equação 2.34 é exata.

Portanto, existe uma função $\psi(t,y)$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \\ \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(t,y) = N(t,y) \end{cases}$$

ou seja,

$$ycos(t) + 2te^y = \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{2.35}$$

e

$$sen(t) + t^2e^y - 1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.36}$$

Como queremos encontrar ψ, integraremos a equação 2.35 em relação a t:

$$\psi(t, y) = \int ycos(t) + 2te^y dt$$

$$\psi(t, y) = y \int cos(t)dt + e^y \int 2tdt = ysen(t) + e^y t^2 + g(y)$$

Logo,

$$\psi(t, y) = ysen(t) + e^y t^2 + g(y) \tag{2.37}$$

com $g(y)$ a função a ser determinada.
Como foi visto anteriormente, precisamos encontrar uma função $\psi(t, y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = M(t, y) \\ \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t, y) = N(t, y) \end{cases}$$

Deste modo, para que $N(t, y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, derivaremos parcialmente a equação 2.37 em relação a y, obtendo:

$$\frac{\partial \psi(t, y)}{\partial y} = sen(t) + e^y t^2 + g'(y). \tag{2.38}$$

Sabemos que,

$$\frac{\partial \psi(t, y)}{\partial y} = N(t, y) \quad \text{e} \quad N(t, y) = sen(t) + t^2e^y - 1$$

então substituindo os respectivos valores, na equação 2.38 temos:

$$\begin{aligned} N(t, y) &= sen(t) + e^y t^2 + g'(y) \\ sen(t) + t^2e^y - 1 &= sen(t) + e^y t^2 + g'(y) \end{aligned}$$

A partir da equação anterior obtemos que $g'(y) = -1$, assim, integrando ambos os lados em relação a y, encontraremos $g(y)$:

$$\int g'(y)dy = \int -1dy$$

$$g(y) = -y + C$$

Substituindo o valor de $g(y)$ na equação 2.37, temos que a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(t, y) = ysen(t) + e^y t^2 - y + C$$

2.4.5 Fatores Integrantes Especiais

Assim como nas equações lineares, às vezes é possível transformar equações diferenciais não lineares e não exatas em equações exatas, multiplicando-as por uma função $\mu(t, y)$, denominada fator integrante para a equação exata.

Ou seja, considerando a equação diferencial:

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.39}$$

com $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$.

Às vezes é possível encontrar um fator integrante $\mu = \mu(t, y)$, de forma que, ao multiplicarmos a equação 2.39 por ele, a nova equação torne-se uma equação diferencial exata. Assim, obtemos:

$$\mu(t, y) \cdot M(t, y) + \mu(t, y) \cdot N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.40}$$

Pelo teorema 2, a equação 2.40 será exata se e somente se, $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\mu N)$, que pela regra da diferenciação do produto é igual a :

$$N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right). \tag{2.41}$$

Para determinar o fator integrante $\mu(t, y)$ precisamos resolver uma equação diferencial parcial, o que não é uma tarefa fácil. Portanto, vamos supor que μ seja função de uma única variável, digamos que μ dependa apenas de t: $\mu = \mu(t)$.

Assim, $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ e $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$, de forma que a equação 2.41 fica:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \mu \cdot \left(\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} \right) \tag{2.42}$$

Após terem sido feitas simplificações algébricas, se o quociente $\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \right)$ resultar em uma função que depende apenas da variável t, a equação 2.42 será uma EDO de primeira ordem e o fator integrante μ poderá ser determinado, já que a equação 2.42 é linear separável. Assim, segue da seção 2.4.2 que,

$$\mu(t) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \right) \mathrm{d}t}. \tag{2.43}$$

De forma análoga, segue da equação 2.41 que se μ for uma função que depende apenas da variável y, então a equação fica:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = \mu \cdot \left(\frac{\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} \right) \tag{2.44}$$

Assim, se o quociente $\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)$ depender apenas da variável y, segue da seção 2.4.2 que,

$$\mu(y)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}\right)\mathrm{dy}}. \tag{2.45}$$

Exemplo 8. *Considere a equação diferencial não linear homogênea de primeira ordem:*

$$(3ty+y^2)\mathrm{dt}+(t^2+ty)\mathrm{dy}=0 \tag{2.46}$$

Analisando esta equação, temos que $M(t,y)=3ty+y^2$ e $N(t,y)=t^2+ty$.

Derivando parcialmente $M(t,y)$ em relação a y e $N(t,y)$ em relação a t, temos:

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}=3t+2y$$
$$\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}=2t+y$$

Como $\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}$, temos que a equação não é exata.

O quociente em 2.45 não nos leva a lugar algum, pois

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{2t+y-3t-2y}{3ty+y^2}=\frac{-t-y}{3ty+y^2}=\frac{-t-y}{3ty+y^2} \tag{2.47}$$

depende de t e de y.

No entanto, 2.43 resulta em um quociente que depende apenas da variável t:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}=\frac{3t+2y-2t-y}{t^2+ty}=\frac{t+y}{t^2+ty}=\frac{t+y}{t(t+y)}=\frac{1}{t} \tag{2.48}$$

Portanto, o fator integrante é $\mu(t)=e^{\int\frac{\mathrm{dt}}{t}}=e^{\int\ln t}=t$.

Dessa forma, multiplicando a equação diferencial 2.46 pelo fator integrante $\mu(t)=t$ temos:

$$t\cdot(3ty+y^2)\mathrm{dt}+t\cdot(t^2+ty)\mathrm{dy}=0 \tag{2.49}$$

que é equivalente a:

$$(3t^2y+y^2t)\mathrm{dt}+(t^3+t^2y)\mathrm{dy}=0 \tag{2.50}$$

com $M(t,y)=3t^2y+y^2t \quad \text{e} \quad N(t,y)=t^3+t^2y$.

Derivando parcialmente $M(t,y)$ em relação a y e $N(t,y)$ em relação a t, temos:

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}=3t^2+2yt \quad \text{e} \quad \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}=3t^2+2ty$$

Uma vez que, $\dfrac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(t,y)}{\partial t}$, temos que a nova equação 2.50 é exata.

Para encontrar a família de soluções da EDO 2.50, faremos um processo análogo ao feito na seção 2.4.4. Como a EDO é exata, então existe uma função $\psi(t,y)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \\ \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t,y) = N(t,y) \end{cases}$$

ou seja,

$$3t^2y + y^2t = \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{2.51}$$

e

$$t^3 + t^2y = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.52}$$

Como queremos encontrar ψ, integraremos a equação 2.51 em relação a t:

$$\psi(t,y) = \int 3t^2y + y^2t dt$$

Logo,

$$\psi(t,y) = y\int 3t^2 \mathrm{d}t + y^2 \int t\mathrm{d}t = yt^3 + \frac{y^2t^2}{2} + g(y) \tag{2.53}$$

com $g(y)$ a função a ser determinada.
Como foi visto anteriormente, precisamos encontrar uma função $\psi(t,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \\ \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t,y) = N(t,y) \end{cases}$$

Deste modo, para que $N(t,y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, derivaremos parcialmente a equação 2.53 em relação a y, obtendo:

$$\frac{\partial \psi(t,y)}{\partial y} = t^3 + yt^2 + g'(y). \tag{2.54}$$

Sabemos que,

$$\frac{\partial \psi(t,y)}{\partial y} = N(t,y) \quad \text{e} \quad N(t,y) = t^3 + t^2y$$

então substituindo os respectivos valores, na equação 2.54 temos:

$$\begin{aligned} N(t,y) &= t^3 + t^2y + g'(y) \\ t^3 + t^2y &= t^3 + t^2y + g'(y) \end{aligned}$$

A partir da equação anterior obtemos que $g'(y) = 0$, assim, integrando ambos os lados em relação a y, encontraremos $g(y)$:

$$\int g'(y)dy = \int 0dy$$

$$g(y) = C$$

Substituindo o valor de $g(y)$ na equação 2.53, temos que a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(t,y) = yt^3 + \frac{y^2t^2}{2} + C \tag{2.55}$$

2.5 Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

Uma equação diferencial linear de segunda ordem pode ser escrita na forma

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t) \tag{2.56}$$

em que p, q, g são funções contínuas da variável independente t e a linha denota a diferenciação em relação a t.
Assim como para as equações diferenciais lineares de 1ª ordem é válido o teorema sobre a existência e unicidade de soluções, para as equações diferenciais lineares de 2ª ordem é válido um resultado semelhante:

Teorema 3. *(Existência e Unicidade)*
Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

Se $p(t), q(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas no aberto intervalo I contendo t_0, então o problema de valor inicial tem uma, e somente uma, solução definida neste intervalo.

Devido a demonstração desse teorema não ser tão simples, não a faremos aqui neste trabalho. Caso o leitor possua curiosidade, a demonstração pode ser encontrada em (SANTOS, 2007, p. 655) e (FIGUEIREDO; NEVES, 2001, p. 95).

2.5.1 Equações Homogêneas

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dita homogênea, caso possa ser escrita na seguinte forma:

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{2.57}$$

em que p, q são funções contínuas da variável independente t.
Para equações lineares homogêneas é válido o **Princípio da Superposição**, que será abordado mais a frente. Antes de abordá-lo, consideremos L um operador diferencial linear de segunda ordem dado por:

$$L[\phi(t)] = \phi''(t) + p\phi'(t) + q\phi(t)$$

Aplicando o operador a uma solução $y(t)$ teremos:

$$L[y] = y''(t) + py'(t) + qy(t) \tag{2.58}$$

Pela linearidade do operador L temos o Princípio da Superposição abaixo que nos diz que a combinação de soluções também será uma solução para a EDO.

Teorema 4. *(Princípio da Superposição)*
Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação diferencial,

$$L[y(t)] = y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0 \tag{2.59}$$

então a combinação linear $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Demonstração. Para verificar que $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ é solução, substituiremos

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{2.60}$$

na equação 2.59. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
L[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)] &= [c_1y_1(t) + c_2y_2(t)]'' + p(t)[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)]' + q(t)[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)] \\
L[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)] &= c_1y_1(t)'' + c_2y_2(t)'' + p(t)c_1y_1(t)' + p(t)c_2y_2(t)' + q(t)c_1y_1(t) + q(t)c_2y_2(t) \\
L[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)] &= c_1[y_1(t)'' + p(t)y_1(t)' + q(t)y_1(t)] + c_2[y_2(t)'' + p(t)y_2(t)' + q(y)y_2(t)] \\
L[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)] &= c_1L[y_1(t)] + c_2L[y_2(t)]
\end{aligned}$$

Como $L[y_1(t)] = 0$ e $L[y_2(t)] = 0$ temos que

$$c_1L[y_1(t)] + c_2L[y_2(t)] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

Portanto, $L[c_1y_1(t) + c_2y_2(t)] = 0$, assim, quaisquer valores de c_1 e c_2 dados pela equação 2.60 satisfazem a equação 2.59. □

2.5.2 Soluções Fundamentais

Vimos que a partir de duas soluções da equação 2.59 podemos determinar uma família infinita de soluções definidas pela equação 2.60.

A partir disso, surge um questionamento, será que todas as soluções de 2.59 estão incluídas na equação 2.60? No intuito de responder essa pergunta temos o seguinte teorema:

Teorema 5. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação 2.59 tais que, em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$*

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1{}'(t_0) & y_2{}'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

tem uma única solução da forma

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Demonstração. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{2.61}$$

Determinaremos condições sobre duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de modo que existam constantes c_1 e c_2 tais que a equação $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ seja solução do PVI 2.61 anterior.

Substituindo $t = t_0$ na solução $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ e em sua derivada $y'(t) = c_1 y_1{}'(t) + c_2 y_2{}'(t)$, obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y'(t_0) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1{}'(t_0) & y_2{}'(t_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0{}' \end{bmatrix}$$

Se a matriz quadrada A for invertível, então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o sistema tem uma solução única (c_1, c_2). A solução é $X = A^{-1}B$.
Sabemos que, uma matriz quadrada será invertível se, e somente se, o seu determinante for diferente de zero, ou seja, se

$$\det = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1{}'(t_0) & y_2{}'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

Logo, para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ é solução do problema de valor inicial 2.61. □

Definição 2. • *O determinante*

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1{}'(t_0) & y_2{}'(t_0) \end{bmatrix}$$

*é denominado **Wronskiano** das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em t_0.*

- *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções da EDO 2.57, tais que o $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ em um ponto t_0, então a estas funções damos o nome de **soluções fundamentais** da EDO 2.57.*
- *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de 2.57, então a família de soluções*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 t_2(t),$$

*é chamada **solução geral** de 2.57 com $c_1, c_2 =$ constante.*

Em vista disso, para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem 2.57, precisamos encontrar duas soluções fundamentais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação 2.57, tais que em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ {y_1}'(t_0) & {y_2}'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Exemplo 9. *Seja ω um número real não nulo. Vamos mostrar que $y_1(t) = cos(\omega t)$ e $y_2(t) = sen(\omega t)$ são soluções fundamentais da equação*

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{2.62}$$

O Wronskiano é $\neq 0$?

Para determinar se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da EDO, precisamos calcular as derivadas primeira e segunda de y_1 e y_2 em relação a t e posteriormente substituir os valores na equação 2.62.

Derivando a função $y_1(t) = cos(\omega t)$ obtemos:

$${y_1}'(t) = -\omega sen(\omega t) \quad \text{e} \quad {y_1}''(t) = -\omega^2 cos(\omega t)$$

Substituindo $y_1''(t)$ e $y_1(t)$ em 2.62 temos:

$$-\omega^2 cos(\omega t) + \omega^2 (cos(\omega t)) = -\omega^2 cos(\omega t) + \omega^2 cos(\omega t) = 0$$

Portanto, $y_1(t)$ é solução.

De forma análoga, derivando a função $y_2(t) = \text{sen}(\omega t)$ obtemos:

$${y_2}'(t) = \omega cos(\omega t) \quad \text{e} \quad {y_2}''(t) = -\omega^2 sen(\omega t)$$

Substituindo $y_2''(t)$ e $y_2(t)$ em 2.62 temos:

$$-\omega^2 sen(\omega t) + \omega^2 (sen(\omega t)) = -\omega^2 sen(\omega t) + \omega^2 sen(\omega t) = 0$$

Portanto, $y_2(t)$ é solução. Assim, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções.

Como visto anteriormente, o Wronskiano é:

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ {y_1}'(t_0) & {y_2}'(t_0) \end{bmatrix}$$

Assim sendo, o Wronskiano das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é:

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} cos(\omega t) & sen(\omega t) \\ -\omega sen(\omega t) & \omega cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$W[y_1, y_2](t) = \omega cos^2(\omega t) + \omega sen^2(\omega t) = \omega(cos^2(\omega t) + sen^2(\omega t)) = \omega \cdot 1 = \omega$
Deste modo, se $\omega \neq 0$ então $W[y_1, y_2](t) \neq 0$. Neste caso, $y_1(t) = cos(\omega t)$ e $y_2(t) = sen(\omega t)$ são soluções fundamentais de 2.62.

2.5.3 Fórmula de Euler

Para atribuir significado à expressão $y(t) = e^{at}e^{ibt}$, precisamos definir a função exponencial complexa e^{rt}, com $r = a + ib$, de forma que ela satisfaça as seguintes propriedades:

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} \tag{2.63}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{rt}) = re^{rt} \tag{2.64}$$

Note que a função $z(t) = e^{i\omega t}$ é solução da equação $y'' + \omega^2 y = 0$, pois pela propriedade 2.64 acima temos que:

$$z'(t) = i\omega e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad z''(t) = -\omega^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 z(t)$$

Substituindo os valores de $z''(t)$ e $z(t)$ em $y'' + \omega^2 y = 0$ temos:

$$z'' + \omega^2 z(t) = 0$$

Dessa forma, $z(t) = e^{i\omega t}$ é solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = i\omega \end{cases} \tag{2.65}$$

Vimos anteriormente, no exemplo 9 que $y_1(t) = cos(\omega t)$ e $y_2(t) = sen(\omega t)$ são soluções fundamentais de $y'' + \omega^2 y = 0$. Consequentemente, a partir do Teorema 5, existem constantes c_1 e c_2 tais que:

$$z(t) = e^{i\omega t} = c_1 cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t) \tag{2.66}$$

Para determinar as constantes, substituiremos $t = 0$ na equação 2.66:

$$\begin{aligned} z(0) &= c_1 cos(0) + c_2 sen(0) \\ 1 &= c_1 \cdot (1) + c_2 \cdot (0) \end{aligned}$$

Logo, $c_1 = 1$
Agora, a fim de determinarmos a constante c_2, derivaremos a equação 2.66 em relação a t:

$$z'(t) = i\omega e^{i\omega t} = -c_1 \omega sen(\omega t) + c_2 \omega cos(\omega t)$$

Substituindo $t = 0$ na equação anterior obtemos:

$$\begin{aligned} z'(0) &= i\omega e^{i\omega(0)} = -c_1\omega sen(\omega(0)) + c_2\omega cos(\omega(0)) \\ i\omega &= -c_1(0) + c_2\omega(1) \end{aligned}$$

Portanto, $c_2 = i$.
Substituindo os valores de c_1 e c_2 na equação 2.66 obtemos

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{i\omega t} = (1) \cdot cos(\omega t) + (i) \cdot sen(\omega t) \\ e^{i\omega t} &= cos(\omega t) + isen(\omega t) \end{aligned}$$

Substituindo (ωt) por $(a + ib)t$, pela propriedade 2.63 temos:

$$\begin{aligned} e^{(a+ib)t} &= e^{at} \cdot e^{ibt} \\ e^{(a+ib)t} &= e^{at}(cos(bt) + i \cdot sen(bt)) \end{aligned} \tag{2.67}$$

Tomando $t = 1$ obtemos

$$e^{(a+ib)} = e^a(cos(b) + i \cdot sen(b)) \tag{2.68}$$

Esta equação 2.68 é conhecida como **fórmula de Euler**.
Assim, sempre que escrevermos e^{a+ib}, estamos nos referindo a expressão $e^a(cos(b) + i \cdot sen(b))$.

Vale a pena observar algumas variações da fórmula de Euler, por exemplo, substituindo $(a + ib)$ por $-t$ temos:

$$e^{-it} = cos(-t) + i \cdot sen(-t)$$

Note que, $cos(-t) = cos(t)$ e $sen(-t) = -sen(t)$, assim

$$e^{-it} = cos(t) - i \cdot sen(t)$$

2.5.4 Equações Homogêneas Lineares com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial linear será considerada homogênea com coeficientes constantes quando puder ser escrita na seguinte forma:

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0 \tag{2.69}$$

em que as funções $p(t), q(t)$ são constantes e a linha denota a diferenciação em relação a t.
O método de resolução consiste em encontrar soluções para a equação 2.69 na forma

$$y(t) = e^{rt}$$

onde r é um parâmetro a determinar.

Para verificar que a função $y(t)$ é solução da equação diferenciável 2.69 devemos levá-la até ela. Sabemos que $y(t) = e^{rt}$, então $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2e^{rt}$. Substituindo esses valores em 2.69, temos

$$r^2e^{rt} + pre^{rt} + qe^{rt} = 0$$

Colocando o termo e^{rt} em evidência temos:

$$e^{rt}(r^2 + pr + q) = 0$$

Como $e^{rt} \neq 0$, temos que

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{2.70}$$

A equação 2.70 é denominada **equação característica** ou **equação auxiliar da equação** 2.69. Por ser de grau dois, teremos três casos de soluções a considerar, dependendo do sinal do discriminante $\Delta = p^2 - 4q$.

Caso I: $\Delta = p^2 - 4q > 0$

Neste caso, teremos duas raízes reais distintas, denotadas por r_1 e r_2:

$$r_1 = \frac{-p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

então $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são as soluções da equação 2.69.
É fácil ver que o Wronskiano dessas duas soluções é igual a $e^{(r_1+r_2)(t)} \cdot (r_2 - r_1) \neq 0$. Dessa forma, temos que as soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes (l.i), e neste caso,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

é solução geral de 2.69 no caso em que $\Delta > 0$.

Exemplo 10. *Encontre a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Fazendo $y = e^{rt}$, então r tem que ser raiz da equação característica $r^2 + 5r + 6 = 0$.
Note que, a equação característica $r^2 + 5r + 6 = 0$, possui discriminante $\Delta > 0$, ou seja, a equação característica tem duas raízes reais e distintas.
A equação característica pode ser escrita através do produto entre os polinômios $(r+2)(r+3) = 0$, resultando nos seguintes valores de r : $r = -2$ e $r = -3$. Logo a solução geral da equação $y'' + 5y' + 6y = 0$ é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \tag{2.71}$$

Para encontrar a solução do PVI, é necessário satisfazer a primeira condição inicial. Substituindo $t = 0$ e $y = 2$ na 2.71, temos

$$c_1 + c_2 = 2 \tag{2.72}$$

Antes de usar a segunda condição inicial, é necessário derivar a equação 2.71 em relação a t, o que nos dá $y'(t) = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$. Assim, fazendo $t = 0$ e $y' = 3$, temos

$$-2c_1 - 3c_2 = 3 \tag{2.73}$$

Multiplicando a equação 2.72 por 2 e somando o resultado obtido à equação 2.73, iremos encontrar $c_2 = -7$. Como $c_1 + c_2 = 2$ temos que $c_1 = 9$.

Logo, $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$ é a solução do problema de valor inicial.

Caso II: $\Delta = p^2 - 4q = 0$

Neste caso, teremos apenas uma raiz real, denotada por r:

$$r = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Como $p^2 - 4q = 0$, temos que $r = -\dfrac{p}{2}$.

então

$$y_1(t) = e^{rt} \tag{2.74}$$

é solução da equação 2.69.

Como podemos determinar uma outra solução $y_2(t)$ da equação 2.69, de forma que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sejam linearmente independentes (l.i)?

Através do método de Redução de Ordem é possível encontrar uma segunda solução $y_2(t)$. O método de Redução de Ordem é assim denominado pois precisamos resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem para encontrar a segunda solução.

Assim, dada uma solução conhecida $y_1(t)$, esse método consiste em encontrar uma outra solução na forma:

$$y(t) = u(t) \cdot y_1(t) \tag{2.75}$$

Antes de substituir $y(t)$ na equação 2.69, primeiramente, a partir da regra de derivação do produto, calcularemos a derivada primeira e segunda da equação 2.75 em relação a t, que são respectivamente:

$$y'(t) = u'(t)y_1(t) + y_1'(t)u(t) \quad \text{e} \quad y''(t) = u''(t)y_1(t) + y_1'(t)u'(t) + y_1''(t)u(t) + y_1'(t)u'(t)$$

Substituindo y'', y' e y em 2.69 obtemos:

$$u[y_1'' + py_1' + qy_1] + u''y_1 + u'[2y_1' + py_1] = 0$$

Uma vez que por 2.69 a expressão: $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$ podemos reescrever a equação anterior como:

$$u''y_1 + u'[2y_1' + py_1] = 0 \quad \text{ou} \quad w' + w\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right) = 0$$

onde fizemos $w = u'$.
Note que, a equação obtida: $w' + w\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right) = 0$, é uma equação diferencial linear de 1ª ordem.
Para a solução y_1 dada em 2.74, é fácil ver que o termo entre parênteses é igual a zero. Portanto, temos que:

$$w' = 0 \quad , \quad w = c \quad , \quad u = ct + g$$

onde c e g são constantes.
Desse modo, qualquer função na forma $(ct + g) \cdot y_1(t)$ é solução de 2.69.
Tomando $c = 1$ e $g = 0$, obtemos uma segunda solução da equação 2.69:

$$y_2(t) = te^{rt} \quad \text{com } r = \tfrac{-pt}{2} \tag{2.76}$$

É fácil ver que o Wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é igual a e^{-pt}. Dessa forma, temos que as soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes (l.i), e nesse caso

$$y(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt}$$

é solução geral da equação 2.69 no caso em que $\Delta = 0$.

Exemplo 11. *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

A equação anterior é uma EDO linear, de segunda ordem, homogênea, que tem como equação característica:

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

Observe que o discriminante $\Delta = 0$, ou seja, a equação característica tem uma única raiz real $r = -2$. Assim, a solução geral da equação é:

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}.$$

Caso III: $p^2 - 4q < 0$

Neste caso, teremos duas raízes complexas, compostas por números complexos conjugados e denotadas por r_1 e r_2:

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

e

$$r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Seja $a = -\frac{p}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ temos $r_1 = a + ib$ e $r_2 = a - ib$

então

$$y_1(t) = e^{(a+ib)t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{(a-ib)t}$$

são as soluções da equação 2.69.

Em 2.5.3, atribuímos um significado às expressões $y_1(t)$ e $y_2(t)$, que podem ser escritas como:

$$y_1(t) = e^{(a+ib)t} = e^{at}(cos(bt) + i \cdot sen(bt)) \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{(a-ib)t} = e^{at}(cos(bt) - i \cdot sen(bt)).$$

É fácil ver que o Wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é igual a $(-2ib) \cdot e^{2at} \neq 0$. Dessa forma, temos que as soluções são linearmente independentes (l.i), e a solução geral da equação 2.69 no caso em que $\Delta < 0$ é:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{at}cos(bt) + c_2 \cdot e^{at}isen(bt)$$

Exemplo 12. *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + 4y' + 7y = 0$$

A equação anterior é uma EDO linear, de segunda ordem, homogênea, que tem como equação característica:

$$r^2 + 4r + 7 = 0.$$

Observe que o discriminante $\Delta < 0$, ou seja, a equação característica tem duas raízes complexas conjugadas, $r_1 = -2 + \sqrt{3}i$ e $r_2 = -2 - \sqrt{3}i$. Assim, seja $a = -2$ e $b = \sqrt{3}$, a solução geral da equação é:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} \cos \sqrt{3}t + c_2 t e^{-2t} \operatorname{sen} \sqrt{3}t.$$

2.6 Equações Não-Homogêneas

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dita não-homogênea, se ela pode ser escrita como:

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t) \tag{2.77}$$

em que p, q são funções contínuas da variável independente t e $g(t)$ uma função não nula.

Teorema 6. *Seja $y_p(t)$ uma solução particular da equação diferencial linear não-homogênea 2.77 e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ solução geral da equação homogênea correspondente. Então, a solução geral da equação 2.77 é:*

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Demonstração. Seja $y(t)$ e $y_p(t)$ soluções particulares da equação não-homogênea 2.77. Definindo $Y(t) = y(t) - y_p(t)$, queremos mostrar que $Y(t)$ é solução da equação homogênea associada

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{2.78}$$

Assim, substituindo o valor de $Y(t)$ na equação abaixo, temos

$$\begin{aligned} Y''(t)+p(t)Y'(t)+q(t)Y(t) &= (y(t)-y_p(t))''+p(t)\cdot(y(t)-y_p(t))'+q(t)\cdot(y(t)-y_p(t)) \\ Y''(t)+p(t)Y'(t)+q(t)Y(t) &= y''(t)-y_p'(t)+p(t)y'(t)-p(t)y_p'(t)+q(t)y(t)-q(t)y_p(t) \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes obtemos:

$$Y''(t)+p(t)Y'(t)+q(t)Y(t)=(y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t))-(y_p'(t)+p(t)y_p'(t)+q(t)y_p(t)) \tag{2.79}$$

Como definimos que $y(t)$ e $y_p(t)$ são soluções de 2.77, então $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=g(t)$ e $y_p''(t)+p(t)y_p'(t)+q(t)y_p(t)=g(t)$. Dessa forma, a equação 2.79 se torna:

$$Y''(t)+p(t)Y'(t)+q(t)Y(t)=g(t)-g(t)=0$$

Logo, $Y(t)$ é solução da equação homogênea 2.78 e pelo Teorema 4, temos que $Y(t)=c_1y_1(t)+c_1y_2(t)$. Portanto

$$\begin{aligned} y(t)-y_p(t) &= c_1y_1(t)+c_1y_2(t) \\ y(t) &= c_1y_1(t)+c_1y_2(t)+y_p(t). \end{aligned} \tag{2.80}$$

□

Assim sendo, para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear de 2ª ordem não-homogênea, precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente e a solução particular da equação não-homogênea.

Teorema 7. *(Princípio da Superposição para Equações Não-Homogêneas)*
Seja $y_1(t)$ uma solução de

$$y''(t)+py'(t)+qy(t)=g_1(t).$$

e $y_2(t)$ uma solução de

$$y''(t)+py'(t)+qy(t)=g_2(t).$$

Então $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$ é solução de

$$y''(t)+py'(t)+qy(t)=g_1(t)+g_2(t).$$

Demonstração. Para verificar que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é solução, substituiremos

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

em $y''(t)+py'(t)+qy(t)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} y''(t)+py'(t)+qy(t) &= (y_1(t)+y_2(t))''+p(t)\cdot(y_1(t)+y_2(t))'+q(t)\cdot(y_1(t)+y_2(t)) \\ y''(t)+py'(t)+qy(t) &= y_1''(t)+y_2''(t)+p(t)y_1'(t)+p(t)y_2'(t)+q(t)y_1(t)+q(t)y_2(t) \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes temos

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = (y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)) + (y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t))$$

Como definimos que $y_1(t)$ é solução de $y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_1(t)$ e $y_2(t)$ é solução de $y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_2(t)$, então a equação anterior se torna:

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

□

2.6.1 Método de Variação dos Parâmetros

Seja a equação linear de segunda ordem não homogênea

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = g(t). \tag{2.81}$$

e a equação linear de segunda ordem homogênea correspondente à não-homogênea

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0. \tag{2.82}$$

onde p e q são funções contínuas, e cuja solução geral é da forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

O método Variação dos Parâmetros é um método que pode ser aplicado com êxito em qualquer equação do tipo 2.81, na qual duas soluções fundamentais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação homogênea correspondente são conhecidas em um intervalo I, e cujo Wronskiano $W[y_1, y_2](t) \neq 0 \; \forall t \in I$.

Conhecendo-se duas soluções fundamentais da equação homogênea, o método variação dos parâmetros consiste em procurar uma solução particular da equação não homogênea que tenha a mesma forma da solução geral da homogênea, mas que serão substituídos os coeficientes c_1 e c_2 por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, isso nos dá

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \tag{2.83}$$

Derivando a equação 2.83 em relação a t, temos

$$y' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t)$$

Supondo que a soma dos termos envolvendo $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ seja nula, ou seja,

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0 \tag{2.84}$$

temos

$$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t)$$

Derivando a equação anterior em relação a t,

$$y'' = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t)$$

Substituindo y'', y' e y na equação 2.81 e colocando os termos comuns em evidência, obtemos,

$$\begin{aligned} u_1(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ + u_2(t)[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Note que, como y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea 2.82, os termos $[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)]$ e $[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)]$ serão iguais a zero. Assim temos,

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t) \quad (2.86)$$

As equações 2.84 e 2.86 formam um sistema de equações lineares para as derivadas ${u_1}'(t)$ e ${u_2}'(t)$, que pode ser escrito na forma $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ {y_1}'(t) & {y_2}'(t) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} {u_1}'(t) \\ {u_2}'(t) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

cuja solução

$$\begin{bmatrix} {u_1}'(t) \\ {u_2}'(t) \end{bmatrix} = X = A^{-1}B$$

Para encontrar a inversa da matriz A, consideremos a matriz aumentada $A|I$ e através de operações básicas de linha em ambas as matrizes, escalonemos, até que a matriz da esquerda seja a matriz identidade. Dessa forma, obtemos que

$$A^{-1}B = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{bmatrix} \cdot B$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{W[y_1, y_2]} \begin{bmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{W[y_1, y_2]} \begin{bmatrix} -y_2(t) \cdot g(t) \\ y_1(t) \cdot g(t) \end{bmatrix}$$

Dessa forma, obtemos duas equações diferenciais de primeira ordem

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

$$u_2'(t) = \frac{y_1(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

Integrando-as em relação a t obtemos

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt} \tag{2.87}$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt} \tag{2.88}$$

Substituindo os valores de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ encontrados na equação 2.83, obtemos uma solução particular

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt} + y_2(t) \int \frac{y_1(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt}.$$

e a seguinte solução geral:

$$y(t) \quad = \quad y_h + y_p \tag{2.89}$$

onde y_p é a solução particular da equação não-homogênea e y_h e a solução geral da equação homogênea.

Exemplo 13. *Encontre a solução particular e a solução geral da equação:*

$$y'' + y = \sec t \tag{2.90}$$

A equação 2.90 é uma equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea, que pode ser resolvida através do método Variação dos Parâmetros 2.6.1.
A equação homogênea associada é:

$$y'' + y = 0 \tag{2.91}$$

que tem como equação característica $r^2 + 1 = 0$. Note que o discriminante $\Delta < 0$, portanto, como foi visto em 2.5.4, teremos neste caso duas raízes complexas conjugadas, $r_1 = i$ e $r_2 = -i$, e a solução geral da equação homogênea correspondente 2.91 é:

$$y(t) = c_1 cos(t) + c_2 sen(t)$$

já que $a = 0$ e $b = 1$.
Queremos encontrar uma solução particular sob a forma:

$$y_p(t) = u_1 cos(t) + u_2 sen(t) \tag{2.92}$$

Vimos anteriormente no método Variação dos Parâmetros que as funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ podem ser obtidas através de duas equações, vide 2.87 e 2.88:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt} \tag{2.93}$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt} \tag{2.94}$$

A partir da solução geral da equação homogênea, sabemos qual o valor de $y_1(t)$ e $y_2(t)$, no entanto, para encontrarmos o valor de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ precisamos primeiramente calcular o Wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{bmatrix} = cos^2(t) + sen^2(t) = 1.$$

Agora podemos calcular $u_1(t)$ e $u_2(t)$, substituindo os respectivos valores de $y_1(t), y_2(t), g(t)$, $W[y_1, y_2](t)$ em 2.93 e 2.94:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \frac{sen(t) \cdot \sec(t))}{1} \mathrm{dt} = -\int \frac{sen(t)}{cos(t)} \mathrm{dt} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + h_1 \\ u_1(t) &= \ln|cos(t)| + h_1. \end{aligned} \tag{2.95}$$

$$u_2(t) = \int \frac{cos(t) \cdot \sec(t))}{1} \mathrm{dt} = \int \frac{cos(t)}{cos(t)} \mathrm{dt} = \int 1 \mathrm{dt} = t + h_2. \tag{2.96}$$

Tomando $h_1(t) = 0$ e $h_2(t) = 0$ e substituindo os valores de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ em 2.92 obtemos a solução particular :

$$y_p(t) = (\ln|cos(t)|)\, cos(t) + tsen(t). \tag{2.97}$$

Portanto, a solução geral da equação 2.90 é:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h + y_p \\ y(t) &= c_1 cos(t) + c_2 sen(t) + (\ln|cos(t)|)\, cos(t) + tsen(t) \end{aligned} \tag{2.98}$$

onde y_p é a solução particular da equação não-homogênea e y_h e a solução geral da equação homogênea.

2.6.2 Método dos Coeficientes a Determinar

O método dos coeficientes a determinar ou dos coeficientes indeterminados é um método utilizado para determinar a solução particular das equações lineares na forma

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{2.99}$$

com a, b e c números reais, $a \neq 0$. Esse método se aplica somente para equações não-homogêneas com coeficientes constantes, cujo termo não homogêneo pertence à classe das funções polinomiais, exponenciais, senos e co-senos. De acordo com (SANTOS, 2007) temos os seguintes casos:

Caso I

Quando a função $g(t)$ está na forma $g(t) = a_0 + \cdots + a_n t^n$, em que $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.
Neste caso, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s(A_0 + \cdots + A_n t^n)$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \cdots, A_n$ são coeficientes a ser determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação 2.99.

Caso II

Quando a função $g(t)$ está na forma $g(t) = (a_0 + \cdots + a_n t^n)e^{at}$, em que $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$
Neste caso, devemos procurar uma solução particular da forma $y_p(t) = t^s(A_0 + \cdots + A_n t^n)e^{at}$

em que s é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \cdots, A_n$ são coeficientes a ser determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação 2.99.

Caso III

Quando a função $g(t)$ está na forma $g(t) = (a_0 + \cdots + a_n t^n)e^{at} cosbt + (b_0 + \cdots + b_m t^m)e^{at} senbt$, em que $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_0, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$.
Neste caso, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s[(A_0 + \cdots + A_q t^q)e^{at} cosbt + (B_0 + \cdots + B_q t^q)e^{at} senbt],$$

em que $q = max\{m, n\}$, s é o menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \cdots, A_q$, $B_0, \cdots, B_q$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação 2.99.
Dessa forma, a solução geral da equação não homogênea 2.99 é:

$$y(t) = y_h + y_p \tag{2.100}$$

onde y_p é a solução particular da equação não-homogênea e y_h e a solução geral da equação homogênea.

Exemplo 14. *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' - 5y' + 4y = e^t \tag{2.101}$$

A equação 2.101 e uma equação diferencial de segunda ordem linear não-homogênea com coeficientes constantes. Observe que o termo não-homogêneo pertence à classe das funções

exponenciais, logo, a função $g(t)$ se enquadra no caso 2.6.2 do método dos Coeficientes a Determinar.
Primeiramente, devemos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente a 2.101: $y'' - 5y' + 4y = 0$. A equação característica da homogênea é:

$$r^2 - 5r + 4 = 0.$$

O discriminante da equação característica é $\Delta > 0$, portanto como foi visto na seção 2.5.4, teremos neste caso duas raízes reais e distintas, $r_1 = 4$ e $r_2 = 1$, e a solução geral da equação homogênea correspondente é:

$$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^t. \tag{2.102}$$

Como o segundo membro da equação é da forma 2.6.2, procuraremos uma solução particular da forma:

$$y_p(t) = t(A_0)e^t.$$

O valor de $s = 1$, pois para $s = 0$ a parcela $A_0 e^t$ é solução da equação homogênea. Calculando a derivada primeira e segunda $y_p(t)$ em relação a t temos:

$$y_p'(t) = e^t(A_0 + A_0 t).$$

$$y_p''(t) = e^t(2A_0 + A_0 t).$$

Substituindo y'', y', y na equação 2.101 temos:

$$e^t(2A_0 + A_0 t) - 5e^t(A_0 + A_0 t) + 4e^t(A_0 t) = e^t$$

Simplificando o primeiro membro obtemos:

$$e^t(-3A_0) = e^t$$

logo, $A_0 = -\frac{1}{3}$. Dessa forma, uma solução particular da equação não homogênea 2.101 dada é:

$$y_p(t) = -\frac{1}{3} t e^t$$

e a solução geral da equação não homogênea é:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h + y_p \\ y(t) &= c_1 e^{4t} + c_2 e^t - \frac{1}{3} t e^t \end{aligned} \tag{2.103}$$

onde y_p é a solução particular da equação não-homogênea e y_h e a solução geral da equação homogênea.

Nas aplicações que apresentaremos no próximo capítulo daremos exemplos de equações diferenciais cujas soluções serão obtidas pelos métodos abordados neste capítulo.

3 Modelagens

3.1 Queda livre de corpos

A mecânica clássica se destaca como uma das matérias mais importantes da disciplina de Física. Dentre os diversos conceitos abordados nessa matéria, podemos destacar a queda livre, que se trata do movimento vertical de um corpo de massa m, sob influência de uma única força, a gravidade.

Vamos modelar uma situação em que um objeto é lançado para cima e desprezaremos a resistência do ar.

Suponhamos então que uma pedra é jogada para cima, conforme ilustrado na figura 1:

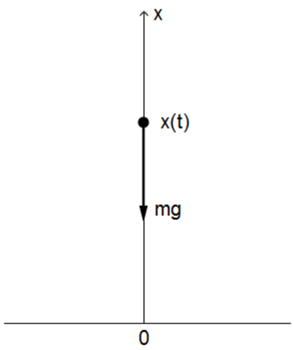


Figura 1 – Lançamento vertical da pedra.

Fonte – Elaborada pela autora

A posição da pedra tem como referência um eixo-x, com origem no solo e orientado para cima. Seja $x(t)$ a posição da pedra num instante t. Como o movimento é contrário a ação da força peso, temos, pela segunda lei de Newton, que:

$$\begin{aligned} F_{res} &= m \cdot a \\ -mg &= m \cdot x'' \end{aligned}$$

Dividindo por m ambos os lados da igualdade na equação anterior:

$$x'' = -g \tag{3.1}$$

Observe que trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem. Perceba que poderíamos aplicar um dos métodos de resolução de equações diferenciais de segunda ordem que aprendemos no capítulo anterior.

No entanto, como $x''(t) = \dfrac{dx'(t)}{dt}$ temos que $x''(t) = \dfrac{dx'(t)}{dt} = -g$ é um problema de variáveis separáveis. Logo, integrando esta equação em relação à variável t temos:

$$x'(t) = -gt + c_1 \tag{3.2}$$

O valor da constante c_1 pode ser determinado fazendo $t = 0$. Assim, temos que $c_1 = x'(0)$, logo, c_1 é a velocidade inicial da pedra no momento $t = 0$. Seja $v_0 = c_1$, podemos reescrever a equação 3.2 como:

$$x'(t) = -gt + v_0$$

Integrando a equação anterior em relação a t:

$$x(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t + c_2 \tag{3.3}$$

De forma análoga à constante c_1, o valor da constante c_2 pode ser determinada fazendo $t = 0$. Assim, temos que $x(0) = c_2$, logo, c_2 é a posição inicial da pedra no instante $t = 0$. Seja, $x_0 = c_2$, podemos reescrever a equação 3.3 como:

$$x(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t + x_0 \tag{3.4}$$

A equação 3.4 é uma das equações básicas do movimento com aceleração constante; muito utilizada para resolver problemas de dinâmica com esse comportamento.

3.2 A viscosidade do ar

Há aproximadamente 300 anos antes de Cristo, o filósofo Aristóteles acreditava que, abandonando de uma mesma altura objetos mais leves, como uma pena e mais pesados, como uma esfera de ferro, seus respectivos tempos de queda seriam distintos e estariam relacionados à massa desses objetos. A esfera de ferro cairia com uma aceleração maior do que a pena devido à massa do primeiro ser maior do que a do segundo. Assim, acreditava-se que quanto mais pesado um corpo, mais rapidamente chegaria ao solo.

Séculos depois, a partir dos experimentos de Galileu na torre inclinada de Pisa, concluiu-se que um corpo leve e um corpo pesado quando abandonados de uma mesma altura, caem simultaneamente no chão no mesmo instante. Ou seja, a diferença de massa entre os dois objetos não influi sobre a taxa de aceleração entre os mesmos, a diferença nas taxas é devida à resistência do ar.

No modelo anterior, foi desprezada a resistência do ar. Consideremos nesse modelo, o lançamento vertical de um corpo, cujo deslocamento do mesmo é verticalmente para cima. Incluiremos nesse modelo uma força de atrito agindo na direção oposta ao movimento, supondo que sua intensidade seja $F_2 = -\alpha \cdot v$. Pela segunda lei do movimento de Newton temos que, $F = m \cdot a$, onde $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ é a velocidade e α é uma constante que não depende exclusivamente do meio, mas também das dimensões do objeto. Assim analisando as forças que atuam no sistema, obtemos que a força resultante (F_{res}) é igual a soma da força peso (F_1) com a resistência do ar (F_2):

$$\begin{aligned}
F_{res} &= m \cdot a \\
F_1 + F_2 &= m \cdot a \\
-mg - \alpha \cdot v = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} & \\
-mg - \alpha \cdot \frac{dx}{dt} &= m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\
-g &= \frac{\alpha}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \\
\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dx}{dt} &= -g
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dx}{dt} = -g,$$

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$x'' + \beta \cdot x' = -g \tag{3.5}$$

onde $\beta = \frac{\alpha}{m}$.

A equação 3.5 é uma EDO, de segunda ordem, linear, não homogênea com coeficientes constantes. Perceba que poderíamos aplicar um dos métodos de resolução de equações diferenciais de

segunda ordem que aprendemos no capítulo anterior: o Método de Variação de Parâmetros (2.6.1) ou o Método dos Coeficientes a Determinar (2.6.2). Nesse modelo, optamos por utilizar o Método de Variação dos Parâmetros.
Considerando nesse problema as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v(0) = v_0$,obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'' + \beta \cdot x' = -g, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = v(0) = v_0. \end{cases}$$

Seja $x'' + \beta \cdot x' = 0$ a EDO homogênea correspondente à EDO não-homogênea 3.5. A equação característica da mesma é $r^2 + \beta \cdot r = 0$. Observe que o discriminante da equação característica é $\Delta > 0$, dessa forma, como foi visto na seção 2.5.4, teremos duas raízes reais e distintas: $r_1 = 0$ e $r_2 = -\beta$. E portanto, a solução geral da homogênea é da forma

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Substituindo os valores de r_1 e r_2 na equação anterior, temos que a solução geral da homogênea é da forma

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\beta t} \tag{3.6}$$

Pelo método Variação dos Parâmetros, queremos encontrar uma solução particular da equação não homogênea 3.5 que tenha a forma da solução geral da homogênea. Assim, substituindo os parâmetros constantes c_1 e c_2 por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ a determinar na equação 3.6 temos:

$$x(t) = u_1(t) + u_2(t) \cdot e^{-\beta t} \tag{3.7}$$

cuja derivada em relação a t é:

$$x'(t) = {u_1}'(t) + {u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t} - \beta \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t}. \tag{3.8}$$

Consideremos

$${u_1}'(t) + {u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t} = 0 \tag{3.9}$$

Assim, ${u_1}'(t) = -{u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t}$ e portanto, pela equação 3.9 temos que

$$x'(t) = -\beta \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t} \tag{3.10}$$

Derivando a equação anterior em relação a t temos que $x''(t) = \beta^2 \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t} - \beta \cdot {u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t}$.
Substituindo os valores de $x'(t)$ e $x''(t)$ na equação 3.5 temos:

$$\begin{aligned} \beta^2 \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t} - \beta \cdot {u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t} + \beta(-\beta \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t}) &= -g \\ \beta^2 \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t} - \beta \cdot {u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t} - \beta^2 \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t} &= -g \\ -\beta \cdot {u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t} &= -g \\ {u_2}'(t) &= \frac{g \cdot e^{\beta t}}{\beta} \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Utilizando as equações 3.9 e 3.11 montaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} {u_1}'(t) + {u_2}'(t) \cdot e^{-\beta t} = 0, \\ {u_2}'(t) = \frac{g \cdot e^{\beta t}}{\beta}. \end{cases}$$

A partir do método da substituição temos que $u_1'(t) = \dfrac{-g}{\beta}$.

Integrando $u_1'(t)$ em relação a t obtemos que $u_1(t) = -\dfrac{gt}{\beta} + c_1$.

Integrando $u_2'(t)$ em relação a t obtemos que $u_2(t) = \dfrac{g \cdot e^{\beta t}}{\beta^2} + c_2$.

Considerando $t = 0$ na equação 3.10 teremos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\beta \cdot u_2(t) \cdot e^{-\beta t} \\ x'(t) &= -\beta \cdot \left(\frac{g \cdot e^{\beta t}}{\beta^2} + c_2\right) \cdot e^{-\beta t} \\ x'(t) &= -\frac{g}{\beta} - \beta \cdot c_2 \cdot e^{-\beta t} \\ x(0)' &= -\frac{g}{\beta} - \beta \cdot c_2 \\ v(0) &= -\frac{g}{\beta} - \beta \cdot c_2 \\ v_0 &= -\frac{g}{\beta} - \beta \cdot c_2 \\ c_2 &= -\frac{v_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ na equação 3.7 temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= u_1(t) + u_2(t) \cdot e^{-\beta t} \\ x(t) &= -\frac{gt}{\beta} + c_1 + \left(\frac{ge^{\beta t}}{\beta^2} + c_2\right) \cdot e^{-\beta t} \\ x(t) &= -\frac{gt}{\beta} + c_1 + \frac{g}{\beta^2} + c_2 \cdot e^{-\beta t} \qquad (3.13) \end{aligned}$$

Para encontrar o valor de c_1 utilizaremos uma condição inicial do PVI: Considerando $t = 0$ na equação anterior teremos:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{gt}{\beta} + c_1 + \frac{g}{\beta^2} + c_2 \cdot e^{-\beta t} \qquad (3.14) \\ x(0) &= c_1 + \frac{g}{\beta^2} + c_2 \\ x_0 &= c_1 + \frac{g}{\beta^2} - \frac{v_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \\ c_1 &= x_0 + \frac{v_0}{\beta} \qquad (3.15) \end{aligned}$$

Encontrados os valores de c_1 e c_2 e substituindo-os na equação 3.13 temos:

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{gt}{\beta} + c_1 + \frac{g}{\beta^2} + c_2 \cdot e^{-\beta t} \\
x(t) &= -\frac{gt}{\beta} + x_0 + \frac{v_0}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} + \left(-\frac{v_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2}\right) \cdot e^{-\beta t} \\
x(t) &= -\left(\frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta}\right) \cdot e^{-\beta t} + x_0 + \frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta} - \frac{gt}{\beta} \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Agrupando-se os termos semelhantes na equação 3.16 temos que a solução da equação 3.5 é:

$$x_\beta(t) = \frac{g}{\beta^2} \cdot (-e^{-\beta t} + 1 - \beta t) + \frac{v_0}{\beta} \cdot (-e^{-\beta t} + 1) + x_0 \qquad (3.17)$$

Comparando a solução 3.17 com a solução definida pela equação 3.4 da modelagem anterior, nota-se que ambas são bastante diferentes. No entanto, é interessante observar que essas funções deverão se coincidir no limite quando $\beta \to 0$, uma vez que a equação 3.5 se reduz a 3.1 quando $\beta \to 0$.

De fato, aplicando-se a regra de L'Hospital na equação 3.17:

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \to 0} x_{\beta(t)} &= \lim_{\beta \to 0} \frac{gte^{-\beta t} - gt}{2\beta} + \frac{v_0 \cdot te^{-\beta t}}{1} + x_0 \qquad (3.18) \\
\lim_{\beta \to 0} x_{\beta(t)} &= \lim_{\beta \to 0} \frac{-gt^2 e^{-\beta t}}{2} + v_0 \cdot te^{-\beta t} + x_0 \qquad (3.19) \\
\lim_{\beta \to 0} x_{\beta(t)} &= \frac{-gt^2}{2} + v_0 t + x_0 \qquad (3.20) \\
\lim_{\beta \to 0} x_{\beta(t)} &= x_0 + v_0 t + \left(\frac{-1}{2} gt^2\right) \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Derivando a equação 3.17 em relação a t conseguimos obter mais algumas informações sobre este modelo, onde há influência da resistência do ar:

$$\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{\beta} \cdot (e^{-\beta t} - 1) + v_0 \cdot e^{-\beta t} \qquad (3.22)$$

Aplicando ao limite quando $t \to +\infty$, temos que existe uma *velocidade limite* designada por $v_\infty = \frac{-g}{\beta}$, já que $\lim_{t \to \infty} e^{-\beta t} = 0$.

A partir desses resultados, temos as seguintes informações:

- Pelo fato de existir uma velocidade limite, temos que nesse modelo, um corpo caindo verticalmente com velocidade inicial $v_0 = 0$ terá sua velocidade sempre inferior a v_∞ e sua velocidade tenderá para esse valor quando $t \to \infty$;

- Para valores apropriados da constante β é possível garantir uma queda "suave", fenômeno que ocorre na utilização de pára-quedas.

3.3 Velocidade de escape

De um modo geral, quando um projétil é lançado para cima, sua velocidade diminui até que ele pare momentaneamente e caia em direção à Terra. No entanto, para velocidades acima de um certo valor, o projétil continua sempre em ascensão, de modo que sua velocidade apenas se anula (pelo menos teoricamente) a uma distância infinita da Terra. O valor mínimo da velocidade para que isso ocorra é denominado de **velocidade de escape**.

Consideremos aqui, o problema do deslocamento vertical de uma partícula de massa m, sujeita apenas à força gravitacional da Terra. Antes de iniciarmos a análise sobre o problema, segue uma breve definição sobre a força gravitacional:

Em 1665, Isaac Newton, então com 23 anos, propôs uma lei, a **Lei da Gravitação Universal de Newton** que estabelece que toda partícula do universo atrai todas as outras com uma **força gravitacional** que tem como módulo é:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

onde m_1 e m_2 são as massas das partículas, r é a distância entre elas e G é uma constante conhecida como **constante gravitacional** que tem como valor $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg$. Assim, pela 2ª lei de Newton temos que:

$$\begin{aligned} F_{res} &= m \cdot a \\ -\frac{G \cdot m \cdot M}{x^2} &= m \cdot x'' \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde M e R são a massa e o raio da Terra, respectivamente, x é a distância entre o raio da Terra e o raio do segundo corpo.
Observe que quando $x = R$, a aceleração do corpo é a gravidade $-g$, assim,

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \tag{3.24}$$

A partir das equações 3.23 e 3.24 temos respectivamente, que:

$$x'' = -\frac{GM}{x^2} \tag{3.25}$$

e

$$GM = g \cdot R^2 \tag{3.26}$$

Substituindo 3.26 em 3.25 obtemos:

$$x'' = -\frac{gR^2}{x^2} \tag{3.27}$$

Seja $v(t) = x'(t)$ e analisando separadamente os movimentos de ascensão e queda, podemos considerar v como função de x, assim,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Substituindo $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ em 3.27 temos:

$$v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{gR^2}{x^2}$$

A equação anterior é uma EDO de 1ª ordem separável, que pode ser resolvida através de uma integração em relação a x. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} v \cdot \mathrm{d}v &= -gR^2 \cdot x^{-2}\mathrm{d}x \\ \int v \cdot \mathrm{d}v &= -gR^2 \cdot \int x^{-2}\mathrm{d}x \\ \frac{v^2}{2} &= gR^2 \cdot x^{-1} + C \\ v^2 &= \frac{2gR^2}{x} + C \end{aligned}$$

Suponhamos que para $x = R$, temos $v = v_0$ no movimento ascendente, e $v = -v_0$ no movimento descendente, assim, encontramos as seguintes expressões:

$$v_0^2 = 2gR \tag{3.28}$$

e

$$\begin{aligned} v &= \pm\sqrt{\frac{2gR^2}{x}} \\ v &= \pm\sqrt{\frac{2gR^2}{x} + 2gR - 2gR} \\ v &= \pm\sqrt{\frac{2gR^2}{x} + v_0^2 - 2gR} \\ v &= \pm\sqrt{v_0^2 + 2gR \cdot \left(\frac{R}{x} - 1\right)} \end{aligned} \tag{3.29}$$

É importante observar que o sinal positivo em 3.28 corresponde ao movimento ascendente e o sinal negativo ao movimento descendente.

A partir da equação 3.29 podemos concluir que:

Caso $v_0^2 \geq 2gR$ a velocidade nunca se anula, logo o projétil continua se movendo sempre para cima. O valor mínimo para que isso ocorra é a velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, que é denominada **velocidade de escape**.

3.4 O movimento vertical de um corpo em relação à Terra

Consideremos nesse caso dois corpos, sendo um deles a Terra, cuja massa é $m \approx 6,024 \cdot 10^{24}kg$, e um outro corpo muito menos massivo cuja massa em relação à Terra é considerada desprezível. Usaremos m_1 e r_1 para denotar a massa e o raio do segundo corpo e m_2 e r_2 como massa e raio da Terra, respectivamente. Assim, o raio vetor do centro de massa do sistema e a massa reduzida do sistema são dadas pelas seguintes equações:

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \tag{3.30}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.31}$$

Considerando como desprezível a massa do objeto m_1 em relação a massa m_2 da Terra na equação 3.30, obtemos que $R \approx r_2$. Como o valor da massa reduzida do sistema é sempre menor do que qualquer das massas m_1 ou m_2, ou seja, $\mu < m_1$ e $\mu < m_2$, dessa forma, $\mu \approx m_1$. Antes de construir o mais simples modelo que nos permita descrever o movimento vertical de um corpo em relação à Terra, de acordo com (GONDAR; CIPOLATTI, 2011) é preciso levar em consideração algumas hipóteses que serão essenciais para esse problema:

1. Nesse modelo serão consideradas somente as leis da mecânica clássicas.
2. Os corpos em questão serão considerados esferas perfeitas e homogêneas.
3. O sistema de referência terá sua origem atrelada ao centro de massa da Terra, no entanto, a origem não participará do movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo e o movimento da Terra em torno do Sol será ignorado.
4. O eixo x ficará na direção do movimento e no sentido do vetor de posição relativa do corpo em relação ao centro de massa da Terra.
5. Se compararmos a distância do corpo em relação à superfície da Terra com o raio da Terra $(R_T \approx 6,4 \cdot 10^3 km)$, teremos que a mesma será considerada insignificante.
6. Não serão consideradas forças de atrito originadas pela presença da atmosfera.
7. Estão fora de cogitação a variação da massa dos objetos.

Para descrever esse problema, serão utilizadas a 2ª lei de Newton e a lei da gravitação universal. A 2ª lei de newton é expressa matematicamente pela equação:

$$F_{res} = m \cdot a \tag{3.32}$$

Já a lei da gravitação universal é expressa matematicamente pela equação:

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d^2} \tag{3.33}$$

Sabendo que a força que descreve o movimento vertical de um corpo em relação à terra é a força de atração gravitacional entre os dois corpos, e que a aceleração nada mais é do que a derivada segunda da posição x em relação ao tempo t, podemos substituir essas informações na equação 3.32, reescrevendo-a como:

$$-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{{R_T}^2} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.34}$$

Seja $g = \frac{G \cdot M_T}{{R_T}^2}$, podemos reescrever a equação 3.34 como:

$$-g \cdot m = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Dividindo ambos os lados por m temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

que pode ser reescrita como

$$x'' = -g \tag{3.35}$$

A equação 3.35 é uma EDO, de segunda ordem, linear, não homogênea com coeficiente constante que pode ser resolvidas por métodos já vistos no capítulo 2: o método de Variação dos Parâmetros ou o método dos Coeficientes a Determinar. Optamos por utilizar aqui o método de Variação dos Parâmetros.

Considerando nesse problema as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v(0) = v_0$. Obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'' = -g, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = v(0) = v_0. \end{cases}$$

Seja a EDO homogênea correspondente $x'' = 0$, a equação característica da mesma é $r^2 = 0$. Observe que como o discriminante $\Delta = 0$, como foi visto na seção 2.5.4, teremos uma raiz real distinta, cuja solução é $r_1 = r_2 = 0$, logo, a solução geral da homogênea é da forma $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_2 t}$. Substituindo os valores de r_1 e r_2 na equação anterior, temos que a solução geral da homogênea é da forma

$$x(t) = c_1 + c_2 t \tag{3.36}$$

A partir do método Variação dos Parâmetros, iremos encontrar uma solução particular da equação não homogênea 3.35 que tenha a forma de solução geral da homogênea. Substituindo os parâmetros constantes c_1 e c_2 por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ a determinar na equação temos:

$$x = u_1(t) + u_2(t) \cdot t \tag{3.37}$$

cuja derivada é:

$$x'(t) = {u_1}'(t) + {u_2}'(t) \cdot t + u_2(t) \tag{3.38}$$

Consideremos

$${u_1}'(t) + {u_2}'(t) \cdot t = 0 \tag{3.39}$$

Assim, ${u_1}'(t) = -{u_2}'(t) \cdot t$, e portanto, pela equação 3.39 temos que

$$x'(t) = u_2(t) \tag{3.40}$$

Derivando $x'(t)$ em relação a t temos que, $x''(t) = {u_2}'(t)$.
Substituindo o valor de $x''(t)$ na equação 3.35 temos:

$${u_2}'(t) = -g \tag{3.41}$$

Utilizando as equações 3.39 e 3.41 montaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_1'(t) + u_2'(t) \cdot t = 0, \\ u_2'(t) = -g. \end{cases}$$

A partir do método da substituição temos que: $u_1'(t) = -(-gt) = gt$.

Integrando $u_1'(t)$ em relação a t obtemos que: $u_1(t) = \dfrac{gt^2}{2} + c_1$.

Integrando $u_2'(t)$ em relação a t obtemos que: $u_2(t) = -gt + c_2$.

Substituindo os valores de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ na equação 3.37 temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= u_1(t) + u_2(t) \cdot t \\ x(t) &= \frac{gt^2}{2} + c_1 + (-gt + c_2)t \\ x(t) &= \frac{gt^2}{2} + c_1 - gt^2 + c_2 \cdot t \\ x(t) &= c_1 - \frac{gt^2}{2} + c_2 \cdot t \end{aligned} \tag{3.42}$$

Para encontrar os valores de c_1 e c_2 utilizaremos as condições iniciais ditas inicialmente.
Considerando $t = 0$ na equação anterior teremos:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 - \frac{gt^2}{2} + c_2 \cdot t \\ x(0) &= c_1 \\ x_0 &= c_1 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Considerando $t = 0$ na equação 3.40 teremos:

$$\begin{aligned} x(t)' &= u_2(t) \\ x(t)' &= -gt + c_2 \\ x(0)' &= c_2 \\ v(0) &= c_2 \\ v_0 &= c_2 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Encontrados os valores de c_1 e c_2 e substituindo-os na equação 3.42 temos a solução da equação 3.34:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 - \frac{gt^2}{2} + c_2 \cdot t \\ x(t) &= x_0 - \frac{gt^2}{2} + v_0 \cdot t \\ x(t) &= x_0 + v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Assim como na modelagem de Queda livre e Viscosidade do ar, (veja as equações 3.4 e 3.21) a equação 3.45 é uma das equações básicas do movimento com aceleração constante, uma expressão bem conhecida dos cursos elementares de física.

3.5 Oscilador harmônico simples

O movimento oscilatório é aquele que acontece em torno de uma posição de equilíbrio, quando o sentido do movimento é invertido periodicamente. É um fenômeno bastante comum no cotidiano, sendo descrito por exemplo, na oscilação de um pêndulo, no movimento de um corpo preso a uma mola, no movimento das cordas de um violão e nas oscilações produzidas pelos pistões no motor de um automóvel. Segue abaixo alguns exemplos do cotidiano de movimentos oscilatórios.

Figura 2 – Exemplos de movimento oscilatórios.

Fonte – (DENIS, 2019), (VEíCULOS, 2019)

É fato que todo corpo quando sujeito a uma força sofrerá uma certa deformação. No caso da mola, quando esse corpo é deslocado da posição de equilíbrio, a mola exerce uma força elástica de restauração que tende a fazer o corpo voltar à posição de equilíbrio. Essa força é denominada força restauradora, que é contrária à força aplicada ao corpo e cuja intensidade é proporcional à deformação, assim, $F = -ky$.

Quando a força restauradora é diretamente proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio, a oscilação denomina-se movimento harmônico simples.

Consideremos o movimento no caso de um corpo suspenso, onde são desprezados a força de atrito e a massa da mola.
Sendo o centro de massa do corpo a origem do nosso sistema, no caso em que a mola esteja na posição de equilíbrio, ou seja, não esteja nem comprimida nem distendida e $y(t)$ a posição do centro de massa do corpo no instante t, com $y(t) > 0$ se a mola está esticada e $y(t) < 0$ se a mola está comprimida, (veja figura 3), utilizando a segunda lei de Newton temos que $F = m \cdot a$. Analisando as forças que atuam no sistema, obtemos que a força resultante é igual a soma da força peso (F_1) com a força restauradora (F_2):

$$F = m \cdot a \tag{3.46}$$

$$F_1 + F_2 = m \cdot a \tag{3.47}$$

$$mg - ky = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \tag{3.48}$$

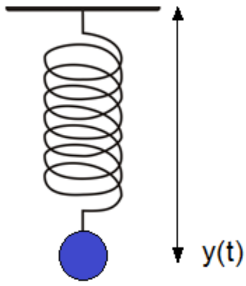


Figura 3 – Sistema massa-mola

Fonte – Elaborada pela autora

Dividindo ambos os lados da igualdade por m e isolando o termo g do restante da equação obtemos a seguinte EDO:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y = g.$$

Dadas as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$ temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k}{m} \cdot y = g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0. \end{cases}$$

Para resolver a equação anterior, uma EDO linear, de segunda ordem, não-homogênea, utilizaremos o método Variação dos Parâmetros abordado na seção 2.6.1. Observemos que a equação homogênea associada é:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y = 0.$$

cuja equação característica é:

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Logo, $r = \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$.

O sistema corpo-mola adotado constitui um oscilador harmônico simples linear, já que esse corpo executa um movimento harmônico simples. A frequência angular ω do movimento harmônico simples do corpo está relacionada à constante elástica k e à massa m do corpo pela equação $k = m \cdot \omega^2$, que nos dá:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dessa forma, $r = \pm\omega \cdot i$.

Como foi visto na seção 2.5.3, a solução geral da homogênea é da forma:

$$y_h(t) = y(t) = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \tag{3.49}$$

que é a solução geral do oscilador harmônico simples.
Queremos encontrar uma solução particular sob a forma

$$y_p(t) = u_1(t) \cdot \cos(\omega t) + u_2(t) \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \tag{3.50}$$

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são funções a determinar. Usando $y_1 = \cos(\omega t)$, $y_2 = \operatorname{sen}(\omega t)$ e $g(t) = g$, temos que o Wronskiano será:

$$W(cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t)) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \operatorname{sen}(\omega t) \\ -\omega \operatorname{sen}(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \omega$$

Logo, como foi visto na seção 2.6.1, as funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ podem ser obtidas a partir de duas equações (ver 2.87 e 2.88), dessa forma, temos :

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt} = -\int \frac{g \cdot \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} \mathrm{dt} \tag{3.51}$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t) \cdot g(t)}{W[y_1, y_2](t)} \mathrm{dt} = \int \frac{g \cdot \cos(\omega t)}{\omega} \mathrm{dt} \tag{3.52}$$

integrando, obtemos $u_1 = \dfrac{g \cos(\omega t)}{\omega^2} + c_1$ e $u_2 = \dfrac{g \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^2} + c_2$.

Substituindo os valores de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ em 3.50:

$$y_p(t) = \left(\frac{g}{\omega^2} \cos(\omega t) + c_1\right) \cdot \cos(\omega t) + \left(\frac{g}{\omega^2} \operatorname{sen}(\omega t) + c_2\right) \cdot \operatorname{sen}(\omega t).$$

Aplicando a propriedade distributiva na equação anterior obtemos:

$$y_p(t) = \frac{g}{\omega^2} \cdot \cos^2(\omega t) + c_1 \cdot \cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t). \tag{3.53}$$

Para encontrar os valores de c_1 e c_2, iremos utilizar as condições iniciais do PVI. Antes disso, calcularemos a derivada da função $y_p(t)$ em relação a t e em seguida, substituiremos os valores das condições iniciais em $y_p(t)$ e em $y_p'(t)$.

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \frac{-2\omega g}{\omega^2} \cdot [\cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}(\omega t)] - \omega c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{2\omega g}{\omega^2} \cdot [\operatorname{sen}(\omega t) \cdot \cos(\omega t)] + \omega c_2 \cos(\omega t) \\ y_p'(t) &= -\omega c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{3.54}$$

Substituindo $y_p(0) = y_0$ em 3.53 temos:

$$y(0) = \frac{g}{\omega^2} + c_1 \therefore c_1 = y_0 - \frac{g}{\omega^2}.$$

Substituindo $y_p'(0) = v_0$ em 3.54 temos:

$$y_p'(0) = \omega c_2 \therefore c_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Encontrados os valores de c_1 e c_2 e substituindo em 3.53:

$$y_p(t) = \frac{g}{\omega^2} \cdot \cos^2(\omega t) + \left(y_0 - \frac{g}{\omega^2}\right) \cdot \cos(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \operatorname{sen}(\omega t).$$

Simplificando a equação anterior obtemos a solução particular da equação 3.48:

$$y_p(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{g}{w^2} \cdot (-1 + \cos(\omega t)).$$

e solução geral:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{g}{w^2} \cdot (-1 + \cos(\omega t)) + c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t).$$

Observe que na ausência da mola, ou seja, quando $k = 0$ a equação 3.48 se reduz a $y''(t) = g$,cuja solução é $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Essa equação é semelhante à 3.35 utilizada na primeira modelagem, caracterizando-se como uma queda livre .

Nas condições impostas nessa modelagem, onde a resistência do ar é desprezada, o sistema corpo-mola fica oscilando indefinidamente, num movimento periódico em torno do ponto de equilíbrio.

3.6 Pêndulo Simples

O pêndulo simples consiste num corpo de massa m, suspenso na extremidade de um fio inextensível de comprimento l cuja massa é desprezível, que oscila à ação do próprio peso. Abaixo, seguem alguns exemplos do cotidiano que podem ser identificados como pêndulo.

(a) Exemplo de relógio de pêndulo.

(b) Balanço infantil

Figura 4 – Exemplos do cotidiano que podem ser identificados como pêndulo.

Fonte – Figura adaptada (AFINS, 2011), (ELO7, 2019)

Consideremos nessa modelagem um pêndulo simples, composto por um fio inextensível de comprimento l cujo em sua extremidade está presa uma massa m. Atentemos para os seguintes fatos:

- o movimento do pêndulo será descrito em um plano vertical,
- a massa do fio será considerada como desprezível,
- o atrito com o ar será desprezado,
- nomearemos por θ o ângulo do fio com a vertical

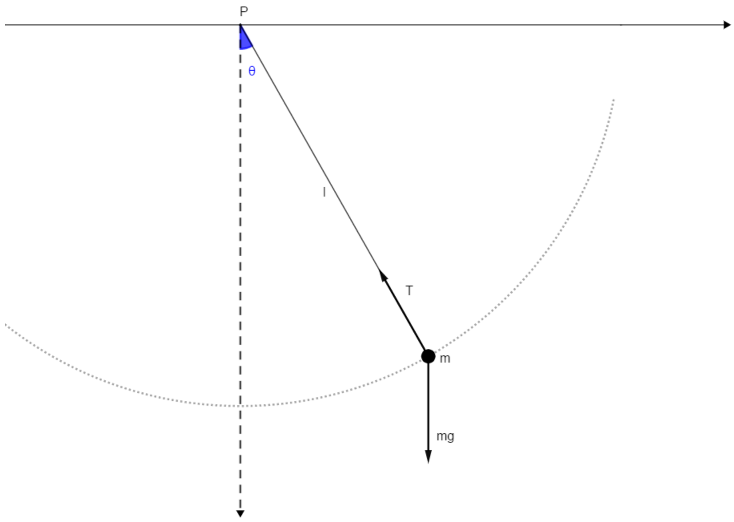


Figura 5 – Pêndulo

Fonte – Própria autora

Com base na segunda lei de Newton, temos que $F_{res} = m \cdot a$ Assim, a força resultante no eixo x será:

$$m \cdot x'' = -T \cdot \operatorname{sen}\theta \tag{3.55}$$

E no eixo y, será:

$$m \cdot y'' = mg - T \cdot \cos\theta \tag{3.56}$$

A fim de eliminar a variável T, colocaremos a mesma em evidência na equação 3.55 e substituiremos o seu valor na equação 3.56. Assim, teremos:

$$x'' \cdot \cos\theta - y'' \cdot \operatorname{sen}\theta = -g \cdot \operatorname{sen}\theta \tag{3.57}$$

Sabendo que $x = l \cdot \operatorname{sen}\theta$ e $y = l \cdot \cos\theta$, precisamos encontrar os valores de x'' e y''. Para isso, usaremos o método de derivação implícita. Deste modo, temos que

$$x'' = -l \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot (\theta')^2 + l \cdot \cos\theta \cdot \theta'' \tag{3.58}$$

$$y'' = -l \cdot \cos\theta \cdot (\theta')^2 - l \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \theta'' \tag{3.59}$$

Voltando à equação 3.57, obtida da segunda lei de Newton, e substituindo os respectivos valores de x'' e y'' na mesma:

$$\begin{aligned} x'' \cdot \cos\theta - y'' \cdot \operatorname{sen}\theta &= -g \cdot \operatorname{sen}\theta \\ l \cdot \theta'' \left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + g \cdot \operatorname{sen}\theta &= 0 \\ l \cdot \theta'' + g \cdot \operatorname{sen}\theta &= 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

A equação 3.60 é a equação do pêndulo, uma EDO de segunda ordem, não linear. No entanto, essa equação não será estudada agora. Nesse momento iremos considerar apenas pequenas oscilações do pêndulo, o que nos permite substituir $\operatorname{sen}\theta$ por θ, pois, como o ângulo θ não é grande, $\operatorname{sen}\theta$ fica muito próximo de θ. Assim, a equação do pêndulo se torna:

$$l \cdot \theta'' + g \cdot \theta = 0$$

que é a equação do oscilador harmônico simples.

3.7 Oscilador harmônico amortecido

Na seção 3.5, não consideramos a presença da força resistiva no nosso modelo, assim, o sistema corpo-mola fica oscilando indefinidamente, em movimento periódico em torno do ponto de equilíbrio. O que acontece se houver a presença da mesma?
Caso haja a presença de uma força resistiva no nosso modelo, a amplitude das oscilações diminui até o sistema corpo-mola parar. A essa diminuição da amplitude das oscilações causada por uma força resistiva denominamos amortecimento e o movimento correspondente denominamos oscilação amortecida.
Caso haja no oscilador a presença de uma força resistiva proporcional à velocidade, atuando na direção contrária ao movimento, cuja intensidade seja $F = -\alpha \cdot v$, pela segunda lei de Newton temos que:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -ky - \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{3.61}$$

onde α é uma constante positiva e $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}$ é a velocidade. Assim

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ky = 0. \tag{3.62}$$

3.62 é uma equação diferencial de segunda ordem linear homogênea conhecida por ser a equação do oscilador harmônico amortecido.

Dividindo ambos os lados da igualdade por m, temos

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m} \cdot y = 0.$$

Sabemos que a frequência angular ω é igual a $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, logo $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.
Reescreveremos então a equação anterior, substituindo $\dfrac{k}{m}$ por ω^2 e $\dfrac{\alpha}{m}$ por 2γ.
Deste modo,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 \cdot y = 0. \tag{3.63}$$

Vimos na seção 2.5.4 que equações como 3.63 possuem três casos de soluções a considerar, dependendo do sinal do discriminante, advindo da equação característica.
A equação 3.63 possui como equação característica: $r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$, logo, seu discriminante é:

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega^2 = (2\gamma)^2 - 4(\omega)^2 = \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{\alpha^2 - 4km}{m^2}$$

Dessa forma, teremos três possibilidades para Δ:

1. Quando $\Delta > 0$, $\alpha > 2\sqrt{km}$, ou seja, $\gamma > \omega$
2. Quando $\Delta = 0$, $\alpha = 2\sqrt{km}$, ou seja, $\gamma = \omega$

3. Quando $\Delta < 0$, $\alpha < 2\sqrt{km}$, ou seja, $\gamma < \omega$

Caso 1: $\Delta > 0$ e $\gamma > \omega$ - Movimento amortecido super crítico
A condição $\alpha > 2\sqrt{km}$ corresponde ao superamortecimento ou amortecimento supercrítico. Neste caso o sistema não oscila, porém retoma para sua posição de equilíbrio mais lentamente do que no caso do amortecimento crítico.
Para encontrarmos a solução geral da equação 3.63 neste caso, precisamos primeiramente encontrar as raízes da equação característica que são:

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

$$r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Desta forma, como vimos na seção 2.5.4 a solução geral para o caso 1 é:

$$y(t) = e^{-\gamma t}\left[c_1 e^{lt} + c_2 e^{-lt}\right] \tag{3.64}$$

onde $l = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, e as constantes c_1 e c_2 podem ser determinadas a partir da velocidade e posição inicial. Nesse momento não escreveremos essas expressões, pois elas não nos darão as informações que almejamos. Ao invés disso, como $\gamma > l$, calcularemos o limite da expressão 3.64 quando t tende ao infinito.
Analisando o gráfico da exponencial $e^{-\gamma t}$, observa-se que, quando t tende ao infinito, a função $e^{-\gamma t}$ tende a zero. Dessa forma, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
Sabemos que a velocidade instantânea em um instante t é dada por: $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Assim, derivando a equação 3.64 em relação a t temos:

$$v(t) = e^{-\gamma t}\cdot\left[(l-\gamma)\cdot c_1\cdot e^{lt} - (l+\gamma)\cdot c_2\cdot e^{-lt}\right] \tag{3.65}$$

Essa equação se anula em um único valor de t, cuja solução está calculada a seguir:

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\gamma t}\cdot\left[(l-\gamma)\cdot c_1\cdot e^{lt} - (l+\gamma)\cdot c_2\cdot e^{-lt}\right] \\ 0 &= 1\cdot\left[(l-\gamma)\cdot c_1\cdot e^{lt} - (l+\gamma)\cdot c_2\cdot e^{-lt}\right] \\ c_2 &= \frac{c_1\cdot e^{lt}\cdot(l-\gamma)}{e^{-lt}\cdot(l+\gamma)} \\ e^{2lt} &= \frac{c_2\cdot(l+\gamma)}{c_1\cdot(l-\gamma)} \end{aligned} \tag{3.66}$$

Dessa forma, como $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, então $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ se anula, no máximo, em um único valor de t.

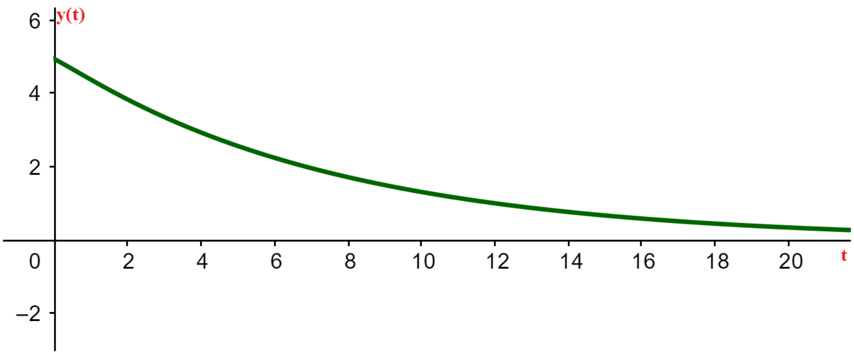


Figura 6 – Amortecimento super crítico

Caso 2: $\Delta = 0$ e $\gamma = \omega$ - Movimento amortecido crítico
Quando $\alpha = 2\sqrt{km}$ ocorre o chamado amortecimento crítico. O sistema não oscila mais e, ao ser deslocado e libertado, retoma para sua posição de equilíbrio sem oscilar.
Nesse caso, a raiz da equação característica é $r = -\gamma$. Sendo assim, como vimos na seção 2.5.4 a solução geral da equação 3.63 para o caso 2 é:

$$y(t) = e^{-\gamma t} \cdot (c_1 + tc_2) \tag{3.67}$$

cuja derivada primeira em relação a t é

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-\gamma \cdot t} \cdot [(c_2 - \gamma \cdot c_1) - c_2 \cdot \gamma \cdot t] \, .$$

Para encontrar os valores das constantes c_1 e c_2 utilizaremos as condições iniciais, $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$. Assim teremos:

$$\begin{aligned} y(0) &= e^{\gamma \cdot 0} \cdot (c_1 + 0 \cdot c_2) \\ y_0 &= c_1 \end{aligned} \tag{3.68}$$

e

$$\begin{aligned} y'(0) &= e^{-\gamma \cdot 0} \cdot [(c_2 - \gamma \cdot c_1) - c_2 \cdot \gamma \cdot 0] \\ v_0 &= -\gamma \cdot c_1 + c_2 \\ c_2 &= v_0 + \gamma \cdot y_0 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Portanto, $c_1 = y_0$, $c_2 = v_0 + \gamma \cdot y_0$ e a solução particular da equação 3.63 para o caso 2 é $y(t) = e^{-\gamma t} \cdot (y_0 + t \cdot v_0 + \gamma \cdot t \cdot y_0)$.
Assim como no caso 1, $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, já que a função $e^{-\gamma \cdot t}$ tende a zero quando $t \to \infty$. Anteriormente calculamos a derivada primeira de y em relação a t, que é a velocidade em um dado instante t. Logo, a velocidade é:

$$v(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot [(c_2 - \gamma \cdot c_1) - c_2 \cdot \gamma \cdot t]$$

De forma análoga ao caso 1, a velocidade pode se anular no máximo em um valor de t. Assim, segue o gráfico de $x(t)$ para este caso.

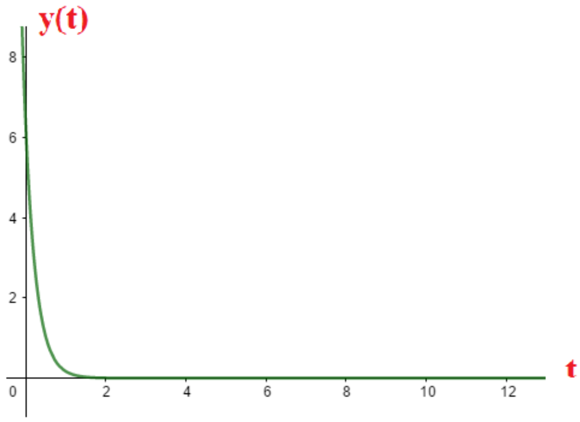


Figura 7 – Amortecimento crítico

Caso 3: $\Delta < 0$ e $\gamma < \omega$ - Movimento amortecido subcrítico

Quando $\alpha < 2\sqrt{km}$ ocorre o chamado subamortecimento. O sistema oscila com uma amplitude que diminui continuamente

Nesse caso, as raízes da equação característica são:

$$r_1 = -\gamma + il$$

$$r_2 = -\gamma - il$$

Como vimos na seção 2.5.4, a solução geral para o caso 3 é:

$$y(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot [c_1 \cdot \cos lt + c_2 \cdot \operatorname{sen} lt] \tag{3.70}$$

onde $l = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$.

Seja $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos \Phi = \dfrac{c_1}{A}$, $\operatorname{sen}\Phi = \dfrac{c_2}{A}$. Usaremos esses valores em 3.70, obtendo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos \Phi \cdot A \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos lt + \operatorname{sen}\Phi \cdot A \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \operatorname{sen} lt \\ y(t) &= A \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot (\cos \Phi \cdot \cos lt + \operatorname{sen}\Phi \cdot \operatorname{sen} lt) \\ y(t) &= A \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\Phi - lt) \end{aligned} \tag{3.71}$$

As constantes A e Φ podem ser determinadas a partir da velocidade e posição inicial. Note que, assim como nos casos anteriores, temos que $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, já que a função $e^{-\gamma \cdot t}$ tende a zero quando $t \to \infty$.

No entanto, neste caso temos um movimento oscilatório descrito pelo termo cosseno, cuja amplitude $A \cdot e^{-\gamma t}$ diminui exponencialmente no decorrer do tempo, sofrendo influência apenas do atrito.

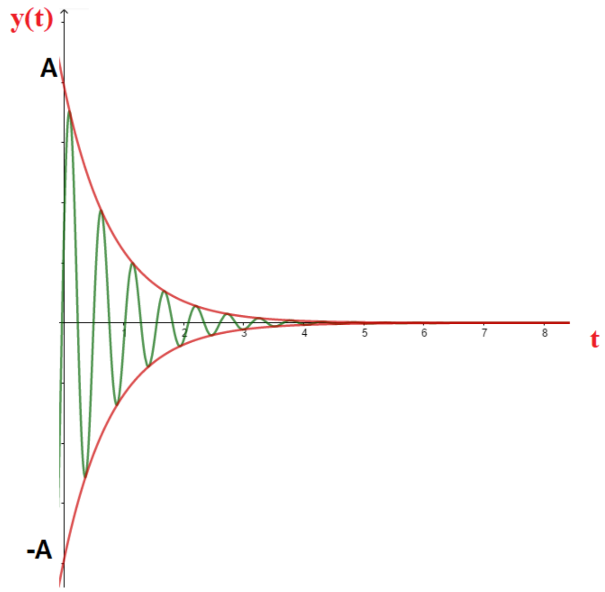


Figura 8 – Amortecimento sub-crítico

A partir da análise do gráfico, podemos ver ver que as oscilações vão diminuindo até o oscilador parar por causa do efeito do atrito.

Aplicações:

Existem situações do cotidiano que é possível notar a aplicabilidade dos casos de movimento amortecido vistos anteriormente. Geralmente, no caso da corda de um violão deseja-se o menor amortecimento possível (amortecimento subcrítico), assim, a amplitude das oscilações da corda de um violão diminuem continuamente até parar.

Já no caso do sistema de suspensão de um automóvel, as forças de amortecimento são essenciais para evitar que o carro oscile eternamente. Em busca de um maior conforto para os passageiros deseja-se um amortecimento crítico ou levemente subcritico. Caso o amortecimento seja essencialmente subcritico, o carro oscila durante um tempo ao passar por alguma saliência.

No entanto, se o amortecimento for super crítico vimos que o sistema não oscila, porém retoma sua posição de equilíbrio mais lentamente do que no caso do amortecimento crítico. Assim se o carro passar por uma saliência após a outra, e a suspensão estiver super amortecida, as molas da suspensão ainda estarão comprimidas devido à primeira saliência e não conseguirão absorver completamente o impacto.

3.8 Osciladores forçados

O oscilador forçado consiste num oscilador harmônico amortecido ou não, que recebe influência de uma força externa F, cuja equação geral é:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}^2 t} + \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ky = F(t) \tag{3.72}$$

que é a equação do oscilador harmônico amortecido e forçado.

Diferentemente de um oscilador amortecido, em que a amplitude das oscilações diminui até parar, no oscilador forçado é possível manter a amplitude das oscilações constante através da aplicação de uma força externa que varia periodicamente, com dado período e uma frequência fixa.

Trataremos aqui, o caso onde a força externa é periódica, descrita pela função cosseno. Portanto, a equação 3.72 se torna:

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}^2 t} + 2\gamma \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 \cdot y = F_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \tag{3.73}$$

onde $2\gamma = \dfrac{\alpha}{m}$, $w^2 = \dfrac{k}{m}$, ω_0 é a frequência angular de oscilação da força externa e F_0 é a força externa.

É importante ressaltar que $\omega_0 > 0$ e $F_0 > 0$ são constantes dadas. Para escrevermos a solução geral da equação 3.73, precisamos encontrar uma solução particular da mesma. Assim, de acordo com (FIGUEIREDO; NEVES, 2001) temos os seguintes casos a considerar:

Caso I - $\gamma \neq 0$ **e** $\omega \neq \omega_0$

A equação 3.73 é uma EDO de 2ª ordem, linear, não-homogênea, portanto, para encontrar uma solução particular, podemos usar o método dos coeficientes a determinar 2.6.2 ou o método de variação dos parâmetros 2.6.1. Utilizaremos nesse caso, o método dos coeficientes a determinar. Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente:

$$y'' + 2\gamma \cdot y' + \omega^2 y = 0 \tag{3.74}$$

A equação característica é:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$$

cujas raízes são: $r_1 = -\gamma + l$; $r_2 = -\gamma - l$. Dessa forma, como vimos na modelagem do oscilador harmônico amortecido (3.7) , a solução geral da equação homogênea correspondente depende dos valores de γ e ω que podem ser:

$$y_h(t) = e^{-\gamma \cdot t}\left[c_1 e^{lt} + c_2 e^{-lt}\right] \tag{3.75}$$

quando $\gamma > \omega$.

$$y_h(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot (c_1 + tc_2) \tag{3.76}$$

quando $\gamma = \omega$.

$$y_h(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot [c_1 \cdot \cos(lt) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(lt)] \tag{3.77}$$

quando $\gamma < \omega$.
O segundo membro da equação 3.73 $g(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$, pertence ao caso III, como foi visto na seção 2.6.2. Assim, procuraremos uma solução particular na forma:

$$y_p(t) = t_0 \cdot (A\cos(\omega_0 t) + B\operatorname{sen}(\omega_0 t)) = A\cos(\omega_0 t) + B\operatorname{sen}(\omega_0 t) \tag{3.78}$$

Note que, o valor de s é igual a zero, pois nenhuma parcela de $y_p(t)$ é solução da equação homogênea. A fim de obtermos uma solução particular da equação 3.73, precisamos primeiramente calcular $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$:

$$y_p'(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t) + B \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega_{w_0 t})$$

$$y_p''(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t) - B \cdot \omega_0^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Substituindo $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ na equação 3.73 temos:

$$\cos(\omega_0 t) \cdot \left[-A \cdot \omega_0^2 + 2\gamma \cdot B \cdot \omega_0 + A \cdot \omega^2\right] + \operatorname{sen}(\omega_0 t) \cdot \left[-B \cdot \omega_0^2 - 2\gamma \cdot A \cdot \omega_0 + B\omega^2\right] = Fo \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Comparando os coeficientes de $\cos(\omega_0 t)$ e de $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ obtemos o seguinte sistema linear: .

$$\begin{cases} -A \cdot \omega_0^2 + 2\gamma \cdot B \cdot \omega_0 + A \cdot \omega^2 = F_0 \\ -B \cdot \omega_0^2 - 2\gamma \cdot B \cdot \omega_0 + B \cdot \omega^2 = 0 \end{cases}$$

que tem como solução $A = F_0 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) \cdot \Delta^{-1}$ e $B = 2\gamma \cdot \omega \cdot F_0 \cdot \Delta^{-1}$, onde $\Delta = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2$.
Definamos as constantes C e Φ como: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos\Phi = \frac{A}{C}$ e $\operatorname{sen}\Phi = \frac{B}{C}$
Utilizando esses valores em 3.78, obtemos:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= C \cdot \cos(\Phi) \cdot \cos(\omega_0 t) + C \cdot \operatorname{sen}(\Phi) \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ y_p(t) &= C \cdot (\cos(\omega_0 t - \Phi)) \end{aligned} \tag{3.79}$$

Portanto, a solução geral de 3.73 é:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ y(t) &= y_h(t) + C \cdot (\cos(\omega_0 t - \Phi)) \end{aligned}$$

onde $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea associada (uma das expressões mencionadas anteriormente 3.8, conforme seja o valor de γ e ω e $y_p(t)$ é a solução particular da equação não-homogênea.
Dessa forma, o movimento de uma partícula no oscilador forçado é sujeito a uma superposição

de um movimento periódico de período $\frac{2\pi}{\omega_0}$ e de um movimento aperiódico descrito por uma das equações 3.75, 3.76, 3.77.

Note que, quando $t \to +\infty$, $y_h(t) \to 0$ e a função $y(t) \sim y_p(t)$, ou seja, a parte aperiódica tem um efeito negligenciável, decaindo exponencialmente com o decorrer do tempo, enquanto a parte periódica permanece durante todo o movimento. Assim, o movimento é essencialmente periódico, descrito pela equação 3.79. A função $y_h(t)$ é chamada *transiente* e a função $y_p(t)$ é chamada *estacionária*.

Caso II - $\gamma = 0$ **e** $\omega \neq \omega_0$

A partir das condições dadas, temos que a equação 3.73 se torna:

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}^2t} + \omega^2 \cdot y = F_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \tag{3.80}$$

onde $w^2 = \frac{k}{m}$, ω_0 é a frequência angular de oscilação da força externa e F_0 é a força externa. É importante ressaltar que $\omega_0 > 0$ e $F_0 > 0$ são constantes dadas.

A equação 3.80 possui como equação homogênea correspondente

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}^2t} + \omega^2 \cdot y = 0$$

que possui como equação característica: $r^2 + \omega^2 = 0$ e raízes $r = \pm\omega \cdot i$.

Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}^2t} + \omega^2 \cdot y = 0$ é:

$$y_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Assim como no Caso I, o segundo membro da equação 3.80 $g(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ pertence ao caso III como foi visto na seção 2.6.2. Portanto, procuramos uma solução particular na forma:

$$y_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\operatorname{sen}(\omega_0 t) \tag{3.81}$$

Novamente o valor de s é igual a zero, pois nenhuma parcela de $y_p(t)$ é solução da equação homogênea.

As derivadas primeira e segunda de $y_p(t)$ em relação a t foram calculadas no Caso I, então não calcularemos novamente, apenas substituiremos o valor de $y_p''(t)$ e $y_p(t)$ na equação 3.80:

$$\cos(\omega_0 t) \cdot \left[-A \cdot \omega_0^2 + A \cdot \omega^2\right] + \operatorname{sen}(\omega_0 t) \cdot \left[-B \cdot \omega_0^2 + B\omega^2\right] = Fo \cdot \cos(\omega_0 t) \tag{3.82}$$

Comparando os coeficientes de $\cos(\omega_0 t)$ e de $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -A \cdot \omega_0^2 + A \cdot \omega^2 = F_0 \\ -B \cdot \omega_0^2 + B \cdot \omega^2 = 0 \end{cases}$$

que tem como solução $A = \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0^2|}$ e $B = 0$. Substituindo os valores de A e B na equação 3.81, temos:

$$y_p(t) = \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Devido ao fato de $\cos(\omega t)$ ser solução da equação homogênea associada a 3.80, podemos escolher a seguinte solução particular de 3.80:

$$y_p(t) = \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \cdot \cos(\omega_0 t - \omega t)$$

Dessa forma, a solução geral de 3.80 é:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ y(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \cdot \cos(\omega_0 t - \omega t) \end{aligned}$$

onde $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea associada e $y_p(t)$ é a solução particular da equação não-homogênea.
A partir dessa informação, temos que o movimento abordado neste caso é uma superposição de dois movimentos:

- *Movimento livre:* descrito por $c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)$, que corresponde ao caso onde não há atuação de força externa, note que $F_0 = 0$, sendo assim, um movimento harmônico simples periódico, com frequência ω, onde ω é chamada frequência natural.
- *Movimento forçado:* descrito por $\frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \cdot \cos(\omega_0 t - \omega t)$, que corresponde ao oscilador harmônico

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 \cdot y = F_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.83}$$

Análise do movimento forçado
A solução geral do problema de valor inicial acima é:

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \cdot \cos(\omega t)$$

Derivando $y(t)$ em relação a t temos:

$$y'(t) = -\omega \cdot c_1 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \cdot c_2 \cos(\omega t) - \omega_0 \cdot \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0|} \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

e

$$-\omega^2 \cdot c_1 \cos(\omega t) - \omega^2 \cdot c_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) - \omega^2 \cdot \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0|} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Calculando $y(0)$ e $y'(0)$, obtemos que:

$$c_1 = -\frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0|}$$

$$c_2 = 0$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = \frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0|} \cdot (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))$$

Usando a identidade trigonométrica abaixo

$$\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) = 2\frac{F_0}{|\omega^2 - \omega_0|}\left[\operatorname{sen}\frac{(\omega - \omega_0)\cdot t}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{(\omega + \omega_0)\cdot t}{2}\right]$$

podemos reescrever a equação anterior como:

$$y(t) = \frac{2F_0}{|\omega^2 - \omega_0|} \cdot \left[\operatorname{sen}\frac{(\omega - \omega_0)\cdot t}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{(\omega + \omega_0)\cdot t}{2}\right]$$

Suponhamos que ω possua um valor muito próximo de ω_0, de forma que ω seja praticamente igual a ω_0. Desse modo, temos que a frequência do primeiro seno é muito menor do que a frequência do segundo seno, e assim, o movimento é uma oscilação de frequência $\dfrac{\omega + \omega_0}{2}$ com amplitude oscilatória $A = \dfrac{2F_0}{|\omega^2 - \omega_0|} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{(\omega - \omega_0)\cdot t}{2}$ de frequência $\dfrac{\omega - \omega_0}{2}$.
Observe que, a amplitude $A(t)$ possui um longo período se comparada com o período do segundo seno. Por isso, ela é denominada *amplitude de lenta variação* e a função $\operatorname{sen}\frac{(\omega-\omega_0)\cdot t}{2}$ é *modulada* por essa amplitude.
Esse movimento descrito por 3.83, quando $\omega \sim \omega_0$ é chamado *batimento*.

Caso III - $\gamma = 0$ **e** $\omega = \omega_0$

Neste caso, temos que a equação 3.73 se torna:

$$y'' + \omega^2 y = F_0 \cdot \cos(\omega t) \tag{3.84}$$

A equação homogênea associada é $y'' + \omega^2 = 0$, cuja equação característica é $r^2 + \omega^2 = 0$, com raízes $r = \pm\omega \cdot i$. Assim, a solução geral da equação homogênea correspondente é:

$$y_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \tag{3.85}$$

De forma análoga aos casos I e II vistos anteriormente, o termo $g(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$ pertence ao caso III, abordado na seção 2.6.2. Logo, buscamos uma solução particular na forma:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= t^1 \cdot (A\cos(\omega t) + B \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \\ y_p(t) &= A \cdot t \cdot \cos(\omega t) + B \cdot t \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned} \tag{3.86}$$

O valor de s é igual a 1, pois, para $s = 0$ as parcelas $A\cos(\omega t)$ $B\operatorname{sen}(\omega t)$ são soluções da equação homogênea 3.85. Calcularemos $y_p'(t)$, $y_p''(t)$ a fim de substituir em 3.84.

$$y_p'(t) = A \cdot \cos(\omega t) - A \cdot t \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t) + B \cdot \operatorname{sen}(\omega t) + B \cdot t \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$y_p''(t) = -A \cdot t \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) - 2A \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t) - B \cdot t \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) + 2B \cdot \omega \cos(\omega t)$$

Substituindo $y_p(t)$, $y_p''(t)$ na equação 3.84 temos:

$$\cos(\omega t) \cdot (2B \cdot \omega) + \operatorname{sen}(\omega) \cdot (-2A \cdot \omega) = Fo \cdot \cos(\omega t)$$

Comparando os coeficientes de $\cos(\omega t)$ e de $\operatorname{sen}(\omega t)$ obtemos o seguinte sistema linear: .

$$\begin{cases} 2B \cdot \omega = F_0 \\ -2A \cdot \omega = 0 \end{cases}$$

que tem como solução $A = 0$ e $B = \dfrac{F_0}{2\omega} \cdot t$.
Assim, uma solução particular da equação não-homogênea é:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A \cdot t \cdot \cos(\omega t) + B \cdot t \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \\ y_p(t) &= \frac{F_0}{2\omega} \cdot t \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da EDO 3.84 é:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ y(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{2\omega} \cdot t \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

onde $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea associada e $y_p(t)$ é a solução particular da equação não-homogênea.

O movimento abordado neste caso é a superposição de dois movimentos, um movimento harmônico simples, descrito por $y_h(t)$ e um movimento oscilatório descrito por $y_p(t)$, cuja amplitude $\left(\dfrac{F_0}{2\omega} \cdot t\right)$ é crescente quando $t \to \infty$. Isso se dá pois, quando a frequência angular natural é igual a frequência angular da força externa, a amplitude do deslocamento é máxima. Este fenômeno é conhecido como *ressonância*.
Em alguns fenômenos do cotidiano é possível notar alguns exemplos de ressonância como,

- Uma criança em um balanço: quando empurramos uma criança em um balanço com uma frequência igual a frequência natural de oscilação do balanço, obtemos oscilações com amplitude máxima. Quando a frequência com que empurramos a criança é menor ou maior do que a frequência natural de oscilação do balanço, obtemos oscilações com amplitudes menores.

- Alto-falante: Frequentemente, um alto-falante barato produz um ruído desagradável quando uma nota musical coincide com a frequência natural de oscilação da caixa ou do cone do alto-falante.

- Sistemas mecânicos: A ressonância em sistemas mecânicos pode ter caráter destrutivo. Um exemplo disso é a ponte de Broughton, na Inglaterra, que ruiu em 1831 pois uma tropa de soldados a atravessou em passo de marcha, de forma que a frequência da marcha era próxima da frequência natural da ponte, gerando consequentemente o crescimento das amplitudes da oscilação resultante que foi suficiente para quebrá-la.

3.9 Catenária

Consideremos agora um dos modelos que mais chamou a atenção de matemáticos como os irmãos Bernoulli, Gottfried Leibniz e Christiaan Huyghens no final do século $XVII$. Seja uma curva formada por um cabo flexível (ou seja, a tensão no cabo é sempre no sentido da tangente), suspenso em dois pontos e sujeito somente à força do seu próprio peso. Essa curva ocupada pelo cabo foi denominada como catenária por Gottfried Leibniz .

Apesar de a catenária ser pouco conhecida por alguns e o seu estudo ser encontrado com pequena frequência nos livros didáticos de matemática, existem diversas aplicações deste modelo na arquitetura, na construção, na natureza e no cotidiano. Abaixo seguem alguns exemplos de aplicações da catenária no cotidiano.

(a) Ponte Hercílio Luz, Florianópolis, Brasil.

Fonte (PINTEREST, 2015)

(b) Teia de Aranha.

Fonte (MTPALEY, 2009)

Figura 9 – Exemplos de catenária no cotidiano.

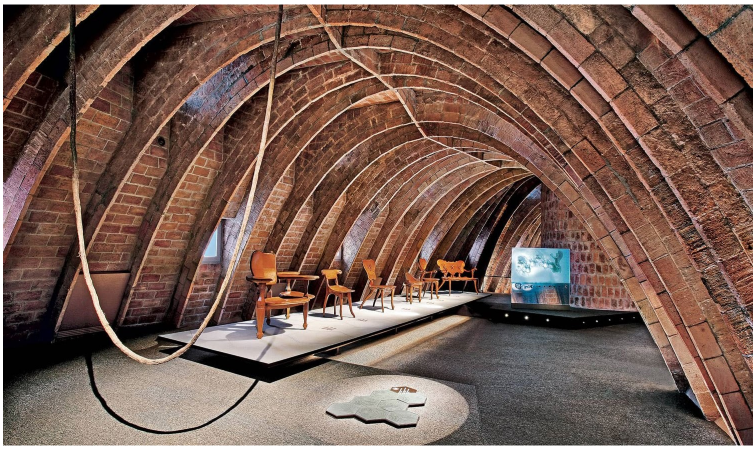


Figura 10 – Arcos catenários na Casa Milá, obra de Antoni Gaudí.

Fonte – (DOSDE, 2019)

Mostraremos agora como determinar a equação da catenária. Para isso, observe a imagem abaixo:

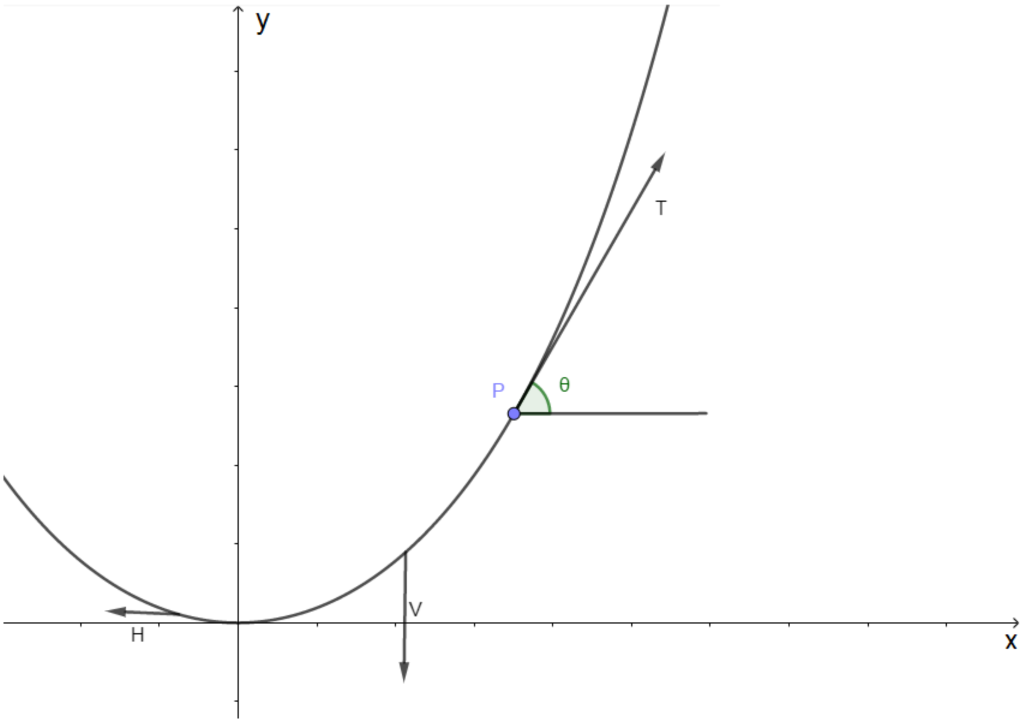


Figura 11 – Catenária no plano cartesiano.

Fonte – Elaborada pela autora

Primeiramente, consideremos um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem esteja no ponto mais baixo da curva e o eixo y coincida com a vertical. Seja s o comprimento de arco OP, com $0 = (0,0)$ e $P = (x,y)$.
Considerando que o pedaço da curva OP do cabo está em equilíbrio, temos que neste pedaço atuam três forças: $H + T + V = 0$, onde H é a tensão no ponto $O = (0,0)$, T é a tensão do cabo no ponto $P = (x,y)$ e $V = \omega s$ é a força peso do trecho OP, onde ω é o peso por unidade de comprimento e s é o comprimento do arco OP.
Devido a condição de equilíbrio, na direção x temos: $-H + T_x$=0.
Sabendo que $T_x = T\cos\theta$, temos portanto na direção x: $-H + T\cos\theta = 0$.
Na direção y temos: $-V + T_y = 0$.
Sabendo que $T_y = T\,\mathrm{sen}\theta$, temos na direção y que: $-V + T\,\mathrm{sen}\theta = 0$.
Dividindo a equação na direção y pela equação na direção x temos:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{V}{H}.$$

Sabendo que $V = \omega \cdot s$ podemos reescrever a equação anterior como:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\omega \cdot s}{H}.$$

Note que, como ω e H são constantes, substituiremos $\frac{\omega}{H}$ pela constante c. Além disso $\mathrm{tg}\theta = y'$.
Fazendo as devidas modificações obtemos: $y' = c \cdot s$.

Derivando a equação anterior em relação a x temos:

$$y'' = c \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{3.87}$$

A partir da fórmula do comprimento de arco, temos que:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2}}$$

Substituindo $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ na equação 3.87 temos:

$$\begin{aligned} y'' &= c \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2}} \\ y'' &= c \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \end{aligned} \tag{3.88}$$

Para resolver a EDO de segunda ordem anterior, iremos reduzi-la à uma EDO separável de 1ª ordem através do método de substituição de variáveis. Seja $y' = p$:

$$p' = c \cdot \sqrt{1 + p^2} \tag{3.89}$$

Utilizando o método de variáveis separáveis:

$$\begin{aligned} p' &= c \cdot \sqrt{1 + p^2} \\ \frac{p'}{\sqrt{1 + p^2}} &= c \\ \int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp &= \int c \cdot dx \\ \int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp &= cx + constante. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Para resolvermos a integral $\int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp$ faremos uma mudança de variável considerando $p = \cot\theta$. Por consequência temos que $dp = -\csc^2\theta \cdot d\theta$.
Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp &= \int \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta}} \cdot (-\csc^2\theta \cdot d\theta) \\ &= -\int \frac{\csc^2\theta}{\csc\theta} \cdot d\theta \\ &= -\int \csc\theta \cdot d\theta \\ &= -\int \frac{1}{\mathrm{sen}\theta} \cdot d\theta. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Resolveremos a integral 3.91 reescrevendo $\mathrm{sen}\theta$ como:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) &= \mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{sen}\theta &= 2\left(\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}\cdot d\theta\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}\cdot d\theta\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\cdot\left[\int \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}\cdot d\theta+\int \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}\cdot d\theta\right]\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\cdot\left[\int \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot d\theta+\int \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\text{sen}\frac{\theta}{2}}\cdot d\theta\right]\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\cdot\left[\int \frac{-2}{u_1}\cdot du_1+\int \frac{2}{u_2}\cdot du_2\right]\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\cdot(-2\ln u_1+2\ln u_2)+C\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{1}{2}\left(-2\ln\cos\frac{\theta}{2}+2\ln\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)+C\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\frac{\ln\,\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\ln\cos\frac{\theta}{2}}+C\\
-\int \frac{1}{\text{sen}\theta}\cdot d\theta &= -\ln\,\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)+C.
\end{aligned}$$

Voltando para a variável p:

$$-\ln\,\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\ln\sqrt{p^2+1}-p.$$

Portanto, levando em consideração a equação 3.90, as soluções da EDO 3.89 são da forma:

$$-\ln\left(\sqrt{p^2+1}-p\right) = cx + constante.$$

Como $p(0) = y'(0) = 0$, logo, a constante deve ser igual a zero.

$$-\ln\left(\sqrt{p^2+1}-p\right) = cx.$$

Assim, aplicando-se a exponencial em ambos os lados da equação e voltando para a variável y', temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(y')^2+1}-y' &= e^{-cx}\\
\sqrt{(p)^2+1}-p &= e^{-cx}\\
p^2+1-2p\sqrt{p^2+1}+p^2 &= e^{-2cx}\\
p^2+1-2p\cdot(e^{-cx}+p)+p^2 &= e^{-2cx}\\
1-2p\cdot e^{-cx} &= e^{-2cx}\\
p &= \frac{-e^{-2cx}+2}{2e^{-cx}}\\
p &= \frac{-e^{-cx}+e^{cx}}{2}
\end{aligned}$$

Sabemos que $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ e $p = \dfrac{e^{cx} - e^{-cx}}{2}$, logo

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} \\
y(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot e^{cx} + \frac{1}{c} \cdot e^{-cx} \right) + c_1
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

Como $y(0) = 0$, temos que a constante $c_1 = -c^{-1}$, assim

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2c} \cdot \left(e^{cx} + e^{-cx} \right) - c^{-1} \\
y(x) &= c^{-1} \left(\frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2} \right) - c^{-1} \\
y(x) &= c^{-1} \cdot (\cosh(cx) - 1)
\end{aligned}
$$

Portanto, a solução da equação 3.88 é:

$$y(x) = c^{-1} \cdot (\cosh(cx) - 1)\,.$$

Desta forma, mostramos que a curva assumida por um cabo flexível, suspenso em dois pontos e sujeito somente à força do seu próprio peso, tem como forma exata o gráfico de um cosseno hiperbólico .

3.10 Espelhos Parabólicos

O espelho parabólico é um espelho formado pela superfície de um paraboloide de revolução, ou seja, a superfície gerada pela revolução de uma parábola em torno do seu eixo. Esse espelho possui uma superfície refletora, a qual toda fonte de luz pontual incidente sobre o espelho tem seus raios refletidos paralelamente ao eixo óptico (eixo de simetria da parábola). Observe a primeira imagem da figura 12.

Ao inverter o sentido de percurso da fonte de luz obtemos uma situação análoga à anterior, dessa forma, toda fonte de luz paralela ao eixo óptico incidente em qualquer lugar do espelho se refletirá de modo que, os raios refletidos se concentrarão em um único ponto específico: o foco do espelho. Observe a segunda imagem da figura 12.

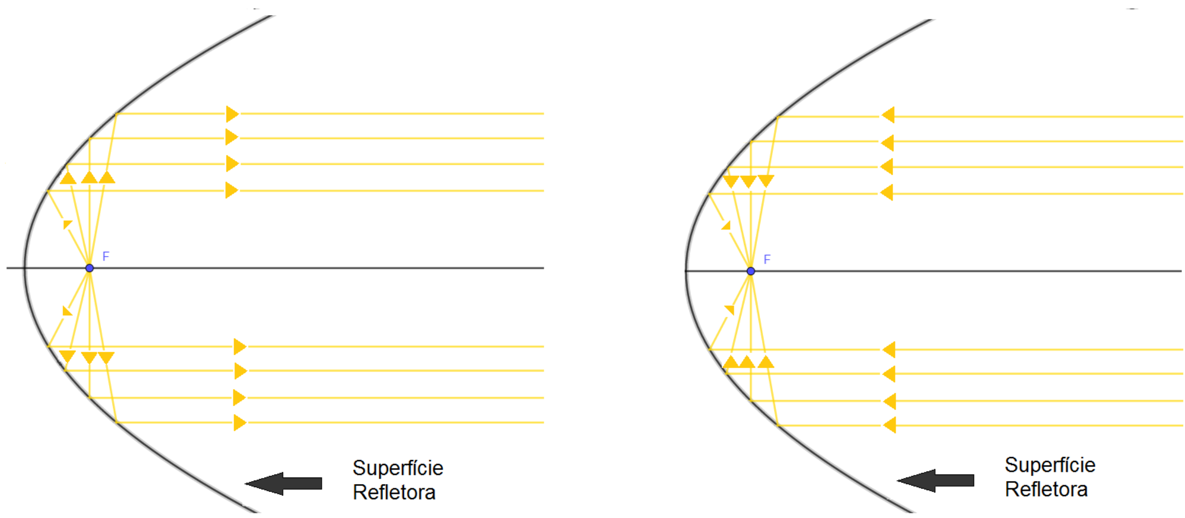


Figura 12 – Representação de Espelho Parabólico.

Fonte – Elaborada pela autora

Alguns exemplos de aplicações de espelhos parabólicos são: faróis de carro (figura 13a), telescópios refletores, antenas de recepção de sinal de TV (antenas parabólicas, figuras 13b e 14a), fogão solar (figura 14b). Além destes exemplos, este espelho é muito utilizado por dentistas para enxergar a região interna da boca dos pacientes.

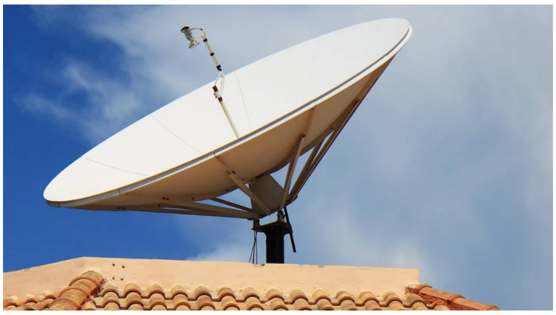
(a) Farol de parábola simples, com apenas um refletor parabólico

Fonte (RODAS, 2016)

(b) Antena Parabólica

Fonte (CENTURY, 2018)

Figura 13 – Exemplos de espelho parabólico no cotidiano.



(a) Antena Parabólica Digital

Fonte (CRONOSHARE, 2020)

(b) Fogão Solar Parabólico

Fonte (SOLAR.NET, 2011)

Figura 14 – Outros exemplos de espelho parabólico no cotidiano.

Consideremos agora o problema de determinar o formato de um espelho tal que os raios emitidos por uma fonte luminosa pontual sejam todos refletidos por esse espelho de forma paralela ao eixo óptico. A partir das explicações presentes no início dessa seção e definições da Geometria Elementar, sabemos que o espelho cujo formato atende à propriedade anterior é o parabolóide de revolução, atentando-se ao fato de que a fonte luminosa deve ser colocada no foco da parábola geradora. Nos propomos agora a demonstrar que os únicos espelhos com essa propriedade são aqueles que possuem a forma de um parabolóide de revolução.

Para isso, suponhamos que a curva procurada seja representada pelo gráfico de uma função derivável $x = g(y)$. A fim de facilitar os cálculos desse problema, escolheremos o sistema de coordenadas cartesianas de modo que, a origem desse sistema fique sobre o foco O do espelho, onde a fonte luminosa é emanada, e o eixo X seja paralelo aos raios refletidos.

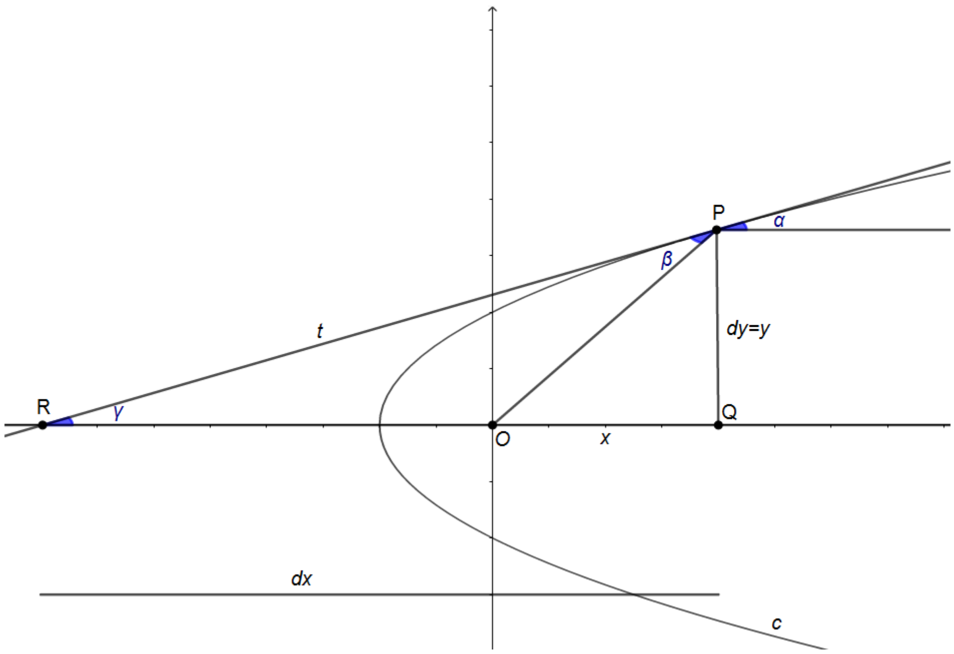


Figura 15 – Espelho parabólico

Fonte – Elaborada pela autora

Dado um ponto P qualquer sobre a curva c, e t a reta tangente à essa mesma curva c passando pelo ponto P. Seja α o ângulo formado entre a reta tangente t e o raio refletido no ponto P, e β o ângulo formado pela reta tangente t e o segmento $\overline{OP}$, temos que o ângulo $\hat{\alpha}$ é o ângulo de reflexão e o ângulo $\hat{\beta}$ é o ângulo de incidência.

A partir da lei da reflexão da Óptica Geométrica temos a seguinte igualdade, $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, essa lei estabelece que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, portanto, a igualdade anterior é válida.

Sabendo-se que ângulos de lados diretamente paralelos são iguais, temos que, $\hat{\alpha} = \hat{\lambda}$, consequentemente, $\hat{\lambda} = \hat{\beta}$ e o triângulo $P\hat{O}R$ é isósceles, dessa forma, $\overline{OP} = \overline{OR}$. A partir da análise do triângulo retângulo $P\hat{Q}O$ concluímos que $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, a partir do gráfico e das observações feitas anteriormente, temos:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}(y) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{y}{\overline{OR} + \overline{OQ}} = \frac{y}{\overline{OP} + \overline{OQ}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

Para resolver esta equação de forma mais simples, a reescreveremos como:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} &= \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \\
\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} &= \frac{x}{y} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \\
\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} &= \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \\
\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} &= \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Fazendo uma mudança de variável:

$$u = \frac{x}{y}; \qquad x = yu; \qquad \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} = u + y \cdot \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}}$$

e substituindo na equação 3.93 obtemos

$$\begin{aligned}
u + y \cdot \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}} &= u + \sqrt{1+u^2} \\
y \cdot \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}} &= \sqrt{1+u^2} \\
\frac{\mathrm{dy}}{y} &= \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{1+u^2}} \\
\int \frac{\mathrm{dy}}{y} &= \int \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{1+u^2}} \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

A integral $\int \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{1+u^2}}$ será resolvida utilizando uma substituição trigonométrica:

$$u = \operatorname{tg}\theta; \qquad \mathrm{du} = \sec^2\theta \mathrm{d}\theta$$

Reescrevendo a equação 3.94 teremos:

$$\ln|y| + c_1 = \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} d\theta$$

A partir do conhecimento de identidades trigonométricas, notamos que $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$, assim,

$$\begin{aligned}
\ln|y| + c_1 &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} \\
\ln|y| + c_1 &= \int \sec\theta \mathrm{d}\theta \\
\ln|y| &= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + c_2 \qquad (3.95)
\end{aligned}$$

Voltando $\sec\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$ para a variável u temos:

$$\ln|y| = \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right| + c_2$$

Sabemos que c_2 é uma constante, portanto, $\ln(c_2)$ também será uma constante, desde que, $c_2 > 0$. Assim, para facilitar nossos cálculos, utilizaremos $\ln(c_2)$ no lugar de c_2:

$$\begin{aligned}
\ln|y| &= \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right| + \ln c_2 \\
\ln|y| - \ln c_2 &= \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right| \qquad (3.96)
\end{aligned}$$

A fim de que possamos utilizar uma propriedade do logaritmo natural faremos a seguinte substituição: $\ln(c) = -\ln(c_2)$

$$\begin{aligned}
\ln|y| + \ln(c) &= \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right| \\
\ln|y \cdot c| &= \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right| \qquad (3.97)
\end{aligned}$$

Aplicando-se a exponencial em ambos os lados da equação:

$$y \cdot c = u + \sqrt{1 + u^2}$$

Voltando u para as variáveis x e y:

$$c \cdot y = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade anterior por y:

$$\begin{aligned} c \cdot y^2 &= x + \sqrt{x^2 + y^2} \\ (c \cdot y^2 - x) &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade anterior:

$$c^2 \cdot y^4 - 2c \cdot y^2 \cdot x + x^2 = x^2 + y^2$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por y^2:

$$c^2 \cdot y^2 - 2c \cdot x = 1$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $2c$:

$$\begin{aligned} \frac{c \cdot y^2}{2} - x &= \frac{1}{2c} \\ x &= \frac{c \cdot y^2}{2} - \frac{1}{2c} \qquad (3.98) \end{aligned}$$

A equação 3.98 representa uma família de parábolas e para encontrar o formato do espelho parabólico, basta rotacionar a parábola em torno do seu eixo, obtendo assim o parabolóide de revolução.
Dessa forma, concluímos que os únicos espelhos que atende a propriedade à qual toda fonte de luz pontual incidente sobre eles tem seus raios refletidos paralelamente ao eixo óptico são aqueles que têm a forma de um parabolóide de revolução.Atentando-se ao fato de que a fonte luminosa deve ser colocada no foco da parábola geradora.

3.11 Movimento de projéteis

Um projétil é qualquer sólido pesado que se move no espaço, abandonado a si mesmo após haver recebido impulso. Flechas, corpos impulsionados por qualquer arma de fogo, ou até mesmo objetos lançados por algo ou alguém, como aviõezinhos de papel e pedras lançadas utilizando um estilingue, são exemplos de projéteis. No caso do último exemplo, a pedra passa a ser considerada um projétil.

(a) Pontas de projétil fabricadas e utilizadas por grupos caçadores-coletores da pré-história brasileira.

Fonte (NACIONAL/UFRJ, 2020)

(b) Avião de papel, exemplo de projétil

Fonte Própria autora

Figura 16 – Exemplos de projétil no cotidiano.

A balística é uma parte da física mecânica que estuda o movimento dos projéteis (sua trajetória, os meios que atravessam etc.), especialmente das armas de fogo. Descreveremos nessa modelagem, um dos modelos mais simples que se considera em balística.

Consideremos o movimento de uma partícula de massa m, num plano (x, y) perpendicular ao solo. Consideremos o movimento de uma partícula de massa m, num plano (x,y) perpendicular ao solo. Presumamos que essa partícula sai da origem num instante $t = 0$, com uma velocidade linear v_0 e que faça um ângulo α com a horizontal. Esse ângulo é chamado ângulo de tiro. Veja a figura a seguir:

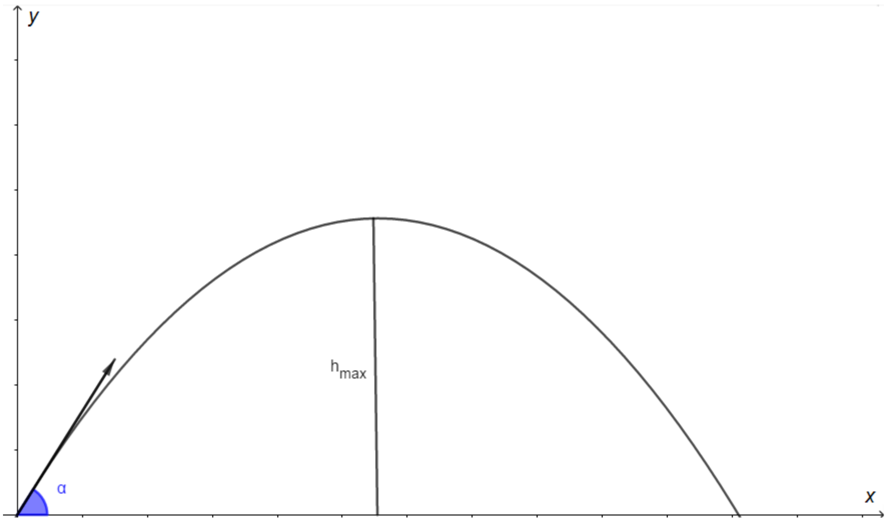


Figura 17 – Trajetória da partícula

Fonte – Própria autora

Suponhamos que a única força atuando na partícula é a força gravitacional, portanto, a resistência do ar será desprezada nesse modelo. Seja $(x(t), y(t))$ o vetor posição da partícula, temos que conforme a segunda lei de Newton:

$$F_r = m \cdot a$$

Assim, a força resultante no eixo x será:

$$\begin{aligned} F_{r,x} &= m \cdot a_x \\ 0 &= m \cdot x''; \end{aligned}$$

Note que nesse sistema não há forças horizontais, logo, $F_{r,x} = 0$.
E no eixo y a força resultante será:

$$\begin{aligned} F_{r,y} &= m \cdot a_y \\ -mg &= m \cdot y'' \end{aligned}$$

Já que há uma força vertical atuando nesse sistema, a força gravitacional, $F_{r,y} = -mg$.
Assim,

$$m \cdot x'' = 0 \quad \text{e} \quad m \cdot y'' = -mg. \tag{3.99}$$

Observe que primeira equação de 3.99 temos uma EDO de segunda ordem linear homogênea, já na segunda equação temos uma EDO de segunda ordem linear não-homogêna.
Sabendo que o vetor posição é $(x(t), y(t))$, temos que o vetor velocidade é dado por:

$$X' \equiv (x'(0), y'(0)) \equiv (v_0 \cdot \cos\alpha, v_0 \cdot \text{ sen}\alpha). \tag{3.100}$$

Integrando a equação 3.99 em relação a t:

$$x'(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \quad \text{e} \quad y'(t) = -gt + v_0 \cdot \text{sen}\alpha. \tag{3.101}$$

Agora integrando 3.101 em relação a t, tendo em vista o fato de que a posição inicial da partícula é $(0,0)$ temos:

$$x(t) = t \cdot (v_0 \cdot \cos\alpha) \quad \text{e} \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + t \cdot (v_0 \cdot \text{sen}\alpha). \tag{3.102}$$

A partir das expressões 3.101 e 3.102 conseguimos obter diversas informações sobre o problema.

- A trajetória é uma parábola:

Utilizando a primeira equação da expressão 3.102, temos que, $v_0 = \dfrac{x(t)}{t \cdot \cos\alpha}$; $t = \dfrac{x(t)}{v_0 \cdot \cos\alpha}$. Substituindo o valor de v_0 na segunda equação da expressão 3.102:

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + t \cdot (v_0 \cdot \text{sen}\alpha) \\
y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + t \cdot \left(\frac{x(t)\cdot}{t \cdot \cos\alpha} \cdot \text{sen}\alpha\right) \\
y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + x(t) \cdot \text{tg}\alpha
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Agora, substituindo o valor de t na equação 3.103:

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x(t)}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + x(t) \cdot \text{tg}\alpha \\
y(t) &= \text{tg}\alpha \cdot x(t) - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2(t)
\end{aligned}$$

O leitor poderá facilmente verificar que a equação para a trajetória é a equação de uma parábola.

- A altura máxima atingida pelo corpo:

Utilizando a segunda equação da expressão 3.101, temos que, $t = \dfrac{-y(t) + v_0\,\text{sen}\alpha}{g}$. Substituindo o valor de t na segunda equação da expressão 3.102:

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + t \cdot (v_0 \cdot \text{sen}\alpha) \\
y(t) &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{-y'(t) + v_0 \cdot \text{sen}\alpha}{g}\right)^2 + \left(\frac{-y'(t) + v_0 \cdot \text{sen}\alpha}{g}\right) \cdot (v_0 \cdot \text{sen}\alpha) \\
y(t) &= \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\alpha - (y')^2(t)}{2g}
\end{aligned}$$

Observe que teremos a altura máxima quando a componente vertical da velocidade for igual a zero, assim, a altura máxima atingida pelo corpo será:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\alpha}{2g}$$

- A duração do trajeto do corpo até colidir com o solo:

Utilizando a segunda equação da expressão 3.102, temos que,

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}gt + \cdot(v_0 \cdot \text{sen}\alpha)\right) \cdot t$$

Quando o corpo colide com o solo, a coordenada y é igual a zero, dessa forma,

$$0 = \left(-\frac{1}{2}gt + \cdot(v_0 \cdot \text{sen}\alpha)\right) \cdot t$$

Como t é o tempo de vôo do corpo, $t \neq 0$, logo,

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}gt + \cdot(v_0 \cdot \text{sen}\alpha) \\ t &= \frac{2v_0 \cdot \text{sen}\alpha}{g} \end{aligned} \tag{3.104}$$

Portanto, a duração do trajeto do corpo até colidir com o solo é $t = \dfrac{2v_0 \cdot \text{sen}\alpha}{g}$

- A distância horizontal máxima atingida pelo corpo:

Substituindo a equação 3.104 na segunda equação da expressão 3.99 temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t \\ x(t) &= (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \left(\frac{2v_0 \cdot \text{sen}\alpha}{g}\right) \\ x(t) &= \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}2\alpha}{g} \end{aligned} \tag{3.105}$$

Logo, a distância horizontal máxima atingida pelo corpo é $D_{max} = \dfrac{v_0^2 \cdot \text{sen}2\alpha}{g}$

- A distância horizontal máxima que pode ser atingida pelo corpo:

A equação 3.105 representa a distância máxima atingida pelo corpo. Ao manter v_0 constante e variar o ângulo α, encontraremos a distância horizontal máxima que o projétil pode atingir, que se dá quando $\text{sen}2\alpha$ alcança o maior valor possível. Observe que isso acontece quando o ângulo $\alpha = 45°$. Dessa forma, a distância horizontal máxima que pode ser atingida pelo corpo é:

$$D_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

4 Apêndice

Neste apêndice apresentaremos a equação de Bernoulli e a equação de Ricatti. Essas equações podem ser transformadas em equações que estudamos neste trabalho.

4.1 Equações de Bernoulli

As equações de Bernoulli são equações que podem ser escritas na seguinte forma:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^n \tag{4.1}$$

onde n é um numero inteiro, P, Q são funções contínuas em um intervalo (a, b).
Quando $n = 0$ e $n = 1$ a equação é linear, já para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ a equação torna-se não linear e para reduzi-la a uma equação linear, faz-se uma mudança de variável dependente $z = y^{1-n}$.
Fazendo a mudança de variável $z = y^{1-n}$, então $z' = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$.
Multiplicando-se a equação diferencial 4.1 por y^{-n}, obtemos:

$$y^{-n} \cdot y' + P(x) \cdot y^{(1-n)} = Q(x)$$

Substituindo os valores $z' = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ e $z = y^{(1-n)}$ na equação anterior temos:

$$z' + (1-n) \cdot P(x) \cdot z = (1-n) \cdot Q(x) \tag{4.2}$$

que é uma EDO linear de primeira ordem.
Depois e encontrada a solução geral da equação acima, devemos substituir $z = y^{(1-n)}$ a fim de encontrar a solução geral de 4.1.

Exemplo 15. *Resolva a equação*

$$y' - ry = -ky^2 \tag{4.3}$$

com $r > 0$ *e* $k > 0$ *constantes.*

Essa é uma equação de Bernoulli com $n = 2$, $P(x) = -r$ e $Q(x) = -k$. Fazendo uma mudança de variável $z = y^{-1}$, então $z' = -y^2 \cdot y'$.
Multiplicando-se a equação 4.3 por y^{-2}, obtemos:

$$y^{-2} \cdot y' - ry^{-1} = -k$$

Substituindo os valores $z' = -y^2 \cdot y'$ e $z = y^{-1}$ na equação anterior, temos;

$$z' + rz = k \tag{4.4}$$

que é uma EDO linear de primeira ordem com coeficientes constantes.
Para encontrar a solução geral da equação 4.4, utilizaremos o método do fator integrante visto na seção 2.4.2:
A partir da equação 4.4 temos que $p(x) = r$, logo,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} \\ \mu(x) &= e^{rx} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Multiplicando a EDO 4.4 pelo fator integrante, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{rx} \cdot z' + re^{rx} &= ke^{rx} \\ (e^{rx} \cdot z)' &= ke^{rx} \end{aligned}$$

Integrando em relação a x ambos os lados da igualdade na equação anterior:

$$\begin{aligned} e^{rx} \cdot z(x) &= \int ke^{rx} \\ e^{rx} \cdot z(x) &= k \cdot \frac{e^{rx}}{r} + C \\ z(x) &= \frac{k \cdot e^{rx} + rC}{re^{rx}} \end{aligned}$$

Logo, $z(x) = \dfrac{k \cdot e^{rx} + rC}{re^{rx}}$.

Como $z(x) = y^{-1} = \dfrac{1}{y(x)}$ então

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(x)} &= \frac{k \cdot e^{rx} + rC}{re^{rx}} \\ y(x) &= \frac{r}{k + rCe^{-rx}} \end{aligned}$$

Portanto, $y(x) = \dfrac{r}{k + rCe^{-rx}}$ é solução geral da EDO 4.3

4.1.1 Aplicação da Equação de Bernoulli

Apenas por curiosidade, abordaremos aqui uma aplicação onde a equação a ser estudada é uma Equação de Bernoulli.

Queda de um Corpo num Meio com Atrito

Consideremos um corpo caindo no ar, cuja força de atrito é proporcional ao quadrado da velocidade com que o corpo se move neste meio. Pela 2ª Lei de Newton temos que

$$\begin{aligned} F_{res} &= m \cdot a \\ F_1 + f_2 &= m \cdot a \\ mg - \alpha v^2 &= mv\frac{dv}{dx} \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde F_1 é a força peso, F_2 é a força de atrito contrária ao movimento do corpo e $m \cdot a = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, onde v e x são, respectivamente, a velocidade e a posição do corpo em relação ao tempo t.
Note que

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

E a sua velocidade obedece a equação diferencial de primeira ordem abaixo

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\alpha}{m}v = gv^{-1}$$

que é uma equação de Bernoulli.

4.2 Equações de Riccati

"As equações diferenciais do tipo Riccati são importantes para a construção de modelos para monitorar fenômenos associados a linhas de transmissão, teoria de ruídos e processos aleatórios, teoria do controle, problemas de difusão, etc"(NOBREGA, 2010). A seguir, veremos que na busca de solução para as equações de Riccati, é possível notar sua estreita relação com as equações de Bernoulli.
As equações de Ricatti são equações que podem ser escritas na forma:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) \tag{4.7}$$

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação de Ricatti, então essa equação pode ser resolvida fazendo a seguinte substituição $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$.
Então substituindo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em 4.7, temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dy}_1}{\mathrm{d}x} + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 &= f(x) \\ &e \\ \frac{\mathrm{dy}_2}{\mathrm{d}x} + P(x)y_2 + Q(x)y_2^2 &= f(x) \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações, obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1 - y_2) + P(x)(y_1 - y_2) + Q(x)(y_1^2 - y_2^2) = 0 \tag{4.8}$$

Sabendo que

$$z' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1 - y_2); \qquad z^2 - 2y_1 z = -y_1^2 + y_2^2;$$

e substituindo na equação 4.8 temos:

$$z' + (P(x) + 2y_1 \cdot Q(x)) \cdot z = Q(x) \cdot z^2$$

uma equação de Bernoulli com $n = 2$.

Referências

AFINS, M. de Astronomia e C. *O relógio de pêndulo*. 2011. Disponível em: <http://site.mast.br/exposicoes_hotsites/exposicao_temporaria_faz_tempo/relogio_pendulo.html>. Acesso em: 15 jul. 2020. Citado na página 71.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. [S.l.]: LTC Editora. Rio de Janeiro, 2015. Citado na página 18.

BRASIL, M. Orientações curriculares para o ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. *Secretaria de Educação Média e Tecnológica/MEC, Brasília*, p. 69, 2006. Citado na página 17.

CENTURY. *Antena parabólica*. 2018. Disponível em: <https://www.centurybr.com.br/cnews/confira-as-vantagens-de-se-ter-uma-antena-parabolica>. Acesso em: 09 dezembro. 2020. Citado na página 92.

CRONOSHARE. *Antena parabólica digital*. 2020. Disponível em: <https://www.cronoshare.com.br/quanto-custa/instalar-antena-parabolica-digital>. Acesso em: 09 dezembro. 2020. Citado na página 92.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 2009. 95 p. Citado na página 17.

DENIS. *Cordas de violão*. 2019. Disponível em: <https://blog.biologiatotal.com.br/musica-ondas-mecanicas/>. Acesso em: 07 dezembro. 2020. Citado na página 67.

DOSDE. *Arcos Catenários*. 2019. Disponível em: <https://www.dosde.com/en/la-pedrera-casa-mila-residence-visual.html>. Acesso em: 15 abril. 2020. Citado na página 86.

ELO7. *Balanço infantil*. 2019. Disponível em: <https://www.elo7.com.br/balanco-infantil-de-ferro-simples/dp/F742E3#>. Acesso em: 15 jul. 2020. Citado na página 71.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. Equaçoes diferenciais aplicadas, 2aed. *RJ, IMPA*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 79.

GONDAR, J. L.; CIPOLATTI, R. *Iniciacao a fisica matematica; Modelagem de processos e metodos de solucao*. [S.l.]: IMPA, 2011. Citado na página 63.

MOL, R. S. Introdução à história da matemática. *Belo Horizonte: CAED-UFMG*, p. 17, 2013. Citado na página 17.

MTPALEY. *Teia de Aranha*. 2009. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SpiderCatenary.jpg>. Acesso em: 15 abril. 2020. Citado na página 86.

NACIONAL/UFRJ, M. *Ponta de projétil*. 2020. Disponível em: <http://www.museunacional.ufrj.br/dir/exposicoes/arqueologia/arqueologia-brasileira/arqbra021.html>. Acesso em: 12 dezembro. 2020. Citado na página 96.

NOBREGA, P. d. N. Equações diferenciais. v.1. *RJ, Fundação CECIERJ*, 2010. Citado na página 103.

PINTEREST. *Ponte Hercílio Luz*. 2015. Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/163185186478085909/>. Acesso em: 15 abril. 2020. Citado na página 86.

RODAS, Q. *Farol de parábola simples*. 2016. Disponível em: <https://quatrorodas.abril.com.br/auto-servico/qual-a-diferenca-entre-farol-de-parabola-simples-e-o-de-dupla/>. Acesso em: 08 março. 2020. Citado na página 92.

SANTOS, R. J. Introdução às equações diferenciais ordinárias. 2007. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 53.

SOLAR.NET, F. *Fogão solar*. 2011. Disponível em: <http://www.fogaosolar.net/Tipos_fogoes.html>. Acesso em: 09 dezembro. 2020. Citado na página 92.

VEíCULOS, . *Pist es de automóvel*. 2019. Disponível em: <https://blog.101veiculos.com.br/do-1-0-ao-2-0-qual-o-motor-ideal-para-o-carro/>. Acesso em: 07 dezembro. 2020. Citado na página 67.