



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia de Produção



Trabalho de Conclusão de Curso

Problema de Movimentação de Tripper Abordado por Programação Dinâmica

Bruna Silva de Moraes

João Monlevade, MG
2019

Bruna Silva de Moraes

**Problema de Movimentação de Tripper
Abordado por Programação Dinâmica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do grau em Engenharia de Produção pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Thiago A. de O. Silva

Coorientador: Prof. Dr. Alexandre X. Martins

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2019**

M827p Morais, Bruna Silva de.
 Problema de movimentação de tripper abordado por programação dinâmica
 [manuscrito] / Bruna Silva de Morais. - 2020.

30f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Xavier Martins.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Otimização combinatória. 2. Programação dinâmica . 3. Programação
(Matemática). I. Silva, Thiago Augusto de Oliveira. II. Martins, Alexandre
Xavier. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 519.85

Catálogo: ficha.sisbin@ufop.edu.br



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS



FOLHA DE APROVAÇÃO

Bruna Silva de Moraes

Problema de Movimentação de Tripper Abordado por Programação Dinâmica

Membros da banca

Thiago Augusto de Oliveira Silva - Doutor - UFOP
Mônica do Amaral - Doutor - UFOP
Mayra Cristina Silva Santos - Engenheira - PPGE/UFOP

Versão final
Aprovado em 10 de dezembro de 2019

De acordo

Thiago Augusto de Oliveira Silva



Documento assinado eletronicamente por **Thiago Augusto de Oliveira Silva, DIRETOR DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS**, em 16/12/2019, às 21:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0028630** e o código CRC **7964A535**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.204032/2019-98

SEI nº 0028630

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: - www.ufop.br

Agradecimentos

Ninguém caminha sozinho e essa conquista só foi possível graças ao apoio que recebi. Em primeiro lugar agradeço aos meus pais por todo apoio e dedicações nesses anos. Agradeço a minha irmã e aos meus familiares por terem acreditado nesse sonho. Aos amigos não faltam agradecimentos, obrigada por estarem ao meu lado nos bons e maus momentos, em especial as meninas da República Balaio por todos os momentos incríveis.

Esse trabalho só foi possível graças ao apoio do meu orientador Thiago, obrigada pela paciência e dedicação na orientação deste trabalho.

Agradeço à Universidade Federal de Ouro Preto, professores e funcionários, o empenho na realização de suas funções foi essencial para a minha graduação.

"O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder entusiasmo."

Winston Churchill

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.0.1	Objetivos Gerais	2
1.0.2	Objetivos Específicos	2
2	REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1	Processo de Decisão de Markov	4
2.2	Programação Dinâmica	4
2.3	Políticas	5
3	METODOLOGIA DE PESQUISA	6
3.1	Definição do Problema	7
3.2	Construção do Modelo	7
3.3	Solução do Modelo	7
3.4	Validação do Modelo	7
4	MODELAGEM	8
4.1	Parâmetros	8
4.2	Variável de estado	9
4.3	Função Objetivo	9
4.4	Restrições	10
4.5	Função de transição	10
4.6	Equação de Bellman	11
4.6.1	Subproblema	11
4.7	Propostas de Novas Políticas - Aproximação por \bar{J}	12
4.7.1	Política Gulosa	12
4.7.2	Política Passos	12
4.7.3	Política Desvio Padrão	15
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	16
5.1	Análise das Folgas	16
5.2	Tempo de Execução	17
5.3	Resultados Gráficos	18
5.3.1	Política Gulosa	18
5.3.2	Política Passos	21
5.3.3	Política Desvio Padrão	25
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	29

REFERÊNCIAS	30
-------------------	----

Lista de ilustrações

Figura 1 – Processo de Beneficiamento de Minério. Fonte: Luz e Lins (2010)	1
Figura 2 – Exemplos dos equipamentos em uma mina. Fonte:Caldas (2018)	2
Figura 3 – Processo de Modelagem. Fonte: Morabito et al. (2012)	6
Figura 4 – Fases da Resolução de Um Problema de PO. Fonte: Turrioni e Mello (2012)	6
Figura 5 – Grafo das possibilidades de movimentação do Tripper.Fonte:Caldas (2018)	8
Figura 6 – Determinação de Movimentos. Fonte: O Autor(2019)	14
Figura 7 – Política Gulosa Aplicada á Instância 16_20_1. Fonte: O Autor	19
Figura 8 – Política Gulosa Aplicada á Instância 16_40_1. Fonte: O Autor	20
Figura 9 – Política Gulosa Aplicada á Instância 16_60_1. Fonte: O Autor	21
Figura 10 – Política Passos Aplicada á Instância 16_20_1. Fonte: O Autor	22
Figura 11 – Política Passos Aplicada á Instância 16_40_1. Fonte: O Autor	23
Figura 12 – Política Passos Aplicada á Instância 16_60_1. Fonte: O Autor	24
Figura 13 – Política Desvio Padrão Aplicada á Instância 16_20_1. Fonte: O Autor	26
Figura 14 – Política Desvio Padrão Aplicada á Instância 16_40_1. Fonte: O Autor	27
Figura 15 – Política Desvio Padrão Aplicada á Instância 16_60_1. Fonte: O Autor	28

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros	9
Tabela 2 – Parâmetros Política Passos	14
Tabela 3 – Parâmetros Política Desvio Padrão	15
Tabela 4 – Folgas Totais ao Final dos Estágios - Instância 16_20_1	17
Tabela 5 – Folgas Totais ao Final dos Estágios - Instância 16_40_1	17
Tabela 6 – Folgas Totais ao Final dos Estágios - Instância 16_60_1	17
Tabela 7 – Tempo de Execução das Políticas (em segundos)	18

Resumo

O presente estudo trata do problema de movimentação do tripper, um equipamento que movimenta sobre trilhos, amplamente utilizado nas plantas de beneficiamento de minério com a função de realizar a distribuição do material dentro dos silos de estocagem. Essa movimentação é feita por um operador humano, levando a ocorrências de mau posicionamento do equipamento uma vez que os silos possuem limites inferiores e superiores de capacidade. O estudo consiste em propor um modelo baseado em um processo de Decisão de Markov dentro das premissas da Programação Dinâmica, que determine qual posição o tripper deve assumir para assegurar que o nível do material dentro dos silos seja satisfatório. Foram definidas três políticas de aproximação para o modelo proposto e realizados testes com três instâncias já conhecidas na literatura para validação do modelo. Com a realização dos testes conclui-se que a abordagem por Programação Dinâmica é adequada ao problema e que o modelo conseguiu atender aos objetivos propostos.

Palavras-chave: Otimização Combinatória; Programação Dinâmica; Tripper.

Abstract

The present study deals with the tripper movement problem, a equipment that moves on rails, widely used in ore processing plants with the function of distributing the material inside the storage silos. This movement is done by a human operator, leading to occurrences of equipment mispositioning as the silos have lower and upper capacity limits. The study consists in proposing a model based on a Markov Decision process within the premises of Dynamic Programming, which determines which position the tripper should take to ensure that the level of material within the silos is satisfactory. Three approximation policies were defined for the proposed model and tests were performed with three instances already known in the literature to validate the model. With the tests it is concluded that the Dynamic Programming approach is appropriate to the problem and that the model was able to meet the proposed objectives.

Keywords: Combinatorial Optimization; Dynamic programming; Tripper.

1 Introdução

O processo de beneficiamento de minério pode ser descrito de forma simplificada a partir da Figura 1. Esse processo é apresentado no trabalho de Luz e Lins (2010), e este define as etapas de britagem, peneiramento, moagem, classificação e a separação entre concentrado e rejeito. Segundo Maciel et al. (2013) o estoque durante esse processo pode ser demandado por diversas razões, esse estoque tem grande valia quando há a necessidade de algum tipo de parada e esse é direcionado para as operações evitando assim uma parada total da mina, além disso esse estoque pode ser utilizado entre uma etapa e outra que possuem tempo de execução não alinhados.

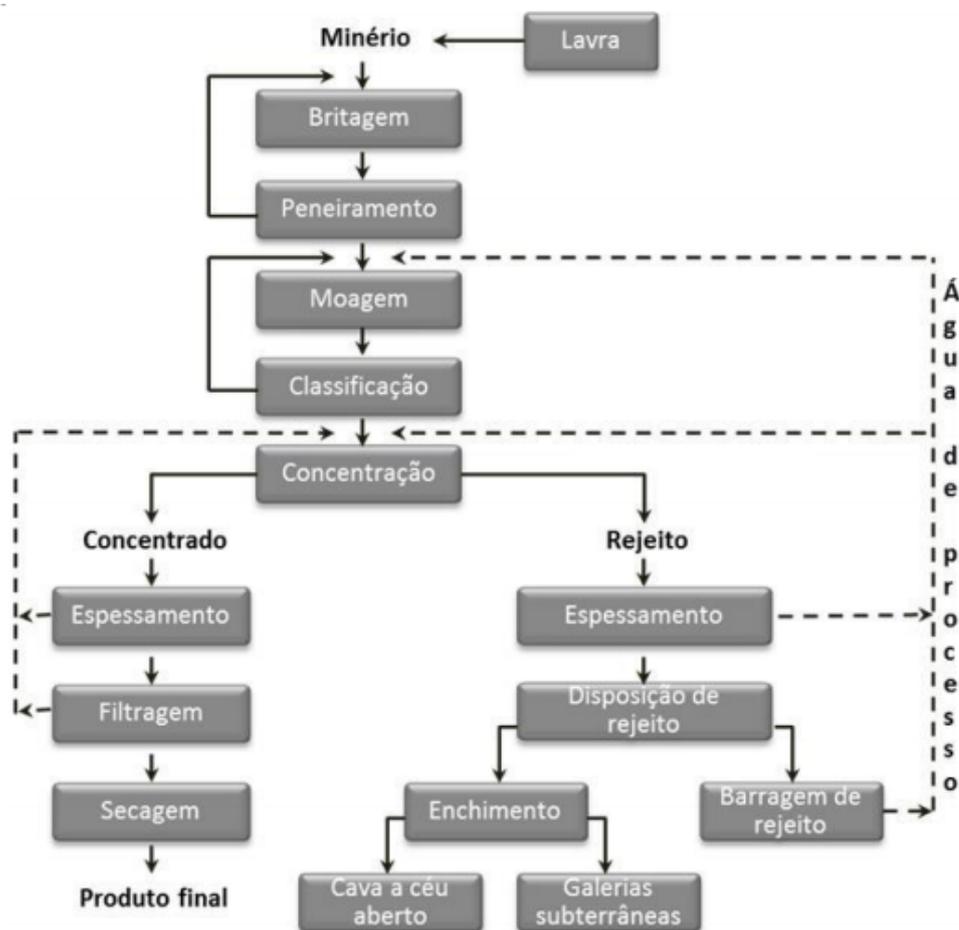


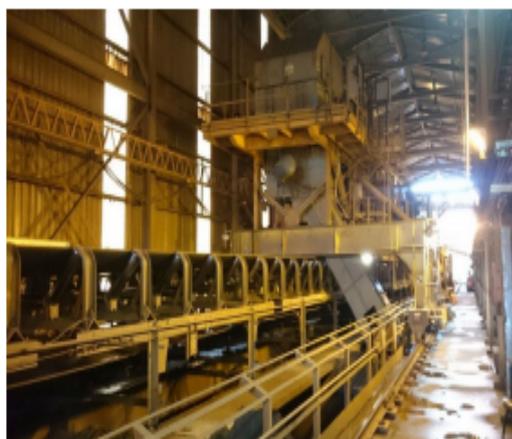
Figura 1 – Processo de Beneficiamento de Minério. Fonte: Luz e Lins (2010)

Para realizar a estocagem, como já abordado em Caldas (2018), são utilizados silos de armazenagem como os da Figura 2a. Os silos são estruturas construídas para abrigar o minério que ainda está no processo de beneficiamento e cada silo possui um compartimento ligado a um alimentador. Os alimentadores são estruturas com a função de conduzir o minério armazenado no silo para a próxima etapa do beneficiamento.

Com essa subdivisão em silos há a necessidade de utilizar um equipamento que realize a distribuição do minério de acordo com a configuração dos silos. O tripper, Figura 2b, como abordado em Campos (2014), é um equipamento instalado sobre trilhos que possibilita a movimentação ao longo de uma correia. O equipamento é responsável por receber o minério que chega pela esteira e fazer a distribuição do material entre os silos, buscando sempre manter o nível dos compartimentos com um nível de minério equilibrado.



(a) Silo de Minério



(b) Tripper

Figura 2 – Exemplos dos equipamentos em uma mina. Fonte: Caldas (2018)

Atualmente o processo de posicionamento do tripper é feito por um operador humano, esse método de tomada de decisão é descrito por Caldas (2018) como a percepção que o operador possui do processo e de observações diretas. A tomada de decisão sendo executada a partir desse método dificulta a determinação do que o autor define como estado desejável, este estado seria “um conjunto de estados viáveis para as diversas variáveis do sistema que atenda a um ou mais objetivos ao longo do tempo”(CALDAS, 2018), que basicamente consiste em manter as pilhas de minérios dentro do compartimento dos silos com um volume equilibrado, respeitando as restrições de capacidade e vazão.

1.0.1 Objetivos Gerais

Tem-se como objetivo desse estudo verificar a eficiência de uma nova abordagem do problema definido por Caldas (2018), definindo o problema de movimentação do tripper como um processo de decisão de Markov em que será utilizado um horizonte de tempo infinito.

1.0.2 Objetivos Específicos

- Estudar a movimentação do tripper, bem como o contexto e as aplicações ;

-
- Construir um modelo, adaptado à realidade, em Programação Dinâmica, que reflita as características de movimentação do tripper ;
 - Construção de políticas heurísticas para solução do problema;
 - Coletar dados partindo das instâncias adotadas por Caldas (2018) e Pedrosa (2019);
 - Realizar testes computacionais para validação dos resultados.

2 Revisão de Literatura

2.1 Processo de Decisão de Markov

Um Processo de Decisão de Markov (MDP - *Markov Decision Process*), segundo Pellegrini e Wainer (2007), é um método de formular problemas que obedecem a regra de que o efeito resultante de uma ação em um estado depende apenas dessa ação e do estado atual do sistema, além de serem são chamados de processos “de decisão”, porque modelam a possibilidade de um agente interferir sistematicamente no sistema executando ações.

Definir um problema como sendo um MDP possibilita que o princípio da Otimidade de Bellman possa ser aplicado. O princípio de Bellman (1954) garante que qualquer que tenha sido os passos anteriores, a trajetória seguinte deverá ser uma escolha ótima respeitando o estado resultante dos passos que a precedem.

2.2 Programação Dinâmica

Como definida por Powell (2007), a Programação Dinâmica consiste em procedimentos utilizados para resolver os problemas que podem ser escritos, em termos de uma função recursiva, que relaciona o valor de estar em um estado particular em um ponto no tempo para o valor dos estados seguintes em um novo ponto no tempo.

Confirmando a definição de Powell (2007), Campello (2002) também define a programação dinâmica como um método para resolver problemas de decisão sequencial ou que possuam múltiplos-estágios relacionados. A solução dessa classe de problemas pode ser feita a partir da subdivisão desses em problemas menores considerando apenas uma variável de decisão.

Algumas definições importantes para um problema ser abordado pela Programação Dinâmica são apresentadas por Powell (2007), sendo algumas apresentadas a seguir:

- **Variável de Estado:** Responsável por carregar todas as informações que serão necessárias para a tomada de decisão;
- **Variável de Decisão:** São as possíveis decisões/ações que representam como o processo é controlado;
- **Informação Exógena:** São os dados que são conhecidos em cada estágio, além de poder indicar o estado inicial do sistema;
- **Função de Transição:** Esta função determina como o sistema evolui de um estado $S^{(n)}$ para o estado $S^{(n+1)}$, levando em consideração a decisão que foi feita no n-ésimo estágio e as novas informações geradas entre os estágios (n) e (n+1);

- **Função objetiva:** Esta função especifica os custos que estão sendo minimizados ou retornos que serão maximizados, ao longo de um horizonte de tempo.

2.3 Políticas

Segundo Powell (2007) uma política é uma regra ou função que determina uma decisão com base nas informações disponíveis em um estado S_t . Uma política refere-se a qualquer método utilizado para determinar uma ação dado um estado e como resultado possibilita definir entre diversas estratégias, cada uma adequada a diferentes problemas com diferentes requisitos computacionais.

As políticas, segundo Powell (2007), podem ser agrupadas e definidas em quatro categorias:

- **Políticas Míopes** (*Myopic Policies*): Escolha da melhor ação para maximizar a contribuição no estado atual, sem considerar o impacto em decisões no futuro;
- **Políticas Antecipadas** (*Lookahead Policies*): Essas políticas tomam decisões agora, otimizando explicitamente o horizonte conhecido, combinando a aproximação de informações futuras, com a aproximação de possíveis de ações no futuro;
- **Políticas por Funções de Aproximação** (*Policy Function Approximations*): São funções que retornam diretamente uma ação dado um estado, sem recorrer a qualquer forma de otimização embutida e sem utilizar previsão de informações futuras;
- **Políticas por Aproximação de Valor** (*Value Function Approximations*): Essas políticas geralmente são consideradas gulosas pois dependem de uma aproximação do valor de estar em um futuro como resultado de uma decisão tomada no estado corrente sendo que o impacto de uma decisão agora no futuro é determinado exclusivamente através de uma função que depende do estado que resultou na decisão do presente.

3 Metodologia de Pesquisa

Este trabalho, segundo Turrioni e Mello (2012), é classificado como modelagem quantitativa axiomática normativa, uma vez que o objetivo geral consiste em redefinir um problema já abordado na literatura e trazer uma nova perspectiva a respeito deste. O problema abordado no estudo foi definido por Caldas (2018) como sendo o sequenciamento de ações de movimentação que conduzam o sistema silo-tripper para um estado desejado em um horizonte de tempo, e seguirá a abordagem de solução de problemas da Modelagem proposta por Morabito et al. (2012) exemplificada na Figura 3.

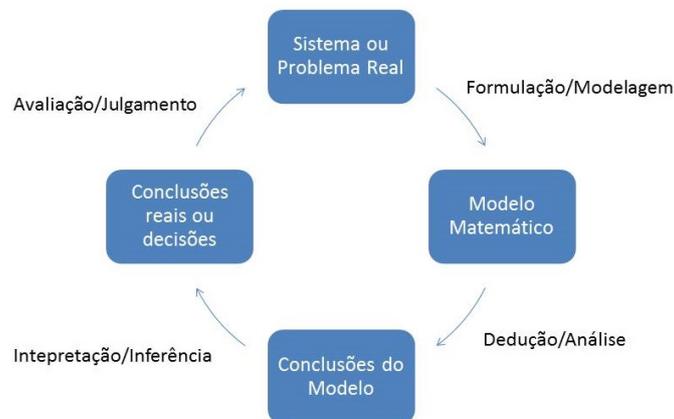


Figura 3 – Processo de Modelagem. Fonte: Morabito et al. (2012)

Para redefinir e propor um novo método de solução para o problema nos moldes da Programação Dinâmica, será utilizada a metologia proposta por Turrioni e Mello (2012). A Figura 4 representa um diagrama simplificado de qual será a sequência das etapas e qual o objetivo em realizar cada uma dessas.

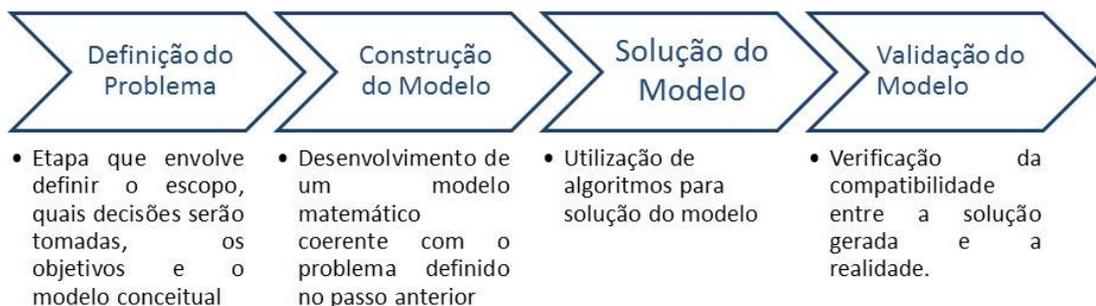


Figura 4 – Fases da Resolução de Um Problema de PO. Fonte: Turrioni e Mello (2012)

3.1 Definição do Problema

Nesta etapa, segundo Turrioni e Mello (2012), é definido o escopo do problema, as decisões de maior interesse, os objetivos relacionados e modelo conceitual sendo que modelo deve ser capaz de representar a realidade com um elevado grau de semelhança. O problema de movimentação do sistema silo-tripper foi definido por Caldas (2018) e no presente estudo será realizada a redefinição desse problema, visando adapta-lo aos moldes da Programação Dinâmica, sendo assim possível adotar um horizonte de tempo infinito.

3.2 Construção do Modelo

Posteriormente à redefinição do problema, esta etapa, definida por Turrioni e Mello (2012), será a de construção de um modelo matemático a partir do modelo conceitual definido na etapa anterior. Esse modelo busca respeitar o princípio da otimalidade de Bellman e para garantir que o princípio seja obedecido é imprescindível que o processo de decisão seja um processo Markoviano. A partir do problema definido por Caldas (2018) serão criadas as variáveis de estado, a função objetivo, a equação de Bellman e a definição da função de transição e suas restrições.

3.3 Solução do Modelo

Para efetuar a solução do modelo Turrioni e Mello (2012) sugere a utilização de algoritmos que resolvam o tipo de modelo trabalhado. Serão utilizados algoritmos conhecidos da Programação Dinâmica como o *Policy Iteration Algorithm*, e para isso serão utilizados as instâncias já abordados por Caldas (2018).

3.4 Validação do Modelo

Após a redefinição, construção e solução do modelo será feita a validação. A validação segundo Turrioni e Mello (2012) é o estágio para verificação da eficácia do modelo e das soluções geradas, a fim de possibilitar a verificação do comportamento dos dados no novo modelo serão adotadas instâncias adotadas no trabalho de Caldas (2018) .

4 Modelagem

O modelo parte do princípio de que o tripper tem movimentos limitados para fazer, como mostra a Figura 5. Essas possibilidades limitam-se em manter a mesma posição ou seguir para alguma posição adjacente sendo que a escolha da posição implica que aquele silo receberá o material transportado pelo tripper naquele estágio.

Ao definir a posição é possível que falte ou extrapole o nível de minério em algum silo. O fato pode ocorrer devido a limitação do tripper em ser posicionado em um silo a cada estágio, ou seja, ele pode não realizar um movimento e no estágio seguinte ultrapassar a capacidade daquele silo ou pode movimentar para outra posição e eventualmente faltar de minério em algum silo. Esses eventos serão controlados por variáveis de folga positivas e negativas que serão apresentadas ao longo das equações. Essas folgas serão penalizadas na função objetivo favorecendo, assim, que esses eventos ocorram com menor frequência.

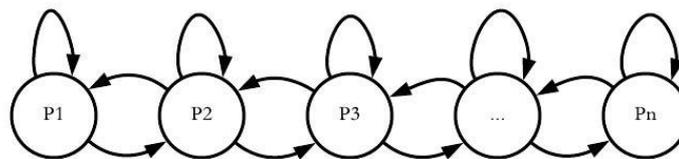


Figura 5 – Grafo das possibilidades de movimentação do Tripper. Fonte: Caldas (2018)

4.1 Parâmetros

Os dados de entrada do problema de movimentação do sistema silo-tripper estão apresentados na Tabela 3. De forma geral, os dados apresentados permitem estimar qual nível o silo assumirá em cada n -ésimo estágio a partir da relação entre as taxas de entrada t_e e saída t_s , além dos limites da capacidade do silo l_{min} e l_{max} . A partir disso, torna-se possível posicionar o tripper corretamente, uma vez que, em cada novo estágio o tripper só pode depositar o minério em um único compartimento.

Tabela 1 – Parâmetros

Parâmetro	Descrição
J	Conjunto de Silos
γ_1	Coefficiente Folga de Excesso
γ_2	Coefficiente Folga de Falta
t_e	Taxa de Entrada
t_s	Taxa de Saída
l_{max}	Limite Máximo do Silo
l_{min}	Limite Mínimo do Silo

Fonte: O autor (2019)

4.2 Variável de estado

A variável de estado é responsável por indicar o nível dos silos no n -ésimo estágio de transição. A Equação 4.1 traz a variável de estado e sua composição, essa se relaciona com a posição do silo $P^{(n)}$ e o nível de cada silo $V_j^{(n)}$ com $j \in J$ no n -ésimo estágio de decisão.

$$S^{(n)} = \begin{pmatrix} P^{(n)} \\ V_j^{(n)}, \forall j \in J \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

4.3 Função Objetivo

O objetivo consiste em maximizar o nível médio dos silos ao longo do tempo, considerando o fator de desconto e penalizando para níveis fora da faixa estabelecida. Devido ao problema ser escrito como um processo Markoviano, foi estabelecido qual seria o retorno em cada estágio.

O retorno do n -ésimo estágio do problema é uma função composta pela relação entre a variável de estágio e sua componente referente à variável de decisão $x^{(n)}$, que representa qual posição o tripper assume no n -ésimo estágio. A partir do retorno, a Equação 4.2 traz o objetivo do modelo, ou seja, maximizar os retornos de cada n -ésimo estágio, levando em consideração o estado e a posição, observando que o estado atual está relacionado ao estado e a posição no estágio anterior.

Devido a sua composição em relação ao estado e a posição do tripper a função de retorno pode ser escrita como o somatório de todas penalizações representadas por γ_1 e γ_2 em relação as folgas.

O nível de cada silo $j \in J$ é composto pela relação entre o nível anterior e a posição que o tripper assume, a Equação 4.7 apresenta como é definido o do valor do nível para cada n -ésimo estágio. As variáveis de folga representam as diferenças entre o nível de

minério e a faixa que o este pode variar. A variável $A_j^{(n)}$ representa a folga positiva e $B_j^{(n)}$ representa a folga negativa para os silos $j \in J$ em cada n -ésimo estágio.

$$\max_{x^{(n)} \in \chi^{(n)}} \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)} \left(S^{(n)} \left(S^{(n-1)}, x^{(n-1)} \right) \right) \quad (4.2)$$

$$R^{(n)} \left(S^{(n)} \left(S^{(n-1)}, x^{(n-1)} \right) \right) = \sum_{j \in J} \left(-\gamma_1 * A_j^{(n)} - \gamma_2 * B_j^{(n)} \right) \quad (4.3)$$

4.4 Restrições

As possibilidades de movimentação do tripper foram definidas pelo um conjunto χ . Se for realizada a movimentação do tripper, a condição para a mudança de posição é dada por uma função de $\chi^{(n)}$ relacionada a posição $P^{(n)}$ sendo essa pertencente ao conjunto de movimentos válidos.

As possibilidades de movimentação pertencentes ao conjunto de movimentos válidos são ir para a esquerda E, ir para a direita D e permanecer na posição C. Essas possibilidades compõem o conjunto $\chi = \{E, C, D\}$.

Levando em consideração os movimentos válidos, uma das principais restrições é apresentada da Equação 4.4. O tripper só pode estar posicionado sobre um silo a cada n -ésimo estágio. A variável $x^{(n)}$ é binária e indica o movimento $k \in \chi^{(n)}$. Sendo assim, ao somar todos os valores atribuídos à movimentação $x^{(n)}$ de um determinado estágio, o resultado deverá ser um.

$$\sum_{k \in \chi^{(n)}} x_k^{(n)} = 1 \quad (4.4)$$

$$x_k^{(n)} \in \{0, 1\} \forall k \in \chi \quad (4.5)$$

4.5 Função de transição

O progresso ao longo do tempo pode ser representado por uma função de transição, denotada por $S^{(n)} \left(S^{(n-1)}, x^{(n)} \right)$, que será responsável por atualizar todas as variáveis envolvidas no processo de decisão. Essa função está relacionada com a variável de decisão e a Equação 4.6 garante que a posição que o tripper irá assumir seja uma posição válida.

Além da posição é importante garantir que os níveis dos silos em cada estágio seja devidamente atualizado. Essa tarefa fica em cargo da Equação 4.7, onde o nível atual no n -ésimo estágio para cada silo está relacionado ao nível do estágio anterior e qual foi a taxa de entrada T_e , sendo que essa taxa só é considerada se tripper está posicionado sobre aquele silo sendo indicado pelo $I_{[P_j]}$. Além disso, é subtraída a taxa de saída T_s . Com essas operações é atualizado os níveis de cada silo $j \in J$ para cada n -ésimo estágio.

As variáveis de folga $A_j^{(n)}$ e $B_j^{(n)}$, como já dito anteriormente, são responsáveis por controlar a falta e o excesso de minérios nos silos em cada estágio analisado. A sua

atualização é feita pelas Equações 4.8 e 4.9. Elas são atualizadas por meio da comparação entre limites l_{min} e l_{max} de minério e qual volume o silo assumiu no estágio.

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} - x_E - x_D \quad (4.6)$$

$$V_j^{(n)} = V^{(n-1)}_j + I_{[P_j]} * T_e - T_s \quad (4.7)$$

$$A_j^{(n)} = \max \{V_j^{(n)} - l_{max}, 0\} \quad (4.8)$$

$$B_j^{(n)} = \max \{l_{min} - V_j^{(n)}, 0\} \quad (4.9)$$

4.6 Equação de Bellman

A Equação de Bellman é uma formulação recursiva que consiste em definir a utilidade de um determinado estado. A utilidade de cada t-ésimo estágio é definida na Equação 4.10 sendo que por definição, a Equação de Bellman leva em consideração a utilidade do estágio atual e a utilidade do próximo estágio, como mostra a Equação 4.11, trazendo assim o caráter recursivo à função. Um novo subproblema terá como função objetivo a relação denotado pela Equação 4.12.

A condição de parada é apresentada na Equação 4.13, como sendo maximizar a utilidade do primeiro estágio como uma composição da função de transição de cada t-ésimo estágio e a posição assumida pelo tripper.

$$J_{(S^t)}^{(t)} = \sum_{n=t}^{\infty} R_{(s^t)}^{(n)} \quad (4.10)$$

$$J_{(S^t)}^{(t)} = \lambda^{(t)} * R_{(s^t)}^{(t)} + J_{(S^{t+1})}^{(t+1)} \quad (4.11)$$

$$\max_{x^{(n)} \in \chi} \{R^{(n)}(x^{(n)}) + J_{(S^{(n+1)})}^{(n+1)}\} \quad (4.12)$$

$$\max_{x^t} J^1(S^{(t)}(x^t)) \quad (4.13)$$

4.6.1 Subproblema

Uma vez que o problema assume o caráter recursivo temos subproblemas para cada n-ésimo estágio. Esses subproblemas são considerados míopes por não considerar o impacto da decisão atual no estágio seguinte. Cada subproblema é composto pelo problema descrito nas Equações 4.14 e 4.16.

A aproximação por Programação Dinâmica consiste em estimar $\bar{J}^{(n+1)}$ a partir de $S^{(n)}$ e $x^{(n)}$ e resolver o subproblema apresentado na Equação 4.12 com $\bar{J}^{(n+1)}$ no lugar de $J^{(n+1)}$.

$$\max R^{(n)} \left(S^{(n)} \left(x^{(n)} \right) \right) + \bar{J}^{(n+1)} \quad (4.14)$$

s.a:

$$\sum_{k \in \chi^{(n)}} x_k^{(n)} = 1 \quad (4.15)$$

$$\text{Equações : } 6 - 9 \quad (4.16)$$

4.7 Propostas de Novas Políticas - Aproximação por \bar{J}

Sendo a definição de Equação de Bellman uma formulação para definir a utilidade do estágio atual e a utilidade do próximo estágio as políticas devem permitir ao problema tomar uma decisão não-míope, ou seja, considerando o impacto da movimentação entre todas as entidades envolvidas no problema, no caso desse problema deve ser levado em consideração o impacto da movimentação em todos os silos.

4.7.1 Política Gulosa

Para comparações e validação das políticas de aproximação por \bar{J} , será realizado o mesmo ciclo de teste em um método guloso. No método guloso a utilidade do estágio é calculado sem considerar uma aproximação por \bar{J} , sendo a tomada de decisão feita de forma míope uma vez que desconsidera o impacto da escolha nos demais silos. Nesse caso a função objetivo é definida como mostra a Equação 4.17, sendo que $R^{(n)}$ é definido segundo a Equação 4.18

$$\max_{x^{(n)} \in \chi^{(n)}} \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)} \left(S^{(n)} \left(S^{(n-1)}, x^{(n-1)} \right) \right) \quad (4.17)$$

$$R^{(n)} \left(S^{(n)} \left(S^{(n-1)}, x^{(n-1)} \right) \right) = \sum_{j \in J} \left(-\gamma_1 * A_j^{(n)} - \gamma_2 * B_j^{(n)} \right) \quad (4.18)$$

4.7.2 Política Passos

A decisão de movimentos entre as posições disponíveis pelo método guloso é dado de forma míope. A fim de considerar o impacto da movimentação nos níveis dos outros silos definiu-se a Política Passos.

A essência da política é apresentada no Algoritmo 1, uma vez que consiste em determinar quantos "passos" ou seja quantos movimentos seriam necessários para o tripper deslocar de sua posição P_{ini} para cada posição não atendida. Para ilustrar suponha que o movimento definido em um estágio n é para que o Tripper fique na posição P1, uma

vez decidido a posição corrente, a Política Passos considera quantos movimentos serão necessários para alcançar os demais silos saindo dessa posição como mostra a Figura 6.

Algoritmo 1: Cálculo do Número de Passos

Entrada: J, P_{ini}
Saída: NP_j

```

1 início
2    $NP_j \leftarrow 0, \forall j \in J$ 
3    $NP_{P_{ini}} \leftarrow 0$ 
4   se  $P_{ini} = |J|$  então
5      $cp \leftarrow 1$ 
6     para  $i = |J|$  até 0 faça
7        $NP_i \leftarrow cp$ 
8        $cp \leftarrow cp + 1$ 
9     fim
10  fim
11  se  $P_{ini} = 1$  então
12    para  $i = 2$  até  $|J|$  faça
13       $NP_i \leftarrow i - 1$ 
14    fim
15  fim
16  else
17     $cp \leftarrow 1$ 
18    para  $i = P_{ini} + 1$  até 0 faça
19       $NP_i \leftarrow cp$ 
20       $cp \leftarrow cp + 1$ 
21    fim
22     $cc \leftarrow 1$ 
23    para  $i = P_{ini}$  até  $|J|$  faça
24       $NP_i \leftarrow cc$ 
25       $cc \leftarrow cc + 1$ 
26    fim
27  end
28 fim
  
```

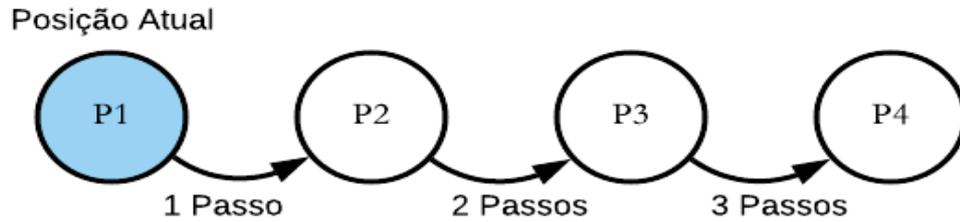


Figura 6 – Determinação de Movimentos. Fonte: O Autor(2019)

Os parâmetros da política estão contidos na Tabela 2 e os cálculos de atualização são representados pelas Equações 4.19 - 4.21. A Equação 4.19 faz a atualização dos níveis dos silos(VS_j) considerando o impacto que o número de passos ocasiona junto à taxa de saída, logo quanto mais passos são necessários maior será o declínio no nível de um silo mais distante. As equações 4.20 e 4.21 são responsáveis pelo cálculo das folgas positivas($F1$) e negativas($F2$) da mesma maneira que o problema original.

Tabela 2 – Parâmetros Política Passos

Parâmetro	Descrição
J	Conjunto de Silos
γ_1	Coefficiente Folga de Excesso
γ_2	Coefficiente Folga de Falta
t_s	Taxa de Saída
l_{max}	Limite Máximo do Silo
l_{min}	Limite Mínimo do Silo
P_{ini}	Posição Atual

Fonte: O autor (2019)

$$VS_j = VS_j - T_s * NP_j \quad (4.19)$$

$$F1_j = \max \{VS_j - l_{max}, 0\} \quad (4.20)$$

$$F2_j = \max \{l_{min} - VS_j, 0\} \quad (4.21)$$

Com a atualização do nível e das folgas é feito o cálculo do retorno local seguindo a Equação 4.22, sendo esse valor referente a contribuição de \bar{J} para o cálculo do retorno total dado pela Equação 4.14 .

$$\bar{J} = \sum_{j \in J} (-\gamma_1 * F1_j - \gamma_2 * F2_j) \quad (4.22)$$

4.7.3 Política Desvio Padrão

Segundo Lunet, Severo e Barros (2006) o desvio padrão é uma medida para cálculo de dispersão e o seu valor reflete a variabilidade das observações em relação à média da amostra sendo esse definido pela Equação 4.23.

Como um dos objetivos proposto por Caldas (2018) é homogenizar os os níveis dos silos, a decisão deve ser pautada tanto em manter os silos dentro dos limites mas também mantê-los homogêneos ou seja com baixa variabilidade entre eles. Nessa política o retorno final engloba o valor de retorno dado pela política Passos mas também com a penalização descrita da Equação 4.24 onde quanto mais desequilibrado os níveis estão maior será a penalização que o retorno local sofrerá.

Tabela 3 – Parâmetros Política Desvio Padrão

Parâmetro	Descrição
J	Conjunto de Silos
γ_1	Coefficiente Folga de Excesso
γ_2	Coefficiente Folga de Falta
NVL_j	Nível do silo j , $\forall j \in J$
$F1_j$	Folga de Excesso, $\forall j \in J$
$F2_j$	Folga de Falta, $\forall j \in J$

Fonte: O autor (2019)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j \in J} (NVL_j - \bar{NVL})^2}{|J|}} \quad (4.23)$$

$$\bar{J} = \sum_{j \in J} (-\gamma_1 * F1_j - \gamma_2 * F2_j) - \sigma \quad (4.24)$$

O retorno gerado pela Equação 4.24 é um retorno local, sendo esse valor referente a contribuição de \bar{J} para o cálculo do retorno total dado pela Equação 4.14 .

5 Resultados e Discussões

Para cada política apresentada foram feitos testes considerando três instâncias adotadas por Pedrosa (2019) e Caldas (2018), denominadas 16_20_1, 16_40_1 e 16_60_1, essas instâncias possuem 16 silos cada com seus níveis iniciais gerados aleatoriamente dentro dos limites l_{max} e l_{min} . O ciclo de teste foi realizado em uma máquina com sistema operacional Linux, Processador Intel Core i3, CPU M380, 2.53GHz, 2533 Mhz, 2 Núcleos e com 4 Processadores Lógicos. O ciclo de testes consistiu em submeter cada instâncias às três políticas sendo essas combinadas com a variação de 20, 40 e 60 estágios.

Uma das propostas de análise de resultados era realizar a comparação entre os resultados obtidos nesse estudo com os resultado da literatura abordados por Caldas (2018) e Pedrosa (2019). Após a coleta de dados não foi possível comparar em relação ao tempo e o valor final das folgas uma vez que as funções objetivo possuíam propostas diferentes.

5.1 Análise das Folgas

As folgas podem ser interpretadas como termômetro de o quanto aderente o resultado está em relação aos limites inferiores e superior estipulados. Sendo definidas da seguinte maneira:

- Folga A: representa a extrapolação do nível do silo em relação ao limite superior
- Folga B: representa o quanto o nível do silo está abaixo do limite inferior.

As Tabelas 4-6 trazem o compilado dessas folgas para cada instância, considerando o nível de todos os silos e seu comportamento com a mudança no número de estágios. O intuito desse agrupamento é mensurar o quanto os níveis extrapolaram os limites e consequentemente estabelecer um critério para julgar a eficácia das políticas.

Quando avaliado os resultados para a primeira instância, Tabela 4, fica evidente que a política gulosa quando comparada com as demais apresenta os valores mais altos para as folgas positiva e negativa. Essa diferença é explicada pelo caráter míope da decisão em não considerar o impacto do movimento nos demais silos, levando a um sistema desequilibrado onde sobra minério em um silo e ocorre a falta em outro.

Tabela 4 – Folgas Totais ao Final dos Estágios - Instância 16_20_1

		Número de Estágios					
		20		40		60	
		Folga A	Folga B	Folga A	Folga B	Folga A	Folga B
Políticas	Política Gulosa	31	10	1231	50	2869	91
	Política Passos	3	3	3	19	16	30
	Política Desvio Padrão	1	4	1	20	15	16

Fonte: O autor (2019)

No caso da segunda instância, Tabela 5, mesmo a política gulosa demonstrando bons resultados, as demais são mais assertivas em controlar os níveis dos silos. Essa condição pode ser vista no caso de 40 estágios, a política gulosa deixou faltar (Folga B), no acumulado, 81 unidades de minério sendo que as demais políticas conseguiram manter esse valor em 33 unidades apresentando uma redução de aproximadamente 60% no valor da folga.

Tabela 5 – Folgas Totais ao Final dos Estágios - Instância 16_40_1

		Número de Estágios					
		20		40		60	
		Folga A	Folga B	Folga A	Folga B	Folga A	Folga B
Políticas	Política Gulosa	0	19	0	81	0	132
	Política Passos	0	12	0	33	105	61
	Política Desvio Padrão	0	12	0	33	3	61

Fonte: O autor (2019)

O comportamento das políticas na instância 16_60_1 ocorreu da maneira esperada. Como mostra a Tabela 6, a política gulosa apresenta maiores valores para as folgas enquanto as políticas passos e desvio padrão conseguem uma redução nos valores. A peculiaridade dessa instância é que para o teste com 20 cenários a política gulosa controlou melhor o nível dos silos, não havendo ocorrência de excesso e o valor da falta sendo próxima do encontrado para as demais políticas.

Tabela 6 – Folgas Totais ao Final dos Estágios - Instância 16_60_1

		Número de Estágios					
		20		40		60	
		Folga A	Folga B	Folga A	Folga B	Folga A	Folga B
Políticas	Política Gulosa	0	10	151	66	160	121
	Política Passos	46	14	100	39	101	56
	Política Desvio Padrão	46	14	100	39	151	66

Fonte: O autor (2019)

5.2 Tempo de Execução

O tempo gasto para resolução do problema e a aplicação das políticas teve grande destaque, uma vez que os modelos propostos por Caldas (2018) e Pedrosa (2019) demandam

maior tempo de execução por serem modelos exatos. Quanto a avaliação entre as políticas, o método pelo Desvio Padrão mesmo contando com um número maior de etapas para sua execução apresentou resultados melhores que alguns cenários das outras políticas como no caso de 60 estágios para a instância 16_20_1 com tempo de 1.56 enquanto as demais políticas 2.11 e 1.97 para o método guloso e passos respectivamente.

Tabela 7 – Tempo de Execução das Políticas (em segundos)

Instâncias	Política Gulosa			Política Passos			Política Desvio		
	Número de Estágios								
	20	40	60	20	40	60	20	40	60
Instância 16_20_1	1.58	3.86	2.11	1.36	1.39	1.97	1.13	2.25	1.56
Instância 16_40_1	1.59	2.25	2.27	3.34	1.33	2.98	3.00	3.64	2.49
Instância 16_60_1	0.76	0.49	2.79	0.72	1.14	5.89	1.06	1.01	3.44

Fonte: O autor (2019)

5.3 Resultados Gráficos

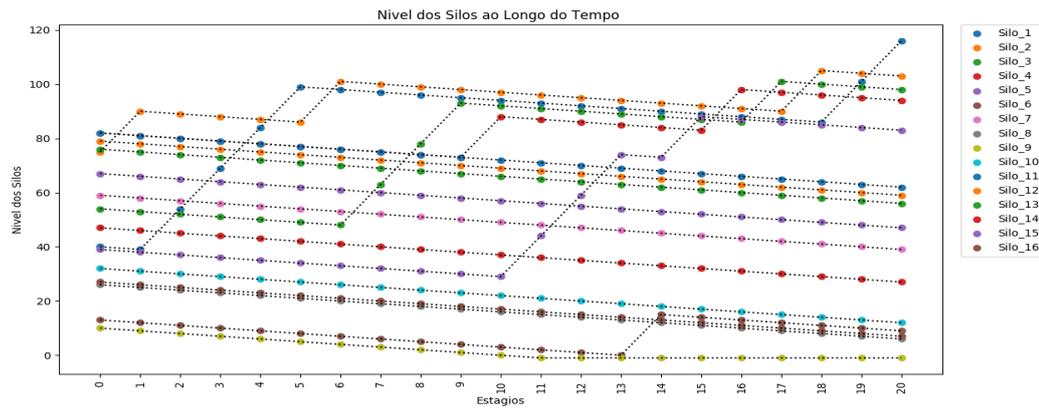
O fator decisivo para avaliar a eficácia do modelo é avaliar como foi o comportamento do nível dos silos ao longo dos estágios e qual a influência das políticas nesse cenário, por isso será feito uma avaliação passando por cada política e suas iterações ao longo dos estágios.

Dentro desses cenários, o comportamento ideal é que os níveis se encontrem dentro dos limites l_{min} e l_{max} e que não ocorra grande amplitude entre os níveis dos silos, ou seja, quanto mais homogêneo e dentro dos limites os dados se encontrarem, implica que a política conseguiu alcançar um bom desempenho.

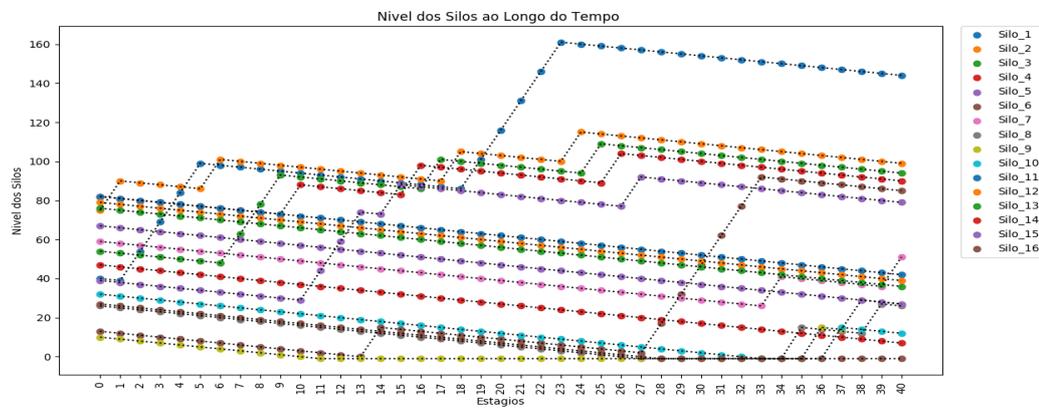
5.3.1 Política Gulosa

Essa política tem foco em manter as folgas sobre controle, sem considerar qual será o impacto da decisão atual ao longo dos próximo estágios. O que fica evidenciado nos testes é a dificuldade em contornar a tendência de queda do nível dos silos, como mostra a Figura 9, que é a política aplicada na instância 16_60_1, desde o início das iterações o nível de grande parte dos silos entrem em declínio e levam a falta de minério no silo quanto atinge cerca de 40% do número total de estágios.

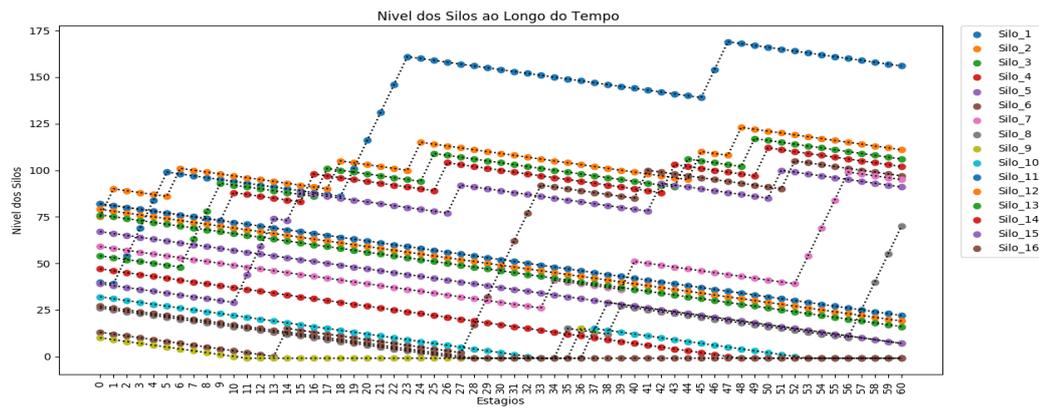
A deficiência em manter o nível dos silos dentro dos limites pode ser identificada para as demais instâncias, como mostram as Figuras 7 e 8 mesmo com um número menor de estágios ela não conseguiu contornar o declínio dos níveis. Além disso, nesses dois casos a política não garantiu que níveis mantivessem baixa amplitude entre os níveis dos silos.



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios

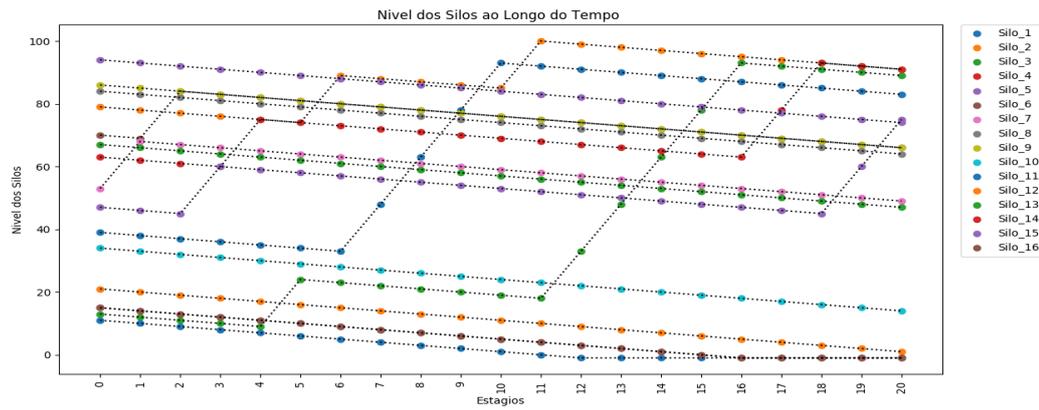


(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios

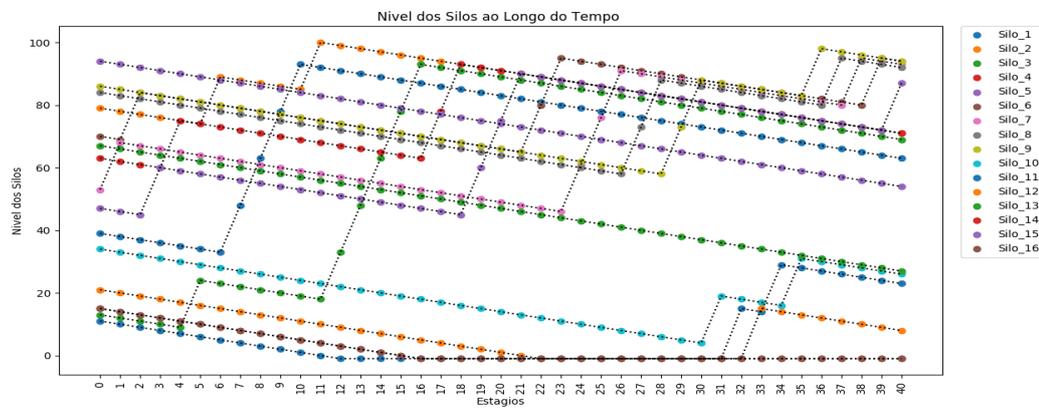


(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

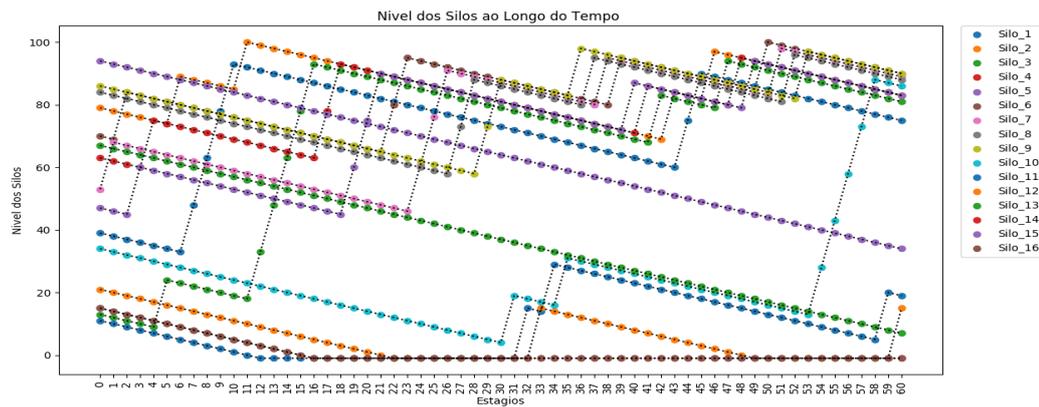
Figura 7 – Política Gulosa Aplicada à Instância 16_20_1. Fonte: O Autor



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios

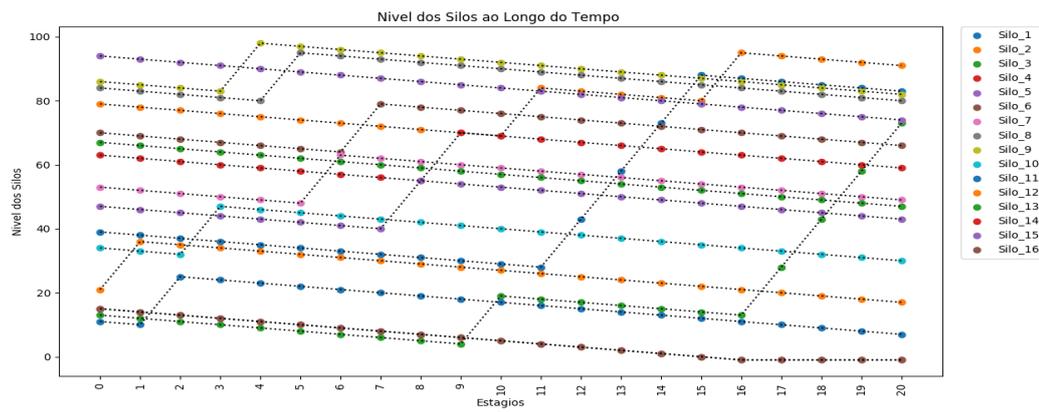


(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios

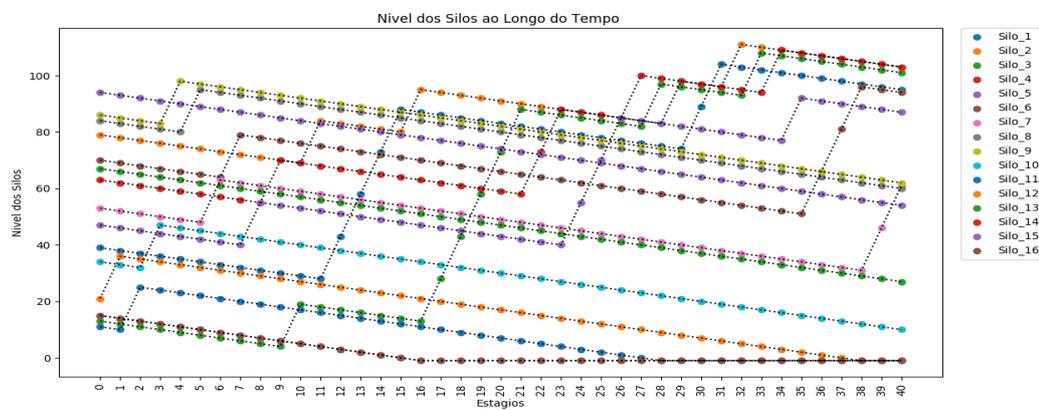


(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

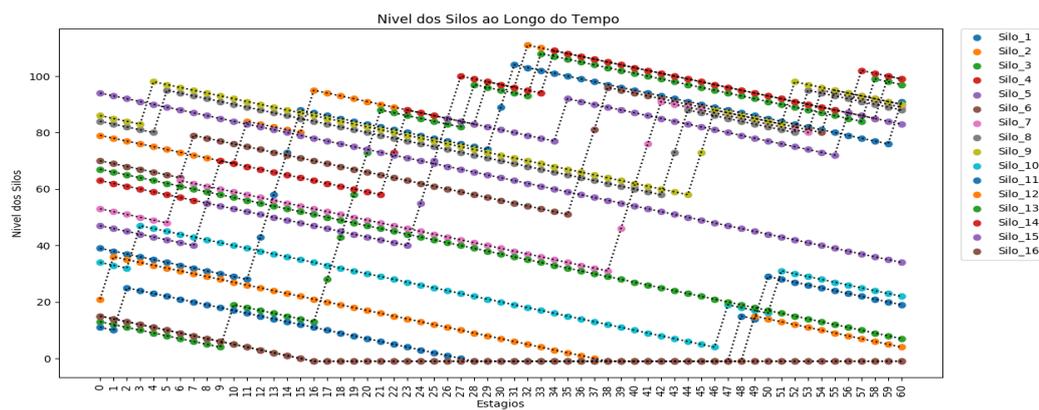
Figura 8 – Política Gulosa Aplicada à Instância 16_40_1. Fonte: O Autor



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios



(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios



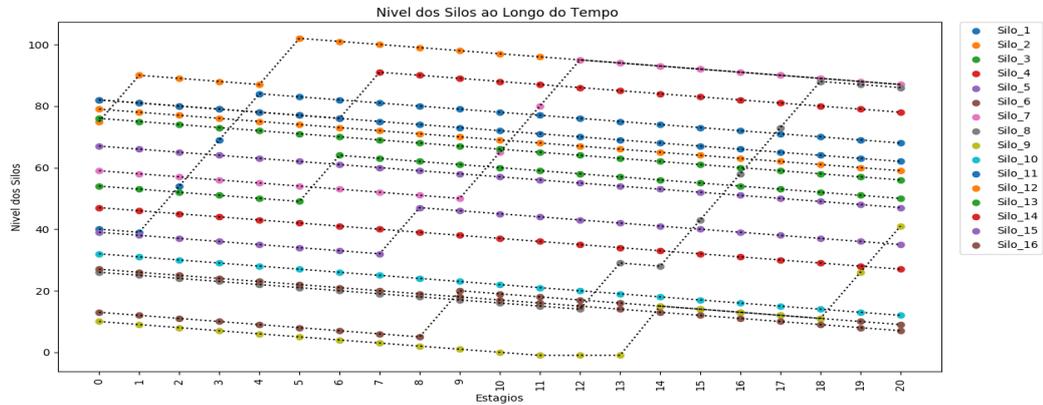
(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

Figura 9 – Política Gulosa Aplicada à Instância 16_60_1. Fonte: O Autor

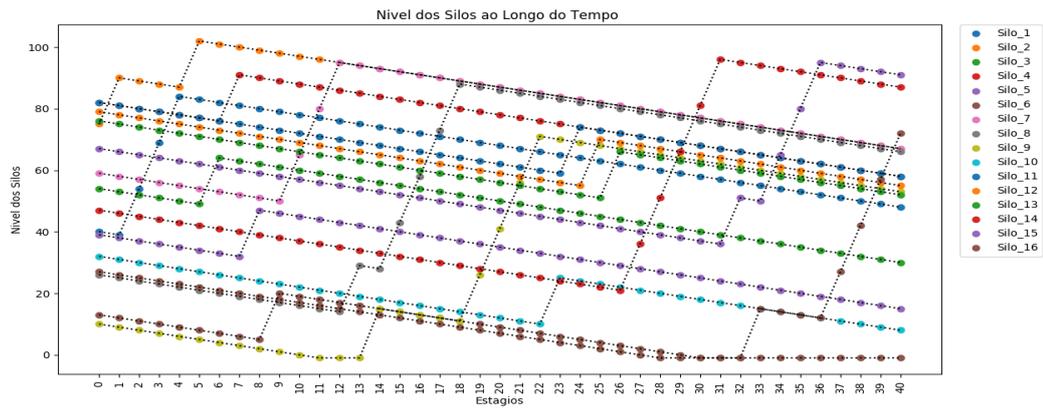
5.3.2 Política Passos

Avaliando um panorama geral, a política Passos ficou com resultados medianos em relação ao valor da função objetivo e tempo de execução. Quanto ao nível dos silos,

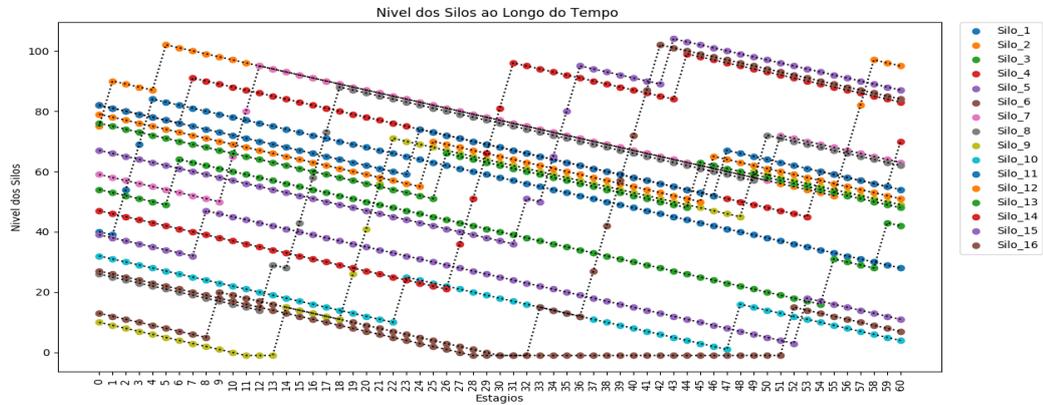
a inserção de um fator que levou em consideração o número de movimentos entre as posições ocasionou o resultado esperado. Como mostram as Figuras 10, 11 e 12 para todas as instâncias dado um certo estágio, algum silo que estava em declínio do nível constante é escolhido como posição do tripper e foi feito o abastecimento de minério.



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios

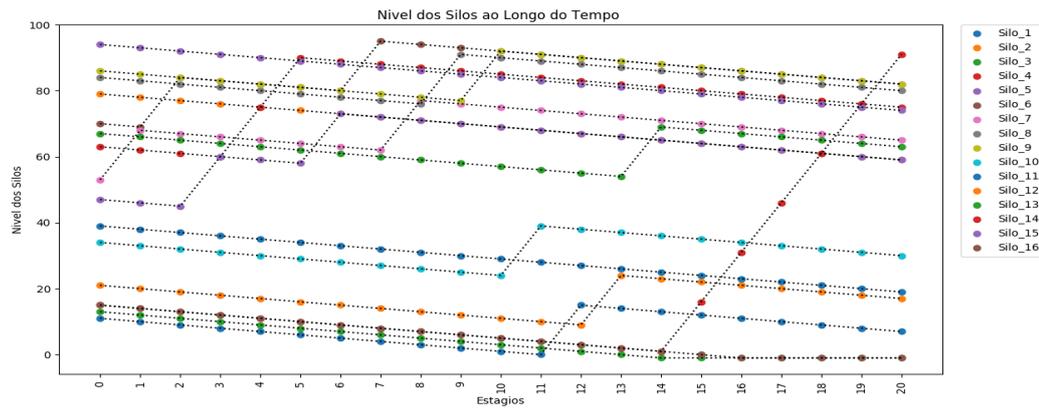


(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios

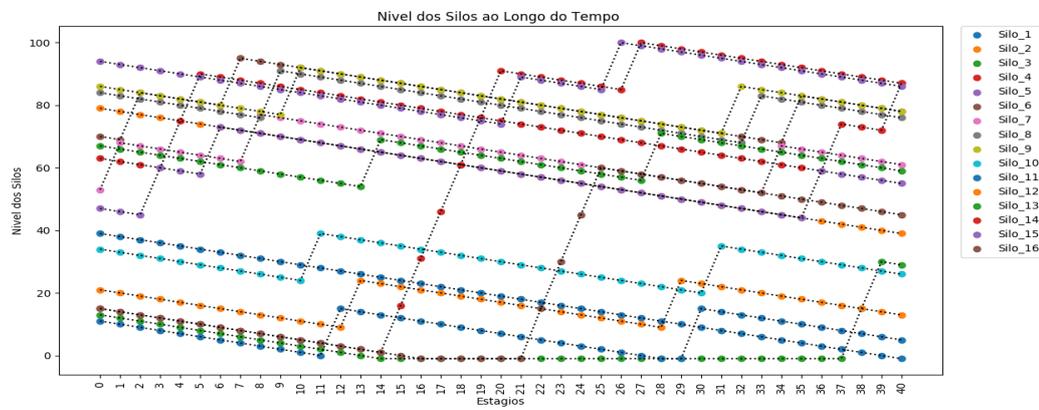


(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

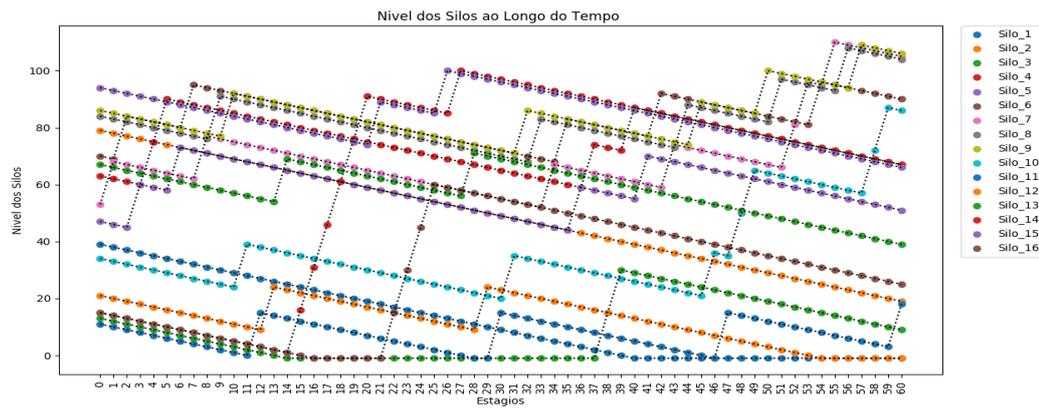
Figura 10 – Política Passos Aplicada à Instância 16_20_1. Fonte: O Autor



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios

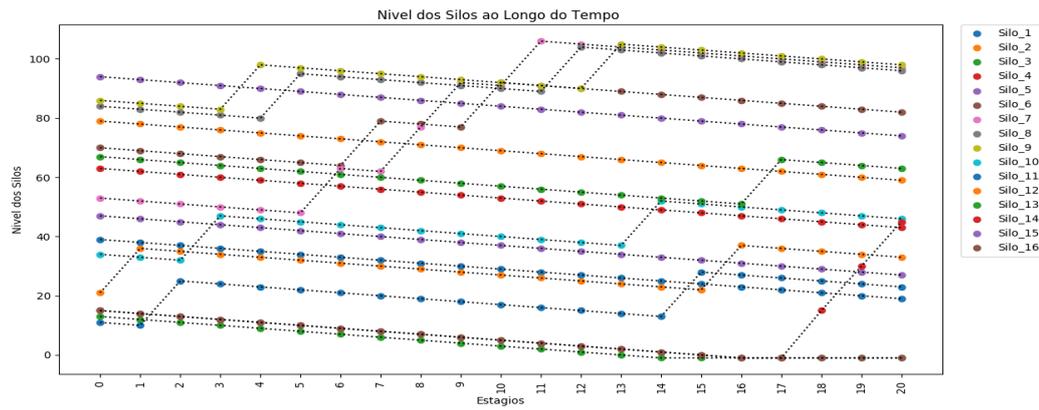


(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios

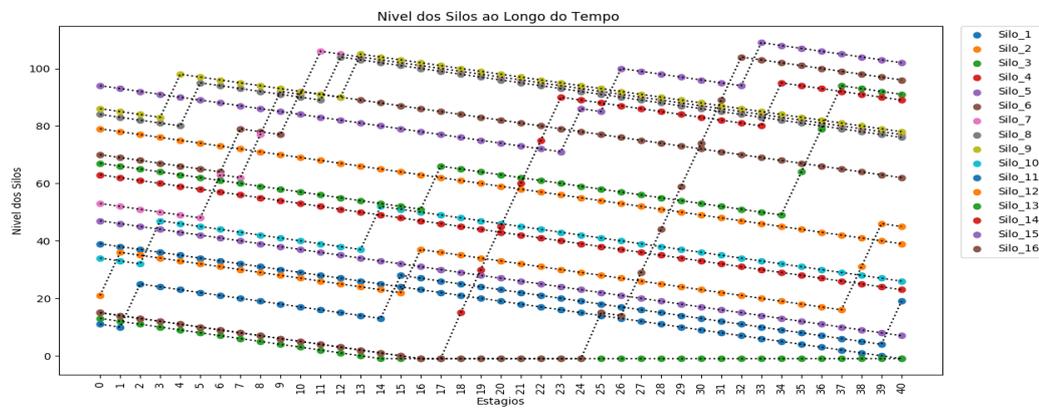


(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

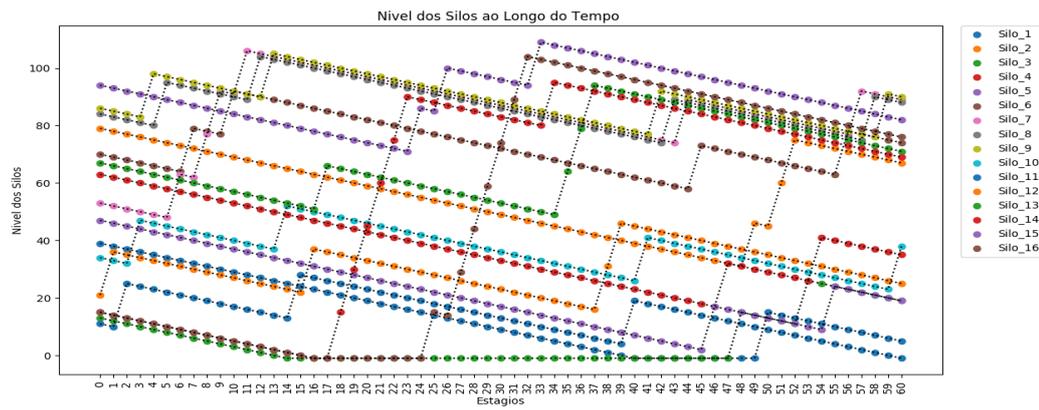
Figura 11 – Política Passos Aplicada á Instância 16_40_1. Fonte: O Autor



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios



(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios



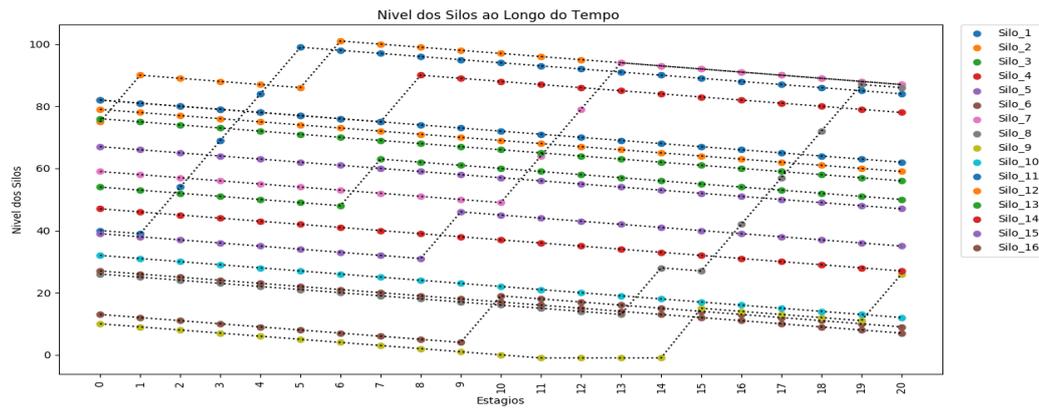
(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

Figura 12 – Política Passos Aplicada á Instância 16_60_1. Fonte: O Autor

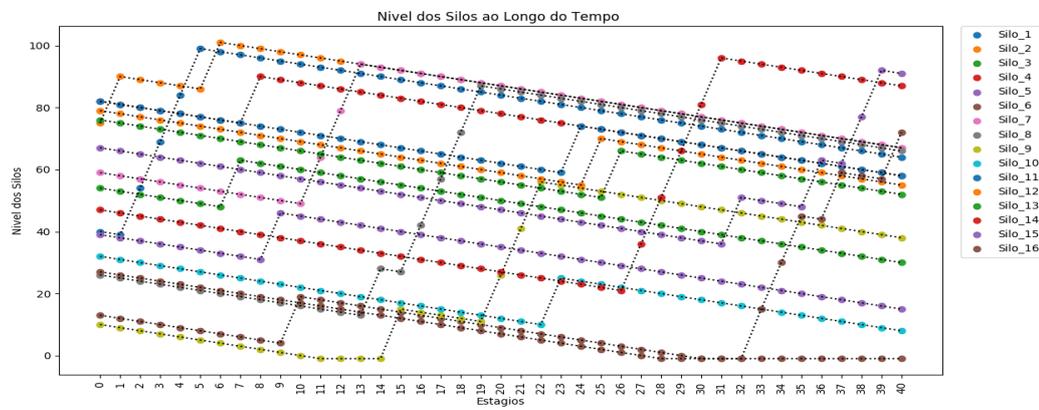
5.3.3 Política Desvio Padrão

Os resultados obtidos por essa Política se assemelham graficamente aos resultados apresentados pela política passos uma vez que esse caso é a combinação da política passos com a penalização do desvio padrão.

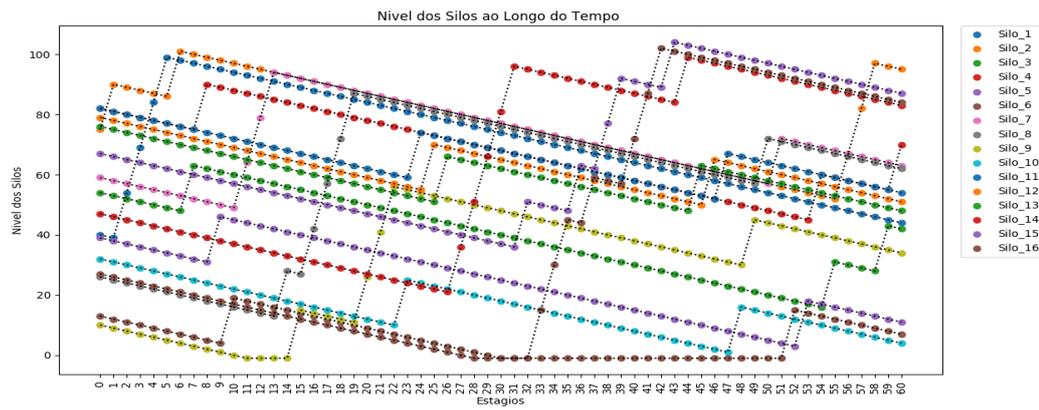
Quanto a redução da variabilidade entre os níveis, há uma leve tendência ao equilíbrio dos níveis mas não é demonstrada de forma significativa nos testes aplicados. Além disso mesmo com mais fatores de penalização, como mostram as Figuras 13, 14, e 15, alguns silo ainda extrapolam os limites estabelecidos tanto no excesso como na falta de minério.



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios

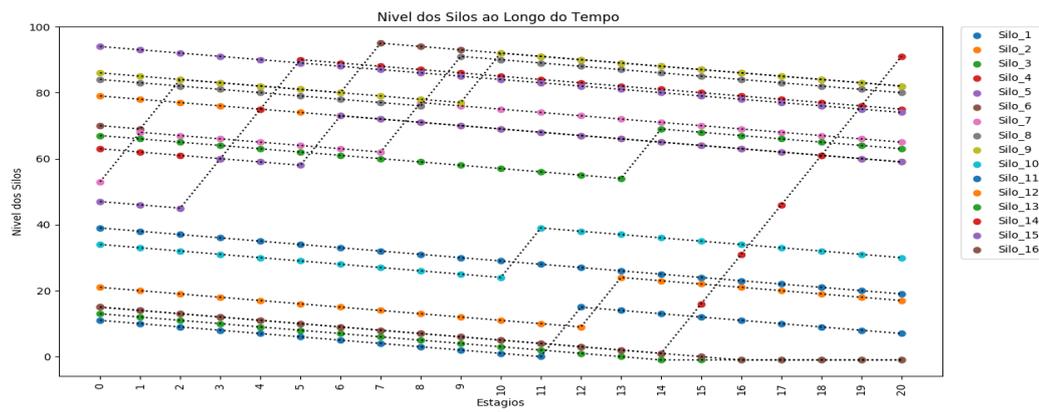


(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios

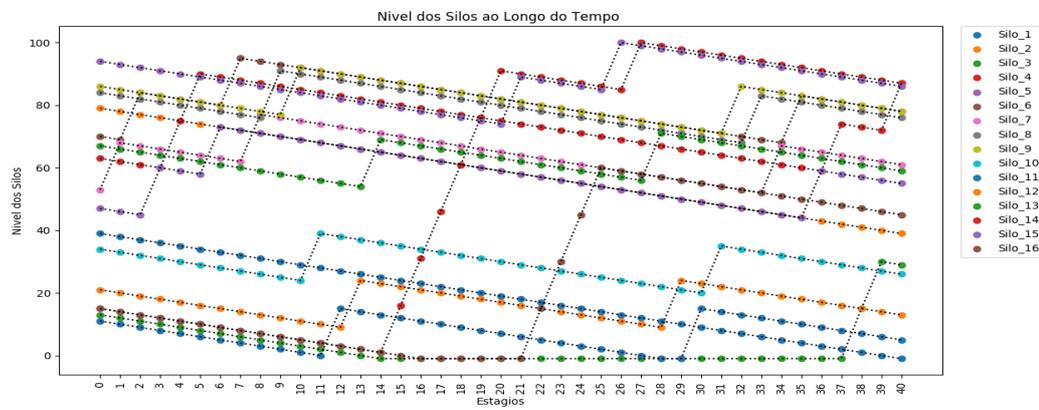


(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

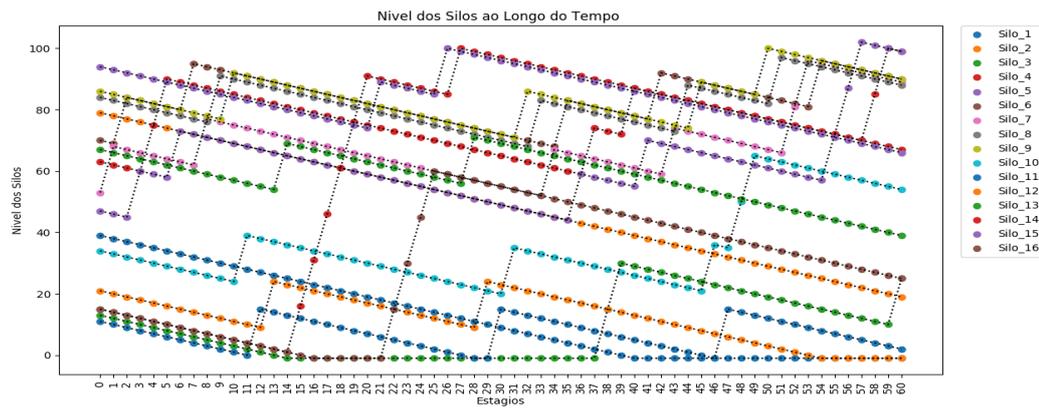
Figura 13 – Política Desvio Padrão Aplicada á Instância 16_20_1. Fonte: O Autor



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios

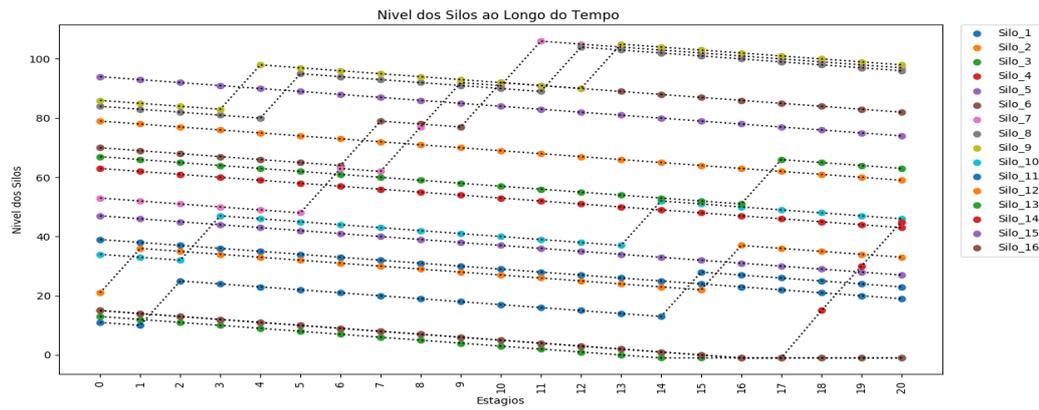


(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios

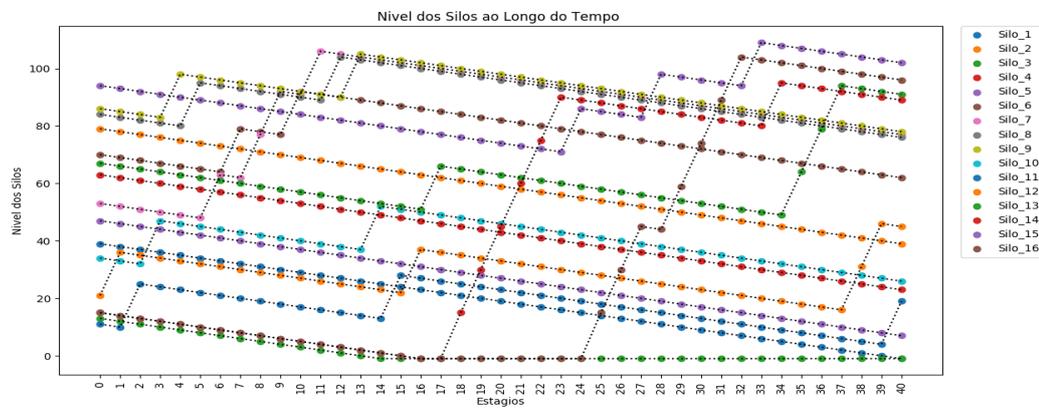


(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

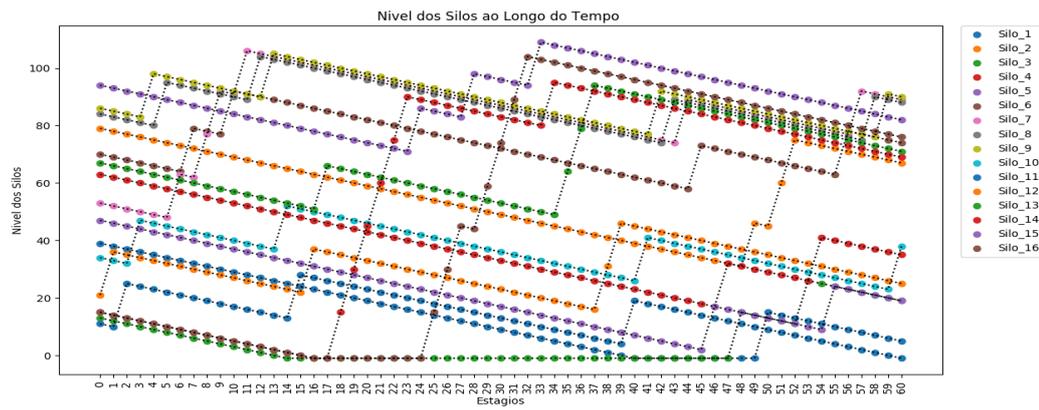
Figura 14 – Política Desvio Padrão Aplicada à Instância 16_40_1. Fonte: O Autor



(a) Nível dos Silos ao Longo de 20 estágios



(b) Nível dos Silos ao Longo de 40 estágios



(c) Nível dos Silos ao Longo de 60 estágios

Figura 15 – Política Desvio Padrão Aplicada à Instância 16_60_1. Fonte: O Autor

6 Considerações Finais

A abordagem por programação dinâmica mostrou-se adequada à realidade do problema, uma vez que gerou combinações de movimentos viáveis e que atendem as restrições e objetivos do Problema de Movimentação do Tripper.

O modelo proposto junto às políticas apresentou resultados satisfatórios quanto avaliados os valores das folgas e tempo de execução. Quanto ao nível dos silos é notório que no geral os níveis se mantiveram dentro dos limites definidos mas ainda houveram ocorrências de níveis que ficaram fora dos limites levando a aplicação das penalizações e o fator de redução da variabilidade não foi desempenhado com eficácia pelas políticas desenvolvidas.

Como possibilidade de melhoria em trabalhos futuros é aplicação de métodos de aprendizado utilizando redes neurais ou regressão linear a fim de possibilitar melhorar a visão da tomada de decisão quanto aos impactos no conjunto de silos. Além disso há a possibilidade de desenvolver novas políticas que consiga convergir o nível dos silos ao longo dos estágio melhorando os resultados gerais.

Um fator não explorado nesse estudo são as incertezas do processo e suas implicações. Uma máquina está sujeita a uma série de falhas e intervenções que afetam sua disponibilidade e tais eventos podem mensurados por diferentes indicadores de controle apresentados na literatura, sendo um deles o MTBF (*mean time between failures* ou tempo médio entre falhas) apresentado no trabalho de Torell e Avelar (2004). O fator de indisponibilidade da máquina, nesse caso o Tripper, e as implicações desses eventos nos níveis dos silos podem ser explorados através de modelos estocásticos ou de aprendizado.

Referências

- BELLMAN, R. *The theory of dynamic programming*. [S.l.], 1954. 4
- CALDAS, F. N. *Propostas para Solução do Problema de Movimentação de Tripper*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2018. 8, 1, 2, 3, 6, 7, 15, 16, 17
- CAMPELLO, R. E. Programação dinâmica determinística e estocástica. *XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro, Novembro de, 2002*. 4
- CAMPOS, A. L. R. F. Dimensionamento de um transportador contínuo inclinado de esteira côncava aplicado ao transporte de minério de bauxita considerando aspectos estáticos e dinâmicos. 2014. 2
- LUNET, N.; SEVERO, M.; BARROS, H. Desvio padrão ou erro padrão. *Arquivos de Medicina*, ArquiMed-Departamento de Edições Científicas da AEFMUP, v. 20, n. 1-2, p. 55–59, 2006. 15
- LUZ, A. B. d.; LINS, F. A. F. Introdução ao tratamento de minérios. In: . [S.l.]: CETEM/MCT, 2010. 8, 1
- MACIEL, G. S. et al. Principais métodos de estocagem de minério de ferro: Uma abordagem teórica. *Exatas & Engenharia*, v. 3, n. 06, 2013. 1
- MORABITO, R. et al. *Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2012. 8, 6
- PEDROSA, L. d. O. M. Problema de movimentação do carro tripper-comparação de novas políticas. 2019. 3, 16, 17
- PELLEGRINI, J.; WAINER, J. Processos de decisão de markov: um tutorial. *Revista de Informática Teórica e Aplicada*, v. 14, n. 2, p. 133–179, 2007. 4
- POWELL, W. B. *Approximate Dynamic Programming: Solving the curses of dimensionality*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. v. 703. 4, 5
- TORELL, W.; AVELAR, V. Tempo médio entre falhas: Explicação e padrões. *W. Kingston, Rhode Island: American Power Conversion*, 2004. 29
- TURRIONI, J. B.; MELLO, C. H. P. Metodologia de pesquisa em engenharia de produção. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá. Itajubá: UNIFEI*, 2012. 8, 6, 7



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas - ICEA
Colegiado do Curso de Engenharia de Produção - COEP
Campus João Monlevade



TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Problema de Movimentação de Tripper Abordado por Programação Dinâmica" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem o devido referenciamento ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 10 de Dezembro de 2019.

Bruna Silva de Moraes

Bruna Silva de Moraes