



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil
Curso de Graduação em Engenharia Civil

Thiago Valentim Val

ESTRATÉGIAS NUMÉRICAS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES NA ANÁLISE ESTRUTURAL

Ouro Preto

2019

Estratégias Numéricas para Solução de Equações Não lineares na Análise Estrutural

Thiago Valentim Val

Monografia de conclusão de curso para obtenção do grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto defendida e aprovada em 24 de julho de 2019 como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro Civil. Banca examinadora:

Área de concentração: Estruturas

Orientadores: Prof. D.Sc. Ricardo Azoubel da Mota Silveira – UFOP

Eng. Jackson da Silva Rocha Segundo – UFOP

Ouro Preto

2019

V135e

Val, Thiago Valentim.

Estratégias numéricas para solução de equações não lineares na análise estrutural [manuscrito] / Thiago Valentim Val. - 2019.

xix, 132f.: il.: grafs.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.

Coorientador: Prof. MSc. Jackson da Silva Rocha Segundo.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.

1. Análise não linear. 2. Métodos Numéricos. 3. Estratégias de incremento de carga. 4. Método dos elementos finitos. 5. Estratégias de iteração. I. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. II. Segundo, Jackson da Silva Rocha. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 624

Catálogo: ficha.sisbin@ufop.edu.br

Estratégias Numéricas para Solução de Equações Não-lineares na Análise Estrutural

Thiago Valentim Val

Monografia de conclusão de curso para obtenção do grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto defendida e aprovada em 24 de julho de 2019 como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro Civil. Banca examinadora:



Orientador: Prof. D.Sc. Ricardo Azoubel da Mota Silveira – UFOP



Co-orientador: Eng. Jackson da Silva Rocha Segundo – UFOP



Membro: M.Sc. Lidiane Rodrigues Reis Maia de Deus – UFOP



Membro: Prof. M. Sc. Rafael Cesário Barros

Aos meus orientadores e às pessoas que me apoiaram durante o curso

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio, incentivo e carinho em todos os momentos. Em especial aos meus pais, Rosilene e James, por terem sido essenciais na conclusão desse curso e por toda a dedicação e confiança. Aos meus irmãos, pelo companheirismo. E aos meus avós por todo carinho e incentivo.

Ao meu orientador, prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, por todas oportunidades me dada, pela motivação e orientação. Agradeço pela confiança depositada em mim e pelos ensinamentos.

Ao meu co-orientador, Jackson da Silva Rocha Segundo, por toda dedicação, pela disponibilidade e assistência, por ter acreditado em mim e pela amizade.

Aos amigos feitos durante o curso que sempre deram um incentivo e um apoio. Em especial à Augusto, Hugo, Gustavo, Lucas, Iara, Tacila, Seno e Cosseno.

RESUMO

Com o advento tecnológico os elementos e sistemas estruturais se tornaram cada vez mais complexos e esbeltos. Apesar da vantagem em relação à redução no custo, os sistemas estruturais mais esbeltos estão sujeitos a maiores deslocamentos e deformações. Com isso, para realizar a análise estrutural dessas estruturas é necessário utilizar técnicas numéricas sofisticadas, que, através de modelos numéricos e formulações matemáticas, são capazes de considerar todos os fatores que influenciam substancialmente o comportamento da estrutura. Nesse contexto, diversos estudos relacionados aos modelos numéricos e as formulações vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de alcançar uma solução mais precisa e que represente completamente o comportamento das estruturas. Esse cenário e o interesse pelo real comportamento estrutural, foram essenciais para motivar o desenvolvimento deste trabalho, que tem como objetivo estudar as metodologias de solução de equações não lineares, mais precisamente nas técnicas incrementais-iterativas. A revisão proposta procurou abranger todos os campos da resolução de problemas não lineares de um solver baseado em elementos finitos, desde variados métodos numéricos iterativos, até diferentes estratégias para escolha do parâmetro de carga inicial, que é um importante parâmetro, pois retrata o grau de não linearidade corrente do sistema estrutural em análise. Esta revisão aponta para uma direção fundamental: a ampla gama de opções proporciona uma maior probabilidade de o usuário alcançar a resolução dos mais variados. Ao final da pesquisa, percebe-se a importância da análise não linear na engenharia, bem como o que fundamenta tal análise, pois, o resultado da análise estrutural depende da escolha correta do método e das estratégias que serão adotadas para tal análise.

Palavras-chaves: Análise não linear, métodos numéricos, estratégias de incremento de carga, Método dos elementos finitos, estratégias de iteração.

ABSTRACT

With the advent of technology, structural elements and systems have become increasingly complex and slender. Despite the advantage over cost reduction, thinner structural systems are subject to greater displacement and deformation. Thus, to perform the structural analysis of these structures it is necessary to use sophisticated numerical techniques, which, through numerical models and mathematical formulations, are able to consider all factors that substantially influence the behavior of the structure. In this context, several studies related to numerical models and formulations have been developed in order to reach a more accurate solution that completely represents the behavior of structures. This scenario and the interest in the real structural behavior were essential to motivate the development of this work, which aims to study the methodologies of solving nonlinear equations, more precisely in incremental-iterative techniques. The proposed revision sought to cover all fields of nonlinear problem solving of a finite element-based solver, from varied iterative numerical methods to different strategies for choosing the initial load parameter, which is an important parameter, as it portrays the degree of nonlinearity of the structural system under analysis. This review points in a fundamental direction: the wide range of options provides a greater likelihood that the user will achieve the resolution of the most varied. At the end of the research, we realize the importance of nonlinear analysis in engineering, as well as what underlies this analysis, because the result of structural analysis depends on the correct choice of the method and the strategies that will be adopted for such analysis.

Keywords: Nonlinear analysis, numerical methods, load increment strategies, finite element methods, iteration strategies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Efeitos de segunda ordem: $P-\Delta$ (deslocamento lateral) e $P-\delta$ (curvatura) (Silva, 2009).....	2
Figura 2 - Representação gráfica do método da bisseção (Franco, 2007).....	8
Figura 3 – Representação geométrica do método de iteração linear (Araújo, 2009).	10
Figura 4 – Representação geométrica do método de Newton-Raphson padrão (Araújo, 2009).....	15
Figura 5 – Interpretação geométrica do método da secante (Lobão, 2012).	35
Figura 6 – Interpretação geométrica do método da falsa posição (Franco, 2007).	40
Figura 7 – Elemento finito adotado (Silva, 2009).....	42
Figura 8 – Trajetória de equilíbrio e representação gráfica dos pontos de <i>snap-back</i> , <i>snap-through</i> e bifurcação (Maximiano, 2012).....	43
Figura 9 – Solução incremental-iterativa (Maximiano, 2012).	45
Figura 10 - Estratégia de incremento de carga baseada em uma aproximação parabólica da trajetória não linear (Murray J. e Gregory J., 2006).....	70
Figura 11 – Comprimento de arco linearizado (Silva, 2009).	78
Figura 12- Técnica do fluxo normal (Maximiano, 2012).....	94
Figura 13 – Os vetores δU_r e δU da iteração k na técnica do fluxo normal (Maximiano, 2012).....	95
Figura 14 – Parâmetros residuais para os métodos iterativos baseado no fator de comprimento residual e no fator de deslocamento residual (Rezaiee-Pajand, <i>et al</i> 2019).....	98
Figura 15 – Processo de iteração com a combinação do método do comprimento de arco cilíndrico e do método do deslocamento generalizado (Muñoz e Roehl, 2017).	101
Figura 16 – Esquema geral de solução incremental-iterativa (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2015).....	103

Figura 17 – Área triangular residual para o método da primeira área triangular (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2018).....	105
Figura 18 – Método da segunda área triangular (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2015).	106
Figura 19 - Área triangular residual para o método da segunda área triangular (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2018).	109
Figura 20 – Método do comprimento de arco esférico combinado com o método de comprimento de arco cilíndrico (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).	111
Figura 21 – Equação de restrição não centralizada no último ponto de equilíbrio (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).	112
Figura 22 – Superfície de restrição elipsoidal alinhada com a trajetória de equilíbrio (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).	114
Figura 23 – Trajetória iterativa proposta e suas variáveis (Rezaiee-Pajand e Afsharimoghadam, 2018).	117

LISTA DE SÍMBOLOS

$\bar{x}$	Raiz da função
$f(x)$	Função
Ω	Subconjunto
x_k	K-ésima iteração dos métodos numéricos
p	Ordem de convergência
N	Constante assintótica do erro
$\ \quad \ $	Norma euclidiana
I	Intervalo fechado
a, b	Limites do intervalo
e_k	Erro das sucessivas aproximações
k	Contador de iterações
M	Limitante da forma
$\psi(x)$	Função do ponto fixo
$\mathbf{D}(x)$	Matriz aplicada ao método de Newton Raphson padrão aplicado para a resolução de um sistema de equações
$d_{km}(x)$	Função que compõem a matriz $\mathbf{D}(x)$
$d_{km}^{-1}(x)$	Inversa da função $d_{km}(x)$
$\mathbf{F}(x)$	Sistema de equações
$\Psi(x)$	Função do ponto fixo aplicado para um sistema de equações
$\mathbf{J}(x)$	Matriz Jacobiana

y_k	K-ésima iteração do segundo passo
$g(x)$	Polinômio de terceiro grau
$\left. \begin{matrix} n \\ o \\ p \\ q \end{matrix} \right\}$	Constantes do polinômio de terceiro grau $g(x)$
$O(e_k)$	Erro de truncamento
γ	Número real que define os métodos da família Chebyshev-Halley
$H(x)$	Matriz Hessiana
$\mathcal{G}(x)$	Função de iteração proposta por Traub (1964)
$H(x)$	Função qualquer, em que $H(0)=1$, $H'(0)=1/2$ e $H''(0)<\infty$
$\left. \begin{matrix} u(x) \\ c_j(x) \\ T(x) \end{matrix} \right\}$	funções definidas por Ostrowski (1960)
A_i	Influência que verifica a condição de consistência
Θ	Constante definida em $[0, 1]$
$f[,]$	Diferenças divididas
q_k	Sequência de Fibonacci
B_k	Límite superior da equação do erro do método das secantes
F_r	Vetor de forças nodais externas
λ	Parâmetro de carga total
F_i	Vetor de forças nodais internas

$\mathbf{U}$	Vetor de deslocamento nodal
$\left. \begin{matrix} t \\ t + \Delta t \end{matrix} \right\}$	Passos de carga
$\Delta\lambda$	Incremento do parâmetro de carga
$\Delta\mathbf{U}$	Incremento dos deslocamentos nodais
$\Delta\lambda^0$	Incremento inicial do parâmetro de carga
$\Delta\mathbf{U}^0$	Deslocamentos nodais incrementais tangenciais
$\delta\lambda$	Correção do parâmetro de carga
$\delta\mathbf{U}$	Correção dos deslocamentos nodais
$\delta\mathbf{U}_r$	Deslocamentos nodais tangenciais
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez tangente
$\left. \begin{matrix} {}^t\lambda \\ {}^t\mathbf{U} \end{matrix} \right\}$	Ponto de equilíbrio obtido no passo de carga anterior
$\mathbf{g}$	Vetor gradiente (desequilíbrio entre as forças externas e internas)
$\mathbf{C}$	Matriz de elementos constantes
k_1	Constante da equação de restrição proposta por Yang e Kuo (1994)
$\mathbf{H}_k$	Parametro incremental (deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo)
$\mathbf{K}_F$	Matriz arbitrária / Matriz de pseudo-rigidez
$\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} \mathbf{U}^k$	Vetor de pseudo-força/pseudo-momento
$\bar{\mathbf{H}}$	Tensor
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
w	Constante usada para os métodos da família Chebyshev-Halley aplicada ao problema de análise não linear estrutural

$\mathbf{K}_s$	Matriz secante
$\Delta \mathbf{F}^0$	Vetor de incremento de carga inicial
CSP	Parâmetro de rigidez corrente
$\Delta \lambda_{p,a}^0$	Incremento inicial do parâmetro de carga no passo de carga anterior
ΔCSP_{sd}	Variação do CSP desejada
ΔCSP_{sn}	Variação do CSP entre os passos de carga
I_d	Número de iterações desejadas
$I_{p,a}$	Número de iterações necessária para que o passo anterior convergisse
ξ	Expoente da estratégia de incremento baseada na relação $I_d/I_{p,a}$
Δl	Incremento do comprimento de arco
$\Delta l_{p,a}$	Incremento do comprimento de arco no passo de carga anterior
$\left. \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}$	Parâmetros dos métodos dos três parâmetros
$\Delta \mathbf{U}_j$	Componente j do incremento do vetor de deslocamento
$\Delta \mathbf{U}_{j(p,a)}$	Componente j do incremento do vetor de deslocamento no passo de carga anterior
X	Constante usada na estratégia de incremento de uma componente de deslocamento selecionada, cujo valor se encontra entre 1,5 e 2,5
$\Delta \mathbf{U}^1$	Incremento do vetor de deslocamento obtido no primeiro passo de carga
α	Expoente, cujo valor se encontra entre 0,8 e 2
ΔW	Incremento do trabalho externo
$\Delta W_{p,a}$	Incremento do trabalho externo no passo de carga anterior

$\Delta\epsilon$	Incremento de tensão calculado no ponto de interesse
β	Matriz de deslocamento-deformação calculada no ponto de interesse
$\mathbf{c}$	Vetor de deformação unitária no ponto de interesse
Δr	Tamanho do incremento de deformação
$\bar{\beta}$	Constante, cujo valor se encontra entre 0,5 e 1
β_{ζ}	Parâmetro do método de Yuanqi e Shen (2004)
$\zeta_{p,a}$	Precisão de convergência do passo de carga anterior
ζ_d	Precisão de convergência desejada
GSP	Parâmetro de rigidez generalizado
ι	Número de <i>snap-backs</i>
ΔT	Energia dissipada
τ	Função de ponderação
$c(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda)$	Restrição geométrica genérica
$h(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda)$	Restrição dissipativa
δW	Variação de trabalho externo
$\bar{G}$	Quadrado da norma euclidiana de $\mathbf{g}$
L	Comprimento do vetor resposta ponderada
$\mathbf{G}$	Matriz diagonal com dimensões de rigidez
G_{jj}	Componentes da diagonal principal da matriz $\mathbf{G}$
$\mathbf{H}$	Matriz diagonal com dimensões de flexibilidade
H_{jj}	Componentes da diagonal principal da matriz $\mathbf{H}$
K_{jj}	Componentes da diagonal principal da matriz $\mathbf{K}$

ΔL	Incremento da resposta ponderada
$(\Delta \bar{\mathbf{U}}^{(k-1)}, \Delta \bar{\lambda} \mathbf{F}_r)$	Vetor incremental ponderado
$\tilde{\mathbf{g}}$	Vetor de forças residuais
$\mathbf{n}^k$	Comprimento do vetor iterativo
$\delta \bar{\mathbf{U}}$	Erro do deslocamento de duas iterações consecutivas
$\mathbf{g}(\Delta \mathbf{U}^k, \Delta \lambda^k, \tilde{\mathbf{c}})$	Vetor de múltiplas restrições
$\tilde{\mathbf{c}}$	Vetor que contém os parâmetros de controle de cada equação de restrição
S^k	Área dos métodos baseados na área residual
$\bar{\mathbf{g}}$	Vetor gradiente reduzido
P^k	Perímetro dos métodos baseados na área residual
$\left. \begin{matrix} \mathbf{s}^k \\ \mathbf{n}^k \end{matrix} \right\}$	Vetores que definem o lado do triângulo dos métodos baseados na área residual
ϕ^k	Ângulo formado entre os lados do triângulo bcd
φ^k	Ângulo formado entre os lados do triângulo abc
δl	Comprimento de arco obtido pelo método do arco esférico para a estratégia mista esférica predita
Υ	Constante usada para parametrizar a localização do ponto P
ς	Coeficiente escalar que define o tamanho do semieixo menor da estratégia de iteração de iteração baseada em uma equação de restrição elipsoidal alinhada
$\left. \begin{matrix} v \\ \eta \\ \omega \end{matrix} \right\}$	Constantes usadas na solução iterativa sem a solução incremental predita
χ	Deslocamentos nodais no novo sistema de coordenadas

Λ Parâmetro de carga no novo sistema de coordenadas

$(\chi^e, \Lambda^e \mathbf{F}_r)$ Ponto extremo da trajetória parabólica

SUMÁRIO

Agradecimentos.....	V
Resumo.....	VI
Abstract	VII
Lista de Figuras	VIII
Lista de Símbolos	X
Sumário	XVII
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Justificativa e Objetivos	4
1.3 Organização do Trabalho.....	5
2 Métodos de Resolução de Equação Não linear.....	6
2.1 Introdução	6
2.2 Ordem de Convergência	6
2.3 Método da Bisseção.....	7
2.4 Método de Iteração Linear.....	9
2.5 Método de Iteração Quadrática (Newton-Raphson Padrão).....	14
2.6 Método de Newton-Raphson Modificado	19
2.7 Método de Potra-Pták	21
2.8 Métodos Iterativos da Família Chebyshev-Halley	25
2.8.1 Método de Chebyshev	26
2.8.2 Método de Super-Halley	27

2.9	Método do Ponto Médio	29
2.10	Método de Chun	33
2.11	Método das Secantes	34
2.12	Método da Falsa Posição	39
3	Metodologia de Solução do Problema Estático Não Linear	41
3.1	Introdução	41
3.2	Solução de Problemas Não Lineares	42
3.2.1	Solução incremental predita	45
3.2.2	Ciclo de iterações – Método de Newton-Raphson	46
3.3	Estratégias de Incremento de Carga	57
3.3.1	Estratégia baseada no parâmetro de rigidez corrente (CSP)	58
3.3.2	Estratégias baseadas na relação $I_d / I_{p,a}$	59
3.3.3	Estratégia baseada no CSP e na relação $I_d / I_{p,a}$	67
3.3.4	Estratégia baseada na curvatura da trajetória não linear	69
3.3.5	Estratégia baseada no parâmetro generalizado de rigidez (GSP)	70
3.4	Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga	73
3.5	Estratégias de Iteração	75
3.5.1	Iteração a carga constante	75
3.5.2	Iteração a comprimento de arco constante	76
3.5.3	Método de restrição híbrida	81
3.5.4	Iteração a deslocamento constante	85
3.5.5	Iteração a trabalho externo constante	86
3.5.6	Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais	87
3.5.7	Iteração a norma mínima das forças desequilibradas	88

3.5.8	Iteração a resposta ponderada constante	89
3.5.9	Iteração baseada no deslocamento generalizado	91
3.5.10	Iteração baseada no resíduo ortogonal	92
3.5.11	Técnica do fluxo normal	93
3.5.12	Iteração baseada na carga residual	95
3.5.13	Iteração baseada no fator de comprimento residual	98
3.5.14	Iteração baseada no fator de deslocamento residual	99
3.5.15	Iteração baseada no controle do incremento de tensão	99
3.5.16	Iteração baseada em múltiplas restrições	100
3.5.17	Iteração baseada na área residual	102
3.5.18	Iteração baseada na estratégia mista esférica predita	109
3.5.19	Iteração baseada em uma equação de restrição não centralizada	111
3.5.20	Iteração baseada em uma equação de restrição elipsoidal alinhada	113
3.5.21	Iteração baseada na norma do vetor gradiente	115
3.6	Solução iterativa sem a solução incremental predita	115
4	Conclusão	120
	Referências	124

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Com o advento tecnológico, o surgimento de novos materiais e novas técnicas construtivas, os elementos e sistemas estruturais se tornaram cada vez mais complexos e esbeltos. Apesar da vantagem em relação à redução no custo, uma vez que o peso da estrutura está diretamente ligado com o mesmo, os sistemas estruturais mais esbeltos estão sujeitos a maiores deslocamentos e deformações.

Em virtude desses deslocamentos e deformações, os efeitos de não linearidade se tornam de grande importância numa análise estrutural, já que esses estão associados à não linearidade física do material e à não linearidade geométrica, que agem simultaneamente e reduzem a capacidade resistente da estrutura, afetando assim o comportamento da estrutura.

A não linearidade física decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear, ou seja, o comportamento do material não é elástico linear (a lei de Hooke não é obedecida), resultando em equações constitutivas mais complexas. Nesse caso, a perda de rigidez do material durante a história de carregamento da estrutura é considerada, uma vez que, a partir de certo valor de carga os elementos que a compõem perdem a capacidade de recuperar a sua forma inicial quando descarregados, ou seja, acumulam deformações permanentes, chamadas de deformações plásticas. A não linearidade geométrica, ou também chamados de efeitos de segunda ordem, é responsável por considerar os efeitos $P-\Delta$ (global) e $P-\delta$ (local, a nível de elemento), que são os efeitos oriundos das deformações da estrutura à medida que a mesma é carregada, conforme a Figura 1. Além disso, trata-se de uma importante fonte de não linearidade no problema estrutural e exige formulações numéricas adequadas para sua consideração (Silva, 2009).

Com isso, para a análise estrutural que envolve esses efeitos é necessário o desenvolvimento de técnicas numéricas sofisticadas e um melhor conhecimento do comportamento estrutural (Maximiano, 2012).

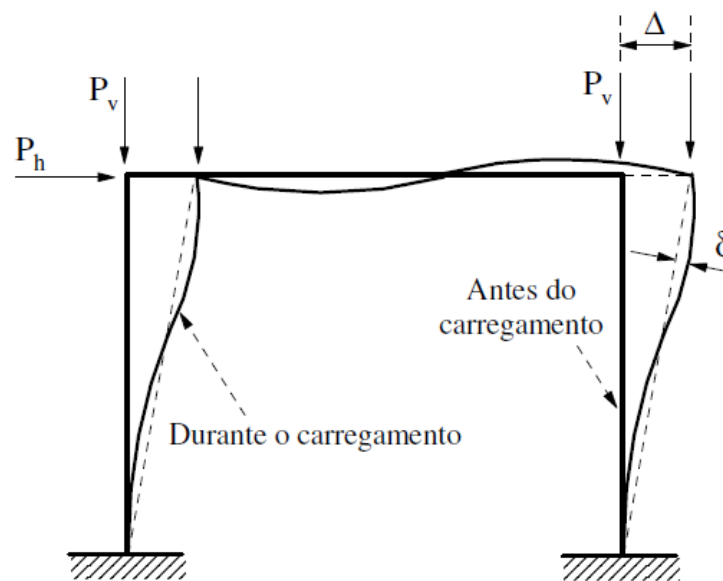


Figura 1 - Efeitos de segunda ordem: $P-\Delta$ (deslocamento lateral) e $P-\delta$ (curvatura) (Silva, 2009).

Segundo Maximiano (2012), tradicionalmente, a análise não linear da estabilidade de uma estrutura é feita considerando os princípios da Teoria Geral da Estabilidade Elástica (Thompson e Hunt, 1973 apud Maximiano, 2012), a qual é baseada na energia potencial total e suas variações em torno de um ponto de equilíbrio. Além disso, essa análise envolve, invariavelmente, a solução de um sistema de equações algébricas não lineares.

Conforme Silveira (1995), existem basicamente duas classes de métodos que podem obter a solução desse sistema de equações: uma consiste na adaptação computacional do método de perturbação desenvolvido por Koiter (1945); a outra classe é relacionada com métodos que procuram resolver as equações não lineares, passo a passo. Dentro dessa última classe estão os métodos puramente incrementais, as técnicas baseadas em relações de rigidez secante e os esquemas que combinam procedimentos incrementais e iterativos, que são considerados os mais eficientes (Silveira, 1995). Quanto aos métodos puramente incrementais, esses têm como vantagem a sua simplicidade e, como desvantagem, o fato de os esforços internos correspondentes à configuração deformada da estrutura não estarem em equilíbrio com as cargas externas ao final de cada passo incremental, o que implicaria em erros acumulados à medida que o número de passos de carga aumenta. Já para os métodos incrementais-iterativos, os erros podem ser reduzidos a valores insignificantes, graças às iterações realizadas dentro de

cada passo de carga, logo, o equilíbrio entre os esforços internos atuantes e a carga externa aplicada na estrutura é praticamente alcançado (Maximiano, 2012). Maximiano (2012) ainda destacou que, grande parte desses procedimentos baseia-se no método de Newton-Raphson (Bathe, 1996), no qual a carga permanece constante durante todo o ciclo iterativo, e por isso, em sua formulação clássica, o método de Newton-Raphson só é capaz de obter resultados convergentes até as proximidades do primeiro ponto limite de carga.

Com o propósito de contornar esse problema de convergência tem sido desenvolvidos diversas técnicas numéricas que, associadas às iterações usuais do tipo Newton, permitem alcançar respostas da estrutura além dos pontos limites (Silveira, 1995). Sendo que, essas técnicas estão associadas diretamente com as diversas estratégias de incremento de carga e de iteração (Rocha, 2000).

Sendo assim, destaca-se aqui algumas dessas estratégias de incremento de carga e de iteração que são usadas para os métodos incrementais-iterativos. Dentre as estratégias de incremento, tem-se a estratégia proposta por Bergan *et al.* (1978), por Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982), e por Yang e Kuo (1994).

Cabe ressaltar, que um dos aspectos mais importantes de qualquer estratégia de incremento de carga, segundo Rocha (2000), é a determinação do sinal correto do incremento inicial do parâmetro de carga, bem como a introdução de medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimos são ultrapassados. Estudos mostraram que o sinal do incremento inicial do parâmetro de carga pode ser determinado através de diversas técnicas, tais como: a proposta por Bergan *et al.* (1978); por Crisfield (1991); e por Yang e Kuo (1994).

Visando corrigir e reduzir a diferença entre os esforços internos correspondentes à configuração deformada da estrutura e as cargas externas ao final de cada passo incremental, são empregadas estratégias de iteração, que, para serem consideradas eficientes, devem apresentar grande eficiência computacional, facilidade de convergência e menor espaço na memória computacional (Rocha, 2000).

Na literatura encontra-se diversas estratégias de iteração, dentre as quais, destaca-se a estratégia desenvolvida por Batoz e Dhatt (1979), por Bathe e Dvorkin (1983) Yang e Mcguire (1986), por Chan (1988), por Yang e Shieh (1990) e por Wempner (1971), Riks (1972), Crisfield (1981) e Ramm (1982).

Entretanto, outras estratégias para a resolução dos sistemas de equações podem ser empregadas no lugar das iterações usuais de Newton-Raphson, como é o caso do método de Potra-Pták (1984), método de Chun (2006), e outros.

Cabe ressaltar que devido à complexidade e a diversificação do comportamento não linear dos sistemas estruturais esbeltos, juntamente com os aspectos relacionados à instabilidade numérica frequentes em uma análise não linear, deve-se agir com cautela ao afirmar que uma estratégia de solução é mais eficiente que outra (Maximiano, 2012). Sendo assim, cabe ao engenheiro escolher aquela que melhor avalie o comportamento da estrutura em análise para que o mesmo consiga obter uma resposta que represente bem o comportamento da estrutura.

1.2 Justificativa e Objetivos

Sabe-se que as normas utilizadas incorporam coeficientes de segurança e certas simplificações, tratando assim as estruturas como perfeitas, a fim de permitir que se faça um dimensionamento mais acessível das estruturas. Tais simplificações não levam em consideração as imperfeições intrínsecas da montagem da estrutura e da fabricação dos elementos, além de considerar que os elementos estão sujeitos apenas a pequenas deformações. Porém, como as estruturas esbeltas estão sujeitas a grandes deformações e com isso, a efeitos de não linearidade, pode se perceber que essa forma de análise não representa bem o comportamento estrutural.

Para uma representação mais adequada, parte-se para uma análise estrutural mais realística, denominada Análise Avançada, que leva em conta todos os efeitos de não linearidade, física e geométrica, visando determinar a resposta da estrutura, ou seja, tensões, deformações, forças atuantes, solicitações resultantes e deslocamentos sob determinadas condições de contorno e carregamento. Nesse sentido, quando todos esses fatores que influenciam substancialmente o comportamento estrutural são incluídos nos modelos numéricos e formulações, chega-se a uma solução adequada (Silva, 2009).

Nesse contexto, diversos estudos relacionados às técnicas numéricas vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de alcançar uma solução mais adequada e que represente o comportamento das estruturas. Portanto, esse cenário e o interesse em saber o real comportamento estrutural que esses métodos visam representar, foram essenciais para motivar o desenvolvimento deste trabalho.

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo estudar as metodologias de solução de equações não lineares, mais precisamente nas técnicas incrementais-iterativas, no campo das estratégias de iteração, incremento de carga e na escolha do sinal do incremento inicial do parâmetro de carga.

1.3 Organização do Trabalho

Esse trabalho de conclusão de curso é constituído por outros três capítulos, nos quais são apresentados os fundamentos teóricos que define cada método numérico, estratégia de incremento de carga, escolha do sinal do incremento inicial do parâmetro de carga e as estratégias de iteração.

Inicialmente, no Capítulo 2, é apresentado a base teórica por trás de cada método numérico usado para resolução de equações não lineares, bem como a formulação matemática desses métodos e a prova da ordem de convergência.

No Capítulo 3, é definido como funciona um esquema de solução incremental-iterativo aplicado para a análise estrutural não linear, onde são descritos os métodos iterativos, já explicados no Capítulo 2, com formulação aplicada a análise estrutural; e explica os conceitos e fundamentos que envolvem a análise estrutural não linear para uma melhor compreensão de como é obtida a resposta e o significado físico das variáveis envolvidas na solução do problema. Além disso, são descritas diversas estratégias de incremento de carga, escolha do sinal do parâmetro de carga inicial e estratégias de iteração, que quando vinculadas aos métodos iterativos permite o traçado completo da trajetória de equilíbrio das estruturas.

2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO NÃO LINEAR

2.1 Introdução

Em diversas áreas como física, matemática e engenharia, é necessário determinar um número $\bar{x}$ para o qual a função $f(x)$ seja zero, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$. Em muitos casos não é possível se determinar as raízes exatas da equação. Com isso, os métodos numéricos tornaram-se uma importante ferramenta, pois estes, através de procedimentos numéricos iterativos fornecem uma aproximação do valor verdadeiro diferindo deste por alguma tolerância pré-fixada (Franco, 2007). Dessa forma, o presente capítulo tem como objetivo explicar e definir os métodos numéricos usados para a solução dessas equações, comuns ao problema de equilíbrio estrutural, além de dar uma atenção a ordem de convergência desses métodos.

Procurando fornecer uma visão geral dos métodos numéricos existentes, dividiu-se as próximas Seções da seguinte forma: na Seção 2.2, define-se a ordem de convergência, que mede a velocidade de convergência do método, o que a torna um importante parâmetro para a escolha do método numérico a ser utilizado; nas Seções 2.3 à 2.12 são apresentados diversos métodos numéricos e suas particularidades, sendo eles: método da bisseção, iteração linear ou ponto fixo, Newton-Raphson Padrão (NRP) e Newton-Raphson Modificado (NRM), Potra-Pták, Família Chebyshev-Halley, ponto médio, Chun, secante e *Regula-Falsi* ou método da falsa posição.

2.2 Ordem de Convergência

Franco (2007) destacou que, a ordem de convergência de um método mede a velocidade com a qual as iterações produzidas por esse método se aproximam da solução exata, uma vez que, quanto maior for a ordem de convergência melhor será o método numérico, pois mais rapidamente chegará à solução. Define-se ordem de convergência da seguinte forma:

Sendo Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, seja $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma sequência em Ω produzida por um método iterativo e $\bar{x} \in \Omega$ tal que $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}$. Assume-se que existe um $\bar{x} \in \Omega$ com $x_k \neq \bar{x}$ para todo $k \geq 0$. Então, a ordem de convergência desta sequência é p se existir uma constante $N > 0$ tal que (Souza, 2015):

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq N \|x_k - \bar{x}\|^p \quad (2.1)$$

Podendo $\| \cdot \|$ ser qualquer norma em $\mathbb{R}^n$.

Se $p = 1$, deve-se ter $0 < N < 1$, logo pode-se afirmar que o método converge linearmente. E se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|^p} = N \quad (2.2)$$

então, N é conhecida como a constante assintótica do erro.

2.3 Método da Bissecção

Considere uma função $f(x)$, em que $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua nesse intervalo e $f(a) \times f(b) < 0$. Para o método da bissecção, calcula-se o valor dessa função no ponto médio do intervalo, x_1 , de forma que se divida o mesmo pela metade (Franco, 2007). Burden e Faires (2010) destacaram que esse método apresenta desvantagens significativas, pois o mesmo é relativamente lento para convergir, sendo a ordem de convergência linear; além disso uma boa aproximação intermediária pode ser descartada precipitadamente. Porém, devido ao Teorema de Bozano, pode-se garantir que esse método sempre vai convergir para uma solução, uma vez que a raiz da função se encontra nesse intervalo.

Após essa divisão, existem três possibilidades a se seguir: a primeira é que se o valor da função calculada no ponto x_1 for nulo, nesse caso x_1 é o zero da função, e nada mais precisa ser feito, uma vez que a raiz da equação foi encontrada; já a segunda é que se $f(a) \times f(x_1) < 0$, então a função tem um zero entre a e x_1 , garantido pelo Teorema de Bozano, que será descrito a seguir, nesse caso repete-se a divisão para esse intervalo; e por último, se $f(a) \times f(x_1) > 0$, segue que $f(b) \times f(x_1) < 0$, logo o zero da função está entre b e x_1 , e assim como para o intervalo $[a, x_1]$ repete-se a subdivisão desse intervalo (Franco, 2007).

Considerando os aspectos supracitados, pode-se dizer que esse método consiste, simplesmente, em subdividir o intervalo que contém a raiz de forma sistemática, até que se obtenha uma aproximação da raiz exata, com a tolerância desejada (Fernandes, 2008). Portanto, Franco (2007) descreveu o mesmo da seguinte forma:

Para $k = 1, 2, \dots$, faz-se:

$$x_k = \frac{a+b}{2} \quad (2.3)$$

se

$$f(a) \times f(x_k) \begin{cases} < 0 \text{ então } b = x_k \\ > 0 \text{ então } a = x_k \end{cases} \quad (2.4)$$

O que leva à seguinte interpretação geométrica, representada na Figura 2.

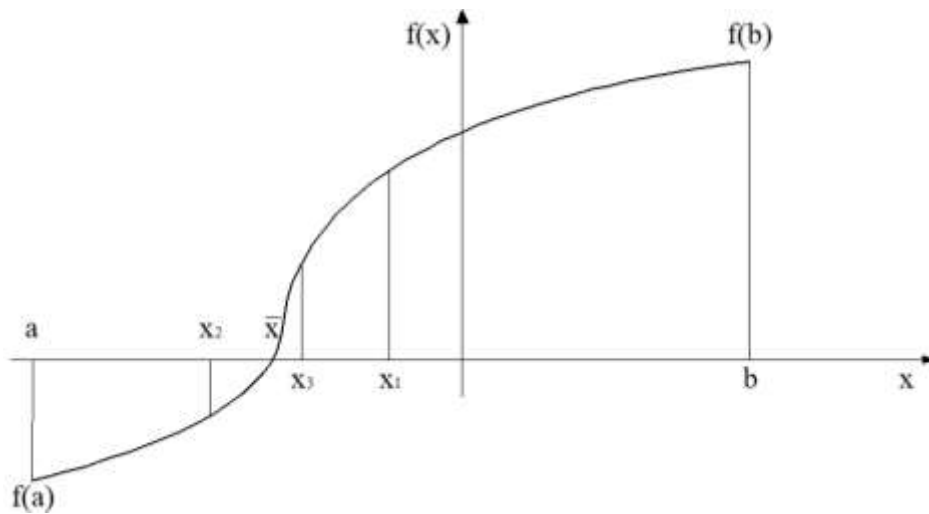


Figura 2 - Representação gráfica do método da bisseção (Franco, 2007).

Teorema de Bozano

Se $f(x)$ é uma função contínua que assume valores com sinais contrários nos extremos de um intervalo, então $f(x)$ tem raiz no interior desse intervalo.

Ordem de convergência

De acordo com Fernandes (2008), o método da bisseção converge e tem a seguinte estimativa de erro:

$$|e_k| = |x_k - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^k} \quad (2.5)$$

em que:

$$0 \leq |e_k| = |x_k - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

conclui-se que:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x} \quad (2.7)$$

Ou seja, o método da bisseção converge. Comparando a equação da estimativa de erro (2.5) com a equação da ordem de convergência (2.1), para $p = 1$, uma vez que, o método da bisseção pode ser comparado com um método de convergência linear (Fernandes, 2008). Dessa forma, tem-se:

$$|e_k| \leq N |e_{k-1}| \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

Aplicando k vezes essa desigualdade, tem-se:

$$|e_k| \leq N^k |e_0| \quad (2.9)$$

Nota-se que, $|e_0| = |\bar{x} - x_0| \leq b - a$ se $x_0 \in [a, b]$ e $\bar{x} \in [a, b]$, vê-se que o método converge linearmente, então existe um N tal que:

$$|e_k| \leq N^k (b - a) \quad (2.10)$$

Comparando a Equação (2.10) com a Equação (2.5), vê-se que o método da bisseção se comporta de uma forma parecida com os métodos de convergência linear, com o coeficiente assintótico de convergência igual a $1/2$ (Fernandes, 2008).

2.4 Método de Iteração Linear

Considere uma função $f(x)$, em que $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua nesse intervalo, onde existe uma raiz única. É possível transformar tal função em uma equação equivalente e, a partir de uma aproximação inicial, gerar uma sequência de aproximações para $\bar{x}$ (Araújo, 2009).

A fim de introduzir o método de iteração linear no cálculo de uma raiz da equação:

$$f(\bar{x}) = 0 \quad (2.11)$$

Pode-se reescrever a função $f(x)$ como:

$$f(x) = \psi(x) - x \quad (2.12)$$

Uma vez que, nessa forma, ao fazer-se $x = \bar{x}$, sendo $\bar{x}$ o ponto que corresponde a raiz da função $f(x)$, vem:

$$\psi(\bar{x}) - \bar{x} = 0 \quad (2.13)$$

ou seja, procura-se o valor de x , tal que ao ser substituído em $\psi(x)$ retorne o próprio valor de x , isto é, procura-se o ponto fixo (Araújo, 2009).

Para encontrarmos o valor da raiz da função, utiliza-se um processo iterativo, em que começa-se a calcular o valor de $\psi(x)$ com um valor inicial de x_0 (chute inicial), e recalcula-se, repetidamente, o valor de $\psi(x)$, usando-se o resultado da iteração anterior, conforme Figura 3, até que se obtenha $\psi(x) = \bar{x}$, (Araújo, 2009). Com isso, pode-se descrever esse método através da seguinte formula:

$$x_{k+1} = \psi(x_k) \quad (2.14)$$

em que k é o contador do número de iterações.

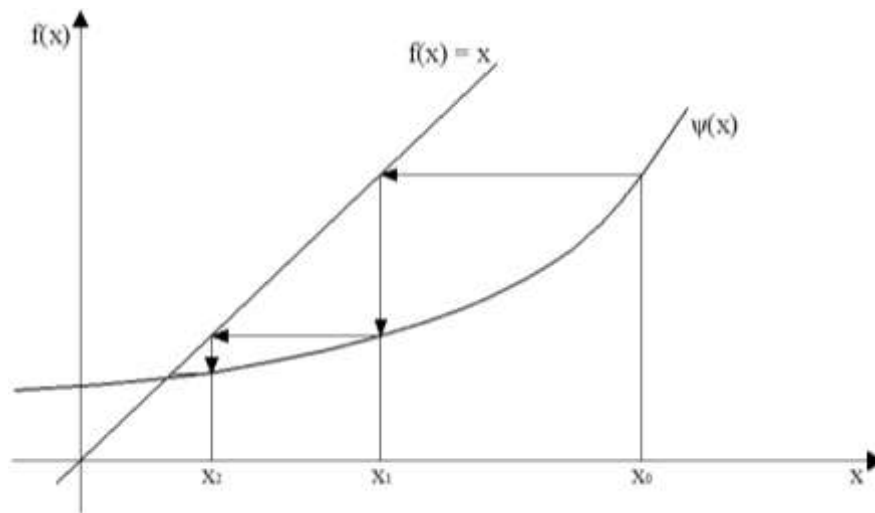


Figura 3 – Representação geométrica do método de iteração linear (Araújo, 2009).

Franco (2007) ressaltou que, para o método de iteração linear se tornar um método vantajoso, deve-se obter aproximações sucessivas de x_k , convergentes à solução desejada, porém, é fácil obter diversos exemplos para os quais a sequência diverge. A fim de assegurar essa convergência foram estabelecidas as condições contidas no Teorema do Ponto Fixo das Contrações, que será descrito a seguir. Contudo, apresenta-se antes os seguintes teoremas, que serão utilizados na prova do mesmo (Franco, 2007):

Teorema do valor médio

Se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , então existe pelo menos um ponto x_ξ entre a e b , tal que:

$$f'(x_\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow f(b) - f(a) = f'(x_\xi)(b - a) \quad (2.15)$$

Teorema da permanência do sinal

Seja f uma função real de variável real definida e contínua numa vizinhança de x_0 . Se $f(x_0) \neq 0$ então $f(x) \neq 0$ para todo x pertencente a uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 .

Teorema do ponto fixo das contrações

Seja $\psi(x)$ uma função contínua, com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas num intervalo fechado I da forma $I = (\bar{x} - h, \bar{x} + h)$, cujo centro $\bar{x}$ é solução de $\psi(x) = x$. Seja $x_0 \in I$ e M um limitante da forma, $|\psi'(x)| \leq M \leq 1$ em I . Então:

- a) A iteração $x_{k+1} = \psi(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, pode ser executada indefinidamente, pois $x_k \in I$, $\forall k$;
- b) $|x_k - \bar{x}| \rightarrow 0$;
- c) Se $\psi'(x) \neq 0$ ou $\psi'(\bar{x}) = 0$ e $\psi''(\bar{x}) \neq 0$ e se $|x_0 - \bar{x}|$ for suficientemente pequeno então a sequência $x_1, x_2, \dots$ será monotônica ou oscilante. Segundo Massago (2014), uma sequência monotônica é uma sequência que pode ser crescente ou decrescente. Sodré (2010) define uma sequência oscilante como aquela que não possui limite infinito e nem mesmo limite finito, tal qual a função $f(x) = \cos(n\pi)$ (Sodré, 2010).

Prova:

a) Usa-se indução para provar que $x_k \in I, \forall k$,

I. Por hipótese $x_0 \in I$;

II. Supondo que $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$;

III. Provando que $x_{k+1} \in I$, tem-se que:

$$x_{k+1} - \bar{x} = \psi(x_k) - \psi(\bar{x}) \quad (2.16)$$

Usando o teorema do Valor Médio, obtém-se:

$$x_{k+1} - \bar{x} = \psi'(x_\xi)(x_k - \bar{x}) \quad (2.17)$$

em que x_ξ está entre x_k e $\bar{x}$. Tomando módulo, segue que:

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = |\psi'(x_\xi)| |x_k - \bar{x}| \leq M |x_k - \bar{x}| \quad (2.18)$$

Desde que pela hipótese de indução $x_k \in I \Rightarrow x_\xi \in I$ e sobre $I, |\psi'(x_\xi)| \leq M < 1$. Assim:

$$|x_k - \bar{x}| \leq M |x_k - \bar{x}| \quad (2.19)$$

Como $M < 1$, pode-se escrever que $x_{k+1} \in I$.

b) Pelo item a) obtem-se que:

$$|x_k - \bar{x}| \leq M |x_{k-1} - \bar{x}| \leq M^2 |x_{k-2} - \bar{x}| \leq \dots \leq M^k |x_0 - \bar{x}| \quad (2.20)$$

Como $M < 1$, passando ao limite, obtém-se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^k \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

portanto

$$|x_k - \bar{x}| \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

c) Dividindo essa prova em duas etapas, vem:

I. Seja $\psi'(\bar{x}) \neq 0$

Pelo Teorema de Permanência do Sinal verifica-se que, numa vizinhança de $\bar{x}$ suficientemente pequena, $\psi'(\bar{x})$ terá o mesmo sinal. Então

$$x_{k+1} - \bar{x} = \psi'(x_\xi)(x_k - \bar{x}) \quad (2.23)$$

desse modo:

$$\text{Se } \psi'(\bar{x}) > 0 \text{ e } \begin{cases} x_k \leq \bar{x} \Rightarrow x_{k+1} \leq \bar{x} \\ x_k \geq \bar{x} \Rightarrow x_{k+1} \geq \bar{x} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\text{Se } \psi'(\bar{x}) < 0 \text{ e } \begin{cases} x_k \leq \bar{x} \Rightarrow x_{k+1} \geq \bar{x} \\ x_k \geq \bar{x} \Rightarrow x_{k+1} \leq \bar{x} \end{cases} \quad (2.25)$$

Como $|x_k - \bar{x}| \rightarrow 0$, a convergência será uma sequência monotônica em (2.24) e em (2.25) será oscilante em torno de $\bar{x}$.

II. Seja $\psi'(\bar{x}) = 0$ e $\psi''(\bar{x}) \neq 0$

Usando o teorema do Valor Médio,

$$\psi'(x_\xi) = \psi'(x_\xi) - \psi'(\bar{x}) = \psi''(x_\theta)(x_\xi - \bar{x}) \quad (2.26)$$

em que x_θ está entre x_ξ e $\bar{x}$. Logo:

$$x_{k+1} - \bar{x} = \psi''(x_\theta)(x_\xi - \bar{x})(x_k - \bar{x}) \quad (2.27)$$

Pelo Teorema da Permanência do Sinal, $\psi''(\bar{x})$ terá o mesmo sinal numa vizinhança suficientemente pequena de $\bar{x}$. Como $(x_\xi - \bar{x})(x_k - \bar{x}) \geq 0$, pois x_ξ e x_k encontram-se do mesmo lado de $\bar{x}$, se:

$$\psi''(x) > 0 \Rightarrow x_{k+1} \geq \bar{x}, \forall k \quad (2.28)$$

$$\psi''(x) < 0 \Rightarrow x_{k+1} \leq \bar{x}, \forall k \quad (2.29)$$

Neste caso a sequência $x_1, x_2, \dots$ será monotônica independente do sinal de $x_0 - \bar{x}$. Isso completa a prova desse teorema.

Ordem de convergência

Franco (2007) destacou que a ordem de convergência do método Iterativo Linear é linear, ou seja, $p = 1$; e sua prova é feita com base no Teorema do Ponto Fixo das Contrações, dessa forma:

$$x_{k+1} - \bar{x} = \psi'(x_\xi)(x_k - \bar{x}) \quad (2.30)$$

em que x_ξ está entre x_k e $\bar{x}$. Assim:

$$\frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|} \leq |\psi'(x_\xi)| \leq M \quad (2.31)$$

a definição de ordem de convergência está satisfeita com $p = 1$ e $N = M$, ou seja, a ordem de convergência é linear (Franco, 2007).

2.5 Método de Iteração Quadrática (Newton-Raphson Padrão)

O Método Iterativo de Newton-Raphson Padrão (NRP), ilustrado na Figura 4, consiste em uma sequência de cálculos da tangente do ângulo formado entre uma reta tangente a curva $f(x)$ em um ponto inicial x_0 e o eixo das abcissas, que por sua vez dará um novo ponto, x_1 , o qual definirá uma nova reta tangente que por sua vez, propiciará um novo ponto, x_2 , e assim sucessivamente até encontrar a raiz da função $f(x)$ (Araújo e Alves, 2013). Sendo assim, pode-se escrever o NRP através do seguinte esquema iterativo:

Do gráfico da função $f(x)$ traça-se a reta tangente ao ponto $(x_k, f(x_k))$, a qual pode ser calculada pela seguinte equação:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (2.32)$$

Na interseção entre a reta tangente e o eixo x , tem-se, $y = 0$, logo:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (2.33)$$

Isolando x_{k+1} , chega-se a:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.34)$$

Portanto, Araujo e Alves (2013) observaram que, a ideia do NRP nada mais é que a linearização de uma função derivável $f(x)$, que para ser resolvida a partir de uma aproximação inicial x_0 , basta construir uma aproximação linear de $f(x)$ em uma vizinhança x_0 , da seguinte forma:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad (2.35)$$

ou seja, o NRP é uma iteração de ponto fixo, em que de maneira geral (de Araújo, 2009):

$$\psi(x) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.36)$$

e sua convergência é satisfeita pelas mesmas condições descritas nos teoremas citados na Seção 2.4.

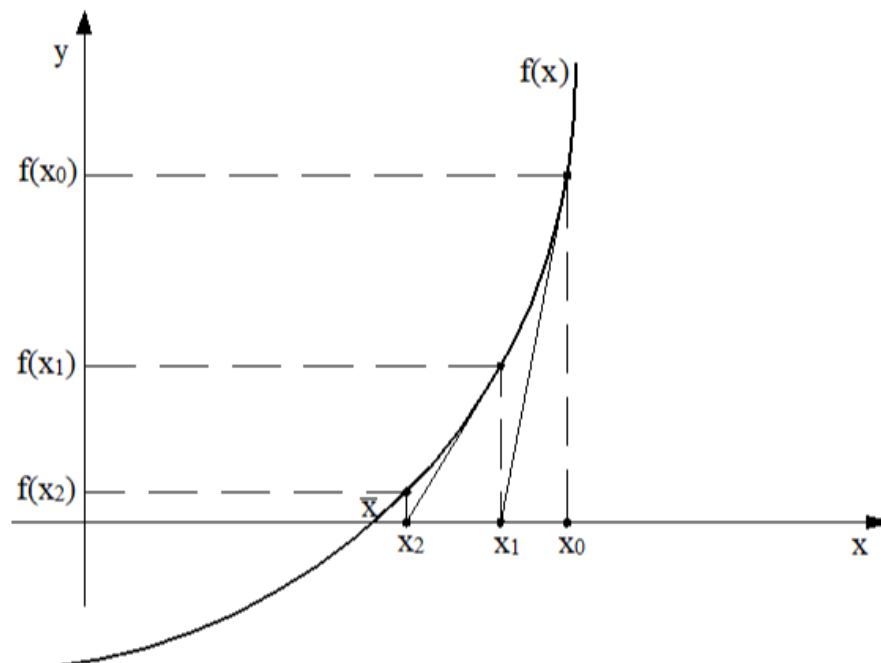


Figura 4 – Representação geométrica do método de Newton-Raphson padrão (Araújo, 2009).

Uma abordagem semelhante pode ser feita para um sistema de equações. Dada a seguinte matriz de ordem n (Burden e Faires, 2010):

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} d_{11}(\mathbf{x}) & d_{12}(\mathbf{x}) & \dots & d_{1m}(\mathbf{x}) \\ d_{21}(\mathbf{x}) & d_{22}(\mathbf{x}) & \dots & d_{2m}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1}(\mathbf{x}) & d_{k2}(\mathbf{x}) & \dots & d_{km}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

em que, cada uma das entradas $d_{km}(\mathbf{x})$ é uma função de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Burden e Faires (2010) destacaram que, $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ deve ser encontrado de modo que:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{D}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2.38)$$

dê convergência quadrática para a solução de $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, assumindo que $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ é não singular no ponto $\bar{\mathbf{x}}$ de I . Em que $\Psi(\mathbf{x})$ é a função ponto fixo aplicada para um sistema de equações e $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é o sistema de equações.

E assim como, para uma única equação, para que haja convergência desse método, algumas condições devem ser satisfeitas. A seguir tem-se o teorema aplicado ao NRP feito para um sistema de equações, que segue a mesma ideia do Teorema do Ponto Fixo das Contrações.

Teorema do ponto fixo das contrações

Seja $\bar{\mathbf{x}}$ uma solução para $\Psi(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$, supõe-se que existe um número $\varpi > 0$, com:

- I. $\frac{\partial \psi_k}{\partial x_m}$ é contínua num intervalo I da forma $I = (\bar{\mathbf{x}} - h, \bar{\mathbf{x}} + h)$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ e $m = 1, 2, \dots, n$;
- II. $\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_m \partial x_i}$ é contínua, e $\left| \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_m \partial x_i} \right| \leq M$ para algum valor de M , sempre que $\mathbf{x} \in I$, para cada $k = 1, 2, \dots, n$, $m = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, n$;
- III. $\frac{\partial \psi_k(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_i} = 0$, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, n$.

Então, existe um número $\hat{\varpi} \leq \varpi$ que gera uma sequência que apresente ordem de convergência quadrática para $\bar{\mathbf{x}}$ para qualquer valor de $\mathbf{x}_0$.

Para aplicar esse teorema, supõe-se que $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ é uma matriz $n \times n$ das funções de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na forma da Equação (2.37), assume-se, além disso, que $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ é não singular próximo a solução $\bar{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, e fazendo $\mathbf{d}_{km}^{-1}(\mathbf{x})$ como o inverso dos componentes da matriz $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ na i -ésima linha e na m -ésima coluna (Burden e Faires, 2010).

Para a Equação (2.38), tem-se:

$$\psi_k(\mathbf{x}) = x_k - \sum_{m=1}^n \mathbf{d}_{km}^{-1}(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) \quad (2.39)$$

então:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \sum_{m=1}^n \left(\mathbf{d}_{km}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{d}_{km}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_m(\mathbf{x}) \right), & \text{se } k = i \\ - \sum_{m=1}^n \left(\mathbf{d}_{km}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{d}_{km}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_m(\mathbf{x}) \right), & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad (2.40)$$

Esse teorema implica que $\frac{\partial \psi_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, n$. Isto significa que para $k = i$ (Burden e Faires, 2010),

$$0 = 1 - \sum_{m=1}^n \mathbf{e}_{km}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (2.41)$$

ou seja,

$$\sum_{m=1}^n \mathbf{e}_{km}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{\mathbf{x}}) = 1 \quad (2.42)$$

para $k \neq i$,

$$- \sum_{m=1}^n \mathbf{e}_{km}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.43)$$

então:

$$\sum_{m=1}^n \mathbf{e}_{km}(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.44)$$

nesse caso, as condições (2.41) a (2.44) exigem que:

$\mathbf{D}(\bar{x})^{-1}\mathbf{J}(\bar{x}) = \mathbf{I}$, em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, logo $\mathbf{D}(\bar{x}) = \mathbf{J}(\bar{x})$. Sendo $\mathbf{J}(x)$ o Jacobiano, que pode ser escrito da forma:

$$\mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Consequentemente, pode-se escrever o método de NRP da seguinte forma (Burden e Faires, 2010):

$$\Psi(x) = x - \mathbf{J}(x)^{-1} \mathbf{F}(x) \quad (2.46)$$

Ordem de convergência

Pelo o Teorema do Ponto Fixo das Contrações, sabe-se que o NRP converge para $\bar{x}$ e apresenta ordem de convergência quadrática. Para sua prova faz-se:

Subtraindo a equação $\bar{x} = \psi(\bar{x})$ da equação (2.34), obtém-se:

$$x_{k+1} - \bar{x} = \psi(x_k) - \psi(\bar{x}) \quad (2.47)$$

em que $\psi(x_k)$ é definido conforme Equação (2.36). Desenvolvendo $\psi(x_k)$ em série de Taylor em torno do ponto $\bar{x}$, chega-se:

$$x_{k+1} - \bar{x} = \psi(\bar{x}) + (x_k - \bar{x})\psi'(\bar{x}) + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2!}\psi''(\xi) - \psi(\bar{x}) \quad (2.48)$$

em que, os demais termos da expansão em série de Taylor, foram desprezados, uma vez que, os mesmos tendem a zero, devido a razão que divide o erro $(x_k - \bar{x})$.

No método de NRP, $\psi(\bar{x}) = 0$, uma vez que, ao substituirmos $x = \bar{x}$ na equação (2.36), chega-se a:

$$\psi(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \rightarrow \psi(\bar{x}) = \bar{x} - 0 \rightarrow \psi(\bar{x}) = \bar{x} \quad (2.49)$$

e como a derivada de uma constante é nula, $\psi'(\bar{x}) = 0$. Portanto:

$$\frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^2} = \frac{\psi''(x_\xi)}{2!} \leq N \quad (2.50)$$

Logo, pela definição de ordem de convergência descrita na Seção 2.2, a ordem de convergência é $p = 2$. Apesar da sua ordem de convergência quadrática, o NRP apresenta uma desvantagem quanto a necessidade de se calcular a derivada da função e o seu valor numérico a cada iteração, o que pode ser muito caro computacionalmente. Além disso, a função pode ser não diferenciável em alguns pontos do domínio (Franco, 2007).

2.6 Método de Newton-Raphson Modificado

O método de Newton-Raphson Modificado (NRM) segue a mesma ideia do método do NRP, com exceção de que o valor da derivada calculada na primeira iteração é usado em todo o processo iterativo, fazendo com que o método apresente um menor gasto computacional (Ruggiero e Lopes, 1996); porém, essa redução acarreta na diminuição da ordem de convergência que, segundo Potra e Pták (1984), passa a ser linear para esse método. Sendo assim, pode-se escrever esse método da seguinte forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \quad (2.51)$$

e assim, como o método de NRP, o método de NRM é uma iteração de ponto fixo, em que de maneira geral (Alves, 2007):

$$\psi(x) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \quad (2.52)$$

Seguindo a mesma ideia de expandir o método para um sistema de equações, o NRM pode ser escrito da seguinte forma (Ruggiero e Lopes, 1996):

$$\Psi(x) = x - J(x_0)^{-1} F(x) \quad (2.53)$$

Desse modo, a matriz Jacobiana é avaliada apenas uma vez e, para todo k , o sistema linear a ser resolvido a cada iteração terá a mesma matriz de coeficiente (Ruggiero e Lopes, 1996).

Ordem de convergência

Supondo que ψ'' seja contínua numa vizinhança $\bar{x}$, desenvolvendo em série de Taylor de $\psi(x)$ em torno de $x = \bar{x}$, tem-se:

$$\psi(x) = \psi(\bar{x}) + (x - \bar{x})\psi'(\bar{x}) + (x - \bar{x})^2 \frac{\psi''(\bar{x})}{2!} + \dots \quad (2.54)$$

para o processo iterativo, faz-se $x = x_k$, daí vem:

$$\psi(x_k) = \psi(\bar{x}) + (x_k - \bar{x})\psi'(\bar{x}) + (x_k - \bar{x})^2 \frac{\psi''(\bar{x})}{2!} + \dots \quad (2.55)$$

derivando a relação (2.52),

$$\psi'(x) = 1 - \frac{f'(x_k)}{f'(x_0)} \quad (2.56)$$

logo, para $x = \bar{x}$, tem-se:

$$\psi'(\bar{x}) = 1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x_0)} \quad (2.57)$$

substituindo a Equação (2.57) em (2.55), chega-se:

$$\psi(x_k) = \psi(\bar{x}) + (x_k - \bar{x}) \left(1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x_0)} \right) + (x_k - \bar{x})^2 \frac{\psi''(\bar{x})}{2!} + \dots \quad (2.58)$$

como $x_{k+1} = \psi(x_k)$ e $\bar{x} = \psi(\bar{x})$ é o ponto de convergência,

$$x_{k+1} - \bar{x} = (x_k - \bar{x}) - (x_k - \bar{x}) \left(\frac{f'(\bar{x})}{f'(x_0)} \right) + (x_k - \bar{x})^2 \frac{\psi''(\bar{x})}{2!} + \dots \quad (2.59)$$

dividindo tudo por $(x_k - \bar{x})$, obtem-se:

$$\frac{(x_{k+1} - \bar{x})}{(x_k - \bar{x})} = 1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x_0)} + (x_k - \bar{x}) \frac{\psi''(\bar{x})}{2!} + \dots \quad (2.60)$$

tomando o limite para $k \rightarrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_{k+1} - x_\xi)}{(x_k - x_\xi)} = 1 - \frac{f'(x_\xi)}{f'(x_0)} + (x_k - x_\xi) \frac{\psi''(x_\xi)}{2!} + \dots \quad (2.61)$$

se $\psi''(x_\xi) \neq 0$, desprezando-se os termos que contém derivadas de ordem superior a dois, pode-se escrever:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_{k+1} - \bar{x})}{(x_k - \bar{x})} = 1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x_0)} \quad (2.62)$$

portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|^p} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_{k+1} - \bar{x})}{(x_k - \bar{x})} = 1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(x_0)} \quad (2.63)$$

como o lado direito da equação é uma constante:

$$N = 1 - \frac{f'(x_\xi)}{f'(x_0)} \quad (2.64)$$

tem-se, a partir da Equação (2.2)

$$\frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|^p} = \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^1} \quad (2.65)$$

Logo, a ordem de convergência do NRM é $p = 1$ (Alves, 2007).

2.7 Método de Potra-Pták

O método de Potra-Pták é uma atualização do NRP, que visa melhorar a eficiência e aumentar a ordem de convergência do NRP, uma vez que o método de Potra-Pták apresenta convergência de terceira ordem e é feito em dois passos, sem que haja a necessidade de se avaliar as derivadas de segunda ordem (Soleymani *et al.*, 2012). Ainda quanto ao fato de não

se avaliar as derivadas de segunda ordem, pode-se dizer que esse método é mais eficiente quando comparado com outros métodos de terceira ordem, como o Halley e Chebyshev, uma vez que, esses necessitam da avaliação da derivada de segunda ordem, o que eleva o seu custo computacional (Souza *et al.*, 2018). Uma outra vantagem que merece ressalva, é o fato de o mesmo trazer consigo a vantagem de não haver a necessidade de se avaliar a matriz Jacobiana a cada iteração, uma vez que, essa é mantida constante ao longo do processo iterativo (Babajee, 2010). Assim, segundo Souza *et al.* (2017), esses sistemas podem ser solucionados via decomposição, por exemplo, decomposição LU.

Com isso, tem-se a seguinte equação para esse método (Potra-Pták, 1984):

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.66)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) + f(y_k)}{f'(x_k)} \quad (2.67)$$

Ordem de convergência

Diferentemente do que foi feito para os métodos anteriores, antes de determinar a ordem de convergência do método de Potra-Pták, define-se uma família de métodos de dois parâmetros, proposto por Chun (2007), bem como, a sua ordem de convergência.

Para sua definição, considera-se o método de Newton de dois passos dado por (Chun, 2007):

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.68)$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)} \quad (2.69)$$

A fim de encontrar uma correção para o segundo termo da Equação (2.69) que produzirá um método de terceira ordem (Chun, 2007). Toma-se, primeiramente, ajustar a função $f(x)$ ao redor do ponto $(x_k, f(x))$ com o seguinte polinômio de terceiro grau (Chun, 2007):

$$g(x) = nx^3 + ox^2 + px + q \quad (2.70)$$

Impondo a condição de tangente na k-ésima iteração x_k

$$g'(x_k) = f'(x_k) \quad (2.71)$$

em (2.68), tem-se:

$$p = f'(x_k) - 3nx_k^2 - 2ox_k \quad (2.72)$$

obtem-se assim, a primeira derivada do polinômio de aproximação:

$$g'(x_k) = 3nx_k^2 + 2ox_k + f'(x_k) - 3nx_k^2 - 2ox_k \quad (2.73)$$

Agora, com y_k definido pela Equação (2.68), aproxima-se $f'(y_k)$ como:

$$f'(y_k) \approx g'(y_k) = \frac{f''(x_k) - (6nx_k + 2o)f'(x_k) + 6nf''(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.74)$$

substituindo (2.74) em (2.69), obtém-se a família de métodos de dois parâmetros proposto por Chun (2007):

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.75)$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)f'(x_k)}{f''(x_k) + (\Xi - 2\mu x_k)f(x_k) + \mu f^2(x_k)} \quad (2.76)$$

em que $\Xi = -2o$ e $\mu = 3n \in \mathbb{R}$ (Chun, 2007).

Chun (2007) ainda observou que pelas Equações (2.75) e (2.76), pode-se escrever o método de Potra-Pták fazendo $\Xi = 0$ e $\mu = 0$.

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)f'(x_k)}{f''(x_k) + (\Xi - 2\mu x_k)f(x_k) + \mu f^2(x_k)} \rightarrow x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \quad (2.77)$$

que é a mesma equação se comparada com a Equação (2.67).

Quanto a ordem de convergência dessa família de métodos de dois parâmetros. Chun (2007) propôs um teorema o qual será apresentado a seguir.

Teorema da ordem de convergência (Chun, 2007)

Seja $\bar{x} \in I$ raiz de uma função suficientemente diferenciável $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ para o intervalo I . Se x_0 for suficientemente próximo de $\bar{x}$, então a ordem de convergência dos métodos definidos pelas Equações (2.75) e (2.76) é cúbica, e satisfaz a seguinte equação de erro:

$$e_{k+1} = c_2 \left(2c_2 + \frac{\Xi - 2\mu\bar{x}}{f'(\bar{x})} \right) e_k^3 + O(e_k^4) \quad (2.78)$$

em que $e_k = x_k - \bar{x}$, $c_2 = \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}$, $O(e_k^4)$ é o erro de truncamento (Burden e Faires, 2010) e $\Xi, \mu \in \mathbb{R}$.

Prova: seja $\bar{x}$ uma raiz da função $f(x)$. Usando a expansão de Taylor em torno de $\bar{x}$ e, levando em conta que $f(\bar{x}) = 0$, tem-se:

$$f(x_k) = f'(\bar{x}) \left[e_k + c_2 e_k^2 + O(e_k^3) \right] \quad (2.79a)$$

$$f'(x_k) = f'(\bar{x}) \left[1 + 2c_2 e_k + O(e_k^2) \right] \quad (2.79b)$$

através de um simples cálculo, chega-se a:

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - c_2 e_k^2 + 2(c_2^2 - c_3) e_k^3 + O(e_k^4) \quad (2.80)$$

de modo a,

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \bar{x} + c_2 e_k^2 - 2(c_2^2 - c_3) e_k^3 + O(e_k^4) \quad (2.81)$$

daí,

$$f(y_k) = f'(\bar{x}) \left[c_2 e_k^2 - 2(c_2^2 - c_3) e_k^3 + O(e_k^4) \right] \quad (2.82)$$

de (2.79a), (2.79b) e (2.81), tem-se:

$$f(y_k)f'(x_k) = f''(\bar{x}) \left[c_2 e_k^2 - 2(c_2^2 - c_3) e_k^3 + O(e_k^4) \right] \quad (2.83)$$

e

$$f''(x_k) + (\Xi - 2\mu x_k)f(x_k) + \mu f^2(x_k) = f'(\bar{x}) \left[f'(\bar{x}) + (4c_2 f'(\bar{x}) + \Xi - 2\mu x_k) e_k + O(e_k^2) \right] \quad (2.84)$$

daí,

$$\frac{f(y_k)f'(x_k)}{f''(x_k) + (\Xi - 2\mu x_k)f(x_k) + \mu f^2(x_k)} = c_2 e_k^2 - \left(4c_2 + \frac{\Xi - 2\mu x_k}{f'(\bar{x})} c_2 - 2c_3 \right) e_k^3 + O(e_k^4) \quad (2.85)$$

Em seguida, segue de (2.81) e (2.85) que

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)f'(x_k)}{f''(x_k) + (\Xi - 2\mu x_k)f(x_k) + \mu f^2(x_k)} = \bar{x} + c_2 \left(2c_2 + \frac{\Xi - 2\mu x_k}{f'(\bar{x})} \right) e_k^3 + O(e_k^4) \quad (2.86)$$

Como $e_{k+1} = x_{k+1} - \bar{x}$, a Equação (2.86) mostra que o método iterativo proposto por Chun (2007) tem ordem de convergência cúbica, independente do valor das constantes Ξ e μ ; e como o método de Potra-Pták pertence a essa família, pode-se afirmar que o mesmo também apresenta ordem de convergência cúbica.

2.8 Métodos Iterativos da Família Chebyshev-Halley

Os métodos iterativos da família Chebyshev-Halley são aqueles que, assim como, o método de Potra-Pták, apresentam ordem de convergência cúbica, e que podem ser escritos pela seguinte fórmula (Souza, 2015):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{x}_k) (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{L}(\mathbf{x}_k))^{-1} \right] \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (2.87)$$

em que γ é um número real, cuja diferença do valor desse parâmetro define os diferentes métodos que compõem essa família (Souza, 2015). Dessa forma, a seguir serão apresentados alguns desses métodos.

2.8.1 Método de Chebyshev

O método de Chebyshev é um dos métodos dessa família, em que o parâmetro γ é igual a zero (Souza, 2015). Logo, pode-se escrever esse método da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(\mathbf{x}_k) \right] \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (2.88)$$

sendo,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) [\mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}_k]^T \quad (2.89a)$$

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (2.89b)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}_k = [\mathbf{H}(f_1(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}_k) \mathbf{H}(f_2(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}_k) \dots \mathbf{H}(f_n(\mathbf{x}_k) \mathbf{a}_k)] \quad (2.89c)$$

em que, $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ é a matriz Hessiana, e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_m}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_m}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_k \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_k \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_k \partial x_m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

2.8.2 Método de Super-Halley

Assim como, o método de Chebyshev, esse método também pertence à família Chebyshev-Halley, porém o parâmetro γ é igual a um (Souza, 2015). Com isso, pode-se escrever esse método da seguinte forma:

$$x_{k+1} = x_k - \left[\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{L}(x_k) (\mathbf{I} - \mathbf{L}(x_k))^{-1} \right] \mathbf{J}^{-1}(x_k) \mathbf{F}(x_k) \quad (2.91)$$

sendo,

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{J}^{-1}(x_k) \mathbf{F}(x_k) \quad (2.92a)$$

$$\mathbf{H}(x_k) \mathbf{a}_k = [\mathbf{H}(f_1(x_k) \mathbf{a}_k) \mathbf{H}(f_2(x_k) \mathbf{a}_k) \dots \mathbf{H}(f_n(x_k) \mathbf{a}_k)] \quad (2.92b)$$

$$\mathbf{L}(x_k) = \mathbf{J}^{-1}(x_k) [\mathbf{H}(x_k) \mathbf{a}_k]^T \quad (2.92c)$$

Ordem de convergência

Antes de determinar a ordem de convergência dos métodos da família Chebyshev-Halley define-se a função de iteração, proposta por Traub (1964), através do tipo de informação que ela exige. Sendo assim, tem-se:

Seja x_{k+1} determinado apenas por informações de x_k , sem reutilizar nenhuma informação a mais,

$$x_{k+1} = \mathcal{G}(x_k) \quad (2.93)$$

então $\mathcal{G}$ será chamado de função de iteração de um ponto (Traub, 1964). A maioria dos métodos usados para resolução de equações não lineares são função de iteração de um ponto, sendo que o exemplo mais conhecido é o de Newton-Raphson (Traub, 1964).

Em seguida, seja x_{k+1} determinado por informações de x_k reutilizando informações de $x_{k-1}, \dots, x_{k-n}$,

$$x_{k+1} = \mathcal{G}(x_k; x_{k-1}, \dots, x_{k-n}) \quad (2.94)$$

então $\mathcal{G}$ será chamado de função de iteração com memória (Traub, 1964). O ponto e vírgula na Equação (2.94) separa os pontos que apresentam informações novas dos pontos que apresentam informações reutilizadas (Traub, 1964). Segundo Traub (1964), o exemplo mais conhecido desse tipo de função de iteração é o método das secantes.

Agora seja x_{k+1} determinado por novas informações como $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i}, i \geq 1$, sem informações reutilizadas,

$$x_{k+1} = \mathcal{G}(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}) \quad (2.95)$$

então $\mathcal{G}$ será chamado de função de iteração de pontos múltiplos, que estão sendo introduzidos devido a certas limitações das funções de iteração citadas anteriormente (Traub, 1964).

Finalmente, seja x_{k+1} determinado por novas informações como $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i}$ reutilizando informações de $x_{k-i-1}, \dots, x_{k-n}$,

$$x_{k+1} = \mathcal{G}(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n}; x_{k-i-1}, \dots, x_{k-n}), n > k \quad (2.96)$$

então $\mathcal{G}$ será chamado de função de iteração de pontos múltiplos com memória (Traub, 1964).

Com base nos tipos de função de iteração descritas acima, nota-se que os métodos da família Chebyshev-Halley são métodos que podem ser escritos como uma função de iteração de um ponto. Dessa forma, segundo Hernandez e Salanova (2003) e Gutierrez e Hernandez (1997), pode-se escrever esses como a seguinte função de iteração:

$$\mathcal{G}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + \frac{\frac{f''(x)}{2!f'(x)} \times \frac{f(x)}{f'(x)}}{1 - 2\gamma \left(\frac{f''(x)}{2!f'(x)} \times \frac{f(x)}{f'(x)} \right)} \right) \quad (2.97)$$

Para a determinação da ordem de convergência dos métodos da família Chebyshev-Halley faz-se o uso do teorema descrito a seguir.

Teorema da ordem de convergência

Gander (1985) conceitou que, seja $\bar{x}$ a raiz da função $f(x)$ e $H(x)$ uma função qualquer, em que $H(0) = 1$, $H'(x) = 1/2$ e $H''(0) < \infty$. A função de iteração

$$\mathcal{G}(x) = x - u(x)H(T(x)) \quad (2.98)$$

é de terceira ordem se $T(x) = 2u(x)c_2(x)$. Em que, Ostrowski (1960) definiu $u(x)$ como:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad f'(x) \neq 0 \quad (2.99)$$

se $f'(x) = 0$ e $f(x) \neq 0$ então $u(x)$ é indefinido. Se $f'(x) = 0$ e $f(x) = 0$, que é causado para o caso de múltiplos zero, $u(x) = 0$.

Ainda segundo Ostrowski (1960), seja $c_j(x)$ definido como:

$$c_j(x) = \frac{f^{(j)}(x)}{j!f'(x)}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (2.100)$$

Prova: substituindo as Equações (2.98) e (2.99) na Equação (2.97), tem-se:

$$\mathcal{G}(x) = x - u(x) \left(1 + \frac{c_2(x) \times u(x)}{1 - 2\gamma(c_2(x) \times u(x))} \right) \quad (2.101)$$

Usando esse teorema, pode-se escrever a Equação (2.101), da seguinte maneira (Babajee, 2010):

$$\mathcal{G}(x) = x - u(x)H(T(x)) \quad (2.102)$$

em que:

$$H(T(x)) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{T(x)}{1 - \gamma T(x)} = 1 + \frac{1}{2} T(x) + \frac{1}{2} \gamma T(x)^2 + \dots \quad (2.103)$$

O que prova a ordem de convergência cúbica (Babajee, 2010). Os casos $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$ na Equação (2.101) corresponde ao método de Chebyshev e Super-Halley, respectivamente.

2.9 Método do Ponto Médio

O método do ponto médio é um método de ordem de convergência cúbica executado em dois passos e sem a necessidade do uso de derivadas de segunda ordem (Souza, 2015). O mesmo

é obtido pela aproximação do método de Newton-Raphson utilizando integral indefinida e fórmulas de quadratura. Logo, define-se esse método através das seguintes equações: (Souza, 2015):

$$y_k = x_k - \frac{1}{2} \mathbf{J}^{-1}(x_k) \mathbf{F}(x_k) \quad (2.104a)$$

$$x_{k+1} = x_k - \mathbf{J}^{-1}(y_k) \mathbf{F}(x_k) \quad (2.104b)$$

Ordem de convergência

Segundo Frontini e Sormani (2004), seja $\mathbf{F}: \mathbb{R} \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ três vezes diferenciável no intervalo I contendo a raiz $\bar{x}$ de $\mathbf{F}(\bar{x}) = 0$. Para se fazer a prova da ordem de convergência desse método, parte-se da equação geral do método do ponto médio, sendo:

$$x_{k+1} = x_k - \left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{F} \left(x_k - \Theta \mathbf{F}'(x_k)^{-1} \mathbf{F}(x_k) \right) \right)^{-1} \mathbf{F}(x_k) \quad (2.105)$$

em que, Θ está definido no intervalo $[0, 1]$, e A_i é a influência que verifica a condição de consistência (Frontini e Sormani, 2004),

$$\sum_{i=1}^n A_i = 1 \quad (2.106)$$

Da Equação (2.105), usando $e_k = x_k - \bar{x}$, tem-se:

$$x_{k+1} - x_k = - \left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{F} \left(x_k - \Theta \mathbf{F}'(x_k)^{-1} \mathbf{F}(x_k) \right) \right)^{-1} \mathbf{F}(x_k) \quad (2.107a)$$

$$e_{k+1} - e_k = - \left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{F} \left(x_k - \Theta \mathbf{F}'(x_k)^{-1} \mathbf{F}(x_k) \right) \right)^{-1} \mathbf{F}(x_k) \quad (2.107b)$$

então:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{F} \left(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \right) \right) \mathbf{e}_{k+1} = \left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{F}(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)) \right) \mathbf{e}_k - \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (2.108)$$

fazendo a expansão de $\mathbf{F}$ em relação a $\bar{\mathbf{x}}$, chega-se a:

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k + \frac{1}{2} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 + O(\|\mathbf{e}_k\|^4) \quad (2.109)$$

em que $O(\mathbf{e}_k^4)$ é o erro de truncamento (Burden e Faires, 2010). Como $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k + \frac{1}{2} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 + O(\|\mathbf{e}_k\|^4) \quad (2.110)$$

de (2.110), pode-se escrever o produto $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$ em (2.108) como:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{e}_k - \frac{1}{2} \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 + O(\|\mathbf{e}_k\|^3) \quad (2.111)$$

considerando a expansão de Taylor de

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)) \mathbf{e}_k \quad (2.112)$$

como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)) \mathbf{e}_k &= \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k - \Theta \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k))^2 \mathbf{e}_k + O(\|\mathbf{e}_k\|^4) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Usando (2.111), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)) \mathbf{e}_k &= \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k \\ &\quad - \Theta \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k + \frac{1}{2} \Theta^2 \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 + O(\|\mathbf{e}_k\|^4) \end{aligned} \quad (2.114)$$

em que

$$\kappa = \mathbf{e}_k - \frac{1}{2} \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 + O(\|\mathbf{e}_k\|^3) \quad (2.115)$$

agrupando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)) \mathbf{e}_k &= \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k - \Theta \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 \\ &\quad + \frac{\Theta}{2} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Theta^2 \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 + O(\|\mathbf{e}_k\|^4) \end{aligned} \quad (2.116)$$

substituindo as Equações (2.116) e (2.110) na Equação (2.108), chega-se a:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{F}(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)) \right) \mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{E} + O(\|\mathbf{e}_k\|^4) \quad (2.117)$$

em que

$$\mathbf{E} = \left(\sum_{i=1}^n A_i \left\{ \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k - \Theta \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 + \frac{\Theta}{2} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \Theta^2 \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 \right\} - \left\{ \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k + \frac{1}{2} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 \right\} \right) \quad (2.118)$$

Seja a fórmula de quadratura de ordem 1, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n A_i = 1 \quad (2.119a)$$

$$\sum_{i=1}^n A_i \Theta = \frac{1}{2} \quad (2.119b)$$

de (2.119) vem:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{F} \left(\mathbf{x}_k - \Theta \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \right) \right) \mathbf{e}_{k+1} &= \frac{1}{4} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 \\
&- \left(\frac{1}{3!} - \sum_{i=1}^n A_i \frac{\Theta^2}{2} \right) \mathbf{F}'''(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_k^3 \\
&+ O(\|\mathbf{e}_k\|^4)
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Agrupando os termos que contem $\mathbf{e}_k^3$ e comparando essa equação com a Equação (2.1), uma vez que $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}$, nota-se que a ordem de convergência desse método é de $p = 3$.

2.10 Método de Chun

O método de Chun é baseado na modificação, proposta por Abbasbandy (2003), do método de Newton-Raphson, utilizando a expansão de Taylor e a decomposição de Adomian (Souza, 2015). O mesmo apresenta convergência de quarta ordem e não requer o cálculo da derivada de segunda ordem (Souza, 2015). Desta forma, tem-se a seguinte formulação:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \tag{2.121a}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - 2\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{y}_k) + \left[\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \right]^2 \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{y}_k) \mathbf{F}(\mathbf{y}_k) \tag{2.121b}$$

Ordem de convergência

Segundo Chun (2006), seja $\bar{x}$ a raiz de uma função simplesmente diferenciável $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ para um intervalo I . Então o método de Chun definido pela Equação (2.121) satisfaz a seguinte equação de erro:

$$\mathbf{e}_{k+1} = 5c_2^3 \mathbf{e}_k^4 + O(\mathbf{e}_k^5) \tag{2.122}$$

em que, conforme já definido, $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}$ e $c_2 = \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}$.

Prova: seja $\bar{x}$ uma raiz da função f e considerando a função de iteração $\psi(x)$ definido por:

$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - 2 \frac{f(y(x))}{f'(x)} + \frac{f(y(x))f'(y(x))}{f''(x)} \tag{2.123}$$

em que $y(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Fazendo alguns cálculos, chega-se nas seguintes derivadas:

$$\psi(\bar{x}) = \bar{x} \quad (2.124a)$$

$$\psi'(\bar{x}) = \psi''(\bar{x}) = \psi'''(\bar{x}) = 0 \quad (2.124b)$$

$$\psi^{(4)}(\bar{x}) = 15 \left(\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right)^3 \quad (2.124c)$$

da expansão de Taylor de $\psi(x_k)$ em torno de $\bar{x}$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \psi(x_k) \\ &= \psi(\bar{x}) - \psi'(\bar{x})(x_k - \bar{x}) + \frac{\psi''(\bar{x})}{2!}(x_k - \bar{x})^2 + \frac{\psi'''(\bar{x})}{3!}(x_k - \bar{x})^3 \\ &\quad + \frac{\psi^{(4)}(\bar{x})}{4!}(x_k - \bar{x})^4 + O((x_k - \bar{x})^5) \end{aligned} \quad (2.125)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{x} + \frac{\psi^{(4)}(\bar{x})}{4!} e_k^4 + O(e_k^5) \\ &= \bar{x} + 5 \left(\frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})} \right)^3 e_k^4 + O(e_k^5) = \bar{x} + 5c_2^3 e_k^4 + O(e_k^5) \end{aligned} \quad (2.126)$$

como $e_k = x_k - \bar{x}$ e $c_2 = \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}$, então:

$$e_{k+1} = 5c_2^3 e_k^4 + O(e_k^5) \quad (2.127)$$

Que é a mesma equação proposta em (2.120), e comparando a mesma com a Equação (2.1), nota-se que a ordem de convergência $p = 4$ (Chun, 2006).

2.11 Método das Secantes

O método das Secantes, de acordo com Franco (2007), baseia-se em eliminar a desvantagem do NRP através da substituição da derivada da função, $f'(x)$, pelo quociente das

diferença, uma vez que, assim não será necessário obter $f'(x)$, bem como, calcular seu valor numérico, a cada passo. Com isso, tem-se:

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (2.128)$$

em que x_k, x_{k-1} são duas aproximações quaisquer para a raiz $\bar{x}$. Logo,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (2.129)$$

colocando o segundo membro sobre o mesmo denominador, obtém-se a seguinte expressão para o método:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (2.130)$$

Porém, é importante destacar que apesar da melhora na eficiência computacional há uma redução na ordem de convergência quando comparado ao NRP.

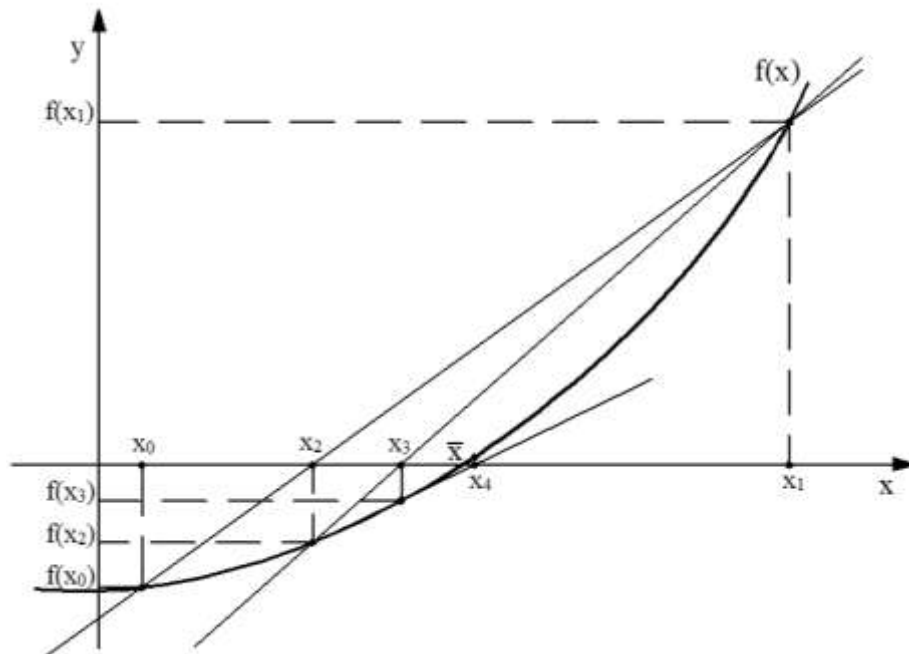


Figura 5 – Interpretação geométrica do método da secante (Lobão, 2012).

Geometricamente (Figura 5), o método das secantes parte de duas aproximações (x_0 e x_1), e a partir dessas aproximações determina-se a reta que passa pelos pontos (x_0 e $f(x_0)$) e (x_1 e $f(x_1)$). A interseção desta reta com o eixo x fornece o ponto x_2 , em seguida, é calculado uma nova aproximação para a raiz a partir dos pontos (x_1 e $f(x_1)$) e (x_2 e $f(x_2)$) e assim, sucessivamente até que, se obtenha uma aproximação para a raiz exata, com a tolerância desejada (Lobão, 2012).

Ordem de convergência

Conforme Atkinson (1988), assumindo que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas para todos os valores de x no intervalo I contendo $\bar{x}$, e assumindo que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Então, se os chutes iniciais x_0 e x_1 são suficientemente próximos de $\bar{x}$, a iteração de x_{k+1} de (2.129) convergirá para $\bar{x}$ e a ordem de convergência será $p \cong 1,618$.

Antes de fazer a prova da ordem de convergência desse método é preciso definir o erro do método das secantes, que segundo Atkinson (1988), pode ser obtido subtraindo-se $\bar{x}$ em ambos os lados da Equação (2.129), com isso obtém-se:

$$x_{k+1} - \bar{x} = (x_{k-1} - \bar{x})(x_k - \bar{x}) \frac{f[x_{k-1}, x_k, \bar{x}]}{f[x_{k-1}, x_k]} \quad (2.131)$$

em que:

$$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (2.132a)$$

$$f[x_{k-1}, x_k, \bar{x}] = \frac{f[x_k, \bar{x}] - f[x_{k-1}, x_k]}{\bar{x} - x_{k-1}} \quad (2.132b)$$

Sendo esses, chamados de diferenças divididas de primeira e segunda ordem, respectivamente, que estão relacionados com as derivadas de $f(x)$:

$$f[x_{k-1}, x_k] = f'(x_\xi) \quad (2.133a)$$

$$f[x_{k-1}, x_k, \bar{x}] = \frac{1}{2} f''(x_\zeta) \quad (2.133b)$$

com x_ξ entre x_{k-1} e x_k , e x_ζ entre o mínimo e o máximo de x_{k-1} , x_k e $\bar{x}$.

Substituindo as Equações de (2.133) na Equação (2.131), tem-se:

$$x_{k+1} - \bar{x} = (x_{k-1} - \bar{x})(x_k - \bar{x}) \frac{f''(x_\zeta)}{2f'(x_\xi)} \quad (2.134)$$

logo:

$$e_{k+1} = (e_{k-1})(e_k) \frac{f''(x_\zeta)}{2f'(x_\xi)} \quad (2.135)$$

Com o erro do método definido, parte-se para a prova da ordem de convergência do método da secante.

Prova: para a vizinhança $I = [\bar{x} - h, \bar{x} + h]$ com algum $h > 0$, $f'(x) \neq 0$ para todo o intervalo I . Define-se:

$$M = \frac{\text{Max}_{x \in I} |f''(x)|}{2 \text{Min}_{x \in I} |f'(x)|} \quad (2.136)$$

então para todo $x_0, x_1 \in [\bar{x} - h, \bar{x} + h]$, usando (2.135),

$$\begin{aligned} |e_2| &\leq |e_1| \times |e_0| M \\ M|e_2| &\leq M|e_1| \times M|e_0| \end{aligned} \quad (2.137)$$

assumindo ainda que x_0 e x_1 são escolhidos de tal forma que:

$$\Gamma \equiv \text{Max}\{M|e_0|, M|e_1|\} < 1 \quad (2.138)$$

então $M|e_2| < 1$, desde que

$$M|e_2| < \Gamma^2 \quad (2.139)$$

além disso, $M|e_2| \leq \Gamma^2 < \Gamma$ o que implica

$$|e_2| < \frac{\Gamma}{M} = \text{Max} \{M|e_0|, M|e_1|\} \leq h \quad (2.140)$$

e então $x_2 \in [\bar{x} - h, \bar{x} + h]$. Aplica-se esse argumento indutivamente para mostrar que $x_k \in [\bar{x} - h, \bar{x} + h]$ e $M|e_k| \leq \Gamma$ para $k \geq 2$ (Atkinson, 1988).

Continuando a aplicação da Equação (2.135), obtém-se:

$$\begin{aligned} M|e_3| &\leq M|e_2| \times M|e_1| \leq \Gamma^2 \times \Gamma = \Gamma^3 \\ M|e_4| &\leq M|e_3| \times M|e_2| \leq \Gamma^5 \end{aligned} \quad (2.141)$$

para

$$M|e_k| \leq \Gamma^{q_k} \rightarrow M|e_{k+1}| \leq M|e_k| \times M|e_{k-1}| \leq \Gamma^{q_{k+1}} \quad (2.142)$$

então

$$q_{k+1} = q_k + q_{k-1} \quad (2.143)$$

com $q_0 = q_1 = 1$ (Atkinson, 1988). Segundo Atkinson (1988), a Equação (2.143) é a fórmula da sequência de Fibonacci, que pode ser escrita em uma formulação mais explícita da seguinte forma:

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{5}} [r_0^{k+1} - r_1^{k+1}] \quad k \geq 0 \quad (2.144)$$

em que:

$$r_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618 \quad (2.145a)$$

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 0,618 \quad (2.145b)$$

então

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{5}} (1,618)^{k+1} \quad (2.146)$$

para um valor de k grande.

Voltando a Equação (2.142), tem-se que o erro é dado por:

$$|e_k| \leq \frac{1}{M} \Gamma^{q_k} \quad k \geq 0 \quad (2.147)$$

com q_k dado por (2.144). desde que $q_k \rightarrow \infty$ com $k \rightarrow \infty$, tem-se que $x_k \rightarrow \bar{x}$. Logo, pode-se concluir que esse método converge para $\bar{x}$.

Quanto a ordem de convergência, pode-se mostrar que q_k é a taxa para a qual o limite definido em (2.147) diminui. Seja B_k o limite superior em (2.147), então:

$$\frac{B_{k+1}}{B_k^{r_0}} = \frac{\frac{1}{M} \Gamma^{q_{k+1}}}{\left[\frac{1}{M} \right]^{r_0} \times \Gamma^{r_0 \times q_k}} = M^{r_0-1} \times \Gamma^{q_{k+1}-r_0 \times q_k} \leq \Gamma^{-1} M^{r_0-1} \equiv c^* \quad (2.148)$$

porque $q_{k+1} - r_0 q_k = r_1^{k+1} > -1$ (Atkinson, 1988). Então:

$$B_{k+1} = c^* B_k^{r_0} \quad (2.149)$$

Como $B_k = |e_k|$, comparando essa equação com a Equação (2.1), pode-se afirmar que a ordem de convergência desse método é $p \cong 1,618$ (Atkinson, 1988).

2.12 Método da Falsa Posição

O método da falsa posição, é uma variação do método das secantes, em que se toma duas aproximações iniciais x_{k-1} e x_k , tais que $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ tenham sinais opostos, conforme Teorema de Bozano. Apesar dessa mudança, não há alteração na ordem de convergência do método da falsa posição, uma vez que o procedimento para cálculo das aproximações é o mesmo que para o método da secante (Franco, 2007). Com isso pode-se escrever o método da falsa posição através da seguinte equação:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (2.150)$$

Geometricamente (Figura 6), esse método parte de duas aproximações (x_0 e x_1), e a partir dessas aproximações determina-se a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. A interseção desta reta com o eixo x fornece o ponto x_2 . Se x_2 atender a tolerância desejada, o mesmo é a raiz procurada. Caso contrário, calcula-se $f(x_2)$ e escolhe-se entre x_0 e x_1 aquele cuja $f(x)$ tenha sinal oposto ao de $f(x_2)$. Com x_2 e esse ponto calcula-se x_3 através da Equação (2.150) e assim, sucessivamente até encontrar a raiz da função (Franco, 2007).

Além do método da falsa posição apresentar um procedimento de cálculo semelhante ao procedimento do método das secantes, como pode ser observado na Figura 6, o mesmo também se assemelha ao método da bisseção, uma vez que, ambos atendem ao teorema de Bolzano e resumem-se em subdividir os intervalos. A diferença é que, enquanto o método da bisseção se toma a média aritmética entre os limites do intervalo, o método da falsa posição toma-se a média aritmética ponderada entre os limites do intervalo (Ruggiero e Lopes, 1996). Logo, o método da falsa posição pode ser escrito da seguinte forma:

$$x_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (2.151)$$

em que os pontos a e b , referem-se aos limites do intervalo conforme feito para o método da bisseção.

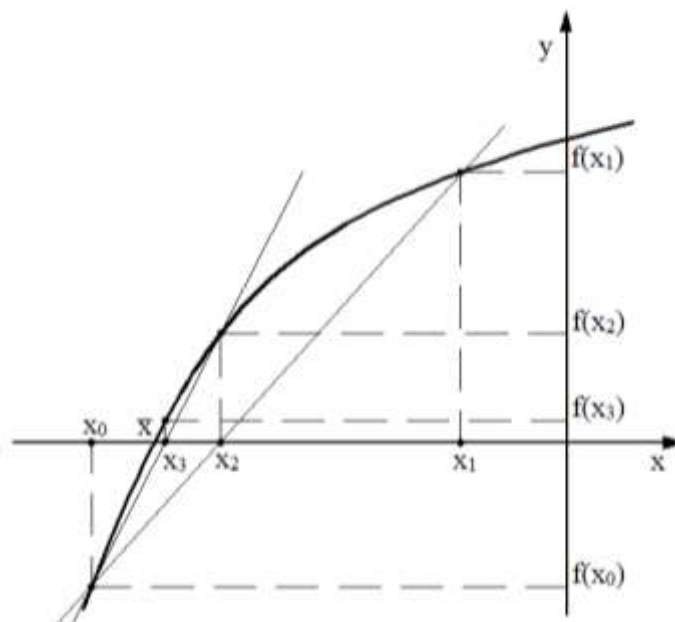


Figura 6 – Interpretação geométrica do método da falsa posição (Franco, 2007).

3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTÁTICO NÃO LINEAR

3.1 Introdução

Como é de conhecimento geral, a maioria dos projetos estruturais são, geralmente, projetados com base em uma análise elástica linear, que considera a estrutura perfeita; as equações de equilíbrio são formuladas com base na configuração inicial indeformada da estrutura; e os deslocamentos sofridos pela estrutura são pequenos, tais que sejam insignificantes quanto a configuração de equilíbrio da estrutura. Porém, com o passar dos anos e com os avanços tecnológicos, houve o surgimento de novos materiais e novas técnicas construtivas, permitindo assim a construção de estruturas mais complexas e esbeltas que estão sujeitas a maiores deslocamentos e deformações e, conseqüentemente, aos efeitos de não linearidade física e geométrica.

Em virtude desses efeitos de não linearidade, a análise elástica não é capaz de retratar o comportamento real das estruturas sob condições não usuais de carregamento ou carregamento limite. Nesse contexto, procura-se com a análise não linear melhorar a simulação do comportamento real das estruturas em alguns aspectos e retratar, apropriadamente, os efeitos relacionados às não linearidades que afetam significativamente o comportamento estrutural (Silva, 2009).

A análise de estabilidade dos elementos estruturais esbeltos é feita, comumente, através do método dos elementos finitos (MEF) que, de uma maneira geral, é uma técnica que discretiza o meio contínuo em subdomínios, referidos como elementos, conforme Figura 7, e esses são interligados através dos pontos nodais onde são definidos os graus de liberdade a serem determinados (Silva, 2009); gerando assim, um sistema de equações algébricas não lineares.

Conforme Maximiano (2012), um processo eficiente e mais recorrente na comunidade científica para análise numérica não linear de sistemas estruturais é o processo incremental-iterativo, que consiste na aplicação fracionada do carregamento, chamado de incremento de carga, cumulativamente ao longo da análise até que o carregamento seja todo aplicado. Uma vez que, em cada passo da análise, correspondente a um incremento de carga, as equações de equilíbrio são resolvidas por meio de método iterativos, como os explicados no capítulo

anterior. Além disso, podem ser associadas aos métodos iterativos técnicas de continuação, que são equações de restrições adicionadas ao sistema algébrico com o intuito de traçar completamente a trajetória de equilíbrio (Maximiano, 2012).

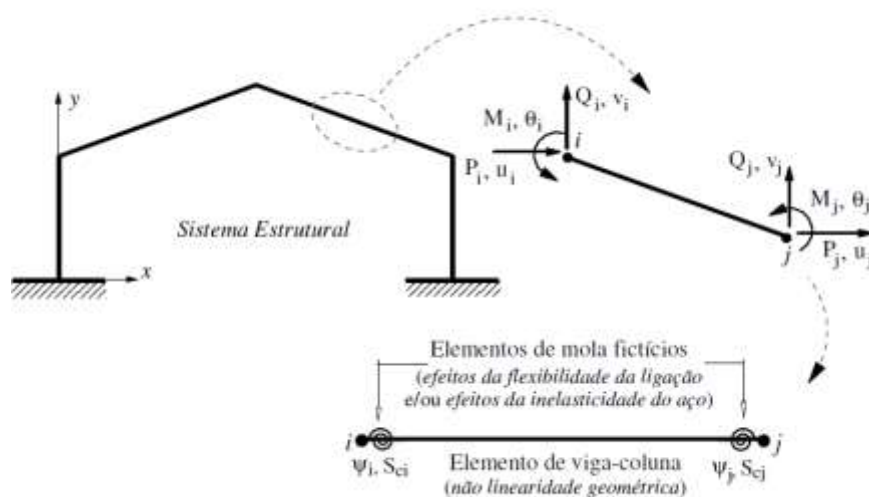


Figura 7 – Elemento finito adotado (Silva, 2009).

Portanto, este capítulo apresenta algumas metodologias incrementais-iterativas de solução do problema estático não linear, bem como as técnicas de continuação. Na Seção 3.2, é descrito o método de funcionamento da estratégia incremental-iterativa, além disso são descritos os métodos iterativos explicados no capítulo anterior, porém, com formulação aplicada a análise estrutural. Nas Seções seguintes, 3.3 e 3.4 são apresentadas as estratégias de incremento de carga e de escolha do sinal do incremento inicial do parâmetro de carga, respectivamente. Por fim, nas Seções 3.5 e 3.6 são descritas, respectivamente, diversas estratégias de iteração e uma estratégia sem a presença do passo incremental predito.

3.2 Solução de Problemas Não Lineares

No contexto do MEF, a análise da estabilidade dos elementos estruturais esbeltos envolve a solução de um sistema de equações algébricas não linear, que pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{F}_r$ é um vetor de forças nodais externas tomado como referência, o qual apresenta magnitude arbitrária, e apenas sua direção é importante; λ é um parâmetro de carga responsável

pelo o escalonamento de $\mathbf{F}_r$; e $\mathbf{F}_i$ é o vetor de forças internas, que é função dos deslocamentos, $\mathbf{U}$, nos pontos nodais da estrutura.

Uma forma comum de se representar a resposta estática não linear de uma estrutura é pela representação gráfica, denominada trajetória de equilíbrio, ilustrada na Figura 8; que consiste em traçar uma curva carga-deslocamento (ou rotação), em que, a abcissa corresponde à componente de deslocamento (ou rotação) de um nó selecionado, a ordenada corresponde ao parâmetro de carga, e cada um de seus pontos representam uma configuração de equilíbrio estático que satisfaz a Equação (3.1) (Maximiano, 2012).

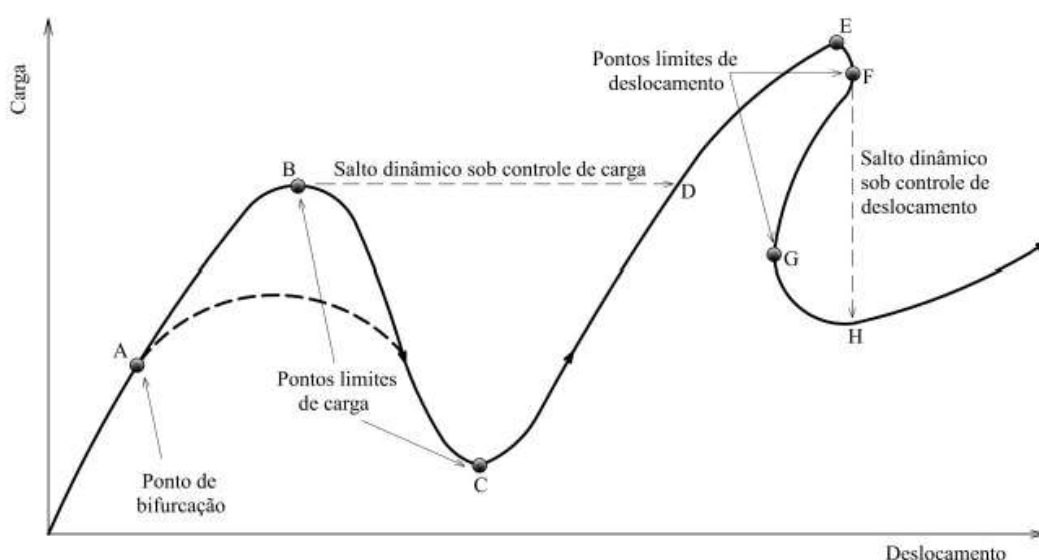


Figura 8 – Trajetória de equilíbrio e representação gráfica dos pontos de *snap-back*, *snap-through* e bifurcação (Maximiano, 2012).

Dessa forma, uma metodologia eficiente de solução de sistemas de equações não lineares deve ser capaz de traçar toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundário) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares, ou críticos, que possam existir (Maximiano, 2012). De acordo com Maximiano (2012), existem dois tipos de pontos críticos, que são definidos como: pontos limites com os fenômenos de *snap-through* (salto dinâmico sob controle de carga), *snap-back* (salto dinâmico sob controle de deslocamento), e de bifurcação, que são pontos dos quais se derivam duas ou mais trajetórias de equilíbrio. Ainda quanto aos pontos de bifurcação, Alves (1995) ressaltou que, a consideração de pequenas imperfeições aleatórias é uma estratégia numérica bastante eficiente

para detectar pontos de bifurcação ao longo da trajetória não linear de equilíbrio, sendo esse procedimento justificado tanto em termos da Teoria Geral da Estabilidade Elástica (Koiter, 1970 apud Silveira, 1995; Thompson & Hunt, 1973 apud Silveira, 1995) como através da Teoria da Catástrofe (Thom, 1975 apud Silveira, 1995; Poston & Stewart, 1978 apud Silveira, 1995).

A solução do problema representado pela Equação (3.1) é feita com o uso da abordagem incremental-iterativa, em que duas fases podem ser identificadas. A primeira delas, denominada fase predita, que envolve a solução dos deslocamentos incrementais, através das equações de equilíbrio da estrutura, a partir de um determinado acréscimo de carregamento (Silva, 2009). A segunda de acordo com Silva (2009), denominada corretiva, que tem por objetivo a correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo. Tais forças internas são então comparadas com o carregamento externo, obtendo-se daí a quantificação do desequilíbrio existente entre as forças internas e externas, e essa fase é repetida até que, por intermédio de um critério de convergência, a estrutura esteja em equilíbrio (Silva, 2009).

Os passos principais dessa metodologia de análise não linear serão apresentados adiante, porém, é necessário fazer algumas ressalvas quanto a notação que será adotada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga $t + \Delta t$;
- k se refere ao contador do número de iterações em um determinado passo de carga. Para $k = 0$, tem-se a solução incremental predita, e para outros valores tem-se o ciclo iterativo;
- λ e $\mathbf{U}$ definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

3.2.1 Solução incremental predita

A primeira fase para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente, $\Delta\lambda^0$ e ΔU^0 , consiste na montagem da matriz de rigidez tangente, $\mathbf{K}$, utilizando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura. A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais, δU_r , por meio da seguinte expressão (Maximiano, 2012):

$$\delta U_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r \quad (3.2)$$

Através de uma das estratégias de incremento de carga, que serão discutidas na Seção 3.3, é possível que se faça uma seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, a qual pode estar condicionada a uma equação de restrição adicional imposta ao problema, como mostrado na Figura 9, para a restrição de comprimento de arco (Maximiano, 2012).

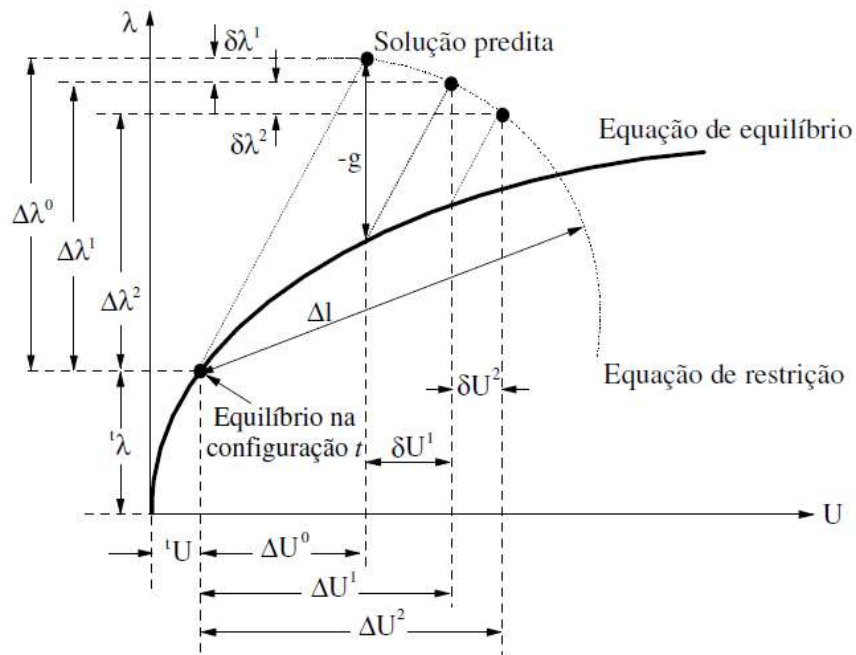


Figura 9 – Solução incremental-iterativa (Maximiano, 2012).

Com a definição de $\Delta\lambda^0$, são determinados os deslocamentos nodais incrementais tangenciais, ΔU^0 , escalonando-se δU_r , ou seja,

$$\Delta U^0 = \Delta\lambda^0 \delta U_r \quad (3.3)$$

Em seguida, podem ser atualizados o parâmetro de carga e os deslocamento totais através do seguinte procedimento:

$$^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (3.4)$$

$$^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.5)$$

em que ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

Vale ressaltar que a solução descrita pelas Equações (3.4) e (3.5) nem sempre satisfazem a condição de equilíbrio do sistema, com isso, iterações subsequentes são necessárias para que se possa restaurar o equilíbrio (Maximiano, 2012).

3.2.2 Ciclo de iterações – Método de Newton-Raphson

Visando corrigir o desequilíbrio existente entre as forças internas e externas, e consequentemente traçar a trajetória de equilíbrio, aplica-se algum dos métodos iterativos que serão explicados a seguir. Porém, ressalta-se que esses métodos puramente aplicados não são suficientes para a passagem por todos os pontos limites, logo, é necessário que se permita a variação de λ a cada iteração, e essa variação é possível associando, às iterações procedimentos numéricos que adicionam uma equação de restrição ao problema.

Para iniciar o desenvolvimento do método de Newton-Raphson, a Equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = 0 \quad (3.6)$$

em que $\mathbf{g}$ representa o vetor gradiente (ou desequilíbrio de forças) que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando assim, que um novo ponto de equilíbrio da estrutura for atingido.

Para o incremento de carga no instante atural, $t + \Delta t$, a cada iteração, dada uma solução aproximada,

$$^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^{(k-1)} = \mathbf{U}^{(k-1)} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} \quad (3.7)$$

Calcula-se a correção $\delta\mathbf{U}^k$, tal que:

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k) = 0 \quad (3.8)$$

Nas equações acima, os termos k e $k - 1$ referem-se, respectivamente, às iterações corrente e anterior.

A partir da seguinte expansão em série de Taylor da Equação (3.8) em torno de $\mathbf{U}^{(k-1)}$, ou seja,

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k) \cong \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^{(k-1)}} \delta\mathbf{U}^k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial (\mathbf{U}^{(k-1)})^2} (\delta\mathbf{U}^k)^2 + \dots \quad (3.9)$$

é possível determinar $\delta\mathbf{U}^k$.

Usando apenas os dois primeiros termos da série, e substituindo-os em (3.8), obtém-se:

$$\delta\mathbf{U}^k = - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)})}{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial (\mathbf{U}^{(k-1)})}} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^{(k-1)}} \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (3.10)$$

em que, a derivada corresponde fisicamente a matriz de rigidez tangente da estrutura, $\mathbf{K}$.

A Equação (3.10), que fornece a correção dos deslocamentos nodais, pode ser reescrita como:

$$\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (3.11)$$

A nova estimativa para a solução, dada por:

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k \quad (3.12)$$

que é considerada a solução do problema quando um determinado critério de convergência for satisfeito.

Conforme Silveira (1995) e Maximiano (2012), os métodos de Newton-Raphson são incapazes de ultrapassar pontos limites de carga que possa surgir ao longo da trajetória de equilíbrio. Isso, se deve ao fato desses métodos apresentarem como estratégia a manutenção do

parâmetro de carga, λ , constante durante o ciclo de iterações; além disso, apresentam um mau condicionamento da matriz de rigidez tangente que se torna singular nesses pontos.

Portanto, caso se pretenda acompanhar todo o traçado da trajetória de equilíbrio e a passagem por todos os pontos limites. Segue-se a técnica geral de solução inicialmente proposta por Batoz e Dhett (1979), em que a variação do parâmetro de carga é permitida. Sendo assim, uma nova estimativa para os deslocamentos pode ser obtida através da seguinte equação de equilíbrio (Silva, 2009):

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}\left(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k\right), k \geq 1 \quad (3.13)$$

Nessa equação, nota-se que $\mathbf{g}$ é uma função dos deslocamentos nodais, $\mathbf{U}^{(k-1)}$, calculados na última iteração, e do valor corrente do parâmetro de carga total, λ^k , que agora também é incógnita, e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (3.14)$$

em que $\delta\lambda^k$ é a correção do parâmetro de carga. Substituindo (3.14) em (3.13), tem-se:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \left[\left(\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \right) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)} \right] \quad (3.15)$$

que ainda pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.16)$$

que é a equação procurada para se trabalhar durante o ciclo iterativo.

Da Equação (3.16), os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas, obtendo-se:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.17)$$

em que:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (3.18a)$$

$$\delta \mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r \quad (3.18b)$$

aqui $\delta \mathbf{U}_g^k$ é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia convencional de incremento do parâmetro de carga constante e $\delta \mathbf{U}_r^k$ é o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de $\mathbf{F}_r$. Caso, seja adotado o método de Newton-Raphson modificado, $\delta \mathbf{U}_r^k$ na iteração corrente k será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais $\delta \mathbf{U}_r$ calculado mediante a Equação (3.2) e não se modifica durante as iterações, pois, $\mathbf{K}$ não se modifica (Silveira, 1995).

Já a correção do parâmetro de carga, única incógnita da Equação (3.17), é determinada seguindo uma das estratégias de iteração, as quais introduzem uma equação de restrição ao problema que deve ser respeitada a cada iteração (Silveira, 1995). Determinado $\delta \lambda^k$, retorna-se à Equação (3.17) para a obtenção da correção dos deslocamentos.

Com a obtenção da solução iterativa, $\delta \lambda^k$ e $\delta \mathbf{U}^k$, faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema através das seguintes relações:

$$\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k \quad (3.19a)$$

$$\Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.19b)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais têm-se:

$$^{(t+\Delta t)} \lambda^k = {}^t \lambda + \Delta \lambda^k \quad (3.20a)$$

$$^{(t+\Delta t)} \mathbf{U}^k = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k \quad (3.20b)$$

3.2.2.1 Ciclo de Iterações – Método de Potra-Pták

Segundo Souza *et al.* (2018), pode-se adotar o método de Potra-Pták para análise estrutural não linear através da seguinte equação:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k = \delta \lambda_1^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta \lambda_2^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)}) \quad (3.21)$$

Assumindo que a inversa da matriz $\mathbf{K}^{(k-1)}$ existe, o vetor $\mathbf{y}^{(k-1)}$ é calculado por:

$$\mathbf{y}^{(k-1)} = \mathbf{U}^{k-1} + [\mathbf{K}^{-1(k-1)}][\delta\lambda_1^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)}] \quad (3.22)$$

isolando $\delta\mathbf{U}^k$ na Equação (3.21), chega-se a seguinte expressão:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_1^k + \delta\mathbf{U}_2^k \quad (3.23)$$

em que

$$\delta\mathbf{U}_1^k = [\mathbf{K}^{-1(k-1)}][\delta\lambda_1^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)}] = \delta\lambda_1^k \delta\mathbf{U}_r^k + \delta\mathbf{U}_g^k \quad (3.24)$$

$$\delta\mathbf{U}_2^k = [\mathbf{K}^{-1(k-1)}][\delta\lambda_2^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)})] = \delta\lambda_2^k \delta\mathbf{U}_r^k + \delta\mathbf{y}_g^k \quad (3.25)$$

Para a avaliação de $\delta\lambda_1^k$ e $\delta\lambda_2^k$ usa-se a seguinte equação de restrição proposta por Yang e Kuo (1994)

$$\mathbf{C}^T \delta\mathbf{U}^k + k_1 \delta\lambda^k = \mathbf{H}_k \quad (3.26)$$

que deve respeitar as duas etapas de solução não linear (solução predita e ciclo de iterações), e $\mathbf{C}$ é uma matriz cujos elementos são constantes, k_1 também é uma constante e $\mathbf{H}_k$ é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo) que define diferentes estratégias de incremento de carga e iteração em função dos valores adotados (Silva, 2009). Logo, calcula-se os parâmetros $\delta\lambda_1^k$ e $\delta\lambda_2^k$ através das seguintes equações:

$$\delta\lambda_1^k = \frac{\mathbf{H}_1 - \mathbf{C}_1^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\mathbf{C}_1^T \delta\mathbf{U}_r^k + k_1} \quad (3.27)$$

$$\delta\lambda_2^k = \frac{\mathbf{H}_2 - \mathbf{C}_2^T \delta\mathbf{y}_g^k}{\mathbf{C}_2^T \delta\mathbf{U}_r^k + k_2} \quad (3.28)$$

3.2.2.2 Ciclo de Iterações – Método de Iteração Linear ou Método do Ponto Fixo

Antes de demonstrar o método de iteração linear aplicado para resolução de problemas de análise estrutural não linear, é necessário fazer uma explicação mais detalhada da análise estrutural no contexto do método dos elementos finitos. Conforme já mencionado, nesse

contexto, a análise da estabilidade dos elementos estruturais envolve a solução de um sistema de equações algébricas não lineares, que pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (3.29)$$

sendo essa, uma equação derivada do Princípio da Energia Total Estacionária. Esse princípio estabelece que entre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem as condições de equilíbrio tornam a energia potencial estacionária (Cook *et al*, 1989). Daí, Galvão (2000) definiu que, a condição de equilíbrio do sistema na configuração de $t + \Delta t$ é dada por:

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (3.30)$$

ou:

$$\left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{U}) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{U}) \right] \Delta\mathbf{U} + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (3.31)$$

em que:

$${}^{\Delta t}\mathbf{F}_i = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{U}) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{U}) \right] \Delta\mathbf{U} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{U}) + \frac{1}{6}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{U}) \right] \quad (3.33)$$

$\mathbf{F}_r$ é um vetor de forças nodais externas tomado como referência; λ é um parâmetro de carga responsável pelo o escalonamento de $\mathbf{F}_r$; ${}^t\mathbf{F}_i$ é o vetor que caracteriza a força interna da estrutura na configuração de equilíbrio t . Segundo Galvão (2000) a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ pode ser escrita de diferentes maneiras, e a demonstrada na Equação (3.33) foi proposta por Torkamani *et al* (1997). Com isso, tem-se:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} + {}^t\mathbf{F}_i = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r \quad (3.34)$$

Passando agora para a demonstração do método de iteração linear. A mesma será dividida em duas formulações, sendo elas direta e tangente, de modo que se possa fazer a formulação completa do método.

1. Formulação Direta

A fim de se desenvolver a dedução da formulação direta do método de iteração linear, adotou-se a Equação (3.34) da seguinte forma:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r \quad (3.35)$$

ou seja,

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = \mathbf{F}_i \quad (3.36)$$

Dessa maneira, Zeid (1985) mostrou uma reformulação da Equação (3.35) para o padrão de iterações do método de iteração linear adicionando o vetor $\mathbf{K}_F {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ dos dois lados da equação. Logo, obtém-se:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} + \mathbf{K}_F^{-1} \left\{ \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} \right\} \quad (3.37)$$

em que $\mathbf{K}_F$ é uma matriz arbitrária e $\mathbf{K}_F^{-1}$ é uma aproximação da inversa da matriz de rigidez $\mathbf{K}$. Reescrevendo a Equação (3.37) na forma iterativa, a solução para o algoritmo de formulação direta se torna:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{K}_F^{-1} \left\{ \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} \right\} \quad (3.38)$$

ou

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k = \psi \left({}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda\mathbf{F}_r \right) \quad (3.39)$$

em que o vetor ψ é o ponto fixo, e é dado por:

$$\psi \left({}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda\mathbf{F}_r \right) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{K}_F^{-1} \left\{ \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} \right\} \quad (3.40)$$

O subscrito F significa fixo em relação ao nome do método. Esse algoritmo tem dois loops de iteração, sendo um interno e o outro externo. Quanto ao loop interno, trata-se do processo iterativo, ou seja, a mudança do valor de k. Já o loop externo, dedica-se a variação do passo de carga, ou seja, sair de t para t + Δt (Zeid, 1985).

Visando, encontrar uma interpretação física da matriz $\mathbf{K}_F$, Zeid (1985) rearranjou a Equação (3.40) de forma que a mesma se assemelhe ao método de Newton-Raphson, resultando em:

$$\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(k-1)} = \lambda \mathbf{F}_r - \{\mathbf{K} - \mathbf{K}_F\}^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \quad (3.41)$$

consequentemente, $\mathbf{K}_F$ pode ser visto como uma matriz de pseudo-rigidez adicionada à estrutura física na tentativa de ajustar sua rigidez durante a fase de solução (Zeid, 1985). Consequentemente, o vetor $\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} \mathbf{U}^k$ é uma pseudo-força e/ou pseudo-momento adicionado à estrutura anexando uma mola artificial, linear ou rotacional, em cada grau de liberdade de nó ativo no modelo dos elementos finitos (Zeid, 1985).

Apesar da sua simplicidade, a formulação direta é raramente útil, uma vez que, geralmente não é possível adotar a Equação (3.35) do jeito proposto nessa formulação (Zeid, 1985). Porém, em teoria, Zeid (1985) destacou que isso pode ser evitado alterando a forma do vetor ψ .

2. Formulação Tangente

Para desenvolver a formulação tangente, considera-se novamente a Equação (3.34), isolando o termo $\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}$, desta forma, tem-se:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{F}_r - {}^t\mathbf{F}_i \quad (3.42)$$

em que, a desigualdade do lado direito da equação é o vetor gradiente $\mathbf{g}$ que diferentemente do ciclo de Newton-Raphson, nesse método, o vetor gradiente assumirá a função de incremento de carga (Zeid, 1985). Porém, como o significado físico é o mesmo, manteve-se a notação do vetor gradiente, logo:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = \mathbf{g} \quad (3.43)$$

e o incremento do deslocamento é dado por:

$$\Delta \mathbf{U}^k = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U} \quad (3.44)$$

Para obter a formulação tangente do método de iteração linear, Zeid (1985), adicionou o vetor $\mathbf{K}_F \Delta \mathbf{U}$ em ambos os lados da Equação (3.43):

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U} + \mathbf{K}_F^{-1} \{ \mathbf{g} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} \} \quad (3.45)$$

em que $\mathbf{K}_F^{-1}$ é uma aproximação da inversa da matriz de rigidez, assim como, para a formulação direta. Ainda, semelhante a formulação direta, reescrevendo a Equação (3.45) na forma iterativa, tem-se (Zeid, 1985):

$$\Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{K}_F^{-1} \{ \mathbf{g}^{(k-1)} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \} \quad (3.46)$$

ou

$$\Delta \mathbf{U}^k = \psi(\Delta \mathbf{U}, \mathbf{g}) \quad (3.47)$$

em que o vetor $\psi(\Delta \mathbf{U}, \mathbf{g})$ é o ponto fixo, e é dado por:

$$\psi(\Delta \mathbf{U}, \mathbf{g}) = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{K}_F^{-1} \{ \mathbf{g}^{(k-1)} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \} \quad (3.48)$$

Rearranjando a Equação (3.48) de forma que a mesma se assemelhe ao método de Newton-Raphson, obtém-se a seguinte equação (Zeid, 1985):

$$\mathbf{K}_F \Delta \mathbf{U}^k = \mathbf{g}^{(k-1)} - \{ \mathbf{K} - \mathbf{K}_F \} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \quad (3.49)$$

E assim, como para a formulação direta, há dois loops de iteração, sendo um interno e o outro externo, em que o interno trata do processo iterativo e o externo trata do passo de carga (Zeid, 1985).

3.2.2.3 Ciclo de Iterações – Métodos Iterativos da Família Chebyshev-Halley

Conforme Souza *et al.* (2018), os métodos iterativos da família Chebyshev-Halley, podem ser adaptados para o problema estrutural não linear da seguinte forma:

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}^k + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(k-1)} \left[\mathbf{I} - \gamma \mathbf{L}^{(k-1)} \right] \delta \mathbf{U}^k \quad (3.50)$$

em que, o parâmetro γ é um número real que define um método dessa família; $\mathbf{I}$ é a matriz identidade e $\mathbf{L}^{(k-1)}$ é a matriz dada por (Souza, *et al.*, 2018):

$$\mathbf{L}^{(k-1)} = \mathbf{K}^{-1} \left[\bar{\mathbf{H}}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k \right]^T \quad (3.51)$$

em que $\bar{\mathbf{H}}^{(k-1)}$ é um tensor.

Para o método de Chebyshev, faz-se $\gamma = 0$ na Equação (3.50), chega-se à seguinte equação (Souza, *et al.*, 2018):

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}^k + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^k \quad (3.52)$$

Para o método Super-Halley, faz-se o $\gamma = 1$ na Equação (3.50), tem-se a seguinte equação (Souza, *et al.*, 2018):

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}^k + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(k-1)} \left[\mathbf{I} - \mathbf{L}^{(k-1)} \right] \delta \mathbf{U}^k \quad (3.53)$$

Cabe ressaltar que, no estudo realizado por Souza *et al.* (2018), o tensor $\bar{\mathbf{H}}$ foi obtido através de uma aproximação da matriz $\mathbf{L}^{(k-1)}$ adaptado de (Ezquerro e Hernández, 2009 apud Souza *et al.*, 2018) e nesse trabalho, será adotado a mesma aproximação, que é escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{L}^{(k-1)} \approx \mathbf{K}^{-1} \frac{1}{w} \left[\mathbf{K} \left(\mathbf{U}^{(k-1)} + w \delta \mathbf{U}^k \right) - \mathbf{K} \left(\mathbf{U}^{(k-1)} \right) \right] \quad (3.54)$$

em que $w \in (0, 1]$. Então a aproximação é relativamente simples de calcular, e envolve a matriz de rigidez calculada no ponto $(\mathbf{U}^{(k-1)} + w \delta \mathbf{U}^k)$ e $\mathbf{U}^{(k-1)}$ (Souza, *et al.*, 2018).

3.2.2.4 Ciclo de Iterações – Método do Ponto Médio

Segundo Souza *et al.* (2017), pode-se escrever o método do ponto médio para o problema não linear estrutural da seguinte forma:

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{U}_1^k \quad (3.55)$$

$$\delta \mathbf{U}_1^k = \mathbf{K}^{-1} \left[\delta \lambda_1^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g} \right] \quad (3.56)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}^k) \delta \mathbf{U}_2^k = \delta \lambda_1^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_2^k \quad (3.58)$$

em que o parâmetro $\delta \lambda_1^k$ é definido da mesma maneira usada no método de Potra-Pták.

3.2.2.5 Ciclo de Iterações – Método de Chun

De acordo com Souza *et al.* (2017), pode-se escrever o método de Chun para o problema não linear estrutural da seguinte forma:

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{U}^k = \mathbf{F}_1^k + 2\mathbf{F}_2^k - \mathbf{F}_3^k \quad (3.59)$$

$$\mathbf{F}_1^k = \delta \lambda_1^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{F}_2^k = \delta \lambda_2^k \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^k) \quad (3.61)$$

$$\mathbf{F}_3^k = \mathbf{K}(\mathbf{y}^k) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_2^k \quad (3.62)$$

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_1^k \quad (3.63)$$

$$\delta \mathbf{U}_1^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_1^k \quad (3.64)$$

$$\delta \mathbf{U}_2^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_2^k \quad (3.65)$$

$$\delta \mathbf{U}_3^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_3^k \quad (3.66)$$

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_1^k + 2\delta \mathbf{U}_2^k - \delta \mathbf{U}_3^k \quad (3.67)$$

em que, os parâmetros $\delta \lambda_1^k$ e $\delta \lambda_2^k$ são definidos da mesma maneira usada no método de Potra-Pták.

3.2.2.6 Ciclo de Iterações – Método das Secantes

O NRP tem uma desvantagem significativa, que é a necessidade de se calcular a matriz de rigidez a cada iteração, requisitando assim, um alto custo computacional. O NRM contorna essa dificuldade ao manter a matriz de rigidez constante em cada passo de carga, porém, tal modificação reduz a sua ordem de convergência. Além disso, Kim (2015) ressaltou que, este método pode apresentar problemas por utilizar a matriz de rigidez constante.

Tendo em vista essas desvantagens, o propósito do método das secantes é remover esses dois problemas para que o custo computacional seja reduzido, enquanto a taxa de convergência seja maior que um (Kim, 2015). A ideia do método das secantes é aproximar a matriz de rigidez através do uso da matriz secante, $\mathbf{K}_s$, e isso é alcançado pela atualização progressiva da matriz de rigidez tangente em conjunto com a direção secante entre dois pontos consecutivos (Kim, 2015). Logo, pode-se obter a matriz secante da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_s = \frac{\mathbf{F}_i^k - \mathbf{F}_i^{(k-1)}}{\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{(k-1)}} \quad (3.68)$$

Note que, à medida que $\mathbf{U}^{(k-1)}$ se aproxima de $\mathbf{U}^k$, a matriz de rigidez secante se aproxima da matriz de rigidez usada no método de Newton-Raphson (Kim, 2015). Destaca-se que, para a primeira iteração, o método da secante usa a mesma matriz tangente usada pelo método de Newton-Raphson (Kim, 2015). Após a primeira iteração, usa-se a matriz de rigidez secante, logo, a solução para a k-ésima iteração é dada por:

$$\Delta \mathbf{U}^k = \frac{\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{(k-1)}}{\mathbf{F}_i^k - \mathbf{F}_i^{(k-1)}} (\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i) \quad (3.69)$$

3.3 Estratégias de Incremento de Carga

O processo para a definição da solução incremental inicial tem como procedimento principal a determinação do parâmetro de carga, $\Delta \lambda^0$, e segundo Silva (2009), essa seleção automática da magnitude do incremento desse parâmetro é importante, pois, o mesmo deve retratar o grau de não linearidade corrente do sistema estrutural em análise. Por isso, uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes critérios: gerar grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear e, de forma

contrária, fornecer pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear, e também ser capaz de definir o sinal correto para o incremento introduzindo medidas capazes de detectar quando os pontos de máximo e mínimo são ultrapassados (Silva, 2009).

A seguir, serão descritas algumas estratégias encontradas na literatura que satisfazem esses critérios; e na Seção seguinte serão discutidos os critérios para escolha do sinal para todas as estratégias de incremento de carga explicadas adiante.

3.3.1 Estratégia baseada no parâmetro de rigidez corrente (CSP)

Nessa estratégia, o mesmo parâmetro usado para interpretar o grau de não linearidade do sistema estrutural, parâmetro de rigidez corrente, é empregado na definição do incremento automático de carga (Bergan *et al.*, 1978). Para a obtenção da expressão que define esse parâmetro de rigidez corrente, parte-se da medida de rigidez $\mathbf{K}$ do sistema, associada à solução incremental predita, que é definida de acordo com a seguinte relação:

$$\mathbf{K} = \frac{|\Delta \mathbf{F}^0|}{|\Delta \mathbf{U}^0|} \quad (3.70)$$

em que $\Delta \mathbf{F}^0$ é o vetor de incremento de carga inicial. Uma equação mais adequada para $\mathbf{K}$ é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \frac{\Delta \mathbf{F}^{0T} \Delta \mathbf{U}^0}{\Delta \mathbf{U}^{0T} \Delta \mathbf{U}^0} = \frac{\Delta \mathbf{F}_r^T (\Delta \lambda^0)^2 \delta \mathbf{U}_r}{\Delta \mathbf{U}^{0T} \Delta \mathbf{U}^0} \quad (3.71)$$

em que foi tomado como $\Delta \mathbf{F}^0 = \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r$. Logo, pode-se definir o parâmetro de rigidez corrente, através da divisão de $\mathbf{K}$ corrente, por um dado valor inicial $\mathbf{K}^0$, ou seja,

$$\text{CSP} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{K}^0} \quad (3.72)$$

e $\mathbf{K}^0$ é geralmente calculado a partir da solução predita do primeiro passo de carga; e valores de CSP maior ou menor que a unidade indica sistemas mais rígidos ou flexíveis, respectivamente.

Ressalta-se que, essa estratégia de incremento automático de carga baseada no parâmetro de rigidez corrente procura manter aproximadamente o mesmo número de iterações para convergir em cada passo de carga. Sendo assim, Bergan *et al.* (1978) e Bergan (1980) propuseram que o incremento inicial de carga seja calculado a partir da seguinte expressão:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_{p,a}^0 \left| \frac{\Delta\text{CSP}_{sd}}{\Delta\text{CSP}_{sn}} \right| \quad (3.73)$$

em que $\Delta\lambda_{p,a}^0$ e $\Delta\lambda^0$ são os incrementos iniciais do parâmetro λ nos passos de carga anterior e corrente, respectivamente; ΔCSP_{sd} é a variação desejada para o parâmetro de rigidez corrente, que geralmente é um valor prescrito – fornecido como dado de entrada do programa ou calculado usando-se os parâmetros de rigidez do primeiro e segundo incremento de carga:

$$\Delta\text{CSP}_{sd} = \text{CSP}_{s,2} - \text{CSP}_{s,1} \quad (3.74)$$

ΔCSP_{sn} é a variação do parâmetro de rigidez entre o passo de carga anterior e o corrente,

$$\Delta\text{CSP}_{sn} = \text{CSP}_{i,t} - \Delta\text{CSP}_{i,t+\Delta t} \quad (3.75)$$

3.3.2 Estratégias baseadas na relação $I_d / I_{p,a}$

Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982) sugeriram estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamentos, comprimento de arco, trabalho externo, etc.) baseadas no emprego da relação:

$$\left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^\xi \quad (3.76)$$

em que I_d é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, especificado pelo usuário do programa; $I_{p,a}$ é o número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse, e ξ é um expoente cujo valor adotado é 0,5, como proposto por Ramm (1981).

Segundo Crisfield (1982), uma outra proposta também baseada na relação entre o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, I_d , e o número de

iterrações que foram necessrias para que o passo de carga anterior convergisse, $I_{p,a}$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{I_{p,a}}{I_d} \right)^\xi \quad (3.77)$$

em que, nesse caso o expoente ξ pode ser adotado como 0,5 Crisfield (1982) ou 0,25 (Bellini e Chulya, 1987).

As estratgias baseadas nessas relaões sero agora detalhadas. Destaca-se que, se manteve a razao proposta por Crisfield (1981) e Ramm (1981 e 1982) para detalhar as estratgias baseadas nessa relao.

3.3.2.1 Incremento direto do parmetro de carga

Usando um esquema de soluo incremental juntamente com o mtodo convencional de Newton-Raphson, Crisfield (1981) adotou o seguinte procedimento para calcular o parmetro de carga inicial:

$$\Delta\lambda^0 = \Delta\lambda_{p,a}^0 \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.78)$$

em que $\Delta\lambda_{p,a}^0$ e $\Delta\lambda^0$ caracterizam os incrementos iniciais nos passos de carga anterior e corrente, respectivamente.

Quando utilizada com o mtodo que permite a variao do parmetro de carga proposto por Batoz e Dhatt (1979), tem-se a seguinte expresso:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_{p,a}^0 \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.79)$$

que deve ser usada para o incremento automtico do parmetro de carga.

3.3.2.2 Incremento do comprimento de arco

Como proposto por Crisfield (1991), a relação (3.76) pode ser empregada na definição do incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente. Sendo assim,

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.80)$$

em que $\Delta l_{p,a}$ e Δl representam os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido) e no corrente (incógnita), respectivamente.

Através da Equação (3.80) e da condição de restrição escrita para a solução incremental, ou seja,

$$(\Delta \mathbf{U}^0)^T \Delta \mathbf{U}^0 = \Delta l^2 \quad (3.81)$$

chega-se, facilmente, usando a Equação (3.3) em (3.81), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}} \quad (3.82)$$

Caso a equação de restrição proposta por Riks (1972) seja imposta à solução incremental predita, ou seja,

$$\Delta \mathbf{U}^{0T} \Delta \mathbf{U}^0 + (\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (3.83)$$

obtém-se:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (3.84)$$

3.3.2.3 Método dos três parâmetros

O método dos três parâmetros é uma classe de métodos, que tem como objetivo superar uma deficiência de alguns métodos do comprimento de arco, que são formulados com base em

um espaço de duas variáveis, força e deslocamento. Esse método, proposto por Krishnamoorthy *et al.* (1996), apresenta equações de restrição adimensionais e é necessário especificar além do incremento do fator de carga primário, outros três parâmetros, (a_0 , a_1 e a_2) (Rezaiee-Pajand *et al.*, 2013). Neste trabalho, será descrito três métodos dessa classe, sendo eles: método elipsoidal, método hiperbólico e polinomial.

1. Método elipsoidal

Rezaiee-Pajand *et al.* (2013) definiram que a restrição do método elipsoidal pode ser escrita em um espaço multidimensional da seguinte forma:

$$\frac{\Delta \mathbf{U}^{0T} \Delta \mathbf{U}^k}{a_1^2} + \frac{(\Delta \lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}{a_2^2} = a_0^2 \quad (3.85)$$

que é semelhante a equação de uma elipse em um espaço bidimensional. Nessa equação, a_1 e a_2 tem a mesma unidade do deslocamento e da força, respectivamente. O valor de a_2 pode ser calculado pela seguinte equação:

$$a_2 = \sqrt{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \quad (3.86)$$

substituindo a Equação (3.86) na Equação (3.85), define-se o parâmetro a_1 para o primeiro passo pela seguinte expressão:

$$a_1 = \sqrt{\frac{\Delta \mathbf{U}^{0T} \Delta \mathbf{U}^0}{a_0^2 - (\Delta \lambda^0)^2}} \quad (3.87)$$

Vale destacar que nessa equação o denominador deve ser sempre maior que zero. Portanto, o valor absoluto de a_0 deve ser maior que $\Delta \lambda^0$. Além disso, o parâmetro a_0 deve ser determinado pelo analista.

Depois de determinado o valor dos parâmetros a_0 , a_1 e a_2 , o parâmetro de carga para a primeira iteração de cada passo é estimado pela seguinte equação:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{1 + \frac{\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r}{a_1^2}}} \quad (3.88)$$

2. Método hiperbólico

Rezaiee-Pajand *et al.* (2013) propuseram que a equação de restrição para o método hiperbólico é dada pela seguinte equação:

$$\frac{\Delta\mathbf{U}^{0T} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r}{a_1 a_2} = a_0^2 \quad (3.89)$$

aqui, o parâmetro a_1 para o primeiro passo pode ser calculado pela seguinte equação:

$$a_1 = \frac{\Delta\mathbf{U}^{0T} \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r}{a_0^2 a_2} \quad (3.90)$$

em que, da mesma maneira que foi feito para o método elipsoidal, o parâmetro a_2 é calculado usando a Equação (3.86) e a_0 é definido pelo analista. Após a determinação desses parâmetros, o parâmetro de carga para a primeira iteração do passo em análise é dado por:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{a_0^2 a_1 a_2}{\delta\mathbf{U}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (3.91)$$

3. Método polinomial

Rezaiee-Pajand *et al.* (2013) definiram que a equação de restrição do método polinomial é um polinômio de segunda ordem que é obtida através dos dois métodos anteriores. Podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\Delta\mathbf{U}^{0T} \Delta\mathbf{U}^k}{a_1^2} + \frac{\Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \Delta\mathbf{U}^0}{a_1 a_2} + \frac{(\Delta\lambda^0)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}{a_2^2} = a_0^2 \quad (3.92)$$

em que os parâmetros a_0 , a_1 e a_2 são calculados de maneira semelhante ao método elipsoidal.

Vale mencionar que a Equação (3.92) tem as seguintes características:

1. Se o segundo e terceiro termo for removido do lado esquerdo da equação. O restante será o método de comprimento de arco proposto por Crisfield (1991);
2. Se o segundo termo for removido do lado esquerdo da equação, o método elipsoidal é obtido;
3. Removendo o primeiro e o terceiro termo do lado esquerdo da equação, o método hiperbólico é encontrado.

Resolvendo a Equação (3.92) em função de a_1 na primeira iteração, chega-se a seguinte equação de segunda ordem:

$$a_2 \left[a_0^2 - \Delta \lambda_0^2 \right] a_1^2 - \Delta \lambda_0^T \mathbf{F}_r^T \Delta \mathbf{U}^0 a_1 - a_2 \Delta \mathbf{U}^{0T} \Delta \mathbf{U}^0 = 0 \quad (3.93)$$

em que o parâmetro a_1 é determinado resolvendo a equação anterior. Após simplificações, o Δ dessa equação pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Delta = \Delta \mathbf{U}^{0T} \Delta \mathbf{U}^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \left[4a_0^2 - 3(\Delta \lambda^0)^2 \right] \quad (3.94)$$

No caso em que $\Delta > 0$, assumindo que $0 < \Delta \lambda^0 < 1$, a inequação $a_0 > \sqrt{0,75}$ é obtida (Rezaiee-Pajand *et al*, 2013). Especificando os três parâmetros a_0 , a_1 e a_2 , o incremento do parâmetro de carga para a primeira iteração de cada passo é calculado pela equação:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{1 + \frac{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}{a_1^2} + \frac{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r}{a_1 a_2}}} \quad (3.95)$$

3.3.2.4 Incremento de uma componente de deslocamento selecionada

Caso seja adotado o método de controle de deslocamento, o incremento de uma dada componente do vetor de deslocamento da estrutura deve ser escolhida com o objetivo de limitar o incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta \lambda^0$ (Silva, 2009). E assim, como na técnica do comprimento de arco, pode-se calcular o incremento de uma componente j do vetor de deslocamentos para o passo de carga corrente de acordo com:

$$\Delta \mathbf{U}_j = \Delta \mathbf{U}_{j(p,a)} \left(\frac{\mathbf{I}_d}{\mathbf{I}_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.96)$$

em que $\Delta \mathbf{U}_{j(p,a)}$ e $\Delta \mathbf{U}_j$ são os incrementos da componente j do vetor de deslocamentos no passo de carga anterior e no passo de carga corrente, respectivamente. Tem-se, então, que a componente j da solução incremental predita, $\Delta \mathbf{U}^0$, deve satisfazer à seguinte relação:

$$\Delta \mathbf{U}^0(j) = \Delta \mathbf{U}_j \quad (3.97)$$

Usando-se as Equações (3.3) e (3.97), chega-se à expressão procurada para $\Delta \lambda^0$, ou seja,

$$\Delta \lambda^0 = \frac{\Delta \mathbf{U}_j}{\delta \mathbf{U}_r(j)} \quad (3.98)$$

Uma outra forma de controle do incremento inicial dos deslocamentos foi proposta por Krenk e Hededal (1993 e 1995), considerando à inequação:

$$\|\Delta \mathbf{U}^0\| \leq \Delta \mathbf{U}_{\max} = X \|\Delta \mathbf{U}^1\| \quad (3.99)$$

em que $\Delta \mathbf{U}^1$ é o incremento do vetor de deslocamento obtido no primeiro passo de carga e X é uma constante cujo valor encontra-se entre 1,5 e 2,5.

Adicionalmente, Krenk (1995) propôs que a norma Euclidiana dos deslocamentos iniciais, no passo de carga corrente, poderia ser controlada pela relação:

$$\|\Delta \mathbf{U}^0\| = \|\Delta \mathbf{U}_{(p,a)}\| \left(\frac{\mathbf{I}_d}{\mathbf{I}_{p,a}} \right)^\alpha \quad (3.100)$$

sendo $\|\Delta \mathbf{U}_{(p,a)}\|$ a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais do passo de carga anterior; α um expoente escolhido de forma conveniente, que se encontra, normalmente, entre 0,5 e 2. Usando-se, então, a Equação (3.3) e considerando a Equação (3.99) para o cálculo de $\|\Delta \mathbf{U}^0\|$, chega-se a uma nova expressão para $\Delta \lambda^0$, ou seja,

$$\Delta\lambda^0 = \frac{\|\Delta\mathbf{U}^0\|}{\|\delta\mathbf{U}_r\|} \quad (3.101)$$

3.3.2.5 Incremento do trabalho externo

Uma técnica baseada no incremento do trabalho externo pode ser adotada para limitar o incremento inicial do parâmetro de carga, e Chen e Blandford (1993) mostraram que, pode-se expressar a mesma através da seguinte equação:

$$\Delta W = \Delta W_{p,a} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.102)$$

em que $\Delta W_{p,a}$ e ΔW são os incremento do trabalho externo no passo de carga anterior e no passo de carga corrente, respectivamente. Se o incremento de trabalho para o passo de carga corrente é dado por:

$$\Delta W = \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{U}_r \quad (3.103)$$

então, $\Delta\lambda^0$ pode ser escrito como:

$$\Delta\lambda^0 = \frac{\Delta W}{\mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{U}_r} \quad (3.104)$$

3.3.2.6 Incremento de tensão

Esse método, sugerido por Chen e Screyer (1990), adota a deformação em algum ponto de interesse do modelo como parâmetro de controle para a análise do incremento de tensão. Logo, a restrição do método de controle de tensão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\beta} \Delta\mathbf{U}^k - \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (3.105)$$

em que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é o incremento de tensão calculado no ponto de interesse e $\boldsymbol{\beta}$ é a matriz de deslocamento-deformação calculada no mesmo ponto de interesse. Como proposto por Muñoz e Roehl (2017), o ponto de interesse adotado é o ponto de integração de Gauss que apresenta a maior norma de deformação incremental na etapa anterior. Liu e Quek (2014) ressaltaram que,

a utilização do ponto de integração de Gauss traz como benefício para a análise um melhor desempenho computacional, pois diminui o tempo de processamento.

Muñoz e Roehl (2017) definiram que, associando o incremento de tensão com o vetor de deslocamento nodal e com o parâmetro de incremento de carga, tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{U}_g^k + \Delta \lambda \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.106)$$

além disso, pode-se calcular o incremento de tensão através da seguinte equação:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta r \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \left. \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{|\boldsymbol{\varepsilon}|} \right|_{k=0} \quad (3.107)$$

em que $\mathbf{c}$ é o vetor de deformação unitária no ponto de interesse, que corresponde ao último valor no passo de carga anterior, e Δr é o tamanho do incremento de deformação.

Substituindo a Equação (3.106) em (3.107), e mantendo Δr constante ao longo do passo de carga, chega-se a:

$$\Delta \lambda^0 = \frac{\Delta r}{\mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{U}_r^{(k-1)}} \quad (3.108)$$

Um importante aspecto a ser considerado é a escolha do tamanho do incremento de deformação, que será obtido através da seguinte relação:

$$\Delta r = \Delta r_{p,a} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^\xi \quad (3.109)$$

e o ponto de referência onde a tensão será controlada, uma vez que, o vetor $\mathbf{c}$ e a matriz de deslocamento-deformação são calculados nesse ponto.

3.3.3 Estratégia baseada no CSP e na relação $I_d/I_{p,a}$

Shen e Luo (1994) propuseram uma estratégia de incremento automático do comprimento de arco, baseada no emprego da seguinte relação (apud Yuanqi e Shen, 2004):

$$\bar{\beta} \frac{\Delta \text{CSP}_{sd}}{\Delta \text{CSP}_{sn}} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.110)$$

em que, ΔCSP_{sd} é a variação desejada para o parâmetro de rigidez corrente, que geralmente é um valor prescrito – fornecido como dado de entrada do programa ou calculado usando-se os parâmetros de rigidez do primeiro e segundo incremento de carga:

$$\Delta \text{CSP}_{sd} = \text{CSP}_{s,2} - \text{CSP}_{s,1} \quad (3.111)$$

e ΔCSP_{sn} é a variação do parâmetro de rigidez entre o passo de carga anterior e o corrente,

$$\Delta \text{CSP}_{sn} = \text{CSP}_{i,t} - \Delta \text{CSP}_{i,t+\Delta t} \quad (3.112)$$

e $\bar{\beta}$ é selecionado entre 0,5 e 1,0, tomando-se o maior valor para estruturas com alto grau de não linearidade e o menor para estruturas com baixo grau de não linearidade. Geralmente, adota-se $\bar{\beta} = 0,8$ (Yuanqi e Shen, 2004).

Logo, pode-se escrever essa estratégia junto com a estratégia de incremento do comprimento de arco, como proposto Yuanqi e Shen (2004), da seguinte forma:

$$\Delta l = \pm \Delta l_{p,a} \bar{\beta} \frac{\Delta \text{CSP}_{sd}}{\Delta \text{CSP}_{sn}} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.113)$$

a qual leva em conta a mudança de incremento do parâmetro de rigidez atual e o grau de não linearidade da estrutura. Porém, como destacado por Yuanqi e Shen (2004), a estratégia proposta na Equação (3.113) não é adequada para análise não linear de estruturas esbeltas, uma vez que esse método não leva em conta a condição de convergência da última etapa. Consequentemente, Yuanqi e Shen (2004) sugeriram uma mudança na estratégia proposta por Shen e Luo (1994), em que se adiciona mais um parâmetro na Equação (3.110), β_ζ , o qual pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\beta_\zeta = \frac{\log(\zeta_{p,a})}{\log(\zeta_d)} \quad (3.114)$$

ou

$$\beta_{\zeta} = 0,1 \quad (3.115)$$

em que o caso da Equação (3.115) só será utilizado se $\zeta_{p,a}$ for maior que 0,1 (Yuanqi e Shen, 2004). $\zeta_{p,a}$ é a precisão da convergência para o último passo incremental e ζ_d é a precisão de convergência desejada. Com isso, pode-se escrever essa estratégia da seguinte forma:

$$\Delta l = \pm \Delta l_{p,a} \beta_{\zeta} \beta \frac{\Delta CSP_{sd}}{\Delta CSP_{sn}} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{0,5} \quad (3.116)$$

3.3.4 Estratégia baseada na curvatura da trajetória não linear

3.3.4.1 Estratégia baseada em uma aproximação parabólica da trajetória não linear

Na estratégia de incremento de carga desenvolvida por Bergan e Sørense (1973), assume-se que os incrementos de carga são variáveis próximas à otimização e serão obtidos quando o erro de truncamento, $O(e_k)$, permanecer aproximadamente constante para todas as etapas de carga. Assim sendo, um número aproximadamente constante de ciclos iterativos para cada etapa de carga será necessário para restaurar o equilíbrio.

Nesse método, usa-se uma parábola para aproximar a relação entre a norma Euclidiana dos deslocamentos $\|U\|$ e o parâmetro de carga λ (Bergan e Sørense, 1973). Uma vez que, o parâmetro de carga inicial para o passo de carga $t + \Delta t$ é calculado usando a parábola que passa por $(\|^{(t-\Delta t)}U\|, ^{(t-\Delta t)}\lambda)$ e $(\|{}^tU\|, {}^t\lambda)$ tendo o mesmo gradiente que ${}^t\lambda$, conforme Figura 10. A tangente de ${}^t\lambda$ será seguida pelos deslocamentos da tangente durante o novo incremento de carga $\Delta \lambda^k$ (Bergan e Sørense, 1973). Já o erro de truncamento, $O(e_k)$, para esse passo de carga é calculado pela distância entre a tangente e a parábola interpolada. Assumindo que $O(e_k)$ é prescrito, o novo incremento é:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \Delta \lambda_{p,a}^0 \sqrt{\frac{O(e_k)}{\|^{(t+\Delta t)}U\| \|{}^t\lambda - ^{(t-\Delta t)}\lambda\| - \|{}^tU - ^{(t-\Delta t)}U\|}} \quad (3.117)$$

O erro de truncamento pode ser especificado como um parâmetro de entrada, ou pode ser calculado após completar o primeiro passo de carga, como exemplo

$$O(e_k) = \|\mathbf{U}^0\| - \Delta\lambda^0 \Delta\mathbf{U}^0 \quad (3.118)$$

Alternativamente, como sugerido por Bergan *et al.* (1978), os primeiros dois passos de carga podem ser especificados como dado de entrada e o erro de truncamento pode ser calculado depois do segundo passo.

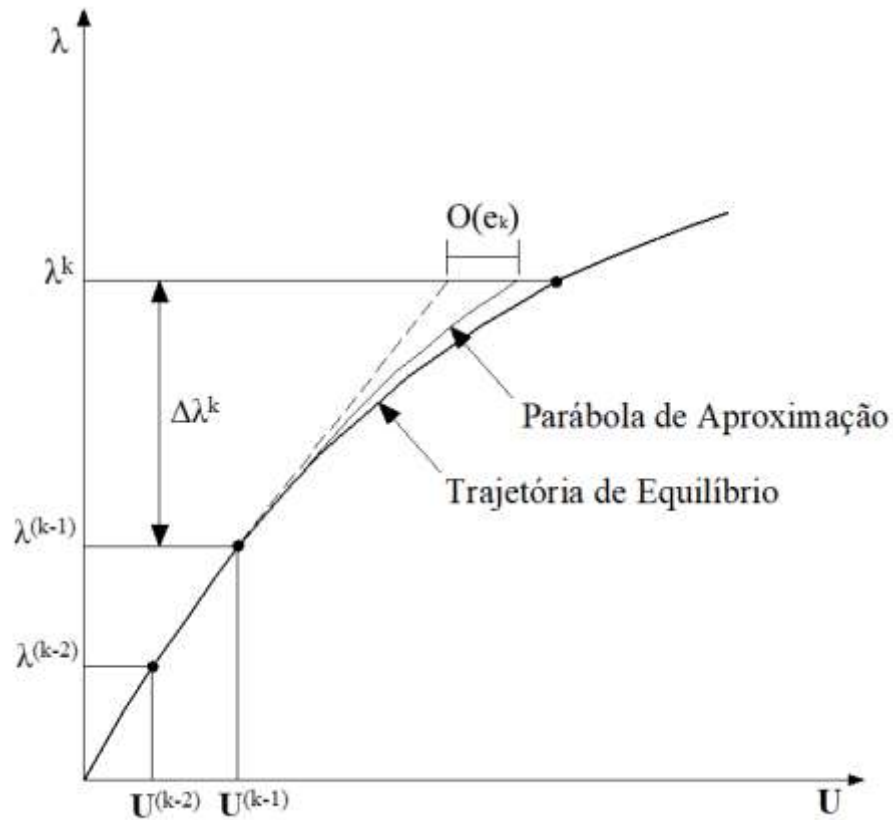


Figura 10 - Estratégia de incremento de carga baseada em uma aproximação parabólica da trajetória não linear (Murray J. e Gregory J., 2006).

3.3.5 Estratégia baseada no parâmetro generalizado de rigidez (GSP)

Como pode-se notar nas estratégias anteriores, há diferentes expressões para se obter $\Delta\lambda^0$, que segundo Yang e Kuo (1994) devem respeitar a seguinte equação de restrição nas duas etapas de solução não linear (solução predita e ciclo de iterações):

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_1 \delta \lambda^k = \mathbf{H}_k \quad (3.119)$$

em que, $\mathbf{C}$ é uma matriz cujos elementos são constantes, k_1 também é uma constante e $\mathbf{H}_k$ é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco ou trabalho externo); e em função dos valores selecionados para essas variáveis, chega-se a diferentes estratégias de incremento de carga e iteração (Silva, 2009).

A equação de restrição anterior, juntamente com a Equação (3.9) formam um sistema de equações com $N + 1$ incógnitas, em que N se refere à dimensão do vetor de deslocamento e o 1, ao parâmetro de carga λ (Silva, 2009). Essas duas equações podem ser combinadas de forma que, após manipulações algébricas e matriciais, chega-se à seguinte expressão para o parâmetro de carga (Yang e Kuo, 1994):

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_1} (\mathbf{H}_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k) \quad (3.120)$$

Usando os valores de $\mathbf{C}$ e k_1 sugeridos por Yang e Shieh (1990), ou seja,

$$\mathbf{C} = {}^t \delta \mathbf{U}_r \Delta \lambda^0 \text{ e } k_1 = 0 \quad (3.121)$$

em que ${}^t \mathbf{U}_r$ é o vetor de deslocamentos nodais tangenciais do passo de carga anterior. Com isso, chega-se a uma nova expressão para $\delta \lambda$:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} (\mathbf{H}_k - \Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k) \quad (3.122)$$

A solução incremental inicial, $\Delta \lambda^0$, é obtida fazendo, na equação anterior, $k = 0$, $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$, $\delta \mathbf{U}_g^0 = 0$ e $\delta \mathbf{U}_r^0 = \delta \mathbf{U}_r$. Dessa forma, escreve-se:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{H}_0}{({}^t \delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r)}} \quad (3.123)$$

em que o valor do parâmetro incremental $\mathbf{H}_0$ (no caso, deslocamento generalizado) pode ser definido isolando o mesmo na equação anterior e assumindo que, no primeiro passo de carga, se conhece o valor de $\Delta \lambda^0$ (dado de entrada). Assim, tem-se:

$$\mathbf{H}_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 \left({}^1\delta\mathbf{U}_r^T \right) \left({}^1\delta\mathbf{U}_r \right) \quad (3.124)$$

substituindo (3.124) em (3.123), chega-se:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{\left({}^1\delta\mathbf{U}_r^T \right) \left({}^1\delta\mathbf{U}_r \right)}{\left({}^t\delta\mathbf{U}_r^T \right) \left({}^1\delta\mathbf{U}_r \right)}} \quad (3.125)$$

Adicionalmente, a consideração do parâmetro de rigidez generalizado do sistema (*Generalized Stiffness Parameter*, GSP) definido através da relação:

$$\text{GSP} = \frac{\left({}^1\delta\mathbf{U}_r^T \right) \left({}^1\delta\mathbf{U}_r \right)}{\left({}^t\delta\mathbf{U}_r^T \right) \left({}^1\delta\mathbf{U}_r \right)} \quad (3.126)$$

que permite reescrever a Equação (3.125) da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (3.127)$$

O critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão anterior baseia-se no sinal do parâmetro GSP, tal critério será apresentado na Seção seguinte. Cabe aqui, destacar que para o primeiro incremento de carga, $\Delta\lambda^0$ que é um valor prescrito, o $\text{GSP} = 1$ (Silva, 2009). Além disso, cabe informar que alguns métodos podem ser obtidos diretamente da Equação (3.119), fazendo as seguintes considerações:

I. Controle do comprimento de arco:

$$k = 0, k_1 = \Delta\lambda^0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, C = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \text{ e } \mathbf{H}_0 = \Delta\lambda^2$$

II. Controle de uma componente de deslocamento selecionada:

$$k = 0, k_1 = 0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, C = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\} \text{ e } \mathbf{H}_0 = \Delta\mathbf{U}_j$$

III. Controle do trabalho externo:

$$k = 0, k_1 = 0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, C = \mathbf{F}_r \text{ e } \mathbf{H}_0 = \Delta W$$

3.4 Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga

Pode-se observar na Seção anterior que em diversas equações de incremento do parâmetro de carga, o sinal pode ser positivo ou negativo. A escolha correta desse sinal na fase predita é de grande importância para o sucesso das estratégias na obtenção da trajetória de equilíbrio (Silva, 2009). Sendo assim, a seguir define-se alguns procedimentos para a escolha do sinal do incremento inicial do parâmetro de carga:

- Critério I

Os pontos limites da trajetória de equilíbrio podem ser detectados, como sugerido por Bergan *et al.* (1978), checando o sinal do incremento do trabalho externo dada pela Equação (3.103). De acordo com esse procedimento, o sinal do incremento do fator de carga não se altera até que o sinal de incremento do trabalho externo seja alterado. Em outras palavras, a mudança do sinal de incremento de trabalho externo altera a direção do incremento do fator de carga (Rezaiee-Pajand, *et al.*, 2013). Clarke e Hancock (1990) ressaltaram que, esse procedimento pode tornar-se inseguro na vizinhança de pontos limites de deslocamento.

- Critério II

Crisfield (1991) considerou que, o sinal é positivo sempre que a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$ (no início do incremento) for positiva definida. Em outra definição equivalente, Crisfield (1991) sugere que o sinal de $\Delta\lambda^0$ deva seguir aquele do incremento anterior, exceto quando o determinante da matriz de rigidez tangente mudar de sinal. Porém, como relatado por Meek e Tan (1984), esse procedimento pode falhar em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos.

- Critério III

Bergan *et al.* (1978), propuseram o sinal do parâmetro de rigidez corrente como critério para troca de sinal do incremento do parâmetro de carga, o qual pode ser obtido pela Equação (3.72).

- Critério IV

De acordo com Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro generalizado de rigidez depende apenas dos vetores ${}^t\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga corrente). O parâmetro

de rigidez GSP torna-se negativo para os passo de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

- Critério V

Feng *et al* (1995, 1996) propuseram uma estratégia para a escolha do sinal do incremento inicial do parâmetro de carga para os métodos de comprimento de arco, em que a escolha é feita para coincidir com o sinal do produto interno entre o incremento de deslocamento da iteração anterior, $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$, e o vetor de deslocamentos tangenciais, $\delta \mathbf{U}_r$. Logo, tem-se (de Souza Neto e Feng, 1999):

$$\text{Sinal}(\Delta \lambda^0) = \text{Sinal}(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \delta \mathbf{U}_r) \quad (3.128)$$

É importante destacar que, pelo fato do vetor $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ trazer consigo informações sobre a história da trajetória de equilíbrio corrente, isso permite que essa estratégia supere problemas associados aos Critério I e II (de Souza Neto e Feng, 1999). Além disso, Souza Neto e Feng (1999) esclareceram que, o vetor de deslocamento tangente, devido a sua definição, Equação (3.2), aponta a direção do gradiente positivo $\mathbf{K}$, desse modo $\delta \mathbf{U}_r$ concede a informação de direção ao longo da qual o parâmetro de carga aumenta.

Em essência, um produto positivo de $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_r$, indica que o fator de carga está aumentando, então o sinal do incremento inicial do parâmetro de carga deve ser escolhido positivo, para que o mesmo continue seguindo o caminho da trajetória de equilíbrio (De Souza Neto e Feng, 1999). Da mesma forma se o produto for negativo, o fator de carga está diminuindo e o sinal negativo deve ser adotado (De Souza Neto e Feng, 1999).

- Critério VI

Assim como no critério anterior, essa estratégia, desenvolvida por Yuanqi e Shen (2004), foi proposta para a escolha do sinal do incremento do parâmetro de carga inicial para os métodos de comprimento de arco. Uma vez que, segundo Yuanqi e Shen (2004), o critério anterior apresenta problemas quanto a presença de pontos de bifurcação no segmento inicial da trajetória de equilíbrio. Logo, o seguinte critério para determinação do sinal do incremento inicial do parâmetro de carga é apresentado:

$$\text{Sinal}(\Delta\lambda^0) = \begin{cases} -1^i \times \text{Sinal}(\text{CSP}) & (\text{CSP} \neq 0) \\ -\text{Sinal}(\Delta\lambda_{p,a}^0) & (\text{CSP} = 0) \end{cases} \quad (3.129)$$

em que, i é o número de *snap-back* no passo de carga anterior.

- Critério VII

Outra estratégia utilizada para determinar o sinal do incremento do parâmetro de carga inicial foi proposta por Rezaiee-Pajand *et al* (2013), em que se define dois novos vetores $\Delta\mathbf{Q}^n$ e $\mathbf{t}^T$. Sendo, $\Delta\mathbf{Q}^n$ o vetor que conecta o ponto de equilíbrio ${}^t\mathbf{U}$ ao ponto de equilíbrio ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$, ou seja, $\Delta\mathbf{Q}^n$ é igual ao $\Delta\mathbf{U}^k$, de acordo com a Equação (3.16); já o vetor $\mathbf{t}^T$ é a tangente da trajetória de equilíbrio no ponto ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$, ou seja, o vetor $\mathbf{t}^T$ pode ser igualado a matriz de rigidez da estrutura $\mathbf{K}$, visto que a derivada do vetor gradiente $\mathbf{g}$, é a matriz de rigidez e define a tangente da trajetória de equilíbrio. Faz-se o produto interno entre os mesmos. Se o sinal do produto for positivo, o parâmetro de carga crescerá e terá sinal positivo, caso contrário, o parâmetro de carga diminuirá e será negativo (Rezaiee-Pajand *et al*, 2013).

3.5 Estratégias de Iteração

A ideia básica de uma estratégia de iteração é tratar o parâmetro de carga λ como uma variável adicional, permitindo sua variação, de forma que se obtenha todo o traçado da trajetória de equilíbrio, com possíveis passagem pelos pontos limites (Maximiano, 2012).

Cabe destacar que, assim como citado por Silva (2009), não se pode esperar de nenhuma estratégia a resolução de problemas fortemente não lineares com a igual eficiência. Em virtude disso, nesse trabalho serão descritos alguns métodos de estratégias de iteração, de forma que se possa escolher aquele que tenha a melhor eficiência para um dado problema em análise.

3.5.1 Iteração a carga constante

Essa estratégia de iteração caracteriza o método tradicional de controle de carga, no qual o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo (Silva, 2009). Para esse caso, tem-se que a equação de restrição se reduz à expressão trivial:

$$\delta\lambda^k = 0 \quad (3.130)$$

Dessa forma, a Equação (3.17) é reduzida aos deslocamentos fornecidos pelo NRP. Nesse caso, após o ponto limite de carga, o incremento de carga não proporciona o retorno à trajetória de equilíbrio, sendo a estratégia útil, portanto, para a análise até esse ponto limite (Silva, 2009).

3.5.2 Iteração a comprimento de arco constante

Os estudos originalmente realizados por Riks (1972) e Wempner (1971) propiciaram o surgimento de diversas estratégias que impõem, em cada iteração, a condição de comprimento de arco constante. Algumas dessas técnicas serão apresentadas a seguir.

3.5.2.1 Comprimento de arco esférico

Crisfield (1981; 1991) sugeriu inicialmente, baseando-se na Equação (3.83), que a seguinte condição:

$$(\Delta \mathbf{U}^k)^T \Delta \mathbf{U}^k + (\Delta \lambda^k)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (3.131)$$

deveria ser respeitada a cada iteração do processo. Nessa equação, $\Delta \lambda^k$ e $\Delta \mathbf{U}^k$ representam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais da iteração corrente. Substituindo a Equação (3.19b) na Equação (3.131) chega-se à seguinte equação:

$$A(\delta \lambda^k)^2 + B\delta \lambda^k + C = 0 \quad (3.132)$$

em que os coeficientes A, B e C são assim definidos:

$$A = (\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (3.133a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{U}_r^k)^T (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k) + 2\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (3.133b)$$

$$C = (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)^T (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k) + (\Delta \lambda^{(k-1)})^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2 \quad (3.133c)$$

Com a resolução de (3.131), chega-se a dois valores de $\delta \lambda$, $\delta \lambda_1$ e $\delta \lambda_2$, de forma que se deve escolher entre as soluções:

$$\Delta \mathbf{U}_1^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda_1^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.134a)$$

$$\Delta \mathbf{U}_2^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda_2^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.134b)$$

a que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$. Ressalta-se que essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado (Silva, 2009).

Com isso, um procedimento bastante simples pode ser seguido, consiste em achar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{U}^k$ e $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$. Isso equivale a achar o cosseno máximo do ângulo:

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{U}^k}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2}^k \frac{\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \delta \mathbf{U}_r^k}{\Delta l^2} \quad (3.135)$$

A Equação (3.132) poderá ter raízes imaginárias, se $\Delta < 0$. Isso ocorrerá quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto (Meek e Tan, 1984).

3.5.2.2 Comprimento de arco linear – Riks (1972; 1979)

A restrição de comprimento de arco constante (3.83) foi utilizada por Riks (1972; 1979) apenas para a obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta \lambda^0$. No processo iterativo subsequente, ou seja, $k \geq 1$, a equação de restrição usada para calcular $\delta \lambda$ é obtida fazendo com que a solução incremental iterativa $(\delta \mathbf{U}^k, \delta \lambda \mathbf{F}_r)$ seja ortogonal à solução incremental predita $(\Delta \mathbf{U}^0, \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r)$, isto é:

$$\delta \mathbf{U}^{kT} \Delta \mathbf{U}^0 + \delta \lambda^k \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (3.136)$$

a substituição da Equação (3.17) em (3.136) fornece a expressão procurada para que se determine a correção do parâmetro de carga:

$$\delta \lambda^k = - \frac{(\Delta \mathbf{U}^0)^T \delta \mathbf{U}_g^k}{\left((\Delta \mathbf{U}^0)^T \delta \mathbf{U}_r^k + \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \right)} \quad (3.137)$$

Do ponto de vista geométrico, conforme Figura 11a, Silveira (1995) definiu que o esquema proposto por Riks pode ser visto como iterações em planos normais à linha tangente varrida por $(\Delta \mathbf{U}^0, \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r)$.

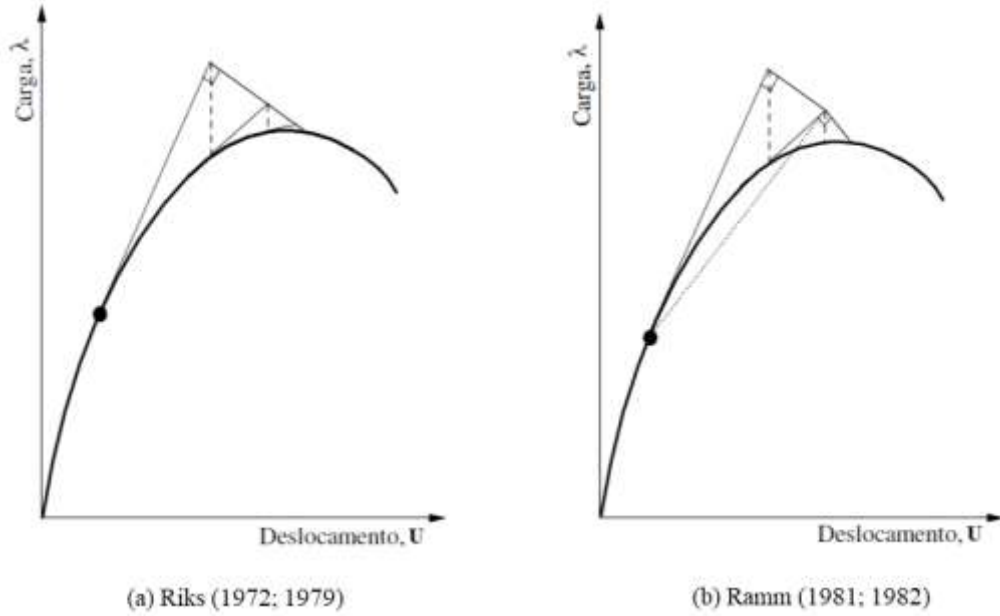


Figura 11 – Comprimento de arco linearizado (Silva, 2009).

3.5.2.3 Comprimento de arco linear – Ramm (1981; 1982)

Um procedimento iterativo alternativo ao proposto anteriormente foi proposto por Ramm (1981; 1982), em que, basicamente, substitui a solução incremental predita na Equação (3.136) pela solução “secante” $(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}, \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r)$. Isso garante que as correções $(\delta \mathbf{U}^k, \delta \lambda \mathbf{F}_r)$ sejam ortogonais à solução incremental-iterativa anterior, ou seja:

$$\delta \mathbf{U}^{kT} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (3.138)$$

Mais uma vez, substituindo (3.17) na equação anterior, tem-se:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \right)^T \delta \mathbf{U}_g^k}{\left(\left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \right)^T \delta \mathbf{U}_r^k + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \right)} \quad (3.139)$$

Nesse caso, Silva (2009) destacou que o hiperplano de restrição é normal a uma secante que passa pela solução incremental da iteração anterior, e não mais à tangente da trajetória de equilíbrio, conforme Figura 11b, além disso o plano normal é atualizado em cada iteração, ao contrário do proposto por Riks (1972).

3.5.2.4 Comprimento de arco cilíndrico

Crisfield (1981) e Ramm (1981; 1982) observaram através de vários exemplos numéricos que, em problemas práticos com número elevado de variáveis, o parâmetro de carga na Equação (3.131) tinha pequeno efeito. Sendo assim, Crisfield (1981) propôs que, a cada iteração, a seguinte equação fosse satisfeita:

$$\left(\Delta \mathbf{U}^k\right)^T \Delta \mathbf{U}^k = \Delta l^2 \quad (3.140)$$

substituindo a Equação (3.19b) em (3.140), chega-se novamente a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, que pode ser escrita através da Equação (3.132). Porém, os coeficientes A, B e C são agora, os seguintes:

$$A = \left(\delta \mathbf{U}_r^k\right)^T \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.141a)$$

$$B = 2\left(\delta \mathbf{U}_r^k\right)^T \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k\right) \quad (3.141b)$$

$$C = \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k\right)^T \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k\right) - \Delta l^2 \quad (3.141c)$$

a escolha entre as raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

3.5.2.5 Método dos três parâmetros

1. Método elipsoidal

A equação de restrição para o método elipsoidal pode ser escrita da seguinte forma (Rezaiee-Pajand, *et al*, 2013):

$$\frac{\Delta \mathbf{U}^{kT} \Delta \lambda^k \mathbf{F}_r}{a_1 a_2} = a_0^2 \quad (3.142)$$

em que os parâmetros a_0 , a_1 e a_2 são calculados conforme explicado na Seção 3.3.2.3. Calculado esses parâmetros, e substituindo a Equação (3.19b) na Equação (3.142), chega-se novamente a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, que pode ser escrita através da Equação (3.132), porém, com os seguintes coeficientes A, B e C:

$$A = (\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k + a_1^2 \quad (3.143a)$$

$$B = 2(\delta\mathbf{U}_r^k)^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k) + 2a_1^2 \Delta\lambda^{(k-1)} \quad (3.143b)$$

$$C = (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k)^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k) + a_1^2 \left[(\Delta\lambda^{(k-1)})^2 - a_0^2 \right] \quad (3.143c)$$

A escolha entre as raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

2. Método hiperbólico

A equação de restrição para o método hiperbólico pode ser escrita da seguinte forma (Rezaiee-Pajand, *et al*, 2013):

$$\frac{\Delta\mathbf{U}^{kT} \Delta\mathbf{U}^k}{a_1^2} + \frac{(\Delta\lambda^k)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}{a_2^2} = a_0^2 \quad (3.144)$$

em que os parâmetros a_0 , a_1 e a_2 são calculados conforme explicado na Seção 3.3.2.3. Assim como no método anterior, calculado os parâmetros, e substituindo a Equação (3.19b) na Equação (3.144), chega-se novamente a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, que pode ser escrita através da Equação (3.132). Porém, os coeficientes A, B e C são agora, os seguintes:

$$A = \mathbf{F}_r^T \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.145a)$$

$$B = \mathbf{F}_r^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \Delta\lambda^{(k-1)} \delta\mathbf{U}_r^k) \quad (3.145b)$$

$$C = \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k)^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k) + a_0^2 a_1 a_2 \quad (3.145c)$$

A escolha entre as raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

3. Método polinomial

A equação de restrição para o método polinomial pode ser escrita da seguinte forma (Rezaiee-Pajand, *et al*, 2013):

$$\frac{\Delta \mathbf{U}^{kT} \Delta \mathbf{U}^k}{a_1^2} + \frac{\Delta \lambda^k \mathbf{F}_r^T \Delta \mathbf{U}^k}{a_1 a_2} + \frac{(\Delta \lambda^k)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}{a_2^2} = a_0^2 \quad (3.146)$$

em que os parâmetros a_0 , a_1 e a_2 são calculados conforme explicado na Seção 3.3.2.3. Calculado os parâmetros, e substituindo a Equação (3.19b) na Equação (3.146), chega-se novamente a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, que pode ser escrita através da Equação (3.132). Porém, os coeficientes A, B e C são agora, os seguintes:

$$A = a_2 \left(\delta \mathbf{U}_r^k \right)^T \delta \mathbf{U}_r^k + a_1 \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r^k + a_1^2 a_2 \quad (3.147a)$$

$$B = 2a_2 \left(\delta \mathbf{U}_r^k \right)^T \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k \right) + a_1 \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r^k + a_1 \mathbf{F}_r^T \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k \right) + 2\Delta \lambda^{(k-1)} a_1^2 a_2 \quad (3.147b)$$

$$C = a_2 \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k \right)^T \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k \right) + a_1 \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k \right) - \left[\left(\Delta \lambda^{(k-1)} \right)^2 - a_0^2 \right] a_1^2 a_2 \quad (3.147c)$$

A escolha entre as raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

3.5.3 Método de restrição híbrida

Estratégias baseadas em restrições geométricas são adequadas apenas para solução de problemas dominados por não linearidades geométricas, pois, quando envolve a plastificação do material, eles podem apresentar alguns problemas de convergência (Bellora e Vescovini, 2016). Visando superar essa desvantagem, algumas técnicas específicas para o comprimento de arco foram desenvolvidas, entre elas, tem-se a estratégia de comprimento de arco de energia

dissipada desenvolvida por Gutiérrez (2004) e Verhoosel *et al* (2008), que são baseadas na adoção de uma equação de restrição dissipativa que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \left({}^t\lambda \Delta \mathbf{U}^{kT} - \Delta \lambda^k \times {}^t\mathbf{U}^T \right) \mathbf{F}_r - \Delta T = 0 \quad (3.148)$$

em que ΔT é a energia dissipada, e é definida pela diferença entre a taxa de energia potencial elástica do corpo e a energia oriunda da ação das forças externas (Gutiérrez, 2004).

Nesse cenário, encontra-se também os métodos de restrição híbrida, propostos por Bellora e Vescovini (2016), que são uma classe de métodos usados para análise quase-estática de problemas envolvendo não linearidade física e geométrica. Esses métodos permitem uma variação contínua da natureza da restrição, entre a restrição geométrica e a restrição dissipativa, sem que haja a necessidade de um critério de troca para traçar a trajetória de equilíbrio. Além disso, buscam promover uma estratégia automatizada e melhorada para lidar adequadamente com a transição entre a equação de restrição geométrica e dissipativa, a fim de facilitar a análise de uma grande quantidade de problemas, incluindo, aqueles dominados pela não linearidade geométrica, resposta à plastificação, fase dissipativa descarregada e elástica (Bellora e Vescovini, 2016). Superando então, de acordo com Bellora e Vescovini (2016), as restrições devido ao uso de estratégias de incremento de controle-força, proposta por Verhoosel *et al* (2008). Baseado nessas considerações, a equação de restrição geral para esses métodos pode ser escrita da seguinte forma:

$$(1 - \tau) c(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda) + \tau h(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda) = 0 \quad (3.149)$$

em que $\tau \in [0, 1]$ é uma função de ponderação, cujo o valor é atualizado ao fim de cada passo de carga; $c(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda)$ indica uma restrição geométrica genérica, enquanto $h(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda)$ é uma restrição dissipativa.

Ressalta-se que, a escolha do valor da função de ponderação é um passo crucial para o desenvolvimento de método de restrição híbrida, pois o mesmo influencia fortemente na performance do problema, através da manipulação da transição entre as restrições geométricas e dissipativas (Bellora e Vescovini, 2016). Bellora e Vescovini (2016) definiram que, uma escolha adequada da função deve ser responsável pelos três seguintes recursos:

- I. Seja próximo de zero na ausência de fenômenos de dissipação quando a resposta for puramente elástica;
- II. Indicar uma taxa de crescimento proporcional à intensidade dos fenômenos de dissipação;
- III. Aproximar do valor unitário à medida que o problema se torna orientado pela dissipação.

A Equação (3.149) define uma família de equações de restrições através da combinação de diferentes restrições geométricas e dissipativas, como também a adoção de diferentes funções de ponderação (Bellora e Vescovini, 2016). A seguir será apresentado alguns métodos dessa família.

3.5.3.1 Método de restrição híbrida de Riks

O método de restrição híbrida de Riks é obtido substituindo a equação de restrição do método de Riks e a equação de restrição dissipativa, ou seja, substitui-se a Equação (3.136) e a Equação (3.148) na Equação (3.149), com isso, chega-se a:

$$(1-\tau)(\delta \mathbf{U}^{kT} \Delta \mathbf{U}^0 + \delta \lambda^k \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r) + \tau \left[\frac{1}{2} (\lambda^t \Delta \mathbf{U}^{kT} - \Delta \lambda^{kt} \mathbf{U}^T) \mathbf{F}_r - \Delta T \right] = 0 \quad (3.150)$$

substituindo a Equação (3.19a) e a Equação (3.19b) na Equação (3.150), vem:

$$(1-\tau)(\delta \mathbf{U}^{kT} \Delta \mathbf{U}^0 + \delta \lambda^k \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r) + \left[\frac{1}{2} \tau^t \lambda \Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \mathbf{F}_r + \frac{1}{2} \tau^t \lambda \delta \mathbf{U}^{kT} \mathbf{F}_r - \frac{1}{2} \tau \Delta \lambda^{(k-1)t} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r - \frac{1}{2} \tau \delta \lambda^{kt} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r - \tau \Delta T \right] = 0 \quad (3.151)$$

Portanto, a correção do parâmetro de carga será:

$$\delta \lambda^k = - \frac{(1-\tau)(\Delta \mathbf{U}^{0T} \delta \mathbf{U}_r^k) + \tau \left(\frac{1}{2} \tau^t \delta \mathbf{U}_r^{kT} \mathbf{F}_r \right)}{(1-\tau)(\Delta \mathbf{U}^{0T} \delta \mathbf{U}_g^k) + \tau \left(\frac{1}{2} \tau^t \lambda \Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \mathbf{F}_r + \frac{1}{2} \tau^t \delta \mathbf{U}_g^k \mathbf{F}_r - \frac{1}{2} \Delta \lambda^{(k-1)t} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r - \Delta T \right)} \quad (3.152)$$

3.5.3.2 Método de restrição híbrida de Crisfield

O segundo método apresentado para essa família de métodos é obtido de forma semelhante ao método anterior. Substitui-se a Equação (3.131) e a Equação (3.148) na Equação (3.149), com isso, chega-se a:

$$(1-\tau)\left((\Delta \mathbf{U}^k)^T \Delta \mathbf{U}^k + (\Delta \lambda^k)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2\right) + \tau \left[\frac{1}{2} \left({}^t \lambda \Delta \mathbf{U}^{kT} - \Delta \lambda^{kt} \mathbf{U}^T \right) \mathbf{F}_r - \Delta T \right] = 0 \quad (3.153)$$

substituindo a Equação (3.19a) e a Equação (3.19b) na Equação (3.153), obtem-se:

$$\begin{aligned} (1-\tau)\left((\Delta \mathbf{U}^k)^T \Delta \mathbf{U}^k + (\Delta \lambda^k)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2\right) + \left[\frac{1}{2} \tau {}^t \lambda \Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \mathbf{F}_r \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tau {}^t \lambda \delta \mathbf{U}^{kT} \mathbf{F}_r - \frac{1}{2} \tau \Delta \lambda^{(k-1)t} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r - \frac{1}{2} \tau \delta \lambda^{kt} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r - \tau \Delta T \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.154)$$

Assim como o método de comprimento de arco esférico, a equação desse método também é quadrática e sendo assim, possui mais de uma raiz. Portanto, a correção do parâmetro de carga será:

$$\delta \lambda^k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.155)$$

em que:

$$A = (1-\tau)\left(\delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r\right) \quad (3.156a)$$

$$\begin{aligned} B = (1-\tau)\left(\delta \mathbf{U}_r^{kT} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_g^k + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2\right) \\ + \tau \left[\frac{1}{2} \left({}^t \lambda \delta \mathbf{U}_r^{kT} - {}^t \mathbf{U}^T \right) \mathbf{F}_r \right] \end{aligned} \quad (3.156b)$$

$$\begin{aligned} C = (1-\tau)\left(\Delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + 2\delta \mathbf{U}_g^{kT} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^{kT} \delta \mathbf{U}_g^k + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2\right) \\ + \tau \left[\frac{1}{2} \left({}^t \lambda \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} \mathbf{F}_r + {}^t \lambda \delta \mathbf{U}_g^{kT} \mathbf{F}_r - \Delta \lambda^{(k-1)t} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r \right) - \Delta T \right] \end{aligned} \quad (3.156c)$$

O critério para seleção da raiz dessa equação combina dois métodos de seleção. O método de incremento direto, que é o mesmo método adotado para o comprimento de arco esférico. Adotado quando o parâmetro de ponderação está abaixo do limite, ou seja, a trajetória de equilíbrio é primariamente elástica (Bellora e Vescovini, 2016). Já na presença de fenômenos dissipativos, o critério de seleção é baseado na análise da energia dissipada associado com as duas raízes da equação quadrática (Bellora e Vescovini, 2016). Particularmente, a energia dissipada é obtida por:

$$\Delta T_1 = \frac{1}{2} \left({}^t\lambda \Delta \mathbf{U}_1^T - \Delta \lambda_1 {}^t\mathbf{U}^T \right) \mathbf{F}_r \quad (3.157a)$$

$$\Delta T_2 = \frac{1}{2} \left({}^t\lambda \Delta \mathbf{U}_2^T - \Delta \lambda_2 {}^t\mathbf{U}^T \right) \mathbf{F}_r \quad (3.157b)$$

em que os subscrito 1 e 2 representam as duas raízes, e ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ são o parâmetro de carga e o deslocamento, respectivamente, no último ponto de equilíbrio.

Uma vez que, os dois valores de ΔT estão disponíveis a escolha da solução depende do sinal das raízes. Na maioria dos casos, eles são caracterizados por sinais diferentes, permitindo assim uma seleção direta da solução real: devido à irreversibilidade do processo de dano, a única solução viável é aquela relativa a uma dissipação positiva (Bellora e Vescovini, 2016).

Soluções com valores de ΔT com o mesmo sinal são tipicamente encontradas na vizinhança de “*snap-backs*” agudos e, em tais casos, a raiz com menor norma residual, isto é, a mais próxima do equilíbrio, é a escolhida (Bellora e Vescovini, 2016).

Bellora e Vescovini (2016) declarama que, a vantagem do método do incremento baseado em energia é a garantia de convergência à solução dissipativa, evitando assim, soluções caracterizadas por uma interrupção indesejada para a propagação de danos.

3.5.4 Iteração a deslocamento constante

Batoz e Dhatt (1979) desenvolveram uma estratégia de iteração em que uma dada componente do vetor de deslocamentos nodais incrementais é escolhida como variável independente, ao invés do parâmetro de carga usual. Durante o ciclo iterativo, essa componente

de deslocamento é definida como uma quantidade que é especificada de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{U}^k(j) = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) + \delta \mathbf{U}^k(j) = \Delta \mathbf{U}_j \quad (3.158)$$

em que $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j)$ e $\delta \mathbf{U}^k(j)$ são, respectivamente, as componentes j dos vetores $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ e $\delta \mathbf{U}$, e $\Delta \mathbf{U}_j$ é o valor prescrito para a componente $\Delta \mathbf{U}^k(j)$. Substituindo a Equação (3.17) na Equação (3.158), obtém-se:

$$\Delta \mathbf{U}^k(j) = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) + \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) = \Delta \mathbf{U}_j \quad (3.159)$$

daí, chega-se à seguinte expressão:

$$\delta \lambda^k = \frac{\Delta \mathbf{U}_j - \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) - \delta \mathbf{U}_g^k(j)}{\delta \mathbf{U}_r^k(j)} \quad (3.160)$$

Por outro lado, Powell e Simons (1981) estabeleceram uma estratégia incremental-iterativa baseada nos seguintes procedimentos: na solução incremental predita, uma dada componente j do vetor de deslocamento é acrescida de uma certa quantidade especificada. Essa componente, entretanto, é mantida constante durante as iterações subsequentes, de modo que, a seguinte equação de restrição seja respeitada:

$$\delta \mathbf{U}^k(j) = \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) = 0 \quad (3.161)$$

resolvendo, então, a Equação (3.161) para $\delta \lambda$, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = -\frac{\delta \mathbf{U}_g^k(j)}{\delta \mathbf{U}_r^k(j)} \quad (3.162)$$

3.5.5 Iteração a trabalho externo constante

Como caso particular de um procedimento geral proposto por Powell e Simons (1981), tem-se a condição que o incremento de trabalho externo deve permanecer constante ao longo do processo iterativo. Sabe-se que, para o acréscimo de carga $\delta \lambda \mathbf{F}_r$, a variação do trabalho externo é dada por:

$$\delta W = \delta \lambda^k \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}^k \quad (3.163)$$

com a restrição $\delta W = 0$ e a substituição de (3.17) em (3.163), chega-se à seguinte equação para a correção do parâmetro de carga:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_g^k}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (3.164)$$

3.5.6 Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais

Chan (1988) apresentou uma estratégia de iteração, definida como o Método dos Deslocamentos Residuais (MDR). Nessa estratégia, ao invés de usarem restrições geométricas e de energia como nas estratégias anteriores, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas (Silva, 2009). Sendo esse o objetivo principal do ciclo iterativo.

Para implementar o MDR, deve-se reescrever, numa dada iteração k , a componente j do vetor de deslocamento $\delta \mathbf{U}$, na forma:

$$\mathbf{e}_k = \delta \mathbf{U}^k(j) = \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) \quad (3.165)$$

em que $\mathbf{e}_k$ é considerado como um dado erro. Chan (1998), então propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de $\bar{m}$ graus de liberdade, poderia ser expressa de acordo com:

$$\frac{d \left(\sum_{k=1}^{\bar{m}} (\mathbf{e}_k)^2 \right)}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (3.166)$$

que é equivalente à condição da norma mínima dos deslocamentos residuais, escrita numa forma mais adequada, como:

$$\frac{d \left[(\delta \mathbf{U}^k)^T \delta \mathbf{U}^k \right]}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (3.167)$$

Substituindo a Equação (3.17) em (3.167) e, depois, derivando a expressão obtida em relação a $\delta\lambda$, chega-se a:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.168)$$

3.5.7 Iteração a norma mínima das forças desequilibradas

A ideia básica dessa estratégia, como descrito por Bergan (1980), consiste no ajuste da força externa aplicada ao sistema, de modo que ela corresponda, o mais próximo possível, ao estado de forças internas calculado no começo da iteração. Essa estratégia garante que a “distância”, expressa como uma norma euclidiana do estado de forças desequilibradas da iteração corrente, à trajetória de equilíbrio seja minimizada.

O estado de forças desequilibradas pode ser obtido da Equação (3.6), que é reescrita abaixo seguindo uma nova notação:

$$\mathbf{g} = \lambda^k \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)} \quad (3.169)$$

em que $\mathbf{F}_i^{(k-1)}$ é o vetor de forças internas na iteração anterior e λ^k é o parâmetro de carga total na iteração corrente. Tem-se, então, que o quadrado da norma euclidiana de $\mathbf{g}$ é dado por:

$$\bar{G} = \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad (3.170)$$

como a equação anterior é a distância a ser minimizada, tem-se que a equação de restrição apropriada é obtida através da condição:

$$\frac{d\bar{G}}{d\lambda} = 0 \quad (3.171)$$

que fornece, com a substituição da Equação (3.170):

$$\lambda^k = \frac{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_i^{(k-1)}}{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \quad (3.172)$$

Desta forma, a correção do parâmetro de carga é dada por:

$$\delta\lambda = \lambda^k - \lambda^{(k-1)} \quad (3.173)$$

3.5.8 Iteração a resposta ponderada constante

Gierlinski e Graves Smith (1985) desenvolveram uma metodologia geral de iteração capaz de englobar, como casos particulares, as estratégias propostas por Riks (1979), Powell e Simons (1981) e Crisfield (1991). Essa metodologia baseia-se no fato de que a resposta da estrutura pode controlar tanto a seleção do incremento inicial de carga como o ciclo iterativo responsável pela restauração do equilíbrio (Silva, 2009). Dessa forma, foi estabelecido um critério adequado de medida da resposta estrutural, função escalar de $\mathbf{U}$ e $\lambda\mathbf{F}_r$, definido por:

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{U}^T \mathbf{G} \mathbf{U} + \lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (3.174)$$

em que $\mathbf{L}$ representa o comprimento do vetor resposta ponderada:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

com:

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \mathbf{G}^{1/2} \quad (3.176)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \lambda \mathbf{F}_r \mathbf{H}^{1/2} \quad (3.177)$$

sendo $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ matrizes diagonais com dimensão de rigidez e de flexibilidade, respectivamente. Escolhas diferentes de $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ caracterizam formas diferentes de respostas ponderadas, $\mathbf{L}$, como nos exemplos a seguir:

I. Se $G_{jj} = 1$ e $H_{jj} = 0$, a Equação (3.174) se transforma em:

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (3.178)$$

Silva (2009) destacou a semelhança dessa equação, com a equação (3.81) na sua forma incremental, o que caracteriza a estratégia de iteração proposta por Crisfield (1991).

- II. Uma outra medida da resposta da estrutura contendo as componentes dos vetores de deslocamento e de carga é obtida introduzindo-se $G_{jj} = 1$ e $H_{jj} = 1$, que leva a Equação (3.174) a:

$$L^2 = \mathbf{U}^T \mathbf{U} + \lambda^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (3.179)$$

que, genericamente, é igual às equações de restrições de comprimento de arco propostas em Crisfield (1991), Riks (1979) e Ramm (1982) (Silva, 2009).

- III. Os critérios anteriores têm a desvantagem de tratar todos os parâmetros de forma idêntica, mesmo que, em alguns pontos na sequência de carregamento, a estrutura possa ser mais sensível à variação de alguns parâmetros de que outros (Silva, 2009). Tentando reduzir esse problema, Gierlinski e Graves Smith (1985) procuraram incluir na definição de L as componentes da matriz de rigidez tangente inicial. Isso foi efetuado usando-se em (3.174), $G_{jj} = K_{jj}$ e $H_{jj} = \frac{1}{K_{jj}}$, em que K_{jj} são os elementos da diagonal principal da matriz de rigidez tangente.

Durante o ciclo iterativo, o incremento da resposta ponderada da estrutura, ΔL , de maneira análoga ao comprimento de arco fornecido anteriormente, pode ser expresso para iteração corrente de acordo com:

$$\Delta L^2 = \Delta \mathbf{U}^{kT} \mathbf{G} \Delta \mathbf{U}^k + (\Delta \lambda^k)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (3.180)$$

Uma estratégia conveniente para se calcular a correção do parâmetro de carga, $\delta \lambda$, pode ser, então, estabelecida considerando que, a cada iteração, a variação de L é nula. Em termos matemáticos, essa restrição é expressa como:

$$\delta \Delta L = \Delta L^k - \Delta L^{(k-1)} = 0 \quad (3.181)$$

substituindo a Equação (3.19b) em (3.180), e, em seguida, o resultado em (3.181), chega-se mais uma vez, a uma equação quadrática em $\delta \lambda$ (3.132). Porém, os termos A , B e C dessa equação são dados por:

$$A = (\delta \mathbf{U}_r^k)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (3.182a)$$

$$B = 2(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \mathbf{G} (\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)^T + 2\Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r \quad (3.182b)$$

$$C = (2\Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}_g^k)^T \mathbf{G} \delta \mathbf{U}_g^k \quad (3.182c)$$

A escolha correta das raízes segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

Uma interpretação geométrica proposta por Silveira (1995) é de que a superfície de interseção produzida pelo método da resposta ponderada é uma elipsoide, e a equação quadrática obtida para esse método representa a interseção do vetor tangente com essa superfície em dois pontos, que correspondem as duas raízes dessa equação.

Em Gierlinski e Graves Smith (1985), é proposta uma modificação na estratégia de Gierlinski e Graves Smith (1985) para reduzir o esforço numérico no cálculo e escolha do valor de $\delta \lambda$. Foi observado que a superfície de interseção elipsoidal poderia ser aproximada por superfícies planas, com cada segmento ortogonal ao vetor incremental ponderado $(\Delta \bar{\mathbf{U}}^{(k-1)}, \Delta \bar{\lambda}^{(k-1)} \mathbf{F}_r)$ no começo de cada iteração, ou seja:

$$(\delta \mathbf{U}^k)^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r = 0 \quad (3.183)$$

substituindo a Equação (3.17) na equação anterior, tem-se:

$$\delta \lambda^k = - \frac{(\delta \mathbf{U}_g^k)^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}}{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{H} \mathbf{F}_r} \quad (3.184)$$

3.5.9 Iteração baseada no deslocamento generalizado

De acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a seguinte expressão deveria ser respeitada para o cálculo do parâmetro de carga ao longo da solução não linear:

$$\delta \lambda = \frac{1}{\Delta \lambda^0 (\delta \mathbf{U}_r^{kT})^T \delta \mathbf{U}_r^k} (\mathbf{H}_k - \Delta \lambda^0 (\delta \mathbf{U}_r^{kT})^T \delta \mathbf{U}_g^k) \quad (3.185)$$

Na obtenção da solução incremental predita, $k = 0$, Yang e Kuo (1994) definiram que o parâmetro incremental $\mathbf{H}_0$ (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido de acordo com a Equação (3.124). Durante o ciclo iterativo, o mesmo é assumido como constante, ou seja, $\mathbf{H}_k = 0$ para $k > 0$. Dessa forma, pode-se reescrever (3.185) como:

$$\delta\lambda = -\frac{{}^t\delta\mathbf{U}_r^{kT}\delta\mathbf{U}_g^k}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^{kT}\delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.186)$$

que é a expressão para a correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

3.5.10 Iteração baseada no resíduo ortogonal

A estratégia do resíduo ortogonal, proposta por Krenk (1995) é utilizada para a correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo, em que, a cada iteração de equilíbrio, a magnitude da carga é ajustada de tal forma que o vetor de forças desequilibradas seja ortogonal ao incremento corrente de deslocamento (Maximiano, 2012).

Essa condição de ortogonalidade é formulada diretamente em termos de força e deslocamentos, e os passos básicos da metodologia proposta por Krenk (1995) são descritos a seguir:

No início de cada iteração k , existe ainda um desequilíbrio entre forças internas e externas. Nessa situação, o vetor de forças externas é $({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)})\mathbf{F}_r$, e o vetor dos deslocamento incrementais $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$ é conhecido, permitindo o cálculo das forças internas $\mathbf{F}_i({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)})$ (Maximiano, 2012). Objetiva-se, então, obter o vetor de forças externas que melhor se ajuste às forças internas de forma a minimizar o desequilíbrio existente entre essas grandezas (Maximiano, 2012). Sendo assim, segundo Maximiano (2012), pode-se escrever esse vetor de forças externas corrigido da seguinte forma: $({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k)\mathbf{F}_r$.

Seguindo a ideia estabelecida por Krenk (1995), a correção do parâmetro de carga na iteração corrente k , $\delta\lambda^k$, é calculada considerando os seguintes argumentos: a existência de forças residuais induz o cálculo adicional de deslocamentos, $\delta\mathbf{U}^k$ (Maximiano, 2012). Assumindo que, os deslocamentos incrementais da iteração anterior, $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$, são a melhor aproximação na direção dos deslocamentos incrementais da iteração corrente, $\Delta\mathbf{U}^k$, tem-se que

a magnitude desse vetor se modificará de acordo com a projeção do vetor resíduo na direção dos deslocamentos (Maximiano, 2012). Logo, os deslocamentos incrementais aumentarão ou diminuirão de acordo com o sinal do produto escalar, $\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$, em que:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \left({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \right) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i \left({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} \right) \quad (3.187)$$

representa o vetor de forças residuais, que é obtido corrigindo as forças externas para produzir, como citado anteriormente, um melhor ajuste às forças internas.

O vetor de deslocamentos incrementais $\Delta \mathbf{U}^k$ terá valor ótimo se a condição de ortogonalidade,

$$\tilde{\mathbf{g}}^T \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} = 0 \quad (3.188)$$

for satisfeita. Substituindo a Equação (3.187) em (3.188), e desenvolvendo a expressão obtida, tem-se:

$$\delta\lambda^k = - \frac{\left(\mathbf{g}^{(k-1)} \right)^T \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}}{\mathbf{F}_r^T \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}} \quad (3.189)$$

que é a expressão procurada para a correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo. Nessa equação, $\mathbf{g}$ representa o vetor de forças desequilibradas, que é calculado como:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = \left({}^t\lambda + \Delta\lambda^{(k-1)} \right) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i \left({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} \right) \quad (3.190)$$

De acordo com as Equações (3.20a) e (3.20b), essa equação pode ser escrita de forma simplificada, como:

$$\mathbf{g}^{(k-1)} = \left(({}^{t+\Delta t})\lambda^{(k-1)} \right) \mathbf{F}_r - ({}^{t+\Delta t}) \mathbf{F}_i^{(k-1)} \quad (3.191)$$

3.5.11 Técnica do fluxo normal

Na técnica do fluxo normal, o equilíbrio entre forças internas e externas é alcançado através de iterações sequenciais ao longo de um caminho normal às curvas descritas pela Equação (3.1), conforme Figura 12 (Maximiano, 2012). Este conjunto de curvas é conhecido na literatura como

fluxo de Davidenko (Allgower e Georg, 1980 apud Maximiano, 2012). Com essa técnica, pode-se escrever a Equação (3.17) da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{U}^k = (\delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k) - \frac{(\delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k}{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k} \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.192)$$

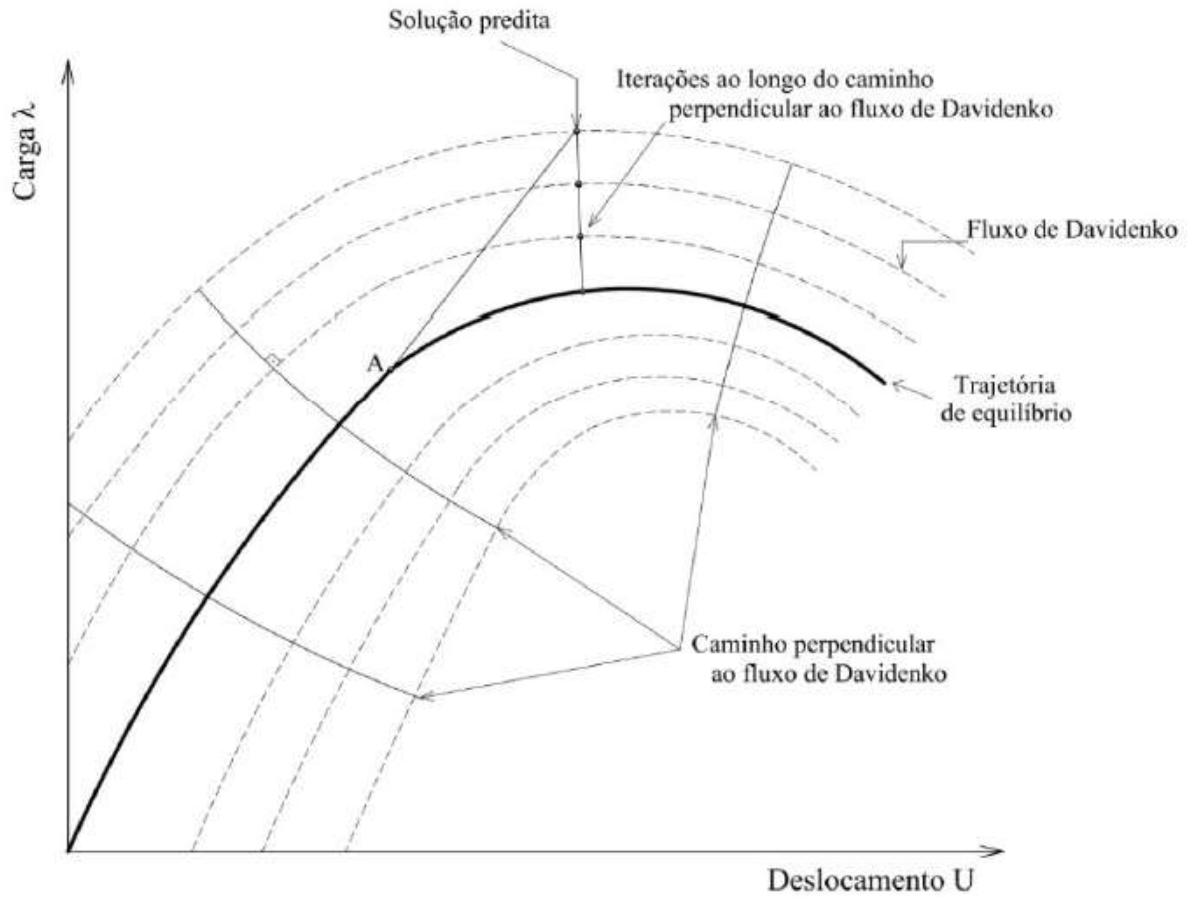


Figura 12- Técnica do fluxo normal (Maximiano, 2012).

Usando a Equação (3.192), os vetores $\delta \mathbf{U}$ e $\delta \mathbf{U}_r$ na iteração corrente k são sempre perpendiculares, uma vez que o segundo termo da diferença vetorial é a projeção do primeiro na direção do vetor $\delta \mathbf{U}_r^k$, como mostrado na Figura 13 (Maximiano, 2012).

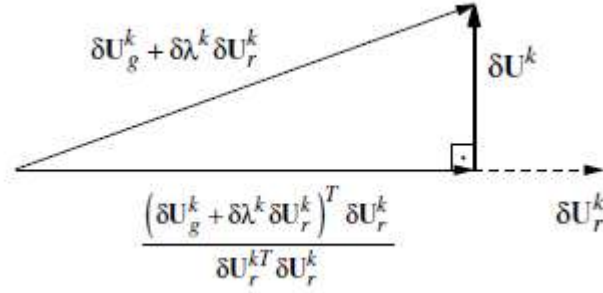


Figura 13 – Os vetores δU_r e δU da iteração k na técnica do fluxo normal (Maximiano, 2012).

3.5.12 Iteração baseada na carga residual

Essa família de estratégia, proposta por Rezaiee-Pajand *et al* (2019), baseia-se na carga residual, sendo uma estratégia de iteração obtida tornando a carga residual nula e a outra através da minimização da carga residual.

3.5.12.1 Carga residual nula

A trajetória de equilíbrio é uma forma comum de representação gráfica da resposta estática não linear de uma estrutura, e a mesma é obtida quando o vetor gradiente, $\mathbf{g}$, é nulo. Com isso, tem-se:

$$\mathbf{g}^k = (\lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{K}(\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}^k) \quad (3.193)$$

expandindo essa equação de duas variáveis através da série de segunda ordem de Taylor, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^k = & \mathbf{g}^{(k-1)} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \right)_{k-1}^{\text{t}+\Delta \text{t}} \delta \lambda^k + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{k-1}^{\text{t}+\Delta \text{t}} \delta \mathbf{U}^k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \lambda^2} \right)_{k-1}^{\text{t}+\Delta \text{t}} (\delta \lambda^k)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^2} \right)_{k-1}^{\text{t}+\Delta \text{t}} (\delta \mathbf{U}^k)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \lambda \partial \mathbf{U}} \right)_{k-1}^{\text{t}+\Delta \text{t}} \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}^k \end{aligned} \quad (3.194)$$

Utilizando a Equação (3.194), as derivadas da carga residual com respeito a cada variável são calculadas como:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}_r \quad (3.195a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \lambda^2} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.195b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \lambda \partial \mathbf{U}} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.195c)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} = \mathbf{K} \quad (3.195d)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^2} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} \quad (3.195e)$$

Usando a Equação (3.17), proposta por Batoz e Dhatt (1979), a derivada da matriz de rigidez em função do deslocamento nodal pode ser obtida da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \delta \mathbf{U}_g} \times \frac{\partial \delta \mathbf{U}_g}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \delta \mathbf{U}_r} \times \frac{\partial \delta \mathbf{U}_r}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \delta \lambda} \times \frac{\partial \delta \lambda}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.196)$$

substituindo a Equação (3.18a) na equação anterior, a derivada da matriz de rigidez pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \delta \mathbf{U}_g} \right)}{\partial \delta \mathbf{U}_g} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \delta \mathbf{U}_r} \right)}{\partial \delta \mathbf{U}_r} \times \frac{1}{\delta \lambda} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \delta \mathbf{U}_g} \right)}{\partial \delta \lambda} \times \frac{1}{\delta \mathbf{U}_r} = - \frac{\mathbf{g}}{(\delta \mathbf{U}_g)^2} \quad (3.197)$$

consequentemente, a segunda derivada da matriz de rigidez é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^2} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{k-1}^{t+\Delta t} = - \frac{\mathbf{g}^{(k-1)}}{(\delta \mathbf{U}_g^{(k-1)})^2} \quad (3.198)$$

substituindo as Equações (3.195) e (3.198) na Equação (3.194) e usando as Equações (3.17) e (3.18a), a expansão através da série de segunda ordem de Taylor pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{g}^{(k-1)} + \mathbf{F}_r \delta\lambda^k + \mathbf{g}^{(k-1)} \times \frac{\delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k}{\delta\mathbf{U}_g^{(k-1)}} - \mathbf{g}^{(k-1)} \frac{(\delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k)^2}{2(\delta\mathbf{U}_g^{(k-1)})^2} \quad (3.199)$$

Fazendo $\mathbf{g}^k$, igual a zero na Equação (3.199) e eliminando os componentes de carga na formulação, chega-se novamente a uma equação quadrática em $\delta\lambda$, que pode ser escrita através da Equação (3.132). Porém, os coeficientes A, B e C são agora, os seguintes:

$$A = (\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k \quad (3.200a)$$

$$B = 2(\delta\mathbf{U}_g^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k - 2(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^{(k-1)} \quad (3.200b)$$

$$C = (\delta\mathbf{U}_g^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k - 2(\delta\mathbf{U}_g^k)^T \delta\mathbf{U}_g^{(k-1)} - (\delta\mathbf{U}_g^{(k-1)})^T \delta\mathbf{U}_g^{(k-1)} \quad (3.200c)$$

A escolha entre as raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

3.5.12.2 Carga residual mínima

A outra estratégia, proposta por Rezaiee-Pajand *et al* (2019), para a determinar a equação de restrição se faz a minimização da carga residual da Equação (3.199), chegando-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial \mathbf{g}^k}{\partial \delta\lambda^k} = \mathbf{F}_r + \mathbf{g}^{(k-1)} \times \frac{\delta\mathbf{U}_r^k}{\delta\mathbf{U}_g^{(k-1)}} - \mathbf{g}^{(k-1)} \times \frac{2\delta\lambda^k (\delta\mathbf{U}_r^k)^2 + 2\delta\mathbf{U}_r^k \delta\mathbf{U}_g^k}{2(\delta\mathbf{U}_g^{(k-1)})^2} = 0 \quad (3.201)$$

eliminando as componentes de força na Equação (3.201), chega-se à equação de restrição dessa técnica, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta\lambda^k = \frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^{(k-1)} - (\delta\mathbf{U}_g^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.202)$$

3.5.13 Iteração baseada no fator de comprimento residual

De acordo com a Figura 14, uma outra condição para obtenção da equação de restrição é obtida, segundo Rezaiee-Pajand *et al* (2019), minimizando o comprimento do passo de carga iterativo. Na Figura 14 tem-se o vetor $\mathbf{n}^k$, que é um vetor iterativo e apresenta as seguintes componentes:

$$\mathbf{n}^k = (\delta\mathbf{U}^k, \delta\lambda^k \mathbf{F}_r) \quad (3.203)$$

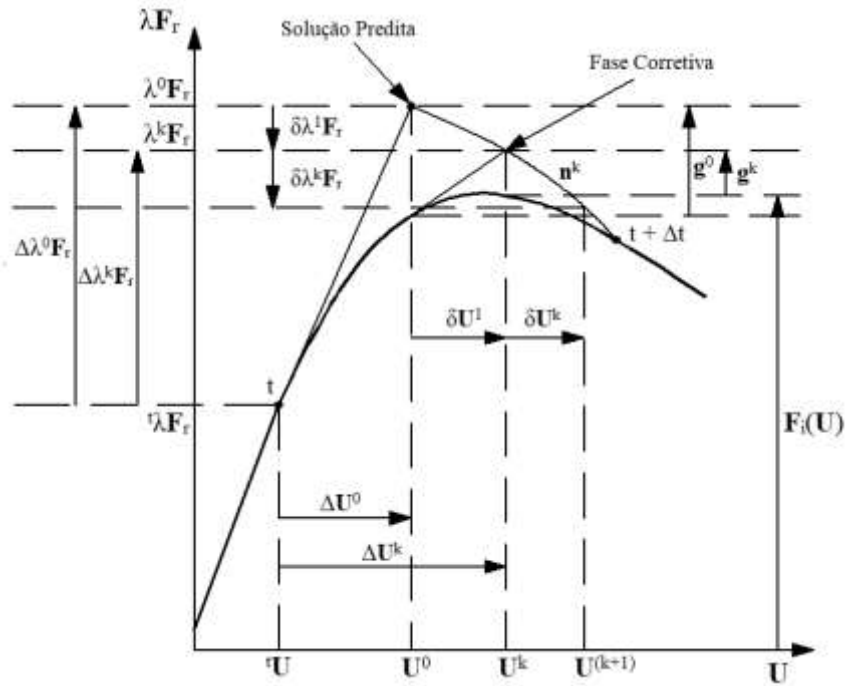


Figura 14 – Parâmetros residuais para os métodos iterativos baseado no fator de comprimento residual e no fator de deslocamento residual (Rezaiee-Pajand, *et al* 2019).

através da minimização do comprimento do vetor iterativo, $\mathbf{n}^k$, e usando a Equação (3.17), chega-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{n}^{kT} \mathbf{n}^k) = 0 \Rightarrow \delta \lambda^k = - \frac{(\delta \mathbf{U}_g^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k}{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \quad (3.204)$$

Rezaiee-Pajand *et al* (2019) ressaltaram que, essa equação apresenta formulação similar a encontrada por outro autor usando o método da trajetória ortogonal (Fried, 1984 apud Rezaiee-Pajand *et al*, 2019). Ainda, segundo Rezaiee-Pajand *et al* (2019) isso mostra a generalidade da formulação sugerida.

3.5.14 Iteração baseada no fator de deslocamento residual

Essa estratégia, proposta por Rezaiee-Pajand *et al* (2019), está fundamentada na minimização do erro de deslocamento de duas iterações consecutivas. Com o uso da Equação (3.17), esse erro pode ser calculado da seguinte forma:

$$\delta \bar{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^k - \delta \mathbf{U}^{(k-1)} = \delta \mathbf{U}_r^k \delta \lambda^k + \delta \mathbf{U}_g^k - \delta \mathbf{U}^{(k-1)} \quad (3.205)$$

minimizando a Equação (3.205), a correção do parâmetro de carga pode ser obtida através da seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\delta \bar{\mathbf{U}}^{kT} \delta \bar{\mathbf{U}}^k) = 0 \Rightarrow \delta \lambda^k = \frac{\delta \mathbf{U}_r^k (\delta \mathbf{U}^{(k-1)} - \delta \mathbf{U}_g^k)}{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (3.206)$$

3.5.15 Iteração baseada no controle do incremento de tensão

Assim como, a estratégia de incremento de tensão, esse método foi sugerido por Chen e Screyer (1990) e adota como parâmetro de controle para a análise da estratégia de iteração a deformação em algum ponto de interesse no modelo. Baseado na Equação (3.103), e associando o incremento de tensão com o vetor de deslocamento nodal e com o parâmetro de incremento de carga, tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{U}_g^k + \Delta \lambda \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{U}_r^k \quad (3.207)$$

além disso, pode-se calcular o incremento de tensão através da seguinte equação:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta r \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|} \bigg|_{k=0} \quad (3.208)$$

Substituindo a Equação (3.207) em (3.208), e mantendo Δr constante ao longo do passo de carga, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{U}_g^{(k-1)}}{\mathbf{c}^T \boldsymbol{\beta} \delta \mathbf{U}_r^{(k-1)}} \quad (3.209)$$

3.5.16 Iteração baseada em múltiplas restrições

O sistema geral de equações de equilíbrio não lineares definido em (3.6) associado com a técnica geral de solução proposta por Batoz e Dhatt (1979), a qual permite que haja uma correção no parâmetro de carga. Será agora modificado para incluir múltiplas restrições. Uma vez que, Muñoz e Roehl (2017) arranjam essas restrições em um vetor de n dimensões do tipo:

$$\mathbf{g}(\Delta \mathbf{U}^k, \Delta \lambda^k, \tilde{\mathbf{c}}) = 0 \quad (3.210)$$

em que:

$$\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n] \quad (3.211)$$

é o vetor que contém o parâmetro de controle de cada equação de restrição no vetor $\mathbf{g}$.

Assumindo que a solução incremental $\Delta \mathbf{U}^k$ e $\Delta \lambda^k$ existe e satisfaça a Equação (3.210), linearizando o sistema,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{F}_r \\ \mathbf{K} & \tilde{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U}^k \\ \delta \lambda^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda) \end{Bmatrix} \quad (3.212)$$

e reescrevendo o mesmo de uma forma compacta, têm-se:

$$[\mathbf{K}] \times \{\delta \mathbf{U}^k\} = \{\mathbf{g}\} \quad (3.213)$$

em que o sistema na Equação (3.213) é inconsistente, ou seja, não tem solução, a menos que o parâmetro de controle $\tilde{c}$ forneça a equação de restrição necessária para tornar o sistema consistente e determinado (Muñoz e Roehl, 2017). Cabe ressaltar que, o sistema como está proposto na Equação (3.213) apresenta menos equações do que incógnitas, sendo assim, ao adicionar uma equação de restrição, o mesmo se torna determinado. A fim de permitir a participação das diversas equações de restrições, Muñoz e Roehl (2017) propuseram o uso do método dos mínimos quadrados, que encontra uma solução aproximada para minimizar a soma da Norma Euclidiana destas soluções à trajetória de equilíbrio, conforme a Figura 15.

Na forma matricial o método dos mínimos quadrados é aplicado multiplicando ambos os lados da Equação (3.213) por $[\mathbf{K}]^T$, resultando no seguinte sistema de equações:

$$[\mathbf{K}]^T [\mathbf{K}] \times \{\delta \mathbf{U}^k\} = [\mathbf{K}]^T \{\mathbf{g}\} \quad (3.214)$$

dessa maneira, a correção dos deslocamentos e do parâmetro de carga pode ser obtida diretamente. $\mathbf{U}$

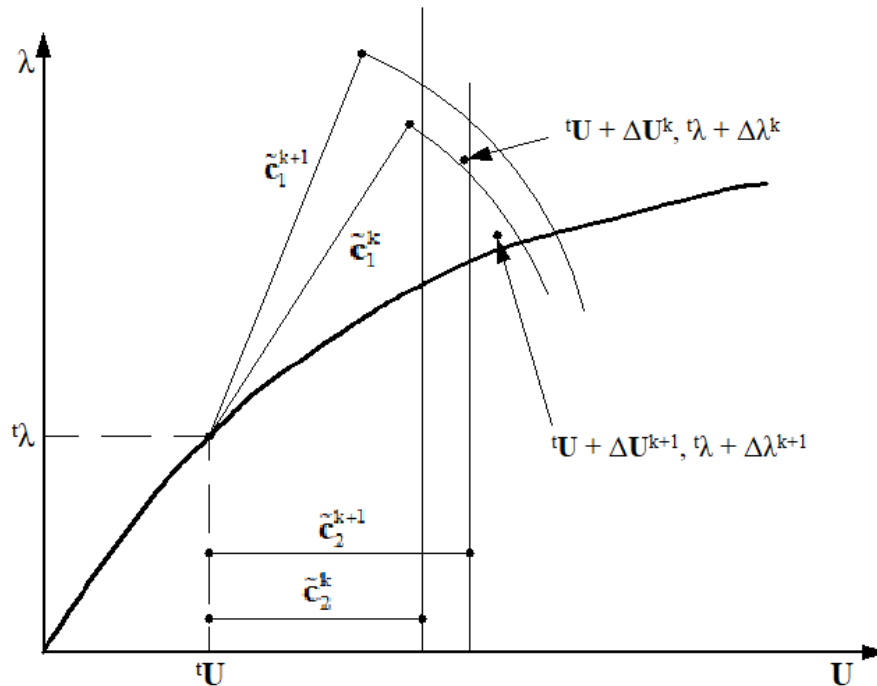


Figura 15 – Processo de iteração com a combinação do método do comprimento de arco cilíndrico e do método do deslocamento generalizado (Muñoz e Roehl, 2017).

Na Figura 15 tem a representação gráfica desse método utilizando como combinação os métodos de comprimento de arco e deslocamento generalizado, conforme proposto por Muñoz e Roehl (2017). Ressalta-se que é possível que se faça diversas combinações de estratégias de iteração. Ainda de acordo com a Figura 15, nota-se que os pontos marcados, que são as iterações k e $k + 1$, estão mais próximos da trajetória de equilíbrio se comparado com o uso de uma única equação de equilíbrio, o que mostra que esse método chega a convergência mais rápido que os métodos aplicados separadamente.

3.5.17 Iteração baseada na área residual

3.5.17.1 Primeira área triangular

Tendo como base um esquema geral de solução incremental-iterativo, conforme Figura 16, a estratégia, proposta por Rezaiee-Pajand e Naserian (2015), tem como premissa a área do triângulo bcd . Nota-se que, para atingir a convergência basta fazer a área desse triângulo ser nula. Pode-se calcular essa área através da seguinte equação:

$$S^k = \frac{1}{2} \left(\mathbf{s}^{(k-1)} \times \mathbf{n}^k \right) \quad (3.215)$$

em que:

$$\mathbf{s}^{(k-1)} = \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)}, \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \right) \quad (3.216)$$

$$\mathbf{n}^k = \left(\delta \mathbf{U}^k, \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \right) \quad (3.217)$$

em que $\bar{\mathbf{g}}^{(k-1)}$ é o vetor gradiente reduzido na $(k - 1)$ -ésima iteração. Substituindo as Equações (3.217) e (3.216) na Equação (3.215), tem-se:

$$S^k = \frac{1}{2} \left(\delta \lambda^k \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}^{(k-1)} - \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}^{kT} \right) \quad (3.218)$$

usando a Equação (3.17) e igualando a área a zero, chega-se à seguinte equação:

$$\delta \lambda^k = \frac{\bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_g^{kT}}{\mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}^{(k-1)} - \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_r^{kT}} \quad (3.219)$$

Ainda de acordo com o triângulo bcd , Rezaiee-Pajand e Naserian (2015) definiram uma outra forma de atingir a convergência, que é feita através da minimização do perímetro do mesmo, calculado da seguinte maneira:

$$P^k = \left[\left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}^k \right)^T \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta \mathbf{U}^k \right) + \left(\bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \right)^T \left(\bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \right) \right] \quad (3.220)$$

substituindo a Equação (3.17) e minimizando a Equação (3.220), obtem-se:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\delta \mathbf{U}^{(k-1)T} \delta \mathbf{U}_r^k + \delta \mathbf{U}_g^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \mathbf{F}_r}{\delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \quad (3.221)$$

eliminando as componentes de carga da equação anterior, chega-se a seguinte equação simplificada:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_g^k \right)^T \delta \mathbf{U}_r^k}{\delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (3.222)$$

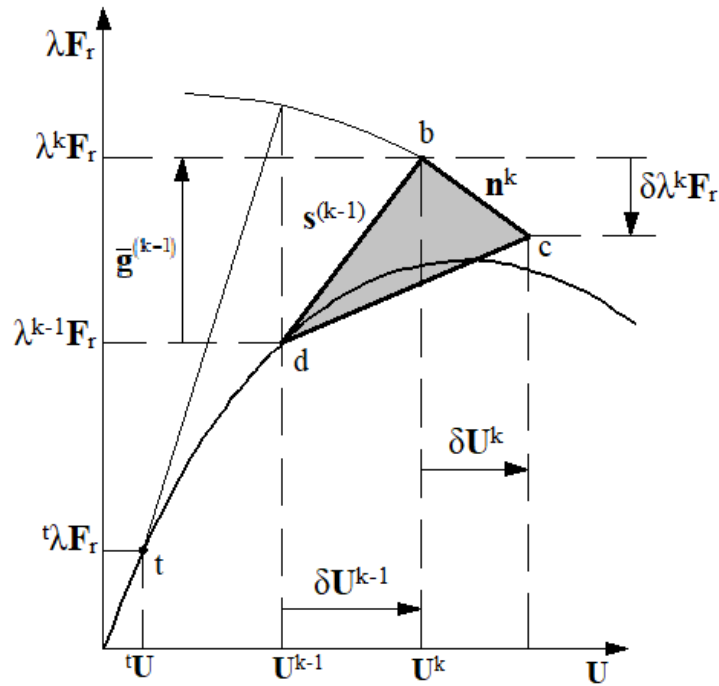


Figura 16 – Esquema geral de solução incremental-iterativa (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2015).

3.5.17.2 Estratégia de iteração baseada na primeira área do triângulo utilizada para otimização

De acordo Rezaiee-Pajand e Naserian (2018), a fim de aumentar a taxa de convergência e melhorar a precisão com que se avalia o comportamento estrutural, emprega-se a estratégia de iteração anterior, primeira área triangular, para a otimização. Porém, diferente do que foi proposto anteriormente, a área do triângulo bcd será calculada através de uma nova equação (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2018). Essa equação é uma função objetiva com duas variáveis do fator de carga e do ângulo formado entre os lados do triângulo bcd , ϕ , conforme a Figura 17, e pode ser escrita da seguinte forma:

$$S^k = \frac{1}{2} \left| \mathbf{s}^{(k-1)} \right| \left| \mathbf{n}^k \right| \sin \phi^k \quad (3.223)$$

em que:

$$\left| \mathbf{s}^{(k-1)} \right| = \delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \quad (3.224)$$

$$\left| \mathbf{n}^k \right| = \delta \mathbf{U}^k + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.225)$$

substituindo as Equações (3.225) e (3.224) em (3.223), e usando (3.17), a área do triângulo bcd pode ser calculada através da seguinte equação:

$$S^k = \frac{1}{2} \left[\delta \mathbf{U}_g^k \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \right) + \delta \lambda^k \left(\delta \mathbf{U}_r^{kT} + \mathbf{F}_r^T \right) \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \right) \right] \sin \phi^k \quad (3.226)$$

para encontrar a solução otimizada, essa área será minimizada em relação o ângulo ϕ .

$$\frac{\partial}{\partial \phi^k} (S^k) = \left[\delta \mathbf{U}_g^k \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \right) + \delta \lambda^k \left(\delta \mathbf{U}_r^{kT} + \mathbf{F}_r^T \right) \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \right) \right] \cos \phi^k = 0 \quad (3.227)$$

Consequentemente, a correção do parâmetro de carga é calculada através da seguinte equação:

$$\delta \lambda^k = - \frac{\delta \mathbf{U}_g^k \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \right)}{\left(\delta \mathbf{U}_r^{kT} + \mathbf{F}_r^T \right) \left(\delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \bar{\mathbf{g}}^{(k-1)} \right)} \quad (3.228)$$

Segundo Rezaiee-Pajand e Naserian (2018), nessa estratégia, o vetor que passa através do ponto de iteração anterior, posicionando-se na trajetória de equilíbrio até o novo ponto de iteração $\mathbf{s}^{(k-1)}$, é perpendicular ao local geométrico do ponto iterativo, $\mathbf{n}^k$. Além disso, Rezaiee-Pajand e Naserian (2018) enfatizaram que essa equação de restrição foi proposta anteriormente por (Ghalishooyan, 2013 apud Rezaiee-Pajand e Naserian, 2018).

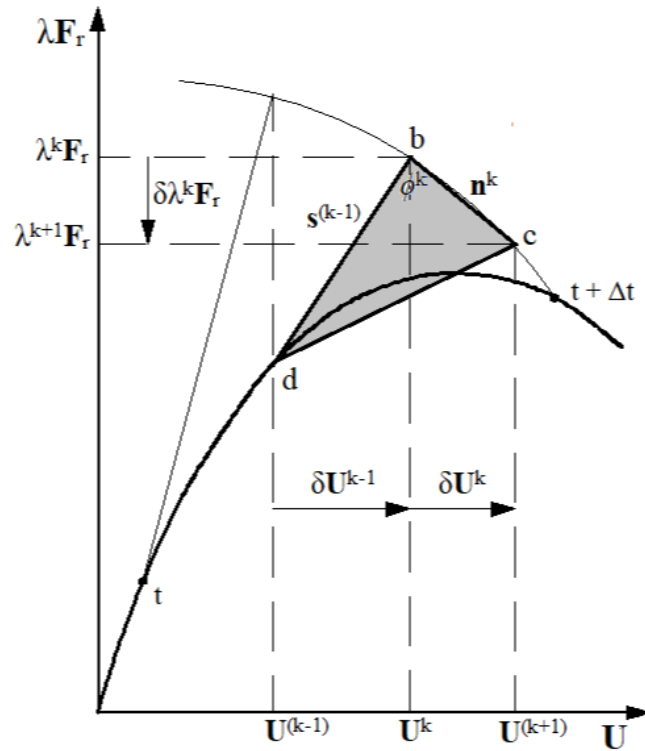


Figura 17 – Área triangular residual para o método da primeira área triangular (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2018).

3.5.17.3 Segunda área triangular

Repetindo a mesma ideia dos métodos baseado na Área Residual, e de acordo com a Figura 18. Torna-se a área do triângulo abc nula a fim de garantir a convergência do problema. Ainda da Figura 18, o vetor $\mathbf{s}^k$ e $\mathbf{n}^k$ são os lados do triângulo e a seguinte relação é obtida para o cálculo da área (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2015):

$$S^k = \frac{1}{2} (\mathbf{s}^k \times \mathbf{n}^k) \quad (3.229)$$

em que:

$$\mathbf{s}^k = (\delta \mathbf{U}^k, \bar{\mathbf{g}}^k) \quad (3.230)$$

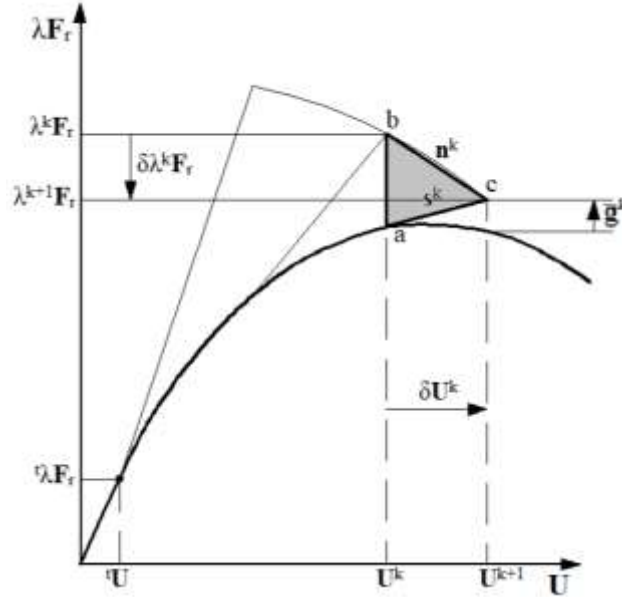


Figura 18 – Método da segunda área triangular (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2015).

substituindo as Equações (3.230) e (3.217) na Equação (3.229), a área do triângulo pode ser calculada da seguinte forma:

$$S^k = \frac{1}{2} \left[\delta \mathbf{U}^{kT} \delta \lambda^k \mathbf{F}_r - (\mathbf{g} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r)^T \delta \mathbf{U}^k \right] = -\frac{1}{2} \mathbf{g}^T \delta \mathbf{U}^k \quad (3.231)$$

utilizando a Equação (3.17) e fazendo a área igual a zero, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = -\frac{\mathbf{g}^T \delta \mathbf{U}_g^k}{\mathbf{g}^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (3.232)$$

Rezaiee-Pajand e Naserian (2015) definiram uma outra equação de restrição, que é obtida através da minimização do perímetro do triângulo abc, calculado da seguinte maneira:

$$P^k = \left[\delta \mathbf{U}^{kT} \delta \mathbf{U}^k + (\mathbf{g} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r)^T (\mathbf{g} + \delta \lambda^k \mathbf{F}_r) \right] \quad (3.233)$$

substituindo a Equação (3.17) e minimizando a Equação (3.233) em relação a λ , vem:

$$\delta\lambda^k = -\frac{\delta\mathbf{U}_g^{kT}\delta\mathbf{U}_r^k + \mathbf{g}^T\mathbf{F}_r}{\delta\mathbf{U}_r^{kT}\delta\mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r} \quad (3.234)$$

Rezaiee-Pajand e Naserian (2015) ressaltaram que, essa equação é uma equação de restrição similar a obtida pela minimização do perímetro do quadrilátero *befc* (Rezaiee-Pajand, *et al*, 2009 apud Rezaiee-Pajand e Naserian, 2015).

3.5.17.4 Estratégia de iteração baseada na segunda área do triângulo utilizada para otimização

Assim, como feito na Seção 3.5.17.2, usa-se a estratégia de iteração baseada na segunda área do triângulo para otimização do processo. A área do triângulo *abc*, será calculada através da seguinte equação:

$$S^k = \frac{1}{2}|\mathbf{s}^k||\mathbf{n}^k|\sin\varphi^k \quad (3.235)$$

em que:

$$|\mathbf{s}^k| = \delta\mathbf{U}^k + \mathbf{G}^k \quad (3.236)$$

e φ^k é o ângulo formado entre $\mathbf{s}^k$ e $\mathbf{n}^k$. Usando a Equação (3.17), e substituindo as Equações (3.225) e (3.236) em (3.225), obtem-se a seguinte equação para o cálculo da área:

$$S^k = \frac{1}{2} \left[\left(\delta\lambda^k \right)^2 \left(\delta\mathbf{U}_r^{kT}\delta\mathbf{U}_r^k + 2\delta\mathbf{U}_r^{kT}\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r \right) + \delta\lambda^k \left(\delta\mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r \right)^T \left(2\delta\mathbf{U}_g^k + \mathbf{g} \right) + \left(\delta\mathbf{U}_g^{kT}\delta\mathbf{U}_g^k + \delta\mathbf{U}_g^{kT}\mathbf{g} \right) \right] \sin\varphi^k = 0 \quad (3.237)$$

e assim, como já explicado anteriormente, a área é uma função objetiva com duas variáveis, o fator de carga e o ângulo, φ^k , formado entre os lados do triângulo *abc*, conforme Figura 19. Para determinar a equação de restrição, minimiza-se a área do triângulo em função do ângulo φ^k , com isso, vem (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2018):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} (S^k) = \frac{1}{2} \left[(\delta \lambda^k)^2 (\delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k + 2 \delta \mathbf{U}_r^{kT} \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r) \right. \\ \left. + \delta \lambda^k (\delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r)^T (2 \delta \mathbf{U}_g^k + \mathbf{g}) + (\delta \mathbf{U}_g^{kT} \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \mathbf{U}_g^{kT} \mathbf{g}) \right] \cos \varphi^k = 0 \end{aligned} \quad (3.238)$$

fazendo a primeira da parte da equação igual a zero, chega-se a uma equação quadrática em $\delta \lambda$, que pode ser escrita através da Equação (3.132). Porém, os coeficientes A, B e C são agora, os seguintes:

$$A = \delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k + 2 \delta \mathbf{U}_r^{kT} \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (3.239a)$$

$$B = (\delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r)^T (2 \delta \mathbf{U}_g^k + \mathbf{g}) \quad (3.239b)$$

$$C = \delta \mathbf{U}_g^{kT} (\delta \mathbf{U}_g^k + \mathbf{g}) \quad (3.239c)$$

A escolha entre as raízes $\delta \lambda_1$ e $\delta \lambda_2$ segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

Uma outra equação, de restrição, proposta por Rezaiee-Pajand e Naserian (2018), pode ser obtida fazendo o segundo lado da Equação (3.238) igual a zero:

$$\cos \varphi^k = 0 \Rightarrow \varphi^k = 90^\circ \Rightarrow \mathbf{s}^k \perp \mathbf{n}^k \Rightarrow \mathbf{s}^k \cdot \mathbf{n}^k = 0 \quad (3.240)$$

De acordo com Rezaiee-Pajand e Naserian (2018), nessa equação o vetor que passa pelo ponto na trajetória de equilíbrio e pelo ponto de iteração, $\mathbf{s}^k$, é perpendicular à localização do ponto iterativo, $\mathbf{n}^k$. Substituindo as Equações (3.217) e (3.230) na Equação (3.240) e utilizando a Equação (3.17), chega-se, novamente, a uma equação quadrática em $\delta \lambda$, que pode ser escrita através da Equação (3.132). Porém, os coeficientes A, B e C são agora, os seguintes:

$$A = \delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (3.241a)$$

$$B = 2 \delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_g^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{g} \quad (3.241b)$$

$$C = \delta \mathbf{U}_g^{kT} \delta \mathbf{U}_g^k \quad (3.241c)$$

A escolha entre as raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ segue a mesma ideia adotada para o método do comprimento de arco esférico.

Uma outra forma de otimizar o processo, proposta Rezaiee-Pajand e Naserian (2018), é minimizando a área do triângulo abc em função do parâmetro de carga. Logo, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(S^k) = \frac{1}{2} \left[2\delta\lambda^k (\delta\mathbf{U}_r^{kT} \delta\mathbf{U}_r^k + 2\delta\mathbf{U}_r^{kT} \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r) + (\delta\mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r)^T (2\delta\mathbf{U}_g^k + \mathbf{g}) \right] \sin\phi^k \quad (3.242)$$

consequentemente, chega-se à seguinte equação:

$$\delta\lambda^k = - \frac{(\delta\mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r)^T (2\delta\mathbf{U}_g^k + \mathbf{g})}{2(\delta\mathbf{U}_r^{kT} \delta\mathbf{U}_r^k + 2\delta\mathbf{U}_r^{kT} \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r)} \quad (3.243)$$

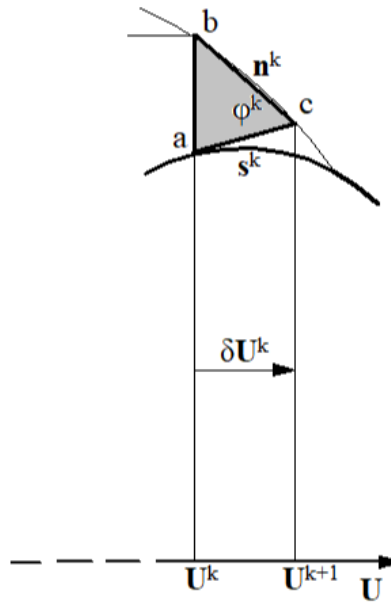


Figura 19 - Área triangular residual para o método da segunda área triangular (Rezaiee-Pajand e Naserian, 2018).

3.5.18 Iteração baseada na estratégia mista esférica predita

De acordo com Ritto-Corrêa e Camotim (2008), os métodos do comprimento de arco esférico e cilíndrico não são métodos ideais para traçar trajetórias de equilíbrio que apresentam

pontos de bifurcação, uma vez que há o risco de os mesmos convergirem na trajetória de equilíbrio errada, ou seja, esses métodos passam pelo ponto de bifurcação da estrutura.

Um processo padrão para superar esse tipo de problema é ajustar o comprimento de arco com base no número de iterações executadas no último incremento, entretanto como não é possível antecipar esse comportamento da estrutura, esse método está longe de ser perfeito (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008). Em contraste a esse processo, tem-se a estratégia mista esférica predita, proposta por Ritto-Corrêa e Camotim (2008), que leva a um ajuste natural e automático do comprimento de arco. Esse processo está representado, esquematicamente, na Figura 20, em que o plano horizontal contém dois graus de liberdade U_1 e U_2 de um espaço bidimensional e o eixo vertical representa o parâmetro de carga, λ . A fase predita corresponde ao ponto P, que é a interseção entre a tangente da trajetória de equilíbrio no ponto t (último ponto de equilíbrio conhecido) e uma esfera centralizada no mesmo ponto (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008). Entretanto, nas iterações corretivas subsequentes, a iteração será realizada no cilindro vertical definido pelo ponto t e P (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008). Consequentemente, a primeira correção leva ao ponto C, que é a interseção entre a trajetória de equilíbrio e o cilindro, e não ao ponto E, que ocorreria caso o método do comprimento de arco esférico fosse mantido (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).

A implementação desse método é direta. Para a fase predita usa a Equação (3.83) proposta na Seção 3.3.

Para as iterações subsequentes, a equação de restrição será obtida através das equações (3.81) e (3.84), ou seja, uma relação entre os métodos de comprimento de arco esférico e cilíndrico. Substituindo a Equação (3.3) na Equação (3.81), vem:

$$\left(\Delta\lambda^0\right)^2 \delta\mathbf{U}_r^{kT} \delta\mathbf{U}_r^k = \Delta l^2 \quad (3.244)$$

substituindo a Equação (3.84) na Equação (3.244),

$$\left(\frac{\delta\mathbf{U}_r^{kT} \delta\mathbf{U}_r^k}{\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \right) \delta l^2 = \Delta l^2 \quad (3.245)$$

em que δl representa o comprimento de arco obtido pelo método do arco esférico na fase predita. Logo, a estratégia de comprimento de arco cilíndrico proposta por Crisfield (1981) e Ramm (1981, 1982), será reescrita da seguinte forma (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008):

$$(\Delta \mathbf{U}^k)^T \Delta \mathbf{U}^k = \left(\frac{\delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k}{\delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \right) \delta l^2 \quad (3.246)$$

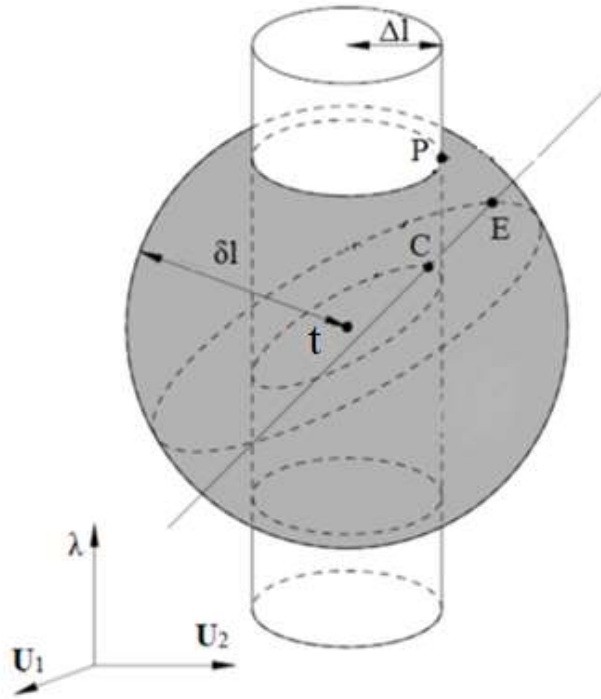


Figura 20 – Método do comprimento de arco esférico combinado com o método de comprimento de arco cilíndrico (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).

3.5.19 Iteração baseada em uma equação de restrição não centralizada

Outra estratégia proposta por Ritto-Corrêa e Camotim (2008) com a finalidade de melhorar o traçado de uma trajetória de equilíbrio que contenha pontos de bifurcação é definir uma equação de restrição não centralizada no último ponto de equilíbrio conhecido.

Ou seja, em vez de centralizar a equação de restrição no ponto t , pode ser preferível colocá-la à frente do ponto t , no ponto X , como ilustrado na Figura 21. O ponto inicial predito P está, sempre, localizado a uma distância δl do ponto t , porém todas as iterações de correção serão

executadas dentro de uma equação de restrição menor, centralizada no ponto X e com raio igual a Δl (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008). O ponto X, encontra-se em uma linha reta que conecta os pontos t e P e sua localização precisa é parametrizada pela constante Υ (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008). Cabe ressaltar que:

- I. O ponto P é o único ponto que satisfaz duas condições diferentes, distância δl do ponto O e distância Δl do ponto X;
- II. O ponto t está dentro da nova equação de restrição, embora não no seu centro.

Essa última propriedade garante que a trajetória de equilíbrio interceptará novamente a nova equação (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).

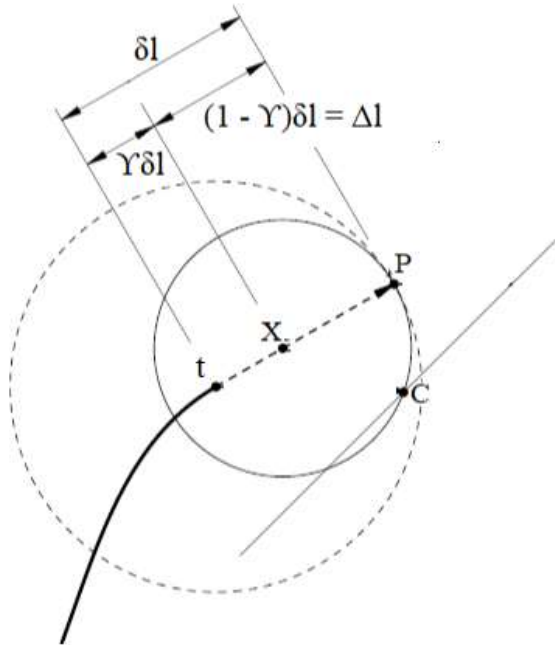


Figura 21 – Equação de restrição não centralizada no último ponto de equilíbrio (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).

Sua implementação é de forma direta, para obter a nova equação de restrição, adiciona-se o parâmetro Υ para a obtenção do comprimento de arco, conforme a seguinte equação:

$$(\Delta \mathbf{U}^k)^T \Delta \mathbf{U}^k + (\Delta \lambda^k)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = (1 - \Upsilon) \delta l^2 \quad (3.247)$$

para garantir que o ponto t esteja localizado dentro da nova equação, é necessário ter (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008):

$$\Upsilon \delta l^2 \leq (1 - \Upsilon) \delta l^2 \quad (3.248)$$

que é verdade se:

$$\Upsilon = \frac{1}{2} \quad (3.249)$$

De acordo com Ritto-Corrêa e Camotim (2008), o valor de $\Upsilon = 1/2$ é muito atraente, pois isso garante que as duas interseções da trajetória de equilíbrio com a equação de restrição, correspondem, precisamente, o ponto final e inicial do incremento. Isso significa que, a convergência para soluções erradas é facilmente detectadas, uma vez que, o comprimento de arco é nulo, solicitando assim, a repetição do procedimento incremental com um passo a mais (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008).

3.5.20 Iteração baseada em uma equação de restrição elipsoidal alinhada

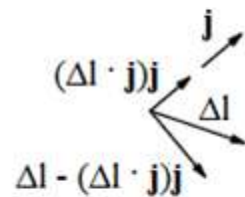
Segundo Ritto-Corrêa e Camotim (2008), o método descrito anteriormente permite algum controle sobre o comprimento do passo, de acordo com o grau de não linearidade exibido (localmente) pela trajetória de equilíbrio, ou seja, trajetórias de equilíbrio fortemente lineares levam a comprimentos de passo mais curto. Porém, Ritto-Corrêa e Camotim (2008) desenvolveram mais esse conceito, considerando que tanto o centro quanto a forma da equação de restrição dependem da direção da trajetória de equilíbrio no ponto t .

Nesse método, ilustrado na Figura 22, a equação de restrição é uma hiperelipsoide que tem o seu maior semieixo, de comprimento $\Delta l = (1 - \Upsilon) \delta l$ alinhado, com o caminho tangente ao ponto t (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008). O outro semieixo (perpendicular) possui o comprimento igual a $\varsigma \Delta l$, em que ς é um coeficiente escalar menor igual a um, e quando $\varsigma = 1$ corresponde ao método descrito anteriormente (Ritto-Corrêa e Camotim, 2008). Ritto-Corrêa e Camotim (2008) definiu que, com esse método é possível controlar, indiretamente, o encurtamento do tamanho do comprimento de arco de acordo com o nível da mudança de direção da trajetória ocorrendo dentro de um único incremento.

$$\frac{(\Delta \mathbf{U}^k \cdot \mathbf{j})^2}{\Delta l^2} + \frac{\Delta \mathbf{U}^k \cdot \Delta \mathbf{U}^k - 2(\Delta \mathbf{U}^k \cdot \mathbf{j})^2 + (\Delta \mathbf{U}^k \cdot \mathbf{j})^2}{\zeta^2 \Delta l^2} = 1 \quad (3.250)$$

simplificando essa equação,

e assim como para o método anterior, $\Delta l = (1 - \Upsilon)\delta l$, logo:



114

3.5.21 Iteração baseada na norma do vetor gradiente

Tendo em vista, o princípio do equilíbrio de forças, e que os caminhos de controle de iteração devem fazer a estrutura se equilibrar o mais rápido possível, ou seja, o caminho deve fazer as iterações convergirem rapidamente, então, é razoável que as equações de restrições das iterações sejam estabelecidas de acordo com os critérios de convergência (Zhiliang, 1993).

Para essa estratégia de restrição foi adotado o critério de convergência baseado na norma da força residual (Zhiliang, 1993). A fim de se obter o equilíbrio da estrutura após o ciclo iterativo k , deve-se tomar os valores adequados para $\Delta\lambda^{k-1}$ e $\delta\mathbf{U}^k$ para que a norma da força residual seja nula, isto é (Zhiliang, 1993):

$$\mathbf{g}^{kT} \mathbf{g}^k = 0 \quad (3.253)$$

em que

$$\mathbf{g}^k = (\lambda^t + \delta\lambda^k) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i \quad (3.254)$$

podendo ser reescrita como:

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{g}^{(k-1)} - \delta\lambda^k \mathbf{F}_r \quad (3.255)$$

substituindo a Equação (3.255) em (3.253), tem-se:

$$\delta\lambda^k = \frac{\mathbf{F}_r^T \mathbf{g}^k}{\mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r} \quad (3.256)$$

3.6 Solução iterativa sem a solução incremental predita

Antes de apresentar essa metodologia de resolução de problemas não lineares, é necessário fazer algumas ressalvas relacionadas a notação a ser adotada:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura para o passo de carga t , e deseja-se determinar a configuração de equilíbrio para o passo de carga $t + \Delta t$;
- k se refere ao contador do número de iterações em um determinado passo de carga. Para $k = 0$, tem-se o primeiro ponto do ciclo iterativo;

- λ e $\mathbf{U}$ definem o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$ e $\Delta\mathbf{U}$ caracterizam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, medidos a partir da última configuração de equilíbrio;
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais obtidos durante o processo iterativo.

Nesse método, proposto por Rezaiee-Pajand e Afsharimoghadam (2018), não é necessária a etapa de solução incremental predita, uma vez que, o incremento do parâmetro de carga é calculado através de um processo iterativo. Além disso, utiliza-se para a análise iterativa uma trajetória em forma de curva parabólica para cada incremento, que pode ser escrita da seguinte forma (Rezaiee-Pajand e Afsharimoghadam, 2018):

$$\lambda^{k+1}\mathbf{F}_r = v(\mathbf{U}^{k+1})^2 + \eta\mathbf{U}^{k+1} + \omega \quad (3.257)$$

Nessa equação, v , η e ω são constantes devido a suposição que há somente uma entrada no vetor de carga e deslocamento. Com base na Figura 23, e transferindo o sistema de coordenada para o ponto de equilíbrio ${}^t\mathbf{U}$, uma nova equação de restrição é obtida, oriunda desse novo sistema de coordenada. Adicionalmente, inserindo as coordenadas do ponto de equilíbrio ${}^t\mathbf{U}$ no novo sistema de coordenadas, a constante ω terá valor igual a zero em relação à Equação (3.257). Com isso, a seguinte relação é mantida:

$$\Lambda^{k+1}\mathbf{F}_r = v(\chi^{k+1})^2 + \eta\chi^{k+1} \quad (3.258)$$

$$\chi^{k+1} = \Delta\mathbf{U}^k + \delta\mathbf{U}^k \quad (3.259)$$

$$\Lambda^{k+1}\mathbf{F}_r = \Delta\lambda^k\mathbf{F}_r + \delta\lambda^k\mathbf{F}_r \quad (3.260)$$

nessas equações, χ e Λ representam o deslocamento e o parâmetro de carga no novo sistema de coordenadas, respectivamente. Após encontrar os coeficientes v e η através da Equação (3.258), a equação de restrição pode ser obtida. Para chegar nesse objetivo, duas suposições são feitas (Rezaiee-Pajand e Afsharimoghadam, 2018). A primeira, presume-se que a tangente da trajetória de equilíbrio e da trajetória de análise iterativa são iguais no começo de cada

incremento (Rezaiee-Pajand e Afsharimoghadam, 2018). Essa suposição pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_r}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} = \mathbf{K} \quad (3.261)$$

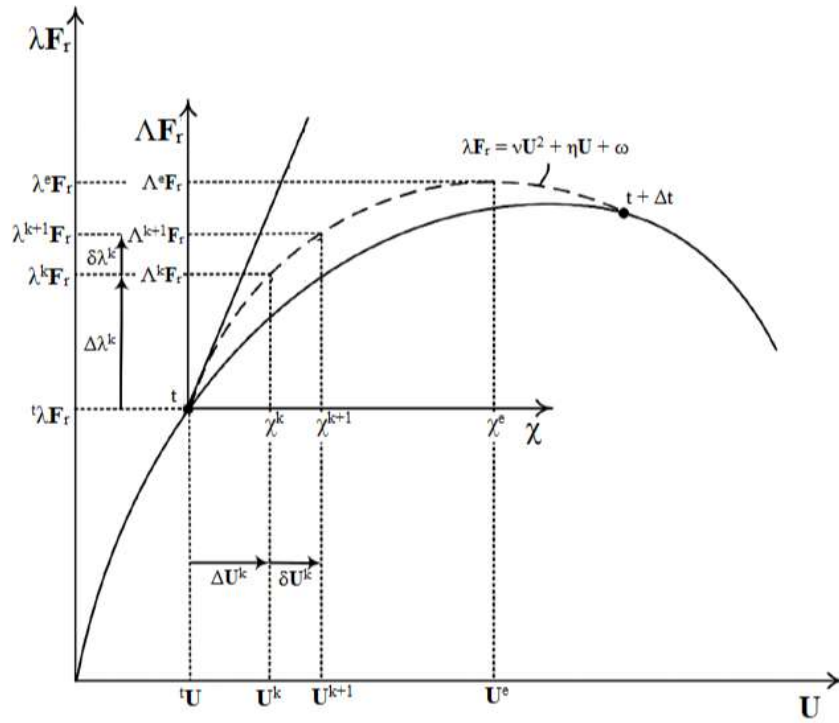


Figura 23 – Trajetória iterativa proposta e suas variáveis (Rezaiee-Pajand e Afsharimoghadam, 2018).

Do ponto de vista geométrico, essa analogia é mostrada na Figura 23. Usando a Equação (3.261), o parâmetro η na Equação (3.258) pode ser calculado da seguinte forma:

$$\eta = \mathbf{K} \quad (3.262)$$

A segunda, de acordo com a Figura 23, se a trajetória parabólica tem um ponto extremo, a tangente nesse ponto $(\chi^e, \Lambda^e \mathbf{F}_r)$ será horizontal. Consequentemente, calculando a derivada da Equação (3.258) e substituindo $\chi^{(k+1)}$ por χ^e , tem-se a seguinte equação:

$$\chi^e = -\frac{\eta}{2v} \quad (3.263)$$

então, inserindo as coordenadas do ponto extremo na Equação (3.258), e utilizando o resultado obtido na Equação (3.263) chega-se a próxima equação:

$$v = -\frac{\eta^2}{4\Lambda^e \mathbf{F}_r} \quad (3.264)$$

substituindo o valor de η na Equação (3.264), vem:

$$v = -\frac{\mathbf{K}^2}{4\Lambda^e \mathbf{F}_r} \quad (3.265)$$

consequentemente, substituindo os valores das constantes encontradas na Equação (3.258) obtém-se à seguinte equação de restrição:

$$\Lambda^{k+1} \mathbf{F}_r = -\frac{\mathbf{K}^2 (\chi^{k+1})^2}{4\Lambda^e \mathbf{F}_r} + \mathbf{K} \chi^{k+1} \quad (3.266)$$

Utilizando a equação proposta por Batoz e Dhat (1979), Equação (3.259) e (3.260) e também inserindo essas na última equação, a equação de equilíbrio pode ser simplificada da seguinte forma:

$$A(\delta \lambda^k)^2 + B(\delta \lambda^k) + C \quad (3.267)$$

em que:

$$A = \mathbf{K}^2 (\delta \mathbf{U}_r^k) \quad (3.268a)$$

$$B = 2\mathbf{K}^2 \Delta \mathbf{U}^k \delta \mathbf{U}_r^k + 2\mathbf{K}^2 \delta \mathbf{U}_r^k \delta \mathbf{U}_g^k - 4\mathbf{K} \Delta \lambda^t \mathbf{F}_r \delta \mathbf{U}_r^k + 4\Delta \lambda^t \mathbf{F}_r^2 \quad (3.268b)$$

$$C = \mathbf{K}^2 (\Delta \mathbf{U}^k)^2 + 2\mathbf{K}^2 \Delta \mathbf{U}^k \delta \mathbf{U}_g^k + \mathbf{K}^2 (\delta \mathbf{U}_g^k)^2 + 4\Delta \lambda^k \Delta \lambda^t \mathbf{F}_r^2 - 4\mathbf{K} \Delta \lambda^t \mathbf{F}_r \Delta \mathbf{U}^k - 4\mathbf{K} \Delta \lambda^t \mathbf{F}_r \delta \mathbf{U}_g^k \quad (3.268c)$$

ignorando a componente de força, $\mathbf{F}_r$, nos coeficientes da Equação (3.267), uma raiz dupla pode ser derivada dessa equação algébrica quadrática. Subsequentemente, a única raiz real presente nesse espaço vetorial é:

$$\delta\lambda^k = -\frac{\Delta\mathbf{U}^{kT}\delta\mathbf{U}_r^k + \delta\mathbf{U}_r^{kT}\delta\mathbf{U}_g^k}{\delta\mathbf{U}_r^{kT}\delta\mathbf{U}_r^k} \quad (3.269)$$

4 CONCLUSÃO

Devido à complexidade e a diversidade de comportamento não linear dos sistemas estruturais, deve-se agir com precaução para escolher o método ideal para a realização da análise estrutural, uma vez que, cada método apresenta suas características e particularidades, definindo se o mesmo atenderá a análise ou não.

A fim de fornecer subsídios para ajudar na escolha do melhor método, a seguir fez-se a descrição de cada etapa do método incremental iterativo, ressaltando as características relevantes de cada estratégia.

Para a escolha de um método numérico adequado deve-se atentar, primeiramente, aos critérios de convergência de cada um, como por exemplo, o Teorema do ponto fixo das contrações citado para o método da iteração linear. Uma vez que, caso não seja atendido o critério de convergência, esse método não chegará à solução do problema. Satisfeito o critério de convergência, deve-se atentar à ordem de convergência e ao custo computacional, pois os mesmos estão relacionados com o tempo de processamento, já que quanto maior a ordem de convergência mais rápido o método converge, conforme a definição de ordem de convergência descrita por Franco (2007). Porém quando esses métodos são empregados na análise estrutural, o tempo de processamento está associado com o tipo de análise a ser feita, estática ou dinâmica, bem como as condições empregadas na análise, e devido a precisão da resposta a ser alcançada para o problema. E esse tempo de processamento é medido pela demanda computacional, em que quanto maior a demanda computacional, maior o tempo de processamento.

Ainda quanto a ordem de convergência e ao custo computacional, vale ressaltar que ambos fomentam o surgimento de novos métodos iterativos, pois busca-se métodos cada vez mais rápidos e eficientes para a solução dos sistemas de equações. Conforme nota-se nesse trabalho, alguns métodos propõem melhorias no método de Newton-Raphson visando torná-lo mais rápido e eficiente.

Ressalta-se que o método iterativo puramente aplicado é ideal apenas para análises de problemas que não necessitam da trajetória de equilíbrio completa, pois os mesmos apresentam dificuldades em passar pelos pontos limites. Sendo assim, pretendendo determinar o traçado completo da trajetória de equilíbrio é necessário que se associe a esses métodos iterativos as

estratégias de continuação, isto é, as estratégias de incremento de carga, escolha do sinal do parâmetro de carga inicial e das estratégia de iteração, que adicionam uma equação de restrição ao sistema de equação.

Quanto às estratégias de incremento de carga, sabe-se que essas objetivam retratar o grau de não linearidade corrente do sistema estrutural em análise. Dessa forma, uma estratégia eficiente deve atender basicamente os seguintes critérios: gerar grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear e, de forma contrária, fornecer pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não linear (Silva, 2009). Uma vez que, quando o comportamento estrutural for fortemente não linear essa estrutura estará mais suscetível aos efeitos de não linearidade, física e geométrica, logo, um incremento de carga menor seria mais prudente para poder retratar detalhadamente a trajetória de equilíbrio e mudanças no comportamento da estrutura.

Na literatura existe diversas estratégias de incremento, bem fundamentadas, que retratam o grau de não linearidade da estrutura de diferentes formas. Seja por parâmetros estruturais como o CSP e o GSP ou por aproximação como feito pelo método baseado na curvatura da trajetória não linear. Apesar dessas diferenças, e com base na definição de eficiência para essas estratégias, pode-se afirmar que todas essas técnicas são eficientes. Sendo assim, somente a eficiência não é o suficiente para se propor novas técnicas, ou seja, as novas técnicas devem buscar meios de melhorar o ponto fraco de outras. Por exemplo, conforme Murray e Gregory (1990), a estratégia baseada em uma aproximação parabólica da trajetória linear pode apresentar espaçamentos entre os pontos convergentes não tão regulares, além disso, esse método tende a resultar em pontos muito próximos nas regiões de limite de carga e deslocamento altamente não linear. Resultando em uma estratégia com número de incremento elevado e com um custo computacional alto.

Um outro exemplo a ser levado em conta é a estratégia do CSP, que segundo Yang e Shieh (1990), apresenta variações abruptas na vizinhança dos pontos de *snap-backs*, o que não ocorre com a estratégia do GSP, pois, apresenta estabilidade próximo aos pontos limites.

Novamente, quanto à definição de eficiência das estratégias de incremento, ressalta-se a etapa de definir o sinal correto do incremento, a qual permite identificar quando os pontos de máximo e mínimos são ultrapassados.

Para definir o sinal do incremento existem diversas estratégias que abordam esse problema de diferentes ângulos. Resultando em critérios fundamentados em parâmetros matemáticos como o critério proposto por Crisfield (1991), que é baseado no determinante da matriz de rigidez tangente para a mudança do sinal do $\Delta\lambda^0$; e em critérios fundamentados em parâmetros da estrutura, como os critérios baseados no CSP e no GSP para a mudança do sinal do $\Delta\lambda^0$.

Nota-se que alguns dos critérios apresentados nesse trabalho apresentam falhas em algumas análises, como por exemplo o método de Crisfield (1991), o qual segundo Meek e Tan (1984), pode apresentar falhas em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos.

Logo, o que motiva o surgimento de novos métodos é superar as falhas desses métodos já existentes, objetivando melhorar a eficiência das estratégias de incremento. Além disso buscaram-se métodos que apresentem uma maior estabilidade para diferentes problemas de análise estrutural. Como feito por Yuanqi e Shen (2004), que propôs uma mudança no método de Feng *et al* (1996, 1995), pois o mesmo demonstra problemas em trajetórias de equilíbrio apresentando pontos de bifurcação no segmento inicial da trajetória de equilíbrio.

Por fim, tem-se as estratégias de iteração, que determinam a correção do parâmetro de carga através de uma equação de restrição imposta ao problema. É importante ressaltar que, conforme já citado, não se pode esperar de nenhuma estratégia de iteração a resolução de problemas fortemente não lineares com igual eficiência. Sendo esse o motivo da diversidade de estratégias presente na literatura.

Nesse trabalho foram descritas diversas estratégias envolvendo equações de restrições distintas. Dentre as estratégias descritas, têm-se as estratégias com equações de restrições geométricas, com equações de restrições de energia, fundamentadas em parâmetros usado como critério de convergência, como o deslocamento e o vetor gradiente, fundamentadas em características da estrutura, entre outras.

Pode-se notar que há uma gama enorme de estratégias de iteração e a melhor maneira de aproveitar essa variedade é através do conhecimento das mesmas e do problema que será estudado, permitindo assim que se escolha a que melhor atenderá a situação.

Saindo dos métodos incrementais-iterativos, tem-se o método de solução iterativa proposta por Rezaiee-Pajand e Afsharimoghadam (2018), em que não é feita a fase incremental,

diferindo dos métodos incrementais, uma vez que, as estratégias não serão mais “limitadas” pelas equações de restrição, mas sim, pela trajetória de equilíbrio parabólica. Satisfeito o critério de convergência, para se encontrar o próximo ponto, muda-se o sistema de eixo para o ponto convergente e assim sucessivamente até que a trajetória de equilíbrio seja completamente traçada.

Com base no que foi descrito nesse trabalho, percebe-se a importância da análise não linear na engenharia, bem como o que fundamenta tal análise, pois, o resultado da análise estrutural depende, da escolha correta do método e das estratégias que serão adotadas para tal análise. Sendo assim, tendo esses conceitos bem esclarecidos, o engenheiro será capaz de fazer uma análise retratando o comportamento estrutural e terá um projeto otimizado, reduzindo o custo do mesmo e mantendo a segurança da edificação.

REFERÊNCIAS

ALLGOWER, E. L.; GEORG, K. **Homotopy methods for approximating several solutions to nonlinear systems of equations**. Amsterdam: Numerical Solutions of Highly Nonlinear Problems, 1980.

ALVES, L. M. **Análise Numérica: Uma Abordagem Algorítmica e Computacional**. Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas - Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. Curitiba, p. 261. 2007.

ALVES, R. V. **Instabilidade Não-Linear Elástica de Estrutura Reticuladas Especiais**. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro. 1995.

AMINI, K.; KAMANDI, A. A New Line Search Strategy for Finding Separating Hyperplane in Projection-Based Methods. **Number Algor**, v. 70, p. 559-570, Janeiro 2015.

ARAÚJO, J. C. M. D. **Cálculo Numérico**. Universidade Castelo Branco. Rio de Janeiro, p. 52. 2009. (ISBN 978-85-7880-051-2).

ATKINSON, K. E. **An Introduction to Numerical Analysis**. 2ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1988.

BABAJEE, D. K. R. **Analysis of Higher Order Variants of Newton's Method and Their Applications to Differential and Intergral Equations and in Ocean Acidification**. University of Mauritius. [S.l.], p. 260. 2010.

BATHE, K. J.; DVORKIN, E. N. On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations. **Computers and Structures**, v. 17, n. 5-6, p. 871-879, 1983.

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, p. 1262-1267, 1979.

BELLINI, P. X.; CHULYA, A. An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear FInite Element Equations. **Computer & Structures**, v. 26, p. 99-110, 1987.

BELLORA, D.; VESCOVINI, R. Hybrid Geometric-Dissipative Arc-Length Methods for the Quasi-Static Analysis of Delamination Problems. **Computer and Structures**, v. 34, p. 123-133, 2016.

BERGAN, P. G. Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems. **Computers & Structures**, v. 12, p. 497-509, 1980.

BERGAN, P. G. et al. Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v. 12, p. 1677-1696, 1978.

BERGAN, P. G.; SOREIDE, T. A comparative study of different numerical solution techniques as applied to a nonlinear structural problem, *Com. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 2, p. 185-201, 1973.

BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J. **Numerical Analysis**. 9^a. ed. Canada: Brooks/Cole, 2010.

CHAN, S. L. Geometric and Material Nonlinear Analysis of Beam-Columns and Frames Using the Minimum Residual Displacement Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, p. 2657-2669, 1988.

CHAPMAN, S. J. **Fortran 90/95 for Scientists and Engineers**. 2^a. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003.

CHEN, H.; BLANDFORD, G. E. Work-increment-control method for non-linear analysis. **International Journal for numerical methods in engineering**, v. 36, p. 909-930, 1993.

CHEN, Z.; SCHREYER, H. L. A Numerical Solution Scheme for Softening Problems Involving Total Strain Control. **Comp. Struct.**, n. 37, p. 1043-1050, 1990.

CHUN, C. A New Iterative Method for Solving Nonlinear Equations. **Applied Mathematics and Computation**, n. 178, p. 415-422, 2006.

CHUN, C. A Two-Parameter Third-Order Family of Methods for Solving Nonlinear Equations. **Applied Mathematics and Computation**, n. 189, p. 1822-1827, 2007.

CLARKE, M. J.; HANCOCK, M. J. A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-linear Analyses. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, p. 1365-1391, 1990.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3^a. ed. Nova York: John Wiley & Sons, Inc, 1989.

CORDERO, A.; FERRERO, A.; TORREGROSA, J. R. Damped Traub's Method: Convergence and Stability. **Mathematics and Computers in Simulation**, Agosto 2015.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. **Computers & Structures**, v. 13, p. 52-62, 1981.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, v. 1, 1991.

DAI, Y.-H. Mathematical Programming. **Mathematical Optimization Society**, v. 138, n. 1-2, p. 502-533, Abril 2013. ISSN 0025-5610.

DE ARAUJO, I. M.; ALVES, R. R. Método de Newton. **Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia**, Goiânia, v. 4, n. 4, p. 30-45, Agosto 2013. ISSN 2236-8779.

DE SOUZA NETO, E. A.; FENG, Y. T. On the Determination of the Path Direction for Arc-Lenght Methods in the Presence of Bifurcation and Snap-Backs. **Compu. Methods Appl. Mech. Engrg**, v. 179, p. 81-89, 1999.

DENNIS, J. E.; MORE, J.; MORE, J. J. A Characterization of Superlinear Convergence and Its Application to Quasi-Newton Methods. **Mathematics of Computations**, v. 28, n. 126, p. 549-560, Abril 1974.

EZQUERRO, J.; HERNÁNDEZ, M. An optimization of Chebyshev's Method. **Journal of Complexity**, p. 343-361, 2009.

FENG, Y. T.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. Determination of Travel Directions in Path-Following Methods. **Mathl. Comput. Modelling**, v. 21, n. 7, p. 43-59, 1995.

FENG, Y. T.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. A New Criterion for Determination of Initial Loading Parameter in Arc-Length Methods. **Computer & Structures**, v. 58, n. 3, p. 479-485, 1996.

FERNANDES, E. D. S. **Resolução de Equações Não Lineares**. Instituto Superior de Educação. [S.l.], p. 55. 2008.

FRANCO, N. M. B. **Cálculo Numérico**. 1ª. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, v. Único, 2007.

FREID, I. Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, n. 47, p. 283-297, 1984.

FRONTINI, M.; SORMANI, E. Third-Order Methods from Quadrature Formulae for Solving Systems of Nonlinear Equations. **Applied Mathematics and Computation**, n. 149, p. 771-782, 2004.

GALVÃO, A. D. S. **Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise**. Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Ouro Preto, p. 241. 2000.

GANDER, W. On Halleys Iteration Method. **Amer. Math. Monthly**, n. 92, p. 131-134, 1985.

GIERLINSKI, J. T.; GRAVES SMITH, T. R. A Variable Load Iteration Procedure for Thin-Walled Structures. **Computers & Structures**, v. 21, p. 1085-1094, 1985.

GUTIÉRREZ, M. A. Energy Release Control for Numerical Simulations of Failure in Quasi-Brittle Solids. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 19-29, 2004.

HABIBI, A.; BIDMESHKI, S. As Optimized Approach for Tracing Pre- and Post-Buckling Equilibrium Paths of Space Trusses. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 29, n. 3, 2019.

HABIBI, A.-R.; BIDMESHKI, S. A Dual Approach to Perform Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Truss Structures. **Steel and Composite Structures**, v. 27, n. 1, p. 13-25, Janeiro 2018.

KIM, J. H.; KIM, Y. H. A Predictor-Corrector Method for Structural Nonlinear Analysis. **Comput. Methods Appl. Engrg**, p. 959-974, 2001.

KIM, N.-H. **Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. Nova York: Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2015.

KRENK, S. An Orthogonal Residual Procedure for Non-Linear Finite Element Equations. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v. 38, p. 823-839, 1995.

KRENK, S.; HEDEDAL, O. A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. **Engineering Mechanics Comput**, Aalborg, n. 12, p. 01-18, 1993.

KRENK, S.; HEDEDAL, O. "A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. **Comput. Methods appl. Mech. Engrg.**, v. 123, p. 95-107, 1995.

KRISHNAMOORTHY, C. S.; RAMESH, G.; DINESH, K. U. Post-buckling analysis of structure by three-parameter constrained solution techniques. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 22, p. 109-142, 1996.

LEON, S. E. et al. On the Effect of Constraint Parameters on the Generalized Displacement Control Method. **Mechanics Research Communications**, n. 56, p. 123-129, 2014.

LI, Q.; LI, D. H. A Class of Derivative-Free Methods for Large-Scale Nonlinear Monotone Equation. **IMA J. Numer. Anal.**, v. 31, p. 1625-1635, 2011.

LIU, G. R.; QUEK, S. S. FEM for Two-Dimensional Solids. **The Finite Element Methods**, p. 161-217, 2014.

LOBÃO, D. C. **Introdução aos Métodos Numéricos**. Universidade Federal Fluminense - UFF. Volta Redonda, p. 160. 2012. (Ci - 202).

MASSAGO, S. **Sequências e Séries**. DM_UFSCAR. [S.l.], p. 35. 2014.

MAXIMIANO, D. P. **Uma Técnica Eficiente para Estabilizar a Estratégia do Resíduo Ortogonal na Análise Não Linear de Estruturas**. Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Ouro Preto, p. 67. 2012. (624.014.2:624.072.32).

MEEK, J. L.; TAN, H. S. Geometricallu Nonlinear Analysis of Space by an Incremental Iterative Technique. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 47, p. 261-282, 1984.

MICHELLY SILVA MOREIRA, A.; DE ANDRADE SACRAMENTO, M.; SOUZA DE OLIVEIRA BUFFONI, S. Métodos Numéricos em Programação Não-Linear sem Restrição para Minimização da Energia Potencial de uma Treliça. **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (XXXIX SBPO)**, Fortaleza, 28 a 31 Agosto 2007. 2272-2284.

MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. A Continuation Method with Combined Restrictions for Nonlinear Structure Analysis. **Finite Element in Analysis and Design**, n. 130, p. 53-64, 2017.

MURRAY J., C.; GREGORY J., H. A Study of Incremental-Iteratives Strategies for Non-Linear Analyses. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Sydney, v. 29, p. 1365-1391, 2006.

MURRAY, C. J.; GREGORY, H. J. A Study of Incremental-Iteratives Strategies for Non-linear Analyses. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, p. 1365-1391, 1990.

OSTROWSKI, A. M. **Solutions of Equations and System of Equations**. Nova York: Academic Press, 1960.

OSTROWSKI, A. M. Soluiton of Equations and Systems of Equations. **Academic Press**, 1966.

PASQUALE, M. L. D.; DOS SANTOS, S. R.; PERIÇARO, G. A. Métodos Newton e Quase-Newton para Otimização Irrestrita. **O Método Científico - VIII Encontro de Produção Científica e Tecnológica (EPCT)**, Campo Mourão, 21 a 25 Outubro 2013. 12.

POTRA, F.-A.; PTÁK, V. **Nondiscrete induction and iterative processes**. Melbourne: Pitman, 1984.

POWELL, G.; SIMONS, J. Improved Iteration Strategy fo Nonlinear Structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 1455-1467, 1981.

POWELL, M. J. D. On the Convergence of the Variables Metric Algorithm. **J. Inst. Math. Appl**, v. 7, n. 43, p. 21-36, 1971.

RAMM, E. Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points. **Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.

RAMM, E. The Riks/Wempner Approach - An extension of displacement control method in non-linear analysis. **Non-linear Computacional Mechanics**, Pineridge, p. 63-86, 1982.

REZAIEE-PAJAND, ; GHALISHOOYAN, M.; SALEHI-AHMADABAD, M. Comprehensive Evaluation os Structural Geometrical Nonlinear Solution Techniques Part I: Formulation and Characteristics of the Methods. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 48, p. 849-878, Novembro 2013. ISSN DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2013.48.6.849>.

REZAIEE-PAJAND, M.; AFSHARIMOGHADAM, H. An incremental iterative solution procedure without predictor step. **European Journal of Computational Mechanics**, Março 2018. ISSN 1779-7179.

REZAIEE-PAJAND, M.; NASERIAN, R. Using Residual Areas for Geometrically Nonlinear Structural Analysis. **Ocean Engineering**, n. 105, p. 327-335, 2015.

REZAIEE-PAJAND, M.; NASERIAN, R. Geometrical Nonlinear Analysis Based on Optimization Technique. **Applied Mathematical Modelling**, n. 53, p. 32-48, 2018.

REZAIEE-PAJAND, M.; NASERIAN, R.; AFSHARIMOGHADAM, H. Geometrical Nonlinear Analysis of Structures Using Residual Variables. **Mechanics Based Design of Structures and Machines**, Janeiro 2019. ISSN 1539-7742.

RIKS, E. The Application of Newton's methods to the problem elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 19, n. 4, p. 1060-1066, 1972.

RIKS, E. An Incremental Approach to the solution of Snapping and Buckling Problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, p. 529-551, 1979.

RITTO-CORRÊA, M.; CAMOTIM, D. On the Arc-Lenght and Other Quadratic Control Methods: Established Less Known and New Implementation Procedures. **Computer and Structures**, n. 86, p. 1353-1368, 2008.

ROCHA, G. **Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para análises não-linear de Estruturas**. UFOP. Ouro Preto, p. 202. 2000. (CDU:624.04).

RUGGIERO, M. G. A.; LOPES, V. L. D. R. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, v. Único, 1996.

SHEN, Z.; LUO, Y. **Updating Large Rotation of Space Joints and Revision Techniques for Tracing the Equilibrium Path in Analysis of Reticulated Shells**. Symposiums on New Space Structures. Hangzhou: [s.n.]. 1994. p. 144-150.

SILVA, A. R. D. D. **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas**. Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Ouro Preto, p. 322. 2009. (CDU: 624.014).

SILVEIRA, R. A. D. M. **Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Rio de Janeiro, p. 226. 1995.

SKATULLA, S.; SANSOUR, C. On a Path-Following Method for Non-Linear Solid Mechanics with Applications to Structural and Cardiac Mechanics Subject to Arbitrary Loading Scenarios. **International Journal of Solids and Structures**, n. 96, p. 181-191, 2016.

SODRÉ, U. **Matemática Essencial - Sequências Reais**. Departamento de Matemática - UEL. [S.l.], p. 17. 2010.

SOLEYMANI, F. et al. An optimized derivative-free form of the Potra-Pták method. **Mathematical and Computer modelling**, v. 56, p. 97-104, Março 2012.

SOLODOV, M. V.; SVAITER, B. F. A Globally Convergent Inexact Newton Method for Systems of Monotone Equations. **Semismooth and Smoothing Methods**, p. 355-369, 1998.

SOUZA, E. A. D. **Métodos Iterativos para Problemas Não Lineares**. Universidade Federal Fluminense. Volta Redonda, p. 126. 2015.

SOUZA, L. A. F. et al. Método Iterativos de Terceira e Quarta Ordem Associados à Técnica de Comprimento de Arco. **Ciência & Engenharia**, p. 39-49, Junho 2017. ISSN 1983-4071.

SOUZA, L. A. F. et al. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 19, p. 161-179, 2018.

TORKAMANI, M. A. M.; SONMEZ, M.; CAO, J. Second-Order Elastic Plane-Frame Analysis Using Finite-Element Method. **Journal of Structural Engineering**, v. 12, n. 9, p. 1225-1235, 1997.

TRAUB, J. F. **Iterative Methods for the Solution of Equations**. Murray Hill: Bell Telephone Laboratories, 1964.

VERHOOSSEL, C. V.; REMMERS, J. J.; GUTIÉRREZ, M. A. A Dissipation-Based Arc-Length Method for Robust Simulation of Brittle and Ductile Failure. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 1290-1321, 2008.

WEMPNER, G. A. Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, p. 1581-1599, 1971.

YANG, X.-S. **Engineering Optimization - An Introduction with Metaheuristic Applications**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010.

YANG, Y. B.; KUO, S. B. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Prentice Hall. [S.l.]. 1994.

YANG, Y. B.; MCGUIRE, W. Stiffness Matriz for Geometric Nonlinear Analysis. **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 4, p. 853-877, Abril 1986.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 28, p. 2110-2116, 1990.

YANG, Y.-B.; SHIEH, M.-S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.

YUANQI, L. I.; SHEN, Z. Improvements on the Arc-Length-Type Method. **Chinese Journal of Mechanics Press**, Beijing, v. 20, n. 5, p. 541-550, Outubro 2004. ISSN 0567-7718.

ZEID, I. Fixed-Point Iteration to Nonlinear Finite Element Analysis. Part II: Formulation and Implementation. **International Journal for Numerical methods in Engineering**, v. 21, p. 2049-2069, 1985.

ZHANG, L.; ZHOU, W. J. Spectral Gradient Projection Method for Solving Nonlinear Monotone Equations. **J. Comput. Appl. Math.**, v. 196, p. 478-484, 2006.

ZHILIANG, F. A Study of Variable Step-Length Incremental/Iterative Methods for Nonlinear Finite Element Equations. **Computer & Structures**, v. 52, p. 1269-1275, Janeiro 1993. ISSN 0045-7949(94)E0098-M.