



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Escola de Minas – Departamento de Engenharia Civil  
Curso de Graduação em Engenharia Civil

---

**Iara Santana de Azevedo**

**ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE  
MÚLTIPLOS ANDARES EM AÇO COM LIGAÇÕES  
VIGA-COLUNA SEMIRRÍGIDAS**

Ouro Preto

2018

ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE MÚLTIPLOS ANDARES  
EM AÇO COM LIGAÇÕES VIGA-COLUNA SEMIRRÍGIDAS

Iara Santana de Azevedo

Monografia de conclusão de curso para obtenção do grau de Engenheiro Civil na Universidade Federal de Ouro Preto defendida e aprovada em 14 de dezembro de 2018 como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Profa. D.Sc. Andréa Regina Dias da Silva - UFOP

Ouro Preto

2018

A994a      Azevedo, Iara santana.  
Análise estática não linear de estruturas de múltiplos andares em aço com  
ligações viga coluna semirrígidas [manuscrito] / Iara santana Azevedo. - 2019.  
  
51f.: il.: grafis; tabs.  
  
Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Andréa Regina Dias Silva.  
  
Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de  
Minas. Departamento de Engenharia Civil.  
  
1. Não linearidade física. 2. Não linearidade geométrica. 3. Ligação  
semirrígida. 4. Estruturas reticuladas. I. Silva, Andréa Regina Dias. II.  
Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 624

Catálogo: [ficha.sisbin@ufop.edu.br](mailto:ficha.sisbin@ufop.edu.br)

ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE MÚLTIPLOS  
ANDARES EM AÇO COM LIGAÇÕES VIGA-COLUNA SEMIRRÍGIDAS

Iara Santana de Azevedo

Monografia de conclusão de curso  
para obtenção do grau de  
Engenheiro Civil na Universidade  
Federal de Ouro Preto defendida e  
aprovada em 14 de dezembro de  
2018 como parte dos requisitos para  
a obtenção do Grau de Engenheiro  
Civil. Banca examinadora:

*Andréa Regina Dias da Silva*

Orientador: Prof. D.Sc. Andréa Regina Dias da Silva - UFOP

*Rafael Cesário Barros*

Membro: Prof. M.Sc. Rafael Cesário Barros – UFOP

*Jackson da Silva Rocha Segundo*

Membro: Eng. Jackson da Silva Rocha Segundo



Scanned with  
CamScanner

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus.

Aos meus pais, Rose e Heliomar, pela educação que me deram, pelo suporte e carinho que me guiou até o fim da graduação.

Ao Lucas pela real e leal irmandade

À minha orientadora, professora Andréa Regina Dias da Silva, símbolo de dedicação e retidão profissional. Pelas conversas que fizeram possível a existência do presente trabalho e as opiniões sinceras que o levaram ao formato final.

Ao Ronan por todo amor, paciência e apoio.

À República Hipnose pela convivência, amizade e companheirismo.

Aos Professores do Departamento de Engenharia Civil (DECIV) da Universidade Federal de Ouro Preto pelos ensinamentos.

Ao Eleonardo, juntamente a todos integrantes do Núcleo de Geotecnia da Escola de Minas (NUGEO), pelas oportunidades e aprendizado.

Aos colegas Thiago, Amanda e Gabriel.

## RESUMO

Com o desenvolvimento das indústrias, o surgimento de materiais mais resistentes, devido a seções cada vez mais esbeltas, e novas técnicas construtivas, em diversos problemas da mecânica estrutural o comportamento não linear das estruturas passa a ser relevante e deve ser considerado nas análises. Nesse sentido, tem-se como objetivo fazer uma análise estática não linear de estruturas reticuladas em aço com ligações semirrígidas. A consideração da flexibilidade da ligação entre viga e coluna na análise evita a simplificação comum entre os projetistas de se considerar a ligação como simplesmente rotulada ou idealmente rígida. Destaca-se que nas análises estáticas realizadas neste trabalho serão admitidas duas fontes de não linearidade: além da física associada à ligação semirrígida, considerar-se-á a não linearidade geométrica da estrutura ou efeitos de segunda ordem. A metodologia numérica usada, que é baseada no Método dos Elementos Finitos, será discutida, e uma descrição sobre o comportamento da ligação e os modelos usados na sua simulação serão apresentados. Para a realização do estudo utiliza-se um programa computacional desenvolvido para avaliar a resposta estática não linear de estruturas reticuladas em aço. A influência da não linearidade geométrica e semirrigidez das ligações nessas estruturas é então investigada, e será possível observar que a análise não linear altera a resposta de uma estrutura em alguns aspectos permitindo predizer de forma mais realística o comportamento estrutural.

Palavras-chaves: Não linearidade física, não linearidade geométrica, ligação semirrígida, estruturas reticuladas, análise estática.

## **ABSTRACT**

With the development of industries, the emergence of more resistant materials, due to increasingly slender sections, and new constructive techniques, in several problems of structural mechanics, the nonlinear behaviour of the structures became relevant, as well as their consideration in the analyses. In this sense, the aim of the present study is to make a nonlinear static analysis of steel structures with semi-rigid connections. Flexibility considerations of the beam-column connection in the analysis avoids the common simplification among designers of considering the connection as simply flexible or completely rigid. It should be emphasized that in the static analyzes performed in this work two sources of non-linearity will be admitted: the physics associated with the Semi-Rigid Connection and the Geometrical Nonlinearity of the structure or Second-Order Effects. The numerical methodology used, which is based on the Finite Element Method, will be discussed, and a description of the connections behavior and the models used in its simulation will be presented. For the accomplishment of the study, a computational program developed to evaluate the nonlinear static response of steel-reticulated structures was used. The influence of the geometric nonlinearity and semi-rigidity of the connections in these structures is then investigated, and it will be possible to observe that the nonlinear analysis alters the response of a structure in some aspects, allowing a more realistic prediction of the structural behaviour.

Key words: Physical Nonlinearity, Geometrical Nonlinearity, Semi-Rigid Connection, Reticulated structures, Static Analysis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Efeitos de segunda ordem: P- $\Delta$ (deslocamento lateral) e P- $\delta$ (curvatura). Silva (2009).	2
Figura 1.2 - Programa CS ASA: análises e efeitos considerados.....	5
Figura 2.1 - Solução incremental e iterativa (SILVA, 2009).....	8
Figura 3.1 - Aspecto típico das curvas momento-rotação de uma ligação.....	12
Figura 3.2 - Detalhes construtivos de ligações viga-coluna.....	15
Figura 3.3 - Comportamento de ligações viga-coluna .....	16
Figura 3.4 - Elemento de viga-coluna adotado.....	17
Figura 3.5 - Elemento de viga-coluna com molas fictícias .....	18
Figura 3.6 - Deslocamentos nodais do elemento na configuração deformada .....	21
Figura 4.1 - Modelo estrutural idealizado para o pórtico de um pavimento .....	23
Figura 4.2 - Pórtico de quadro simples.....	26
Figura 4.3 - Influência da flexibilidade da ligação no momento fletor da base.....	27
Figura 4.4 - Influência da flexibilidade da ligação no deslocamento horizontal do topo da coluna .....	27
Figura 4.5 - Pórtico de quadro simples de dois pavimentos.....	30
Figura 4.6 - Influência da flexibilidade da ligação no valor de carga crítica.....	30
Figura 4.7 - Sistema estrutural analisado – Pórtico de um pavimento .....	31
Figura 4.8 - Sistema estrutural analisado – Pórtico de dois pavimentos.....	32
Figura 4.9 - Trajetórias de equilíbrio: ligações com comportamento linear - pórtico de um pavimento .....	33
Figura 4.10 - Trajetórias de equilíbrio: ligações com comportamento linear - pórtico de dois pavimentos.....	33

Figura 4.11 – Trajetórias de equilíbrio: ligações viga-coluna não lineares.....	34
Figura 4.12 - Trajetórias de equilíbrio: comparação das ligações viga-coluna com comportamento linear e não linear .....	34

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Estratégia numérica para análise estática não linear .....	9
Tabela 3.1 - Parâmetros do modelo exponencial .....	15
Tabela 4.1 - Comparação dos valores de momento fletor .....	25
Tabela 4.2 - Valores de deslocamento horizontal do nó 2 (topo da coluna) .....	28
Tabela 4.3 - Valores de momento do nó 1(base) .....	28

# SUMÁRIO

Agradecimentos.....	I
Resumo.....	II
Abstract.....	III
Lista de Figuras.....	IV
Lista de Tabelas.....	VI
Sumário.....	VII
1 Introdução.....	1
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	3
1.3 Sistema Computacional CS-ASA.....	4
1.4 Organização do Trabalho.....	5
2 Solução do Problema Estático Não Linear.....	7
3 Formulação de Elementos Finitos.....	10
3.1 Considerações Gerais.....	10
3.2 Modelagem Matemática da Ligação Semirrígida.....	10
3.2.1 Modelo Linear.....	13
3.2.2 Modelo Não Linear.....	14
3.3 Formulação de Elementos Finitos.....	16
4 Aplicações.....	22

4.1	Análise Linear de Pórtico de Um Pavimento .....	23
4.2	Análise Linear e Não Linear de Pórticos de Múltiplos Andares .....	25
4.3	Ligações Não Lineares em Pórticos de Múltiplos Andares.....	31
5	Conclusão.....	36
	Referências .....	37

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Iniciais e Objetivos

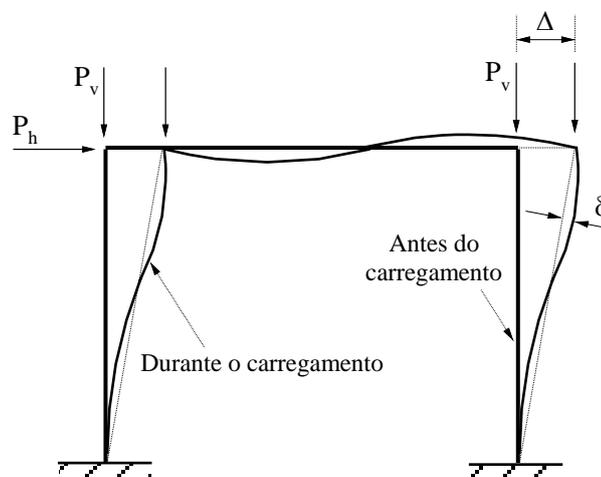
Com o desenvolvimento das indústrias civil, naval, oceânica e aeronáutica, e o surgimento de materiais mais resistentes e novas técnicas construtivas, em diversos problemas da mecânica estrutural o comportamento não linear das estruturas passa a ser relevante e deve ser considerado nas análises. Procura-se com a análise não linear melhorar a simulação do comportamento de uma estrutura em alguns aspectos. A busca contínua por uma modelagem estrutural mais realística tem apontado para uma consideração apropriada dos efeitos relacionados às não linearidades que afetam significativamente o comportamento estrutural. O objetivo fundamental é obter para fins de projeto uma previsão segura do comportamento do sistema. Como consequência, tem-se um aumento da complexidade do problema e do custo computacional.

O comportamento não linear de uma estrutura sob ação de um carregamento qualquer pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se duas: a não linearidade física e a não linearidade geométrica. A não linearidade física decorre de o material não apresentar uma relação tensão-deformação linear, ou seja, o comportamento do material não é elástico linear (a lei de Hooke não é obedecida). Nesse caso, os efeitos não lineares são descritos por equações constitutivas mais complexas e não lineares. A perda de rigidez do material durante a história de carregamento da estrutura é considerada.

Pode-se ter também não linearidade física nas relações momento-rotação de ligações semirrígidas. A ligação é um meio através do qual forças e momentos são transferidos de um membro estrutural a outro, tal como de uma viga a uma coluna. A consideração da flexibilidade da ligação na análise evita a simplificação comum, entre os projetistas, de se considerar a ligação como simplesmente rotulada ou completamente rígida. Cabe enfatizar que o uso de ligação viga-coluna ou mesmo coluna-base é inerente de toda construção estrutural em aço, seja constituída por um ou vários pavimentos. Devido à sua importância, ela se torna significante em termos econômicos e também estrutural. A economia, bem como a melhoria na qualidade de um projeto, tem um impacto nas empresas de fabricação e

montagem das estruturas de aço. É importante, então, que um engenheiro de projeto entenda o comportamento da ligação.

A não linearidade geométrica ou efeitos de segunda ordem aparece quando as mudanças de geometria, provocadas pela ação do carregamento sobre a estrutura, são significativas. Isso faz com que a configuração inicial e indeformada não possa ser considerada para a definição das equações de equilíbrio e de compatibilidade. Essa análise é responsável por considerar os efeitos  $P-\Delta$  (global) e  $P-\delta$  (local, a nível de elemento), que são os efeitos oriundos das deformações da estrutura à medida que é carregada como mostra a Figura 1.1 (SILVA, 2009).



**Figura 1.1 - Efeitos de segunda ordem:  $P-\Delta$  (deslocamento lateral) e  $P-\delta$  (localizado), Silva (2009)**

A formulação para a análise não linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não linear, tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas (SILVA, 2009).

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é fazer uma análise estática linear e não linear de estruturas de aço com ligações semirrígidas. Será utilizada a base computacional CS-ASA — *Computational System for Advanced Structural Analysis* — implementada por Silva (2009) para realização das análises estruturais. Esse programa se baseia no Método dos Elementos Finitos para a discretização do problema, e para solução do problema não linear adota o método de Newton-Raphson acoplado a técnicas de continuação. Pretende-se mostrar que o

comportamento estrutural pode ser bastante influenciado pelo efeito da semirrígidez das ligações, merecendo uma investigação cuidadosa.

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

Diversos estudos envolvendo os assuntos diretamente relacionados aos deste trabalho são encontrados na literatura. Saldanha (1997), Júnior (2000), Pinheiro (2003), Rocha (2006), Castro (2006) e Silva (2009) utilizam e descrevem diferentes modelos matemáticos para representar o comportamento de ligação semirrígida. Vale ressaltar que Norma Brasileira de Estruturas Metálicas, NBR-8800 (1986) classificava a ligação somente em dois casos extremos: ligação rígida e articulada. Agora, a NBR-8800 (2008) considera para uma análise elástica que a ligação pode ser considerada como semirrígida. Entretanto, ainda é usual em projetos o uso apenas dos casos extremos. Outras normas internacionais, como o “American Institute of Steel Construction” (AISC, 1989) e o “Eurocode 3”, European Committee for Standardization (EC 3, 1992) também apresentam regulamentações para estruturas com ligações semirrígidas, apresentadas por Júnior (2000) e Santana (2002). Porém vale ressaltar a existência de normas mais atualizadas como o Eurocode 4 (2005).

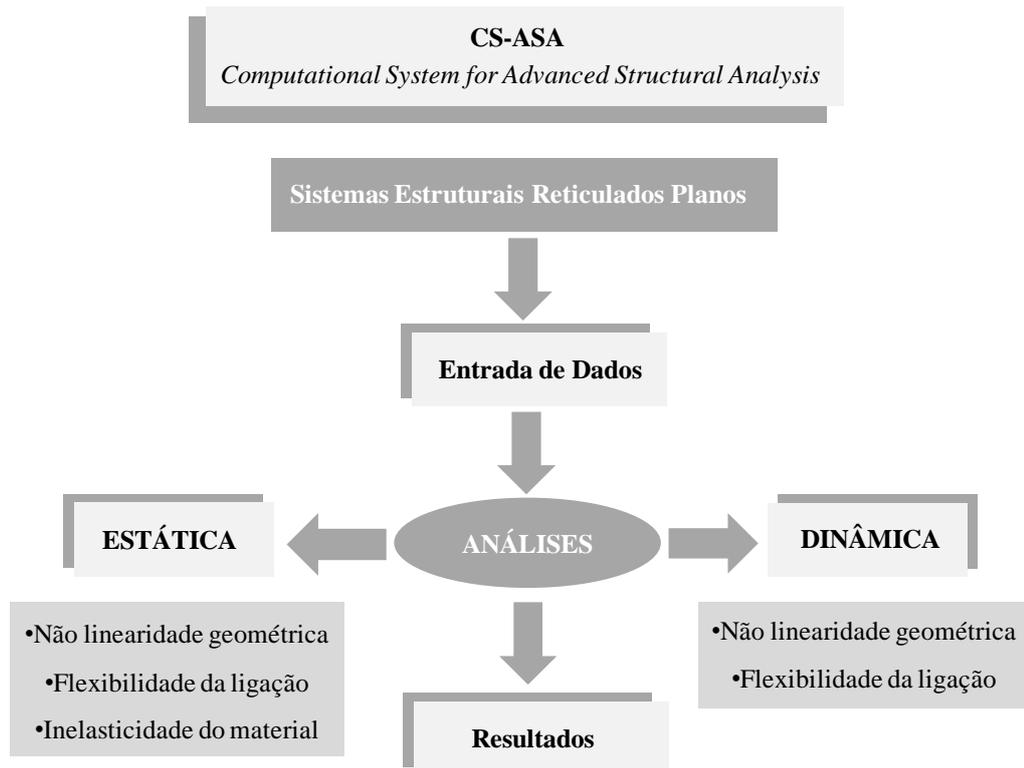
Os deslocamentos apresentados por uma estrutura estão relacionados à sua rigidez. Assim, como as ligações compõem parte de uma estrutura, uma alteração de sua rigidez influenciará, significativamente, na distribuição das forças internas dos membros da estrutura, nos deslocamentos, na capacidade de carga e, por consequência, na estabilidade global da estrutura (JÚNIOR, 2000; SANTANA 2002). Santos (2016) afirma que com o aumento do número de pavimentos da estrutura, os deslocamentos horizontais e os efeitos de segunda ordem se tornam maiores, sendo de extrema importância investigar essa relação.

Nas dissertações de Souza (1999), Júnior (2000), Pinheiro (2003), e Rocha (2006) são analisadas estruturas de aço considerando as ligações como semirrígidas com comportamento momento-rotação não linear e o carregamento estático. Ferreira (1999), e Neves (2016) analisaram ligações viga-pilar em estruturas de concreto armado; já Santana (2002) fez a análise para pórticos planos de madeira.

Souza (1999) apresentou formulações que foram incluídas em um programa de computador, produzido por Veríssimo (1996), tornando-se possível a análise estrutural com ligações semirrígidas com efeitos de 2ª ordem, considerando a influência das ligações na distribuição dos esforços solicitantes e nos deslocamentos da estrutura. Estas formulações também permitiu o cálculo da carga elástica de instabilidade global da estrutura considerando a semirrigidez das ligações. Castro (2006) utilizou o programa ANSYS (1998), o qual emprega técnicas usuais de discretização via Método dos Elementos Finitos, para as análises de estruturas de aço com ligações semirrígidas. Silva (2009) desenvolveu em sua tese uma base computacional CS-ASA — Sistema Computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas de aço. Assis (2011) desenvolveu o programa ESTED 1.0, que se tornou mais dedicado ao tratamento de estruturas de edifícios altos com estruturas metálicas, o qual considera análise elástica em teoria de 1ª ordem. Oliveira (2011) também realizou um estudo numérico do comportamento de uma ligação viga-pilar seguindo recomendações do Eurocode 3, 3 parte 1-8 (EC 3, 1993).

### **1.3 Sistema Computacional CS-ASA**

Como supracitado, o programa computacional CS-ASA (Silva, 2009) será utilizado neste trabalho para analisar o comportamento de estruturas reticuladas com diferentes carregamentos e ligações viga-coluna semirrígidas. O programa é capaz de realizar a análise avançada estática e dinâmica de estruturas de aço e se baseia no Método dos Elementos Finitos. Dez formulações de elemento finito de viga-coluna podem ser escolhidas e combinadas em busca de uma modelagem estrutural mais real, com a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica, flexibilidade da ligação e inelasticidade do aço. A influência de imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais também pode ser considerada. A Figura 1.2 ilustra as funcionalidades do CS-ASA.



**Figura 1.2 - Programa CS-ASA: análises e efeitos considerados**

#### 1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho é constituído por cinco capítulos. Inicialmente neste primeiro capítulo fez-se uma introdução e apresentou-se os objetivos a serem alcançados pelo trabalho. Nele pode-se encontrar também uma revisão bibliográfica e uma breve descrição sobre programa computacional usado.

No Capítulo 2 apresenta-se a estratégia de solução para um problema estático não linear, onde é apresentado o algoritmo para solução numérica implementado no programa CS-ASA.

Já o Capítulo 3 expõe a modelagem matemática para o comportamento de uma ligação semirrígida, juntamente com o desenvolvimento da formulação de elementos finitos, usados para a discretização dos problemas estruturais estudados.

O Capítulo 4 apresenta as análises realizadas de diferentes estruturas, contendo em cada uma delas observações avaliando cada comportamento obtido.

Finalizando, no Capítulo 5, tem-se algumas considerações e conclusões gerais referentes ao trabalho realizado.

## 2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTÁTICO NÃO LINEAR

No âmbito da Engenharia de Estruturas, um dos métodos usados para discretização de um problema contínuo e a partir daí a obtenção de soluções numéricas aproximadas é o Método dos Elementos Finitos, devido a sua eficiência e aplicabilidade. Com essa técnica procura-se discretizar (dividir) o meio contínuo em subdomínios, referidos como elementos, que são interligados através dos pontos nodais onde são definidos os graus de liberdade a serem determinados. Para cada região se estabelece um comportamento local aproximado, de tal forma que as incógnitas do problema possam ser definidas em função das mesmas incógnitas nos pontos nodais do elemento. Avaliando a energia potencial total, e somando as contribuições de cada elemento, chega-se a um sistema total de equações, cuja solução permite conhecer os valores das incógnitas nos pontos nodais.

No contexto do Método dos Elementos Finitos, a condição de equilíbrio dos problemas estruturais estudados neste trabalho pode ser expressa como:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c) \cong \mathbf{F}_e = \lambda \mathbf{F}_r \quad (2.1)$$

em que  $\mathbf{F}_i$  refere-se ao vetor de forças internas, que é uma função não linear dos deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$ , e também depende dos esforços internos nos membros,  $\mathbf{P}$ , e do parâmetro que controla a rigidez da ligação,  $\mathbf{S}_c$ ;  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas;  $\lambda$  é o parâmetro de carga; e  $\mathbf{F}_r$  é um vetor de forças externas de referência cuja direção é importante.

No estudo do comportamento não linear de uma estrutura, a matriz de rigidez deve ser atualizada constantemente para capturar o estado de equilíbrio a partir de um determinado acréscimo de carregamento. Após tal incremento, faz-se necessário corrigir as forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos pela utilização de um processo iterativo de Newton-Raphson. O processo corretivo é feito até que, por intermédio de um critério de convergência, a estrutura esteja em equilíbrio (Equação 2.1 satisfeita).

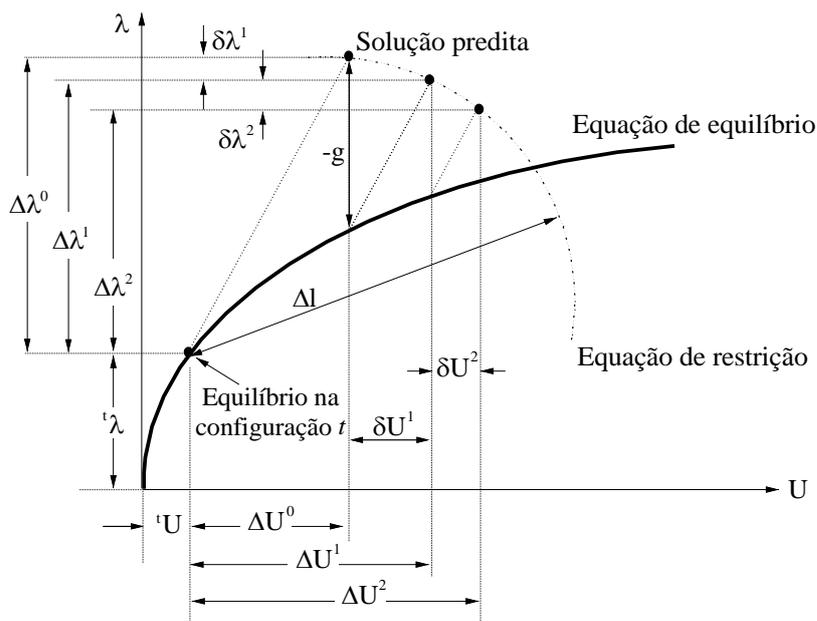
Através da Figura 2.1 demonstra-se o esquema iterativo de Newton Raphson resumido no parágrafo anterior. A primeira etapa para a obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente  $(\Delta\lambda^0, \Delta\mathbf{U}^0)$  consiste na montagem, usando informações

da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ . A partir daí, obtém-se o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}$ , através da expressão:

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{K}^{(-1)}\mathbf{F}_r \quad (2.2)$$

A estratégia de solução do problema estático não linear utilizada neste trabalho é resumida na Tabela 2.1, onde é apresentado o algoritmo para solução numérica desenvolvido no CS-ASA.

O elemento finito usado na discretização do sistema estrutural e uma das formulações detalhadas em Silva (2009) serão apresentados na próxima seção. Observa-se, analisando a sequência de procedimentos, que a rigidez da ligação é atualizada ao final do ciclo iterativo. Isso é feito apenas se a relação momento-rotação não linear estiver sendo considerada na modelagem das ligações. Para isso, adota-se a técnica capaz de simular o comportamento da ligação quando submetida a cargas cíclicas descrita também na próxima seção.



**Figura 2.1 - Solução incremental e iterativa (SILVA, 2009)**

**Tabela 2.1 - Estratégia numérica para análise estática não linear**

- 
1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros particulares referentes ao tipo de análise. Ressalta-se que, para os elementos com ligações semirrígidas, o comportamento momento-rotação da ligação deve ser fornecido.
  2. Define o vetor de cargas nodais de referência,  $\mathbf{F}_r$ , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado.
  3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida,  $t$ :  ${}^t\mathbf{U}$  e  ${}^t\lambda$
  4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:**  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{U}^0$ 
    - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente:  $\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c)$
    - 4b. Resolve:  $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
    - 4c. Define  $\Delta\lambda^0$ : Nesse trabalho esse parâmetro é mantido constante
    - 4d. Determina:  $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
    - 4e. Atualiza as variáveis na configuração  $t + \Delta t$ :  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
  5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:**  $k = 1, 2, 3, \dots$ 
    - 5a. Avalia o vetor de forças internas:  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
    - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:  $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
    - 5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente (Silva, 2009)
      - SIM** (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
    - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$
    - 5e. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais:  $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\mathbf{U}_r^k$ , com:
$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$$
    - 5f. Atualiza o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :
      - a) *Incremental:*  $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
      - b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
    - 5g. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente
      - SIM** (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
      - SIM** (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c*
    - 5h. Retorna ao passo 5
  6. Atualiza a variável  $\mathbf{S}_c$  e outras que forem necessárias
  7. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**
-

### **3 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS**

#### **3.1 Considerações Gerais**

A utilização de elementos estruturais com seções transversais mais eficientes, os quais oferecem um alto desempenho em termos de peso mínimo para uma dada resistência, têm merecido uma atenção especial nas pesquisas. Contudo, é suficientemente conhecido que tais elementos de peso otimizado apresentam um comportamento estrutural complexo e, particularmente, são bastante susceptíveis à flambagem. Assim, torna-se necessária a utilização de uma teoria consistente que possibilite o conhecimento preciso dos esforços adicionais causados pelos efeitos de segunda ordem. Nesta seção, a formulação de elementos finitos que permite considerar o efeito da flexibilidade da ligação nas extremidades do elemento finito e a não linearidade geométrica é apresentada. Destaca-se que essa formulação está implementada no CS-ASA.

Além disso, os modelos analíticos usados para avaliar o comportamento da ligação quando submetidas a cargas monotônicas serão descritos. Ressalta-se que devido ao comportamento não linear das ligações semirrígidas, influenciado por diversos fatores, torna-se bastante complicado representá-lo matematicamente usando aproximações simples e adequadas.

#### **3.2 Modelagem Matemática da Ligação Semirrígida**

Análises convencionais e cálculos das estruturas de aço ainda utilizam um comportamento simplificado — especificado pela Norma Brasileira de Estruturas Metálicas, NBR8800 (2008) — das ligações viga-coluna baseados em dois casos extremos: ligações rígidas ou rotuladas. Todavia, a adoção dessa idealização simplifica profundamente a análise e o cálculo do processo, podendo trazer resultados insatisfatórios. Isso porque a maioria das ligações usadas nas estruturas reais exibe um comportamento de deformação intermediário aos casos extremos citados, podendo contribuir substancialmente na resposta da estrutura. Os deslocamentos apresentados por uma estrutura estão relacionados à sua rigidez e, como as ligações compõem parte de uma estrutura, uma alteração de sua rigidez influenciará significativamente na distribuição das forças internas dos membros da estrutura, nas

deflexões, na capacidade limite das cargas e, por consequência, na estabilidade global da estrutura (JÚNIOR, 2000). Dessa forma, a consideração do comportamento real da ligação resultará em uma análise mais precisa e adequada do comportamento estrutural.

Segundo a Norma Brasileira de Estruturas Metálicas, a NBR-8800 (2008), em uma análise estrutural elástica, uma ligação viga-pilar pode ser considerada rotulada se:

$$S_i \leq \frac{0,5EI_v}{L_v} \quad (3.1)$$

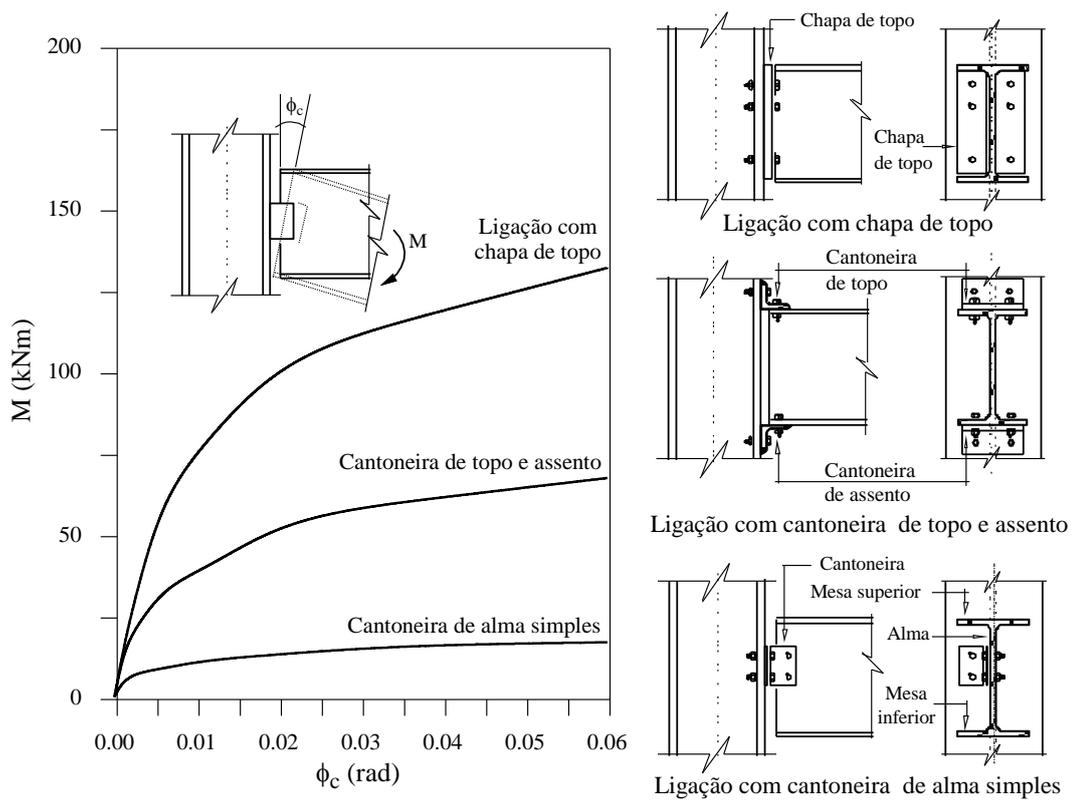
e pode ser considerada rígida se,

$$S_i \geq \frac{25EI_v}{L_v} \quad (3.2)$$

nas quais:  $S_i$  representa a rigidez da ligação correspondente a 2/3 do momento resistente de cálculo da ligação, simplificada denominada rigidez inicial;  $I_v$  e  $L_v$  são o momento de inércia da seção transversal no plano da estrutura e o comprimento da viga conectada à ligação, respectivamente. Destaca-se que o comportamento linear da ligação, na qual sua rigidez permanece constante durante a análise é admitida.

Para a análise de estruturas com ligações semirrígidas, o primeiro procedimento a ser realizado é a modelagem do comportamento da ligação. A descrição desse comportamento é comumente feita por meio de curvas momento-rotação, que são obtidas por ensaios experimentais, através de simulação numérica em elementos finitos ou por modelos teóricos. A incorporação das curvas momento-rotação na análise estrutural fornece resultados mais precisos que aqueles obtidos com as análises convencionais, que consideram as ligações como rígidas ou rotuladas.

A Figura 3.1 ilustra o aspecto típico de curvas momento-rotação para três tipos de ligações. A ligação com chapa de topo é mais rígida que as demais e a cantoneira de alma simples, mais flexível. Percebe-se que as ligações desenvolvem comportamento fortemente não linear quando submetidas a momento fletor, mas que apresentam um certo padrão de comportamento. Isso permite que se estabeleçam duas grandezas de grande importância: a rigidez inicial e o momento último ou capacidade de momento.



**Figura 3.1 - Aspecto típico das curvas momento-rotação de uma ligação**

A rigidez inicial ( $S_{cini}$ ) descreve o desempenho da ligação no início do carregamento. É obtida fazendo  $\phi_c = 0$  na seguinte equação:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi_c} \quad (3.3)$$

O aspecto linear que a curva momento-rotação assume nessa etapa sugere a existência de uma fase elástica que deixa de existir à medida que o carregamento vai assumindo valores mais elevados. Essa mudança de comportamento é, geralmente, provocada pela existência de concentração de tensões, imperfeições geométricas e descontinuidades nos elementos que compõem a ligação, ou mesmo plastificação dos seus componentes. Esses fatores, a partir de certo estágio do carregamento, passam a interferir na capacidade de rotação da ligação e, assim, a rigidez da ligação diminui. Na fase final do carregamento, a curva momento-rotação

tende para um valor assintótico conhecido como momento último, ou capacidade de momento, a partir do qual a ligação entra na fase de colapso e sua rigidez se anula.

Devido ao comportamento das ligações semirrígidas, é bastante complicado representá-lo matematicamente usando aproximações simples e adequadas. Existem vários modelos analíticos para essa finalidade. Muitos deles, embora possam reproduzir perfeitamente o comportamento da ligação, são bastante complexos e só adequados para certos tipos de ligações. Nesse trabalho, o comportamento da ligação será descrito usando dois modelos matemáticos: linear e o modelo exponencial (Lui e Chen, 1986) descritos a seguir.

### 3.2.1 Modelo Linear

Para o modelo linear, a representação matemática da ligação semirrígida leva em consideração apenas um parâmetro definindo a sua rigidez. A expressão para a relação momento-rotação nesse caso pode ser escrita como:

$$M = S_{Cini} \phi_c \quad (3.4)$$

na qual  $S_{Cini}$  é o valor da rigidez inicial da ligação, que pode ser dado em função da rigidez à flexão da viga, e de um coeficiente de rigidez, o qual indica o grau da flexibilidade da ligação. Esse coeficiente é o fator de rigidez,  $\gamma$ , dos nós do elemento de viga-coluna com ligações semirrígidas, varia de 0, para ligações idealmente rotuladas, a 1, para ligações perfeitamente rígidas. A rigidez inicial da ligação é definida como:

$$S_{Cini} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{3EI}{L} \quad (3.5)$$

na qual  $EI$  e  $L$  são a rigidez à flexão e o comprimento da viga, respectivamente. É importante ressaltar que, numa análise pelo Método dos Elementos Finitos,  $L$  representa o comprimento do elemento finito que possui ligação semirrígida em suas extremidades. Usando o modelo linear, considera-se que a rigidez da ligação,  $S_c$ , permanece constante ao longo do processo de análise e tem valor igual a  $S_{Cini}$ . Esse é o modelo de ligação mais simples e que é amplamente utilizado nos estágios iniciais de desenvolvimento de métodos de análise para ligações semirrígidas. No entanto, não é muito preciso em casos de grandes deslocamentos.

### 3.2.2 Modelo Não Linear

Para esse modelo, proposto por Lui e Chen (1986; 1988), a expressão para a curva momento-rotação é definida como:

$$M = M_0 + \sum_{m=1}^n C_m \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\phi_c|}{2m\alpha}\right) \right] + R_{kf} |\phi_c| \quad (3.6)$$

em que  $M$  é o valor do momento na ligação,  $\phi_c$  é a sua deformação rotacional,  $M_0$  é o momento inicial,  $R_{kf}$  é a rigidez devido ao encruamento da ligação,  $\alpha$  é um fator de escala;  $n$ , é o número de termos considerados no ajuste e  $C_m$ , para  $m = 1, 2, \dots, n$ , são coeficientes de ajustamento da curva.

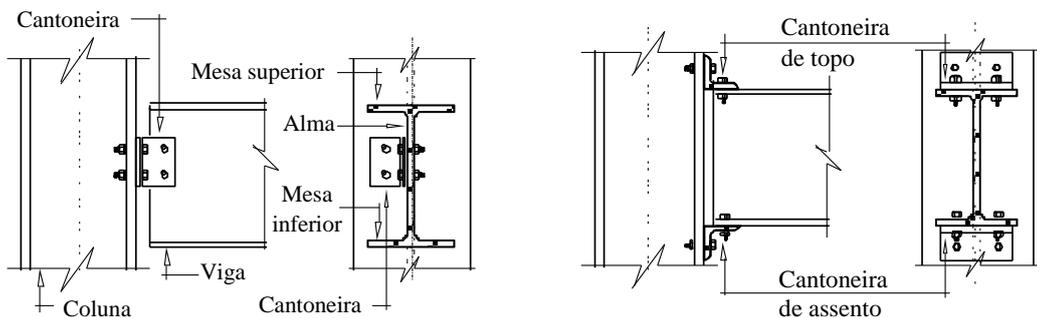
A rigidez tangente, representada pela inclinação da curva momento-rotação pode ser expressa por:

$$S_c = \left. \frac{dM}{d\phi} \right|_{|\phi_c|=|\phi_c|} = \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{2m\alpha} \exp\left(-\frac{\phi_c}{2m\alpha}\right) + R_{kf} \quad (3.7)$$

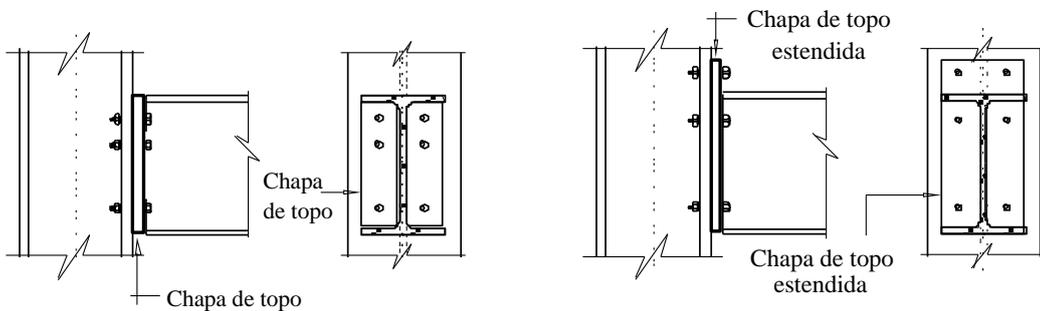
A Figura 3.2 a seguir apresenta os detalhes construtivos de quatro ligações viga-coluna: ligação com cantoneira de alma simples (A), com cantoneira de topo e assento (B), com chapa de topo (C) e ligação com chapa de topo estendida (D). Os valores dos parâmetros do modelo exponencial para essas ligações detalhadas, baseados em ensaios experimentais (Chen e Lui, 1991), são indicados na Tabela 3.1.

**Tabela 3.1 - Parâmetros do modelo exponencial**

Parâmetros	Cantoneira de alma simples (A)	Cantoneira de topo e assento (B)	Chapa de topo (C)	Chpa de topo estendida (D)
$M_0$ (kip.in)	0	0	0	0
$R_{kf}$ (kip.in/rad)	$0,47104 \times 10^{-2}$	$0,43169 \times 10^{-2}$	$0,96415 \times 10^{-3}$	$0,41193 \times 10^{-3}$
$\alpha$	$0,51167 \times 10^{-3}$	$0,31425 \times 10^{-3}$	$0,31783 \times 10^{-3}$	$0,67083 \times 10^{-3}$
$C_1$	$-0,43300 \times 10^{-2}$	$-0,34515 \times 10^{-3}$	$-0,25038 \times 10^{-3}$	$-0,67824 \times 10^{-3}$
$C_2$	$0,12139 \times 10^{-4}$	$0,52345 \times 10^{-4}$	$0,50736 \times 10^{-4}$	$0,27084 \times 10^{-4}$
$C_3$	$-0,58583 \times 10^{-4}$	$-0,26762 \times 10^{-5}$	$-0,30396 \times 10^{-5}$	$-0,21389 \times 10^{-5}$
$C_4$	$0,12971 \times 10^{-5}$	$0,61920 \times 10^{-5}$	$0,75338 \times 10^{-5}$	$0,78563 \times 10^{-5}$
$C_5$	$-0,13374 \times 10^{-5}$	$-0,65114 \times 10^{-5}$	$-0,82873 \times 10^{-5}$	$-0,99740 \times 10^{-5}$
$C_6$	$0,52224 \times 10^{-4}$	$0,25506 \times 10^{-5}$	$0,33927 \times 10^{-5}$	$0,43042 \times 10^{-5}$
$S_{cini}$ (kip in/rad)	$0,48000 \times 10^{-5}$	$0,95219 \times 10^{-5}$	$0,11000 \times 10^{-6}$	$0,30800 \times 10^{-6}$



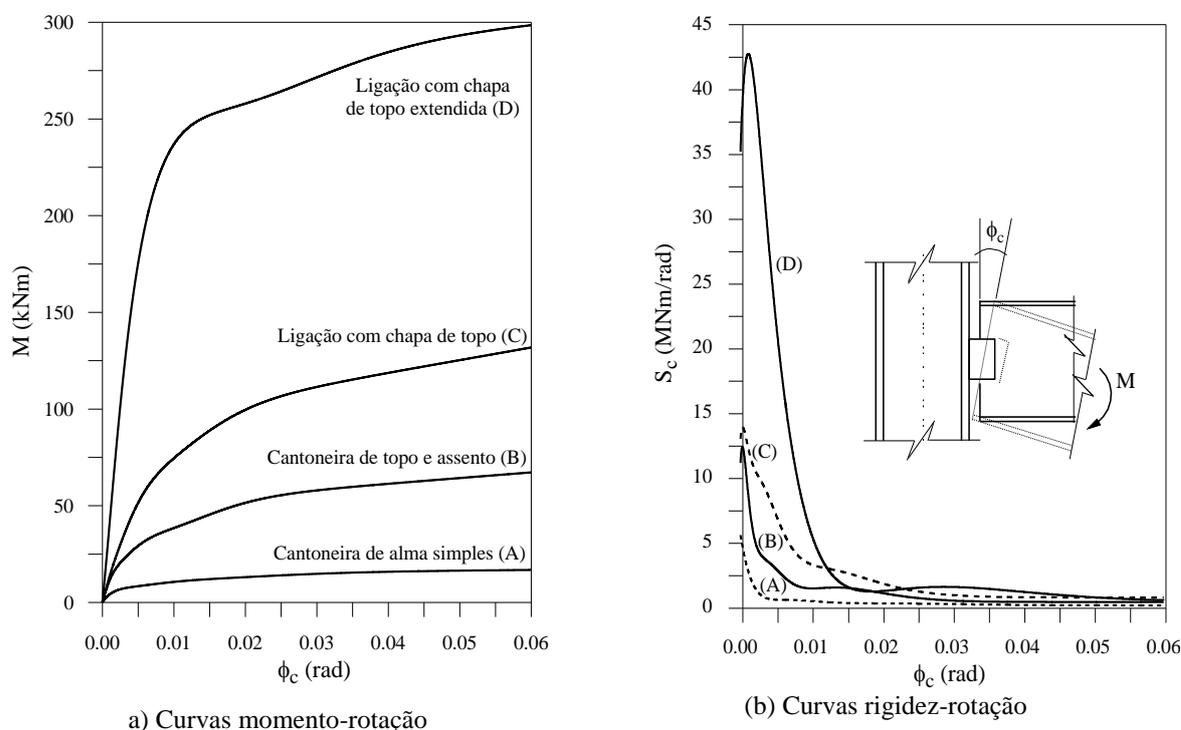
(a) Ligação com cantoneira de alma simples (A)      (b) Ligação com cantoneira de topo e assento (B)



(c) Ligação com chapa de topo (C)      (d) Ligação com chapa de topo estendida (D)

**Figura 3.2 - Detalhes construtivos de ligações viga-coluna**

A Figura 3.3 ilustra as curvas momento-rotação e rigidez-rotação para as ligações viga-coluna detalhadas na Figura 3.2 obtidas através desse modelo exponencial.



**Figura 3.3 - Comportamento de ligações viga-coluna**

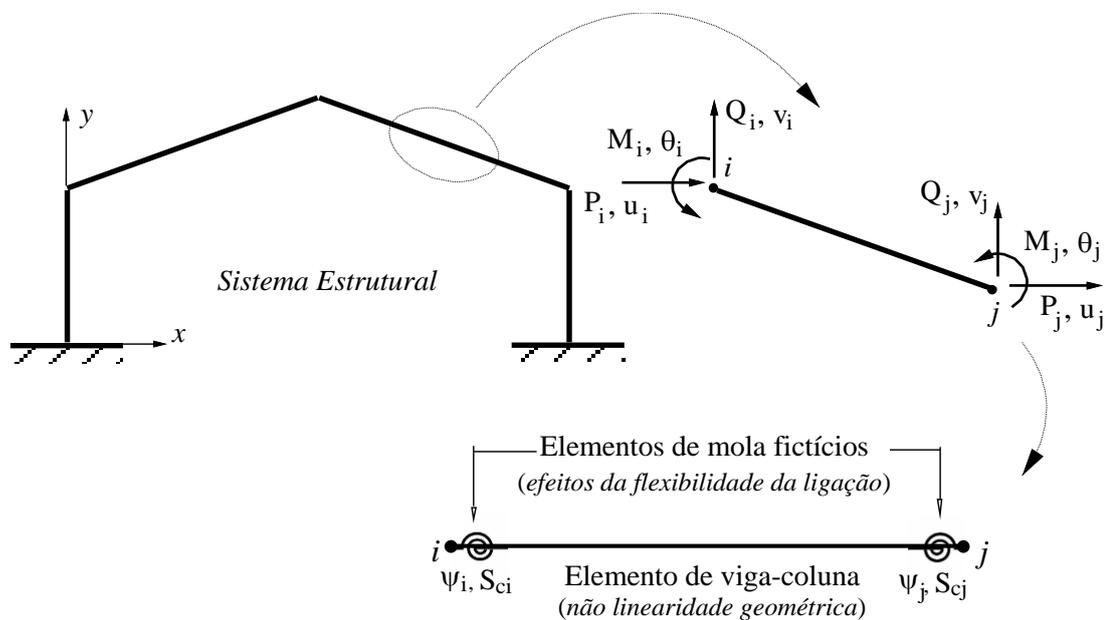
### 3.3 Formulação de Elementos Finitos

Para o desenvolvimento da formulação, foi considerado o elemento finito ilustrado na Figura 3.4. Trata-se de um elemento de viga-coluna e dois elementos fictícios de mola com comprimento nulo, um em cada extremidade. Essas molas introduzem os efeitos da flexibilidade da ligação na análise. Observa-se que um dos lados dos elementos de ligação é conectado ao elemento de viga-coluna, enquanto o outro é conectado ao nó global ( $i$  ou  $j$ ). A Figura 3.5 mostra a configuração deformada desse elemento, onde são exibidas também as forças internas e as deformações nas molas de ligação. As rigidezes dos elementos de mola são denotadas por  $S_{ci}$  e  $S_{cj}$ , e as ligações podem ter comportamentos distintos, ou seja, podem ser caracterizadas por curvas momento-rotação distintas.

De acordo com Chen *et al.* (1996) a ligação semirrígida pode ser modelada como um elemento de mola inserido no ponto de interseção entre a viga e a coluna. Os elementos de

ligação, por sua vez, são fisicamente fixados às extremidades do elemento de viga-coluna, mantendo-se as condições de equilíbrio e compatibilidade, permitindo que os graus de liberdade das ligações possam ser incorporados na relação de rigidez tangente do elemento de viga-coluna. Esforços axiais, cisalhantes, de flexão e torção são transmitidos a uma ligação. Entretanto, para a grande maioria das estruturas de aço, os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação da ligação são pequenos se comparados àqueles causados pelo momento fletor (SILVA, 2009).

A presença das molas introduz rotações relativas nos nós das extremidades do elemento. Foi usado um procedimento para modificar as equações matriciais de elementos de viga-coluna para a consideração dos efeitos da flexibilidade da ligação.

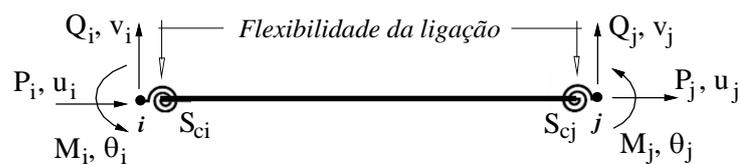


**Figura 3.4 - Elemento de viga-coluna adotado**

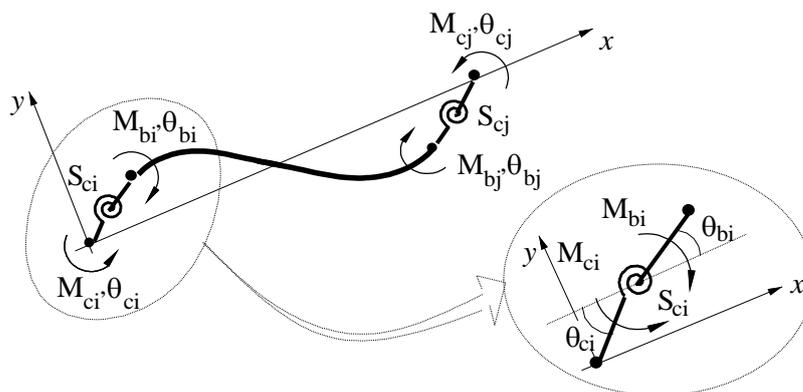
Considerando, os elementos de mola das extremidades, as rotações das ligações podem ser escritas, na forma incremental, como:

$$\Delta\phi_{ci} = \Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi} \quad (3.8a)$$

$$\Delta\phi_{cj} = \Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj} \quad (3.8b)$$



(a) Configuração indeformada



(b) Configuração deformada

**Figura 3.5 - Elemento de viga-coluna com molas fictícias**

sendo  $\Delta\phi_{ci}$  e  $\Delta\phi_{cj}$  as rotações relativas incrementais devido à flexibilidade das ligações, onde pode-se escrever as seguintes relações:

$$\Delta M_{ci} = S_c \Delta\phi_{ci} \quad (3.9a)$$

$$\Delta M_{cj} = S_c \Delta\phi_{cj} \quad (3.9b)$$

nas quais  $\Delta M_{ci}$  e  $\Delta M_{cj}$  são os momentos fletores atuantes nos elementos de mola das extremidades  $i$  e  $j$ . Estabelecendo o equilíbrio de momento nos elementos de ligação das extremidades, têm-se as seguintes relações:

$$\Delta M_{ci} + \Delta M_{bi} = 0 \quad (3.10a)$$

$$\Delta M_{cj} + \Delta M_{bj} = 0 \quad (3.10b)$$

levando em consideração as relações (3.8) e (3.9), pode-se escrever:

$$\Delta M_{ci} = S_{ci} (\Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi}) \quad (3.11a)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj} (\Delta \theta_{cj} - \Delta \theta_{bj}) \quad (3.11b)$$

Os momentos  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  são os atuantes no elemento de viga-coluna. Escrevendo esses momentos na forma incremental matricial, pode-se representar as matrizes de rigidez dos elementos de ligação das extremidades da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (3.12a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.12b)$$

Para as seções internas do elemento de viga-coluna, a relação de equilíbrio momento-rotação é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

na qual os termos de rigidez à flexão da matriz,  $k_{(m,n)}$ , são os coeficientes correspondentes à linha  $m$  e coluna  $n$  da matriz de rigidez do elemento de viga-coluna convencional, no qual as ligações são consideradas perfeitamente rígidas. Neste trabalho usa-se a formulação proposta por Yang e Kuo (1994), definida em referencial Lagrangiano atualizado. Nessa formulação adota-se duas componentes de tensão, as tensões axial e cisalhante de Cauchy, e duas componentes de deformação associadas que são os incrementos de deformação de Green-Lagrange atualizados. (SILVA, 2009).

Combinando as Equações 3.13 e 3.12, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} & 0 & 0 \\ -S_{ci} & S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} & 0 \\ 0 & k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} & -S_{cj} \\ 0 & 0 & -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Foi feita em seguida a multiplicação matricial e assume-se que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais do elemento, ou seja, que os momentos internos  $\Delta M_{bi}$  e  $\Delta M_{bj}$  são iguais a zero. Chega-se, usando a segunda e terceira linhas do sistema de equações resultante, a:

$$\begin{bmatrix} S_{ci} + k_{(3,3)} & k_{(3,6)} \\ k_{(6,3)} & S_{cj} + k_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

e, através das duas outras linhas, encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{bi} \\ \Delta\theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Usando (3.15) é possível reescrever (3.16) como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{cj} + k_{(6,6)} & -k_{(3,6)} \\ -k_{(6,6)} & S_{ci} + k_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

na qual  $\beta = (S_{ci} + k_{(3,3)})(S_{cj} + k_{(6,6)}) - k_{(6,3)}k_{(3,6)}$ .

Observando a Figura 3.5 mostrada anteriormente, percebe-se que  $\Delta M_i = \Delta M_{ci}$  e  $\Delta M_j = \Delta M_{cj}$ . Assim, as relações entre os esforços cisalhantes e os momentos fletores, obtidas por equilíbrio de força e momento, podem ser escritas na seguinte forma incremental matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/L & 1/L \\ 1 & 0 \\ -1/L & -1/L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde  $\Delta M_i$  e  $\Delta M_j$  são os momentos nodais incrementais do elemento;  $\Delta Q_i$  e  $\Delta Q_j$  são as forças cisalhantes incrementais; e  $L$  é o comprimento desse elemento na configuração de equilíbrio  $t$ .

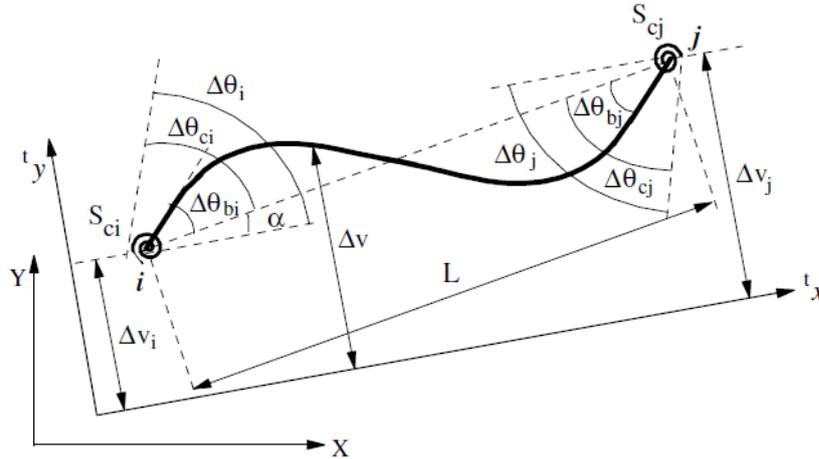
A partir da Figura 3.6, é possível estabelecer as seguintes igualdades:

$$\Delta\theta_{ci} = \Delta\theta_i - \alpha \quad (3.19a)$$

$$\Delta\theta_{cj} = \Delta\theta_j - \alpha \quad (3.19b)$$

sendo  $\alpha = (\Delta v_j - \Delta v_i)/L$ , onde  $\Delta v_i$  e  $\Delta v_j$  são, respectivamente, os deslocamentos verticais incrementais dos nós  $i$  e  $j$ . Com essas relações, escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/L & 1 & -1/L & 0 \\ 1/L & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta\theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$



**Figura 3.6 - Deslocamentos nodais do elemento na configuração deformada**

Substituindo (3.17) em (3.18) e, na equação obtida, introduzindo (3.20), chega-se, após realizar as operações matriciais necessárias, à seguinte equação de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta\theta_i \\ \Delta v_j \\ \Delta\theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

na qual os elementos da matriz consideram de forma conjunta o efeito da flexibilidade da ligação e aqueles oriundos da não linearidade geométrica. Esses coeficientes  $k_{(m,n)}^*$  são funções das rigidezes das ligações e dos respectivos termos  $k_{(m,n)}$ .

Reagrupando a matriz de rigidez, apresentada na Equação (3.21) na matriz de rigidez completa (ordem 6x6) do elemento de viga-coluna com molas nas duas extremidades, chega-se finalmente a esta relação força-deslocamento para esse elemento:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_i \\ \Delta P_j \\ \Delta Q_j \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1,1)} & k_{(1,2)} & k_{(1,3)} & k_{(1,4)} & k_{(1,5)} & k_{(1,6)} \\ k_{(2,1)} & k_{(2,2)}^* & k_{(2,3)}^* & k_{(2,4)} & k_{(2,5)}^* & k_{(2,6)}^* \\ k_{(3,1)} & k_{(3,2)}^* & k_{(3,3)}^* & k_{(3,4)} & k_{(3,5)}^* & k_{(3,6)}^* \\ k_{(4,1)} & k_{(4,2)} & k_{(4,3)} & k_{(4,4)} & k_{(4,5)} & k_{(4,6)} \\ k_{(5,1)} & k_{(5,2)}^* & k_{(5,3)}^* & k_{(5,4)} & k_{(5,5)}^* & k_{(5,6)}^* \\ k_{(6,1)} & k_{(6,2)}^* & k_{(6,3)}^* & k_{(6,4)} & k_{(6,5)}^* & k_{(6,6)}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

A relação (3.22) pode ser escrita de forma simplificada como:

$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{K}_e^* \Delta \mathbf{u} \quad (3.23)$$

em que  $\Delta \mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{K}_e^*$  e  $\Delta \mathbf{u}$  representam, respectivamente, o vetor de forças internas incrementais, a matriz de rigidez modificada para considerar os efeitos da semirrigidez da ligação e o vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento de viga-coluna com ligações semirrígidas definidos no sistema local de coordenadas.

## 4 APLICAÇÕES

Finalmente, a metodologia apresentada nas seções anteriores para análise estática não linear é usada para obter a resposta de três sistemas estruturais reticulados planos. As estruturas analisadas são pórticos de um andar e de dois andares. O efeito provocado pelo comportamento linear e não linear das ligações viga-coluna ou coluna-base na resposta estrutural é investigado. O material é assumido elástico em todas análises.

### 4.1 Análise Linear de Pórtico de Um Pavimento

A primeira estrutura a ser analisada é de um pórtico com dezesseis metros de comprimento e oito metros de altura, no qual atua uma carga vertical de 100 kN no ponto central da viga e uma carga horizontal de 10 kN no topo da primeira coluna, como mostra a Figura 4.1.

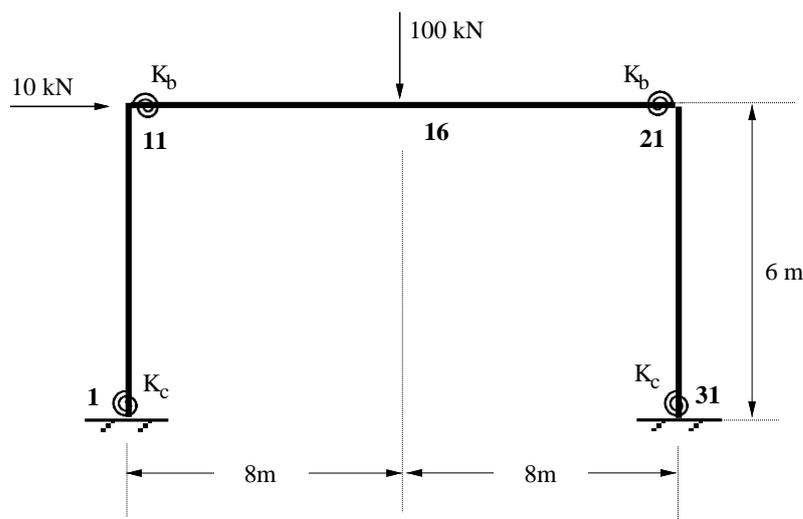


Figura 4.1- Modelo estrutural idealizado para o pórtico de um pavimento

Esse exemplo possui resultados de primeira ordem fornecidos por Chan e Chui (2000), e sua análise terá por objetivo verificar a influência da alteração das rigidezes das ligações viga-coluna e ligações coluna-base na resposta estrutural. Análises lineares serão feitas, e o comportamento da ligação será então admitido como elástico. Foi considerado em todas as

seções o módulo de elasticidade,  $E$ , igual a 200 GPa e para a discretização do pórtico dividiu-se a estrutura em 30 elementos finitos.

A análise será estabelecida, então, adotando diferentes valores para as rigidezes de suas ligações. Como mostrado na Figura 4.1,  $K_b$  representa a rigidez da ligação viga-pilar, enquanto  $K_c$  representa a rigidez da ligação pilar-fundação. A rigidez da ligação semirrígida será relacionada à rigidez da viga através do valor  $4EI_b/L_b$ , onde  $I_b$  e  $L_b$  são o momento de inércia e comprimento relativo à viga, respectivamente. Já para a base da estrutura, considerar-se-á também um valor intermediário de rigidez, que será relacionado à rigidez do pilar que é igual a  $4EI_c/L_c$ , onde  $I_c$  e  $L_c$  são momento de inércia e o comprimento relativo ao pilar, respectivamente.

Assim, comparam-se os valores obtidos para quatro hipóteses:

1.  $K_b \rightarrow \infty$  e  $K_c \rightarrow \infty$ ;
2.  $K_b = 0$  e  $K_c = \infty$ ;
3.  $K_b = 4EI_b/L_b$  e  $K_c \rightarrow \infty$ ,
4.  $K_b = 4EI_b/L_b$  e  $K_c = 4EI_c/L_c$ .

Ressalta-se que para entrada de dados no programa CS-ASA, os valores de rigidez foram transformados usando a Equação (3.5). Assim para uma ligação rígida tem-se  $\gamma = 1$ , representando uma rigidez infinita, e para ligação rotulada usa-se  $\gamma = 0$ , representando uma rigidez nula. No caso de ligações semirrígidas (Hipóteses 3 e 4), também foi feita a transformação para o fator de rigidez  $\gamma$ , onde, obteve-se  $\gamma = 0,032258064$  para  $K_c = 4EI_c/L_c$  e  $\gamma = 0,117647058$  para  $K_b = 4EI_b/L_b$ .

A Tabela (4.1) apresenta uma comparação entre os valores de momentos fletores obtidos por Chan e Chui (2000) (Momento teórico) e os valores obtidos utilizando o programa CS-ASA (Momento obtido). Através dos resultados encontrados, observou-se que os valores de momento fletor obtidos pelo programa foram próximos aos já analisados por Chan e Chui (2000).

**Tabela 4.1 - Comparação dos valores de momento fletor**

Nó	Momento teórico	Momento obtido	Erro(%)
1	52,2	52,2339	0,0649
11	127,5	127,4958	0,0033
16	260,0	259,9591	0,0157
21	152,6	152,5860	0,0092
31	87,1	87,1438	0,0503

(a)  $K_b \rightarrow \infty$  e  $K_c = \infty$

Nó	Momento teórico	Momento obtido	Erro(%)
1	30,0	30,0414	0,1380
11	0,0	0,0	0,0
16	400,0	400,0	0,0
21	0,0	0,0	0,0
31	30,0	29,9586	0,1380

(b)  $K_b = 0$  e  $K_c = \infty$

Nó	Momento teórico	Momento obtido	Erro(%)
1	31,7	31,6790	0,0662
11	93,6	93,6490	0,0524
16	296,3	296,2771	0,0077
21	113,8	113,7968	0,0028
31	71,5	71,5312	0,0436

(c)  $K_b = 4EI_b/L_b$  e  $K_c \rightarrow \infty$

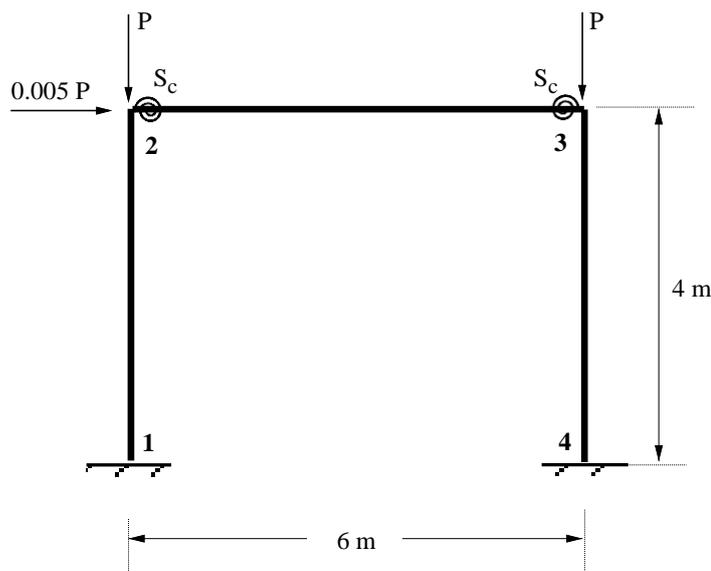
Nó	Momento teórico	Momento obtido	Erro(%)
1	0,3	0,3223	7,4333
11	80,3	80,2531	0,0584
16	301,7	301,6671	0,0109
21	116,4	116,4126	0,0108
31	24,2	24,1629	0,1533

(d)  $K_b = 4EI_b/L_b$  e  $K_c = 4EI_c/L_c$ .

## 4.2 Análise Linear e Não Linear de Pórticos de Múltiplos Andares

A estrutura ilustrada na Figura 4.2, refere-se a um pórtico de um pavimento, com ligações viga-coluna semirrígidas. Para a viga o momento de inércia ( $I$ ) é admitido igual a  $2770\text{cm}^4$  e área da seção transversal ( $A$ ) igual a  $43\text{cm}^2$ . Já para as colunas adota-se inércia igual a  $1510\text{cm}^4$  e área de  $33,4\text{cm}^2$ . Foi considerado em todas as seções o módulo de elasticidade igual a 200 GPa.

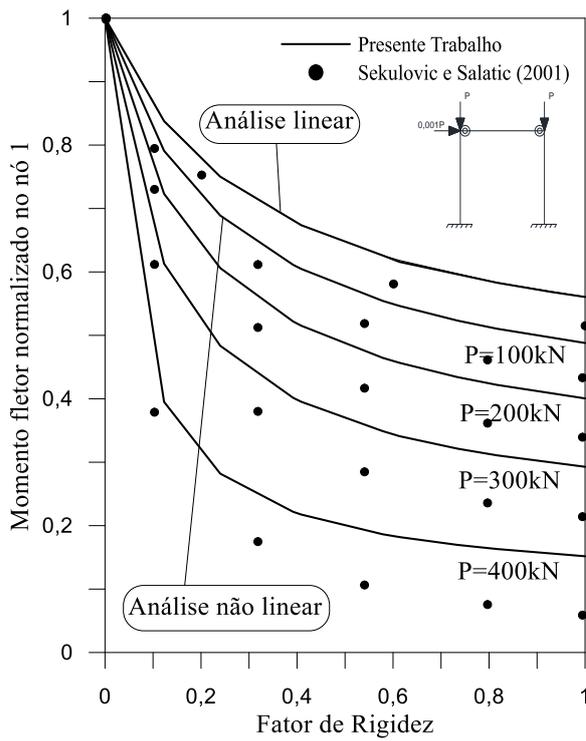
Para efetuar as análises, considera-se que as ligações apresentam comportamento elástico linear. Esse exemplo possui resultados de primeira e segunda ordem fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001), os quais avaliam a influência das ligações no comportamento do pórtico. Assim, os resultados encontrados por esses autores são usados para comparação.



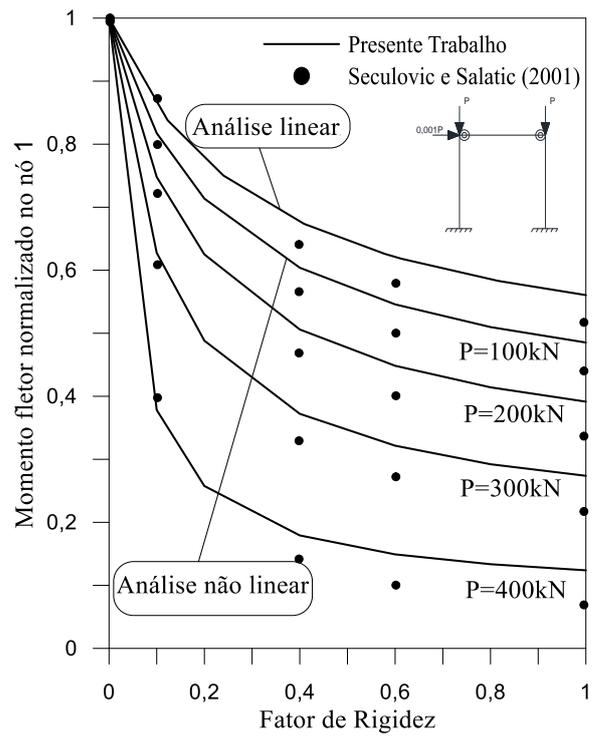
**Figura 4.2 - Pórtico de quadro simples**

Primeiramente realizou-se uma análise linear e não linear do pórtico, usando uma malha de três elementos finitos, um elemento por barra. Variou-se então os níveis de carga e os fatores de rigidez,  $\gamma$ . Dessa forma, a Figura 4.3(a) mostra o resultado obtido para momento fletor no nó 1 (base da coluna à esquerda) indicado na Figura 4.2. Pode-se perceber uma diferença considerável entre os resultados obtidos e os já fornecidos. Na tentativa de melhorar a resposta, as análises foram refeitas para uma malha de trinta elementos finitos. As respostas obtidas podem ser vistas no gráfico mostrado na Figura 4.3(b). Concluiu-se que com maior número de elementos finitos há uma melhor aproximação dos resultados. Nessa figura, o momento exposto foi normalizado pelo valor do momento para o pórtico com ligações rotuladas.

Para a malha de trinta elementos finitos, a Figura 4.4 ilustra a variação do deslocamento horizontal do nó 2 (topo da coluna à esquerda) com a rigidez da ligação. Esses deslocamentos foram normalizados por aqueles correspondentes aos obtidos para o pórtico com ligações rotuladas para a representação gráfica.

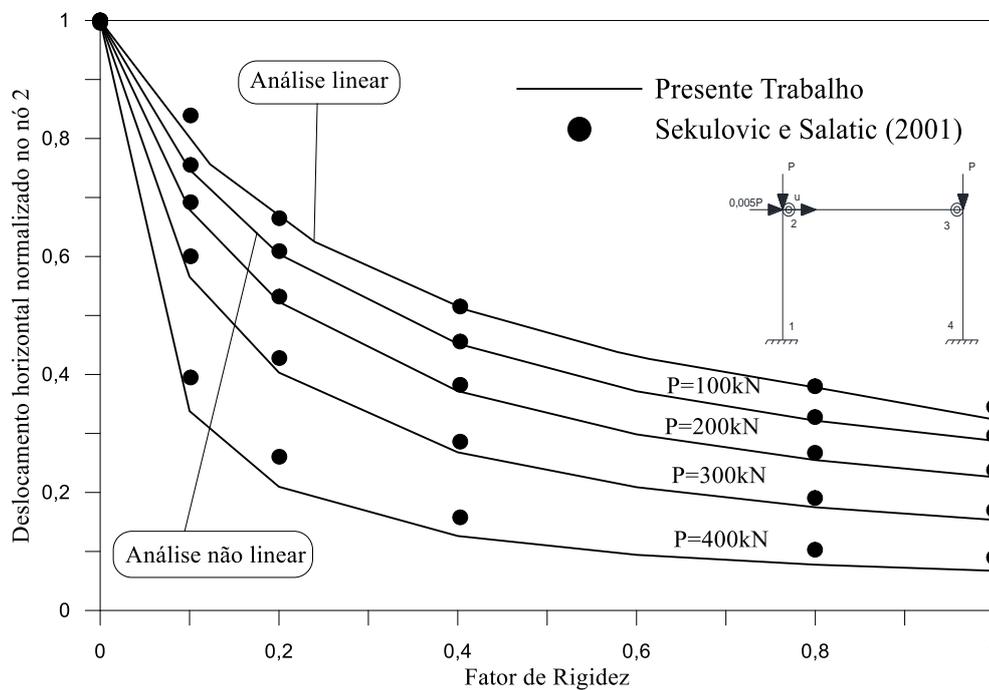


(a) Malha de 3 elementos finitos



(b) Malha de 30 elementos finitos

**Figura 4.3 - Influência da flexibilidade da ligação no momento fletor da base**



**Figura 4.4 - Influência da flexibilidade da ligação no deslocamento horizontal do topo da coluna**

As Tabelas 4.2 e 4.3 mostram, respectivamente, a variação do deslocamento do nó 2 e do momento fletor no nó 1 para diferentes condições de ligação entre viga e colunas. Considerou-se as seguintes ligações: rígida, rotulada, ligação com dupla cantoneira de alma (DWA) — fator de rigidez igual a 0,171520871 —, e cantoneira de topo e assento com dupla cantoneira de alma (TSDWA) — fator de rigidez igual a 0,279561195. Aplicou-se para essa análise uma carga de intensidade  $P = 450\text{kN}$ . Também se apresenta uma comparação entre os resultados obtidos e aqueles fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001).

**Tabela 4.2 Valores de deslocamento horizontal do nó 2 (topo da coluna)**

Tipos de Ligação	Deslocamento ( $\times 10^{-4}\text{m}$ )					
	Análise de 1ª ordem			Análise de 2ª ordem		
	Teórico	Obtido	Erro (%)	Teórico	Obtido	Erro (%)
Rígida	25,79	27,0785	4,9961	36,38	38,9298	7,0088
TSDWA	28,70	30,1282	4,9763	42,34	45,4357	7,3115
DWA	30,95	32,5181	5,0666	47,41	50,2765	6,0462
Rotulada	75,73	79,5094	4,9906	868,6	832,439	4,1631

**Tabela 4.3 Valores de momento do nó 1 (base)**

Tipos de Ligação	Momento (kNm)					
	Análise de 1ª ordem			Análise de 2ª ordem		
	Teórico	Obtido	Erro (%)	Teórico	Obtido	Erro (%)
Rígida	2,524	2,5238	0,0079	3,377	3,4313	1,6079
TSDWA	2,639	2,6388	0,0076	3,665	3,7315	1,8145
DWA	2,728	2,7290	0,0367	3,910	3,9999	2,2992
Rotulada	4,503	4,5022	0,0178	43,591	39,5065	9,3791

A influência dos efeitos de segunda ordem pode ser vista através da diferença entre os resultados obtidos utilizando-se a análise linear e não linear. Na análise não linear, os erros na maioria das análises foram maiores. Vale ressaltar que ao analisar a ligação rotulada com a carga de 450kN, o programa computacional não conseguiu realizar o número de incrementos

necessários de maneira que chegasse à totalidade dessa carga, assim o valor comparado, foi ao valor máximo alcançado pelo programa. Isto pode ter ocorrido, devido a alguma instabilidade na formulação usada considerar o efeito da ligação semirrígida na análise. Destaca-se que outras formulações estão implementadas no CS-ASA e podem ser usadas para verificar se ocorre uma melhoria nos resultados.

Das figuras mostradas anteriormente — Figuras 4.3 e 4.4 — pode-se concluir que os dois efeitos, tanto o deslocamento horizontal quanto o momento fletor possuem a mesma característica, ou seja, apresentam valores mais baixos para maiores fatores de rigidez. No caso da análise linear, os resultados decrescem independentemente do nível de carga, as curvas ficavam sobrepostas. enquanto no caso de uma análise não linear o decréscimo é maior para níveis de carga maiores.

Além disso, no que se refere à solução não linear e linear, pode-se observar a eficiência da implementação ao programa CS-ASA, o qual usa a metodologia proposta por Chan e Chui (2000), produzindo resultados bastante próximos aos fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001) que faz uso de uma formulação de elementos finitos diferente da usada neste trabalho.

Uma variação desse modelo estrutural de um andar é apresentada na Figura 4.5. Adota-se agora um pórtico também de quadro simples, porém de dois pavimentos. As mesmas propriedades físicas e geométricas foram adotadas para as vigas e colunas.

Uma comparação entre a capacidade de carga alcançada pelos pórticos de um e dois andares é representada graficamente na Figura 4.6. Essa figura mostra a variação da carga limite com o fator de rigidez das ligações entre viga e coluna, variando seu fator de rigidez. O valor de carga crítica apresentado está normalizado, ou seja, dividido pela carga limite obtida para o caso com ligações idealmente rígidas.

Pode-se concluir que o valor de carga crítica diminui com o decréscimo do fator de rigidez, pelo aumento do efeito  $P-\Delta$ , e observou-se também que com o aumento de um pavimento, esse decréscimo ficou variando quase que linearmente. Notou-se também a eficiência da análise através da implementação do programa CS-ASA, o qual pelo gráfico, Figura 4.6, observaram-se resultados bastante próximos aos fornecidos por Sekulovic e Salatic (2001) e por Pinheiro (2003).

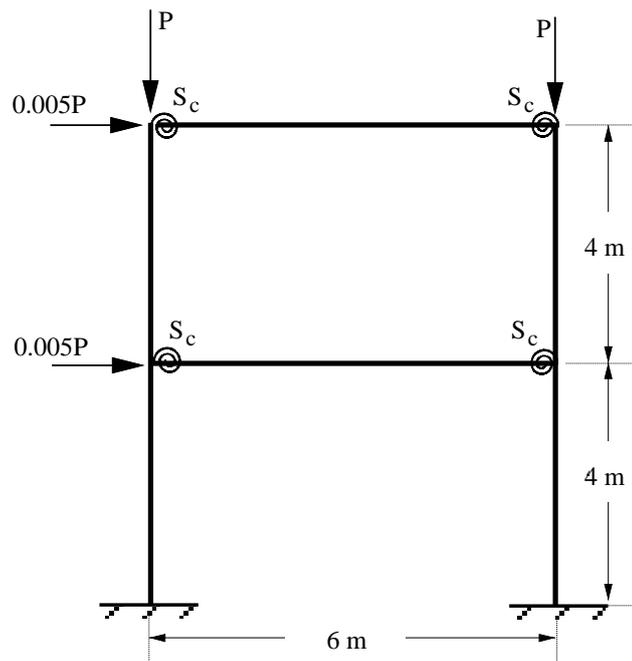


Figura 4.5 - Pórtico de quadro simples de dois pavimentos

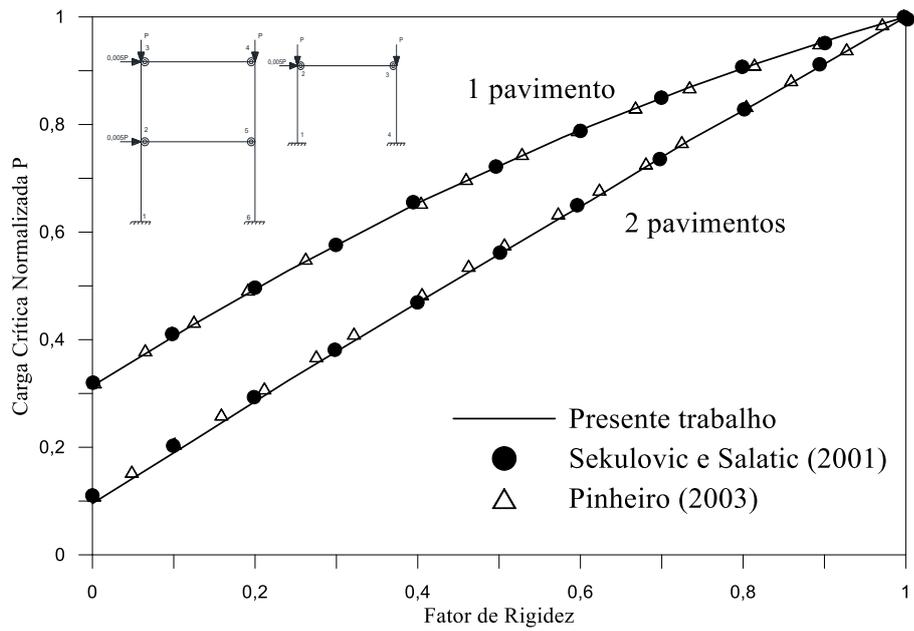


Figura 4.6 - Influência da flexibilidade da ligação no valor de carga crítica

### 4.3 Ligações Não Lineares em Pórticos de Múltiplos Andares

Análises com estruturas similares as da seção anterior serão feitas aqui. Objetiva-se agora avaliar a influência do modelo usado para simular o comportamento da ligação nas respostas. Destaca-se que resultados encontrados na literatura são usados para comparação.

As estruturas exibida na Figura 4.7 referem-se aos pórticos de um pavimento com ligações viga-coluna. Foram considerados dois tipos de apoios, os engastados e os rotulados. Para a viga é adotado o perfil W360x72 e para as colunas o perfil W310x143. O sistema foi discretizado com quatro elementos finitos, sendo que nas vigas e colunas foram usados, respectivamente, dois e um elementos finitos.

Já a Figura 4.8, refere-se aos pórticos de dois pavimentos também com ligações viga-coluna semirrígidas. As vigas e colunas possuem as mesmas propriedades do pórtico anterior e também se considerou as duas condições de apoios nas análises. Na discretização das vigas e colunas foram usados, respectivamente, dois e um elementos finitos, totalizando oito elementos finitos. Além disso, foi considerado em todas as seções de ambas as estruturas o módulo de elasticidade igual a 200 GPa. Imperfeições nas estruturas são induzidas por meio de forças horizontais de pequena intensidade, como ilustrado nas Figuras 4.7 e 4.8.

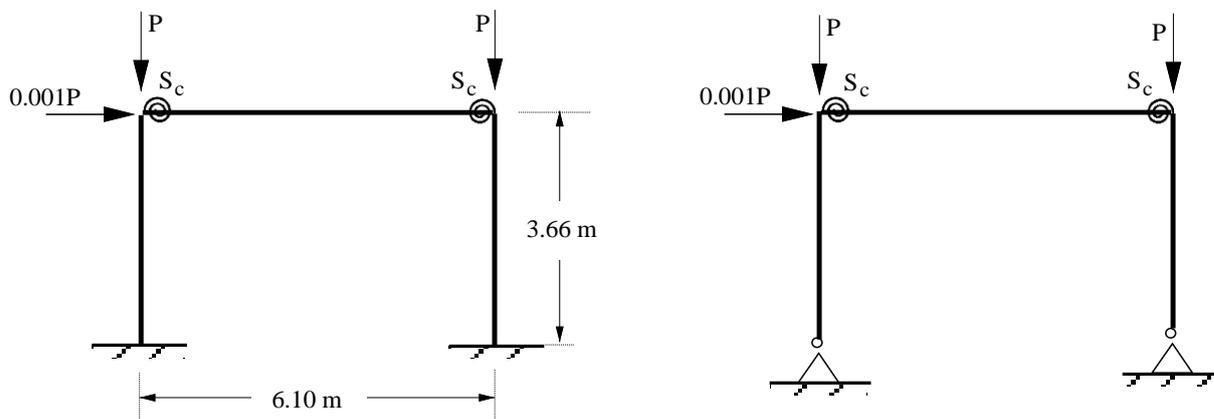
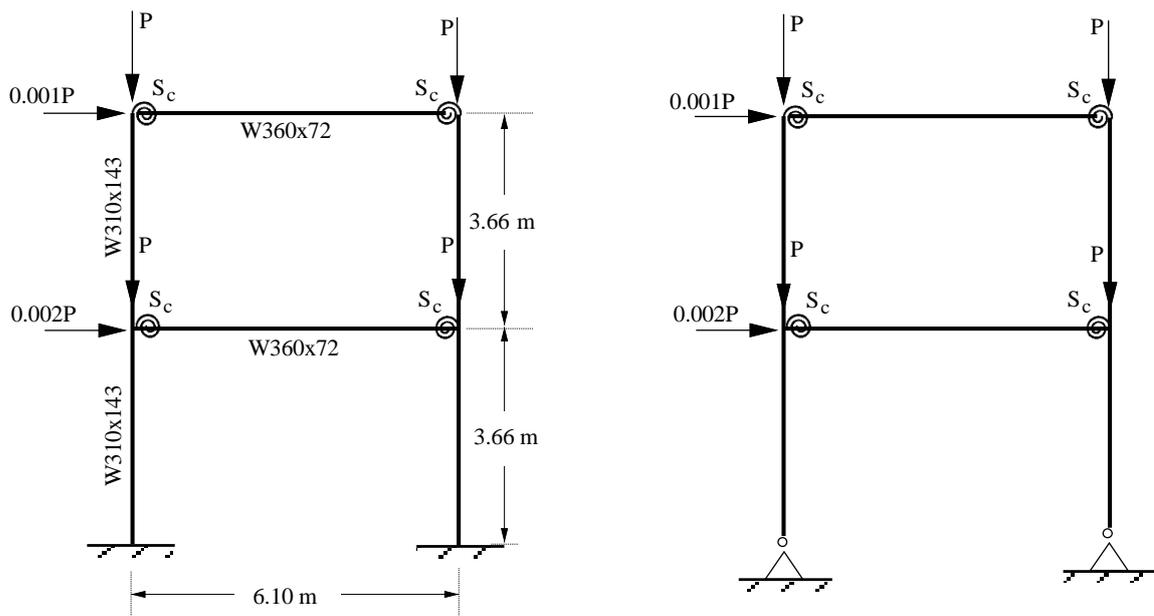


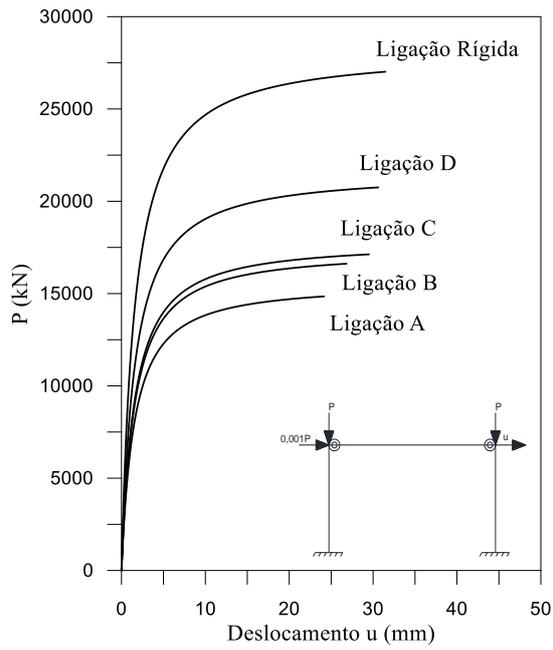
Figura 4.7 - Sistemas estruturais analisados – Pórtico de um pavimento



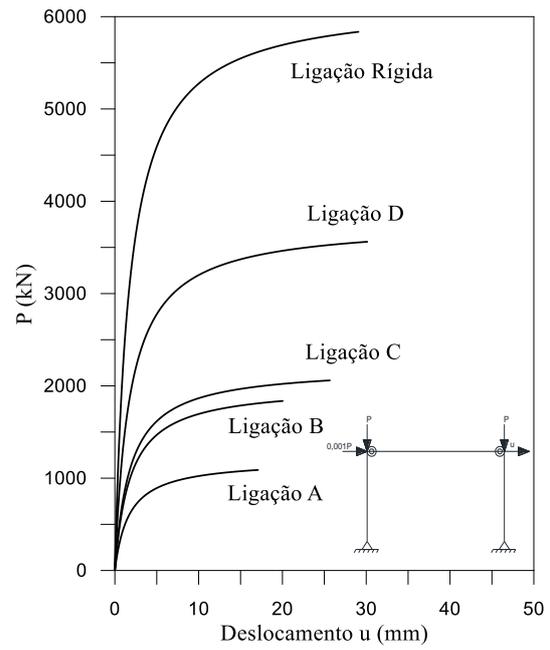
**Figura 4.8 - Sistemas estruturais analisados – Pórtico de dois pavimentos**

Nesse estudo, quatro tipos de ligações semirrígidas foram consideradas: cantoneira de alma simples (Ligação A), cantoneira de topo e assento (Ligação B), chapa de topo (Ligação C), chapa de topo estendida (Ligação D). Além dessas ligações, considerou também a ligação como se fosse perfeitamente rígida. Para representar o comportamento não linear dessas ligações o modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986) foi usado. A Tabela 3.1 mostrada anteriormente contém as propriedades e características de cada uma dessas ligações semirrígidas. O comportamento linear das ligações foi também considerado para comparação. Neste caso, os fatores de rigidez adotados foram:  $\gamma = 0,1203$  (Ligação A),  $\gamma = 0,2133$  (Ligação B),  $\gamma = 0,2385$  (Ligação C) e  $\gamma = 0,4673$  (Ligação D).

As Figuras 4.9 e 4.10 a seguir exibem as trajetórias de equilíbrio para os pórticos de um pavimento e dois pavimentos, respectivamente. É mostrada a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura com o fator de carga aplicada. Esses resultados foram encontrados admitindo o comportamento linear das ligações viga-coluna. Ressalta-se que ligações idealmente rígidas foram também consideradas nas análises. O comportamento estrutural considerando as bases engastadas e rotuladas são indicados.

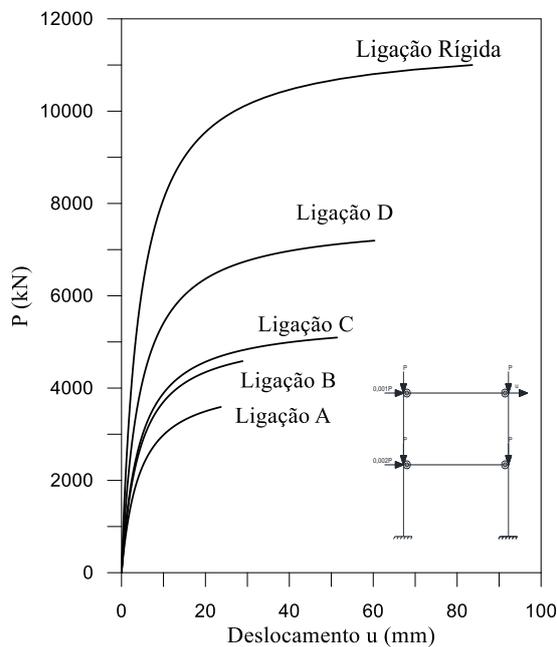


(a) Apoios engastados

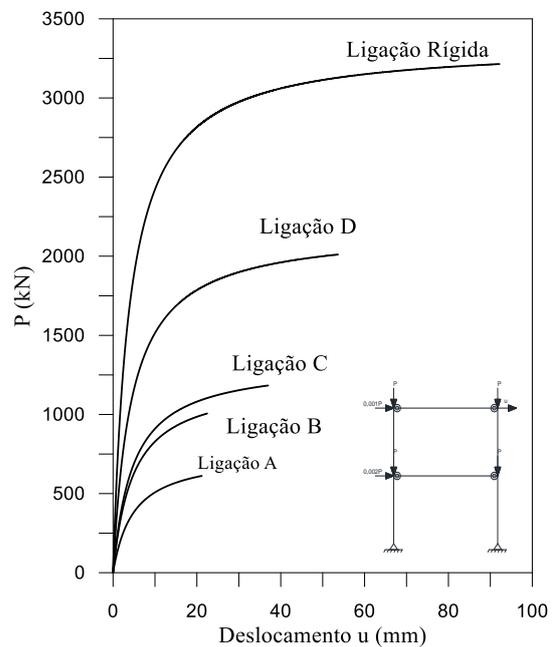


(b) Apoios rotulados

**Figura 4.9 - Trajetórias de equilíbrio: ligações com comportamento linear – pórtico de um pavimento**



(a) Apoios engastados

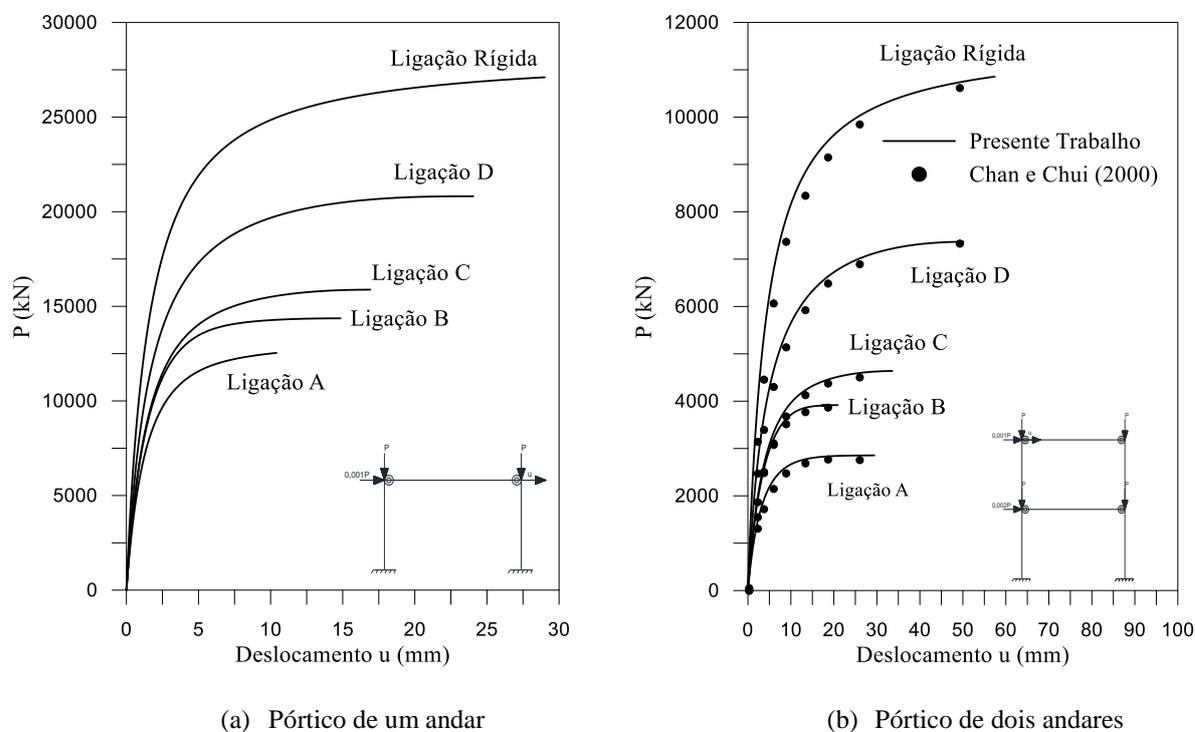


(b) Apoios rotulados

**Figura 4.10 - Trajetórias de equilíbrio: ligações com comportamento linear – pórtico de dois pavimentos**

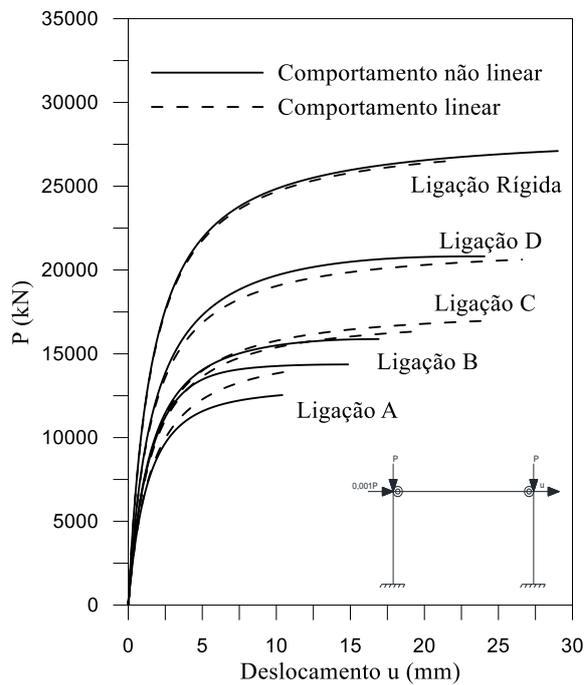
Através da análise das Figuras 4.9 e 4.10 percebe-se que, tanto para o pórtico com um pavimento quanto para o com dois, as cargas limite são menores quando se adotam ligações mais flexíveis independentemente do tipo de apoio. Porém, com o uso de apoios fixos, o valor da carga limite é bem maior.

Agora, admitindo o comportamento não linear das ligações, análises foram realizadas para os pórticos com bases engastadas. Mostram-se nas Figuras 4.11(a) e 4.11(b) a variação do deslocamento horizontal no topo da estrutura com o nível de carga para cada um dos dois pórticos. Resultados obtidos por Chan e Chui (2000) são usados para comparação na Figura 4.11b. Um bom acordo entre as respostas pode ser visto.

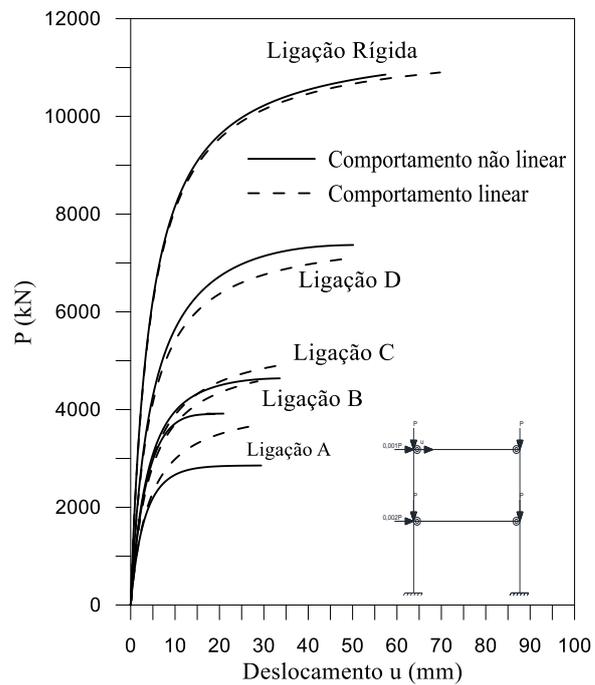


**Figura 4.11 - Trajetórias de equilíbrio: ligações viga-coluna não lineares**

A comparação do comportamento das ligações pode ser visto na Figura 4.12, na qual pode-se perceber a influência do comportamento não linear na capacidade de carga estrutural. As cargas limites adotando ligações mais flexíveis, são menores quando se admite o comportamento não linear para as ligações viga-coluna



(a) Pórtico de um andar



(b) Pórtico de dois andares

**Figura 4.12 - Trajetórias de equilíbrio: comparação das ligações viga-coluna com comportamento linear e não linear**

## 5 CONCLUSÃO

Com os resultados das análises não lineares realizadas nos sistemas estruturais concluiu-se que houve uma concordância com as soluções disponíveis na literatura. Isso permite afirmar que a formulação de elementos finitos e as metodologias de solução adotadas são eficientes. Vale ressaltar que os sistemas estruturais possuíam diferentes geometrias e condições de carregamento.

Analisando a influência da flexibilidade das ligações foi possível observar que o valor a carga crítica de estabilidade diminui com o decréscimo do fator de rigidez das ligações. Assim, ligações rígidas suportam carregamentos maiores que as semirrígidas e rotuladas. Adicionalmente, o tipo de apoio, engastado ou rotulado, desempenha um papel importante no comportamento estrutural. Como foi observado para os pórticos de um e dois pavimentos analisados, o apoio rígido eleva bastante o valor da carga crítica. Logo, para um mesmo nível de carga, os deslocamentos na estrutura são menores quando se usam ligações mais rígidas, o aumento da flexibilidade acentua o efeito  $P-\Delta$ .

Notou-se também que uma análise não linear fornece resultados que são mais reais. Ao se analisar o comportamento das estruturas para diferentes valores das rigidezes das ligações viga-coluna verificou-se que na análise linear os deslocamentos decrescem independentemente do nível de carga, enquanto no caso de uma análise não linear esse decréscimo é maior para níveis de carga maiores.

Analisando as estruturas considerando comportamento não linear das ligações, notou-se degradação da rigidez da ligação ocasiona uma capacidade de carga inferior àquela obtida assumindo as ligações como rígidas ou semirrígidas com comportamento linear, na qual a rigidez permanece constante durante a análise e igual à rigidez inicial.

Assim, após várias análises, pode-se concluir que ao considerar um comportamento não linear das estruturas, pode-se obter um comportamento mais realístico e conseqüentemente conseguir uma economia na execução de projetos. Isso porque pode-se estimar com mais precisão a capacidade de carga do sistema estrutural e o nível de deslocamento, evitando assim projetos superdimensionados.

## REFERÊNCIAS

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, 1989. *Manual of steel construction, allowable stress design*. Chicago.

ANSYS, 1998. *Swanson Analysis Systems, Inc.*, P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, version 5.5, Basic analysis procedures, Second edition.

ASSIS, M.V., 2011. *Análise de Edifícios de Andares Múltiplos com Estrutura Metálica*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas. Universidade Federal de Minas Gerais.

CASTRO, R.A., 2006. *Modelagem Computacional de Ligações Semi-Rígidas e sua Influência na Resposta Dinâmica Não-Linear de Pórticos de Aço*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CHAN, S. L. E CHUI, P. P. T., 2000. *Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*, Elsevier, Oxford.

CHEN W. F. E LUI, E. M., 1991. *Stability Design Of Steel Frames*, CRC Press, Boca Raton, Flórida.

CHEN, W.F., GOTO, Y., E LIEW, J.Y.R., 1996. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Wiley & Sons Inc., USA.

EUROCODE 3, 1992. *Design of Steel Structures. Part I: General rules and rules for buildings*. Comité European de Normalisation (CEN) Brussels, Belgiumt.

EUROCODE 3, 1993. *Design of Steel Structures, Part 1-8: Design of Joints.(s.d.)*. Comité European de Normalisation (CEN). Brussels, Belgium.

EUROCODE 4, 2005. *Design of composite steel and concrete structures Part1.1 General rules and rules for buildings*. Comité European de Normalisation (CEN) Brussels, Belgiumt.

FERREIRA, M.A., 1999. *Deformabilidade de Ligações Viga-Pilar de Concreto pré-moldado*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas. Universidade de São Paulo.

JUNIOR, P, C, P, S., 2000 *Análise Não-Linear de Pórticos Planos Metálicos com Conexões Semi-Rígidas*. Dissertação de Mestrado, Engenharia Civil. Florianópolis, UFSC, Santa Catarina.

LUI, E. M. E CHEN, W. F., 1986. *Analysis and Behavior of Flexible-Jointed Frames*. Eng. Struct., v. 8, p. 1007-118.

LUI, E. M. E CHEN, W. F., 1988. *Behavior of Braced and Unbraced Semi-rigid Frames*. Int. J. Solids Structures, v. 24(9), p. 893-913.

NEVES, T.W., 2016. *Análise da Influência da Rigidez das Ligações Viga-Pilar em Estruturas de Concreto Armado de Múltiplos Pavimentos*. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Santa Maria.

NBR 8800, 1986. *Projeto e Execução de Estruturas em Aço de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.

NBR 8800, 2008. *Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios*. ABNT, Rio de Janeiro, Brasil.

OLIVEIRA, C.R., 2011. *Estudo do Comportamento de Uma Ligação Viga-pilar*. Tese de mestrado em Engenharia Mecânica e Gestão Industrial. Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu.

PINHEIRO, L., 2003. *Análises Não Lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-Rígidos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Universidade Federal de Ouro Preto.

ROCHA, P, A ,S., 2006. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-Rígidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

SALDANHA, A. C., 1997. *Análise Não-Linear do Comportamento de Pórticos Metálicos com Ligações Semi-Rígidas*. Dissertação de Mestrado, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.

SANTANA, C.L.O., 2002. *Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Madeira Com Ligações Semi-Rígidas*. Tese de Doutorado em Engenharia Agrícola. UNICAMP, Campinas.

SANTOS, J.B., 2016. *Análise da Influência da Rigidez das Ligações Viga-Pilar no Comportamento Estrutural de Edifícios de Múltiplos Pavimentos em Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Universidade Federal de Uberlândia.

SEKULOVIC, M.;SLATIC,R., 2001. *Nonlinear analysis of frames with semirigid connections*; *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 26, 1097-1107.

SILVA, A, R, D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Dissertação de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

SOUZA, M.L., 1999. *Análise De Estruturas de Aço Com Ligações Semi-Rígidas em Teoria de 2ª Ordem*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas.UFMG.

VERÍSSIMO, G. S; FAKURY, R. H. ; RIBEIRO, J. C. L., 2006. *Design Aids for Unreinforced Web Openings in Steel and Composite Beams with W-Shapes*, AISC Engineering Journal, p.163-172.

YANG, Y.B. AND KUO, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall.