Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia de Produção

Trabalho de Conclusão de Curso

UM MODELO DINÂMICO ESTOCÁSTICO PARA O PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO DE MINA A CÉU ABERTO

Matheus Correia Teixeira

João Monlevade, MG
2019

Matheus Correia Teixeira

UM MODELO DINÂMICO ESTOCÁSTICO PARA O PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO DE MINA A CÉU ABERTO

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Produção pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.
Orientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva
Coorientador: Marco Antonio Bonelli Junior

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2019

T266m Teixeira, Matheus Correia.
Um modelo dinâmico estocástico para o problema de sequenciamento de mina a céu aberto [manuscrito] / Matheus Correia Teixeira. - 2019.

25f.:

Orientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva.
Coorientador: Prof. MSc. Marco Antonio Bonelli Junior.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Mineração a céu aberto. 2. Minas e recursos minerais . 3. Planejamento da produção. 4. Política de preços. I. Silva, Thiago Augusto de Oliveira. II. Bonelli Junior, Marco Antonio. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 658.5

Catalogação: ficha.sisbin@ufop.edu.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas - ICEA
Colegiado do Curso de Engenharia de Produção - COEP
Campus João Monlevade

ATA DE DEFESA – ATV030

Aos 16 dias do mês de julho de 2019, às 18h00 horas, na sala H203 deste instituto, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso pelo (a) aluno (a) **Matheus Correia Teixeira**, Matrícula **14.1.8375** sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: **Thiago Augusto de Oliveira Silva (Orientador), Alexandre Xavier Martins, Mônica do Amaral e Mayra Cristina Silva Santos.**

O (a) aluno (a) apresentou o trabalho intitulado: **UM MODELO DINÂMICO ESTOCÁSTICO PARA O PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO DE MINA A CÉU ABERTO.** A comissão examinadora deliberou, pela: (X) Aprovação; ou (__) Aprovação com Ressalva - Prazo concedido para as correções: _____________; ou (__) Reprovação com Ressalva, com prazo para marcação da nova banca de: _____________; ou (__) Reprovação do(a) aluno(a), com a nota 10,0. Na forma regulamentar e seguindo as determinações da Resolução COEP 05/2018 foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo (a) aluno(a).

João Monlevade, 16 de julho de 2019.

Thiago AOS

Thiago Augusto de Oliveira Silva - Orientador

Alexandre Xavier Martins

Mônica do Amaral

Mônica do Amaral

Mayra C S Santos

Mayra Cristina Silva Santos

Matheus Correia Teixeira

Matheus Correia Teixeira

Colegiado do Curso de Engenharia de Produção – COEP, Rua 37, nº 115 - Bairro Loanda - CEP 35.931-008 - João Monlevade /MG - Brasil - Telefax: (0xx31) 3852-8709 Homepage : www.ufop.br - email: coep@ufop.edu.br

TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "UM MODELO DINÂMICO ESTOCÁSTICO PARA O PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO DE MINA A CÉU ABERTO" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem o devido referenciamento ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 31 de Julho de 2019.

Matheus Correia Teixeira

Nome completo do aluno

Agradecimentos

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, José e Isabella, e a minha irmã Milena pelo companheirismo, apoio constante e amor incondicional. Agradeço aos meus padrinhos, Luciana e Richard por sempre incentivarem meus estudos e por mesmo de longe me inspirarem. Vocês são minha base.

Aos irmãos que adquiri na República Bino, muito obrigado por dividirem não somente a casa, mas as felicidades e as tristezas, vocês são "fodas". Também, a República Monastério e ao Orfanato do MIT pelo acolhimento e por se tornarem parceiros nesta jornada. Sem vocês não teria sido tão especial.

Gratidão a todos os amigos que fiz nestes cinco anos, por se tornarem minha segunda família e darem força para que eu chegasse até aqui. Obrigado pela amizade sincera e aos momentos compartilhados que levarei comigo ao longo da minha vida.

Por fim, aos meus orientadores e amigos Thiago e Marco por terem depositado confiança em minhas ideias e por terem colaborado para que as mesmas se tornassem realidade. Obrigado por terem tornado a busca por conhecimento algo tão gratificante.

Espero poder honrar o conhecimento adquirido e o suporte que recebi de todos os citados acima. Deixo aqui meu "muito obrigado", foi um prazer poder compartilhar tudo isso com vocês.

"Nunca deixei que a escola interferisse na minha educação"
– Mark Twain

Resumo

Desde 2013, o valor da produção mineral no país vem caindo devido à contração do preço do minério no mercado global e, como resultado, um bom planejamento inicial torna-se cada vez mais crucial para a vida de uma mina a céu aberto quando tratada no âmbito da sua viabilidade econômica. Nesse sentido, o presente estudo tem como objetivo apresentar um modelo para o problema de sequenciamento de mina a céu aberto, considerando seus aspectos dinâmicos e estocásticos, a fim de gerar um *framework* que servirá de base para a avaliação, por meio de simulação, de diferentes políticas de solução. A solução proposta considera as incertezas do problema quanto aos aspectos preço mineral e incerteza geológica e, para demonstrar a aplicação do método proposto, um problema demonstrativo é apresentado e resolvido por meio de uma política de solução míope.
Palavras-chave: Mina a céu aberto, sequenciamento de mina a céu aberto, planejamento sob incerteza.

Abstract

Since 2013, the value of mineral production in the country has been falling due to the contraction of the price of ore in the global market, and as a result, good initial planning becomes increasingly crucial to the life of an open-pit mine when treated within the scope of its economic viability. In this sense, the present study aims to present a model for the problem of open-pit mine scheduling, considering its dynamic and stochastic aspects, in order to generate a framework that will serve as the basis for the evaluation, through simulation, of different solution policies. The proposed solution considers the uncertainties of the problem regarding the mineral price and geological uncertainty aspects and, in order to demonstrate the application of the proposed method, a demonstrative problem is presented and solved through a myopic solution policy.
Keywords: Open-pit mine, open-pit scheduling, planning under uncertainty.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

CPIT - *Constrained Pit Limit Problem*

UPIT - *Ultimate Pit Mine Problem*.

VPL - Valor Presente Líquido.

Sumário

1 Introdução

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Mineração - IBRAM, o setor mineral foi responsável por 5% do Produto Interno Bruto Nacional brasileiro em 2015. Os derivados dessa atividade econômica corresponderam a 11,7% das exportações brasileiras em 2014, em relação para a conta de commodities, totalizando US $ 40 bilhões em produção mineral (US $ 25,7 bilhões em 2015). O país contava com 8.870 empresas de mineração e 8.400 minas na geração de 214 mil empregos diretos. Deve-se notar que mais de 90 % das minas em atividades são minas a céu aberto (IBRAM (2015)).

Desde 2013, o valor da produção mineral no país vem caindo principalmente devido ao preço do minério no mercado global. Nesse sentido, um bom planejamento inicial torna-se cada vez mais crucial para a vida de uma mina a céu aberto, especialmente em termos de sua viabilidade econômica.

O problema do sequenciamento de mina a céu aberto é um problema clássico de otimização que envolve a alocação de recursos, considera as precedências e restrições geológicas e visa maximizar o valor presente líquido da extração de minério. Na literatura o problema é tratado principalmente a partir de modelos determinísticos utilizando métodos exatos ou heurísticos de solução. Na prática, o desempenho do processo de extração depende, no entanto, das fontes de incertezas existentes e da reação do tomador de decisão frente às mesmas.

Neste contexto, o presente estudo tem como objetivo apresentar um modelo para o problema de sequenciamento de mina a céu aberto, considerando seus aspectos dinâmicos e estocásticos, com o intuito de modelar o problema da forma mais aderente à situação prática. A solução proposta considera as incertezas do problema quanto aos aspectos preço mineral e incerteza geológica e, para demonstrar a aplicação do método proposto, um problema demonstrativo é apresentado e resolvido por meio de uma política de solução míope.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo do presente estudo é apresentar um modelo de programação dinâmica estocástica capaz de representar o problema de sequenciamento de mina a céu aberto, considerando incertezas geológicas e econômicas, que sirva como *framework* para o desenvolvimento de políticas e estratégias que tenham melhor desempenho do que as atuais desenvolvido em situações reais. Além do estudo focar na apresentação do modelo, uma segunda contribuição será a explicação da sua dinâmica, através de uma política míope ao longo das etapas de decisão.

1.1.2 Objetivos Específicos

- √ Analisar modelos de problemas de sequenciamento de mina a céu aberto presentes na literatura;
- √ Identificar as incertezas inerentes a estes processos, justificando a dinamicidade do sistema;
- √ Desenvolver o modelo de programação dinâmica estocástica;
- √ Propor e implementar uma política de decisão para o problema;
- √ Testar o modelo proposto.

1.2 Justificativa

A mineração estratégica se torna um elemento crítico na extração de minério para obtenção de lucro, se tornando um processo robusto quando se considera o investimento significativo atrelado a este tipo de atividade e cujo retorno é baseado nas decisões tomadas para o planejamento da produção e do sequenciamento.

Para Dimitrakopoulos (2018) existem duas respostas possíveis caso um planejamento de mineração seja considerada como sub ótima ou errada. A primeira é uma avaliação melhor do futuro por meio da previsão. A segunda é reconhecer que o futuro é, em muitos aspectos, incognoscível e, subsequentemente, desenvolver planos de mineração que tenham flexibilidade para responder a mudanças em cenários futuras. Com essas duas respostas poderá ser feita um plano de mineração que irá trazer altos valores de mineração em uma gama maior de suposições, ao invés de um plano que só trará resultados sobre uma gama pequena de suposições.

A partir desse contexto e sabendo que a mineração estratégica que se embasa em um plano de produção de longo prazo durante a vida útil da mina maximizando o VPL ao mesmo tempo em que atende vários requisitos físicas e operacionais nos níveis de extração e processamento (DIMITRAKOPOULOS, 2018), vemos a necessidade na compreensão das incertezas inerentes ao processo e dos riscos envolvidos, levantando então, a necessidade do desenvolvimento de métodos de incorporar estes ao processo de planejamento da mineração.

Com isso, este estudo é justificável ao criar um modelo matemático para auxiliar no tratamento das incertezas que são inerentes no sistema de extração de minério e da reação do tomador de decisão frente às mesmas, tendo um planejamento de mineração mais completa ao considerar uma faixa maior de pressuposições, visando aumentar o lucro, conferindo uma maior vantagem competitiva das mineradoras no mercado.

1.3 Organização do trabalho

Este estudo foi dividido da seguinte forma: o Capítulo 1 traz uma introdução, contextualizando o contexto do problema tratado, os objetivos, a justificativa para demonstrar a relevância do problema e a necessidade de um método de resolução e a organização do trabalho presente. O Capítulo 2 expõe a metodologia utilizada para realizar e pretextar o estudo corrente. No Capítulo 3 traz a referência bibliográfica, buscando o respaldo teórico a qual o estudo será baseado. O Capítulo 4 possui a fundamentação teórica referente a programação dinâmica estocástica, ao processo de krigagem e ao movimento browniano geométrico. O Capítulo 5 apresenta a a modelagem e descrição do problema de sequenciamento de mina a céu aberta, sob a ótica da programação dinâmica estocástica. Seguindo, temos o Capítulo 6 que traz os resultados de duas políticas propostas e as análises realizadas, com intuito de observar o comportamento do sistema. E, finalmente, as conclusões e trabalhos futuros propostas no Capítulo 7.

2 Metodologia de pesquisa

Este estudo pode ser classificado, de acordo com Morabito e Pureza (2010), como uma pesquisa de abordagem quantitativa e natureza empírica, baseando o estudo feito em observações da realidade, centrando-se na objetividade de dados que podem ser quantificados, tendo um cunho normativo, por desenvolver políticas, estratégias e ações que tentam melhorar uma situação corrente.

Devido ao aumento da complexidade dos processos e a necessidade da tomada de decisões sobre as diversas atividades realizadas, surge a necessidade da utilização de métodos de modelagem matemática que contemplem os processos decisórios sequenciais e as incertezas inerentes ao processo. Dessa forma, considerar a dinamicidade do sistema e assegurar condições de otimalidade.

Por fim, para a realização do que está sendo proposto nessa pesquisa, foi realizada uma revisão de conceitos e trabalhos correlatos aos temas tratados, assim como as lacunas existentes na literatura, afim de adquirir conhecimento para tornar imprescindível a validação do modelo proposto.

3 Revisão de literatura

Para a realização do presente estudo, foi necessário o embasamento em determinados tópicos. O estudo traz temas sobre problemas de sequenciamento no contexto da extração de minas a céu aberto. Além disso, as incertezas envolvidas neste tipo de processo e formas de decomposição da complexidade da extração mineral.

3.1 Planejamento da mina

Newman et al. (2010), Osanloo, Gholamnejad e Karimi (2008) e Meagher, Dimitrakopoulos e Avis (2014) apresentam revisões do planejamento de extração em minas a céu aberto, separando os principais problemas na ordem hierárquica do planejamento. Considerando um plano de médio e longo prazo, também definido como planejamento tático, temos a definição do *ultimate pit mine problem*, que servirá de base para a solução de dois problemas operacionais: (i) da sequência de extração dos blocos de minério; e (ii) sequenciamento e alocação de recursos no processo de extração.

O UPIT (ver, por exemplo, Espinoza et al. (2013), Meagher, Dimitrakopoulos e Avis (2014)) determina a seleção dos blocos a serem extraídos para obter o nível máximo de segurança relacionado aos indicadores geológicos relacionados à segurança. O UPIT em sua formulação mais generalizada proposta por Espinoza et al. (2013), pode ser demonstrada pelas expressões 3.1 - 3.3. O objetivo 3.1 maximiza o valor p_b de todos os blocos extraídos. A restrição 3.2 assegure-se de que cada bloco $b \in B$, seja extraído somente se seus blocos predecessores $b' \in B_b$ forem extraídos. O conjunto de blocos predecessores B_b definem adequadamente as inclinações para suportar o projeto definitivo da cava final ótima. A restrição 3.3 indica a variável binária x_b, assumindo um valor 1 caso o bloco b for extraído e 0 caso contrário.

$$Obj: \max \sum_{b \in B} p_b x_b \tag{3.1}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad x_b \leqslant x_{b'}, \quad \forall b \in B, \forall b' \in B_b \tag{3.2}$$

$$x_b \in \{0,1\}, \quad \forall b \in B \tag{3.3}$$

O algoritmo proposto por Lerchs e Grossmann (1965) é o mais usado para projetar o contorno de uma operação a céu aberto de modo a maximizar a diferença entre o valor total do minério explorado e o custo total do minério e extração estéril, isto é, definir a cava final ótima. Os autores basearam sua teoria em grafos para a construção do algoritmo usado para resolver o problema.

3.2 Sequenciamento de mina

Johnson (1968) desenvolveu um modelo de sequenciamento baseado no uso da decomposição de Dantzig e Wolfe e, posteriormente, na solução dos subproblemas com o uso de algoritmos de fluxo máximo. Dagdelen (1986) usou o relaxamento para resolver o problema e, para resolver os subproblemas, usou técnicas de programação inteira mista.

Jélvez et al. (2016) propôs uma formulação para o *Contrained Pit Limit Problem*, se tratando de uma generalização do UPIT. Onde se define, a partir da cava final ótima, uma sequência de blocos a serem extraídos maximizadora de lucro sujeito a restrições de precedência e restrições de recursos operacionais.

A formulação proposta por Jélvez et al. (2016) para o CPIT possui, um conjunto de blocos $b \in B$, um conjunto de recursos para serem utilizados durante a extração $k \in K$, um horizonte de tempo representando pelo conjunto $t \in T$ e um conjunto que representa os arcos de precedência entre os blocos $(b,b') \in A$. Como parâmetro temos: v_b sendo o VPL do bloco b, ρ^t como sendo um fator de desconto ao longo de um período t, $a(b,r)$ definido como consumo de um recurso r por um bloco b e C^- e C^+ indicando a quantidade mínima e máxima, respectivamente, do consumo de um recurso r em um determinado período t. E, por fim, uma variável x_{bt}, assumindo um valor de 1 se o bloco b for extraído no período t e 0, caso contrário. Sendo o modelo representado como tal:

$$Obj: \ max \ \sum_{t=1}^{T}\sum_{b=1}^{B} \rho^t v_b x_{bt} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sujeito a:} \quad x_{bt} &\leq x_{b't} && \forall (b,b^{'}) \in A, t \in T && (3.5)\\
x_{bt} &\geq 0 && \forall b \in B, t \in T && (3.6)\\
\sum_{b \in B} a(b,r)x_{bt} &\leq C_{rt}^{+} && \forall r \in R, t \in T && (3.7)\\
\sum_{b \in B} a(b,r)x_{bt} &\geq C_{rt}^{-} && \forall r \in R, t \in T && (3.8)\\
x_{bt} &\in \{0,1\} && \forall b \in B, t \in T && (3.9)
\end{aligned}$$

O conjunto de restrições representado pela inequação 3.5 garante a relação de precedência dos blocos. As restrições 3.6 indicam que um bloco já explorado deve permanecer explorado. Devido a 3.7 e 3.8 garantem que o consumo de recursos estará dentro dos limites. Por fim, 3.9 apresenta o domínio das variáveis.

Apesar da existência de vários estudos que buscam soluções através de métodos exatos, as reais instâncias do problema, geralmente consistindo de centenas de milhares ou até mesmo de milhões de blocos, favoreceram o desenvolvimento de estudos que utilizaram heurísticas e meta-heurísticas como uma técnica de solução e métodos que procuram reduzir o tamanho dos problemas tratados.

Souza et al. (2010) propôs um algoritmo híbrido que combinou as características de duas técnicas de meta-heurística, GRASP (*procedimentos de busca gulosos, aleatórias e adaptativos*) e VNS (*busca de vizinhança variável*). Os autores testaram o algoritmo proposto usando dados de problemas reais. O resultado mostrou que heurística e meta-heurística se mostram competitivas, uma vez que os autores obtiveram com distâncias de 1 % de soluções ótimas de gap para a maioria das instâncias aplicadas.

Jélvez et al. (2016) propôs uma solução baseada na agregação e desagregação de blocos. O método proposto possui dois estágios: (i) um diagrama de blocos é criado (agregação), baseado no diagrama real, no qual ele é resolvido; (ii) a solução é reduzida ao problema original (desagregação). O método proposto mostrou-se extremamente eficiente, pois o problema simplificado apresenta um número consideravelmente pequeno de blocos, tornando-se menos complexo. O algoritmo também foi eficaz em soluções, encontrando 9 novas melhores soluções conhecidas nas 11 instâncias aplicadas.

Recentemente, Samavati et al. (2018) propôs uma metodologia baseada na geração de soluções subótimas utilizando soluções parciais advindas da relaxação linear do modelo, sendo que esse método é baseada em uma técnica de corte utilizando o algoritmo *Branch-And-Bound*. Juntamente, com uma heurística que computa uma solução viável, baseada no algoritmo *Critical Multiplier* do Chicoisne et al. (2012), aplicável aos problemas reais. Testando esses métodos em instâncias da literatura e de depósitos de mina reais. Sendo que, os resultados obtidos da metodologia proposta melhora as soluções mais conhecidas para grande parte das instâncias.

3.2.1 Sequenciamento de mina com a presença de incertezas

Uma questão relevante, mas menos explorada, é a existência de incertezas no processo de extração de minério. Ao trabalhar sobre este tema considerando as incertezas parece haver grandes oportunidades e desafios, tanto em termos de modelagem quanto de métodos para sua solução.

Dimitrakopoulos, Farrelly e Godoy (2002) foram os primeiros a realizar um estudo que considera a incerteza geológica em problemas de mina a céu aberto. Segundo os autores, a incerteza geológica pode ser vista como um elemento-chave dos projetos de mineração a céu aberto e, além disso, essa incerteza pode ser quantificada por meio de simulações condicionais.

Lagos et al. (2011) revela que o ponto de maior dificuldade em um processo de planejamento de mina a céu aberto é aquele que diz respeito à existência de incertezas e que, consequentemente, considera os métodos que usam apenas maximizações de lucro questionáveis para fins práticos. Em sua resolução, os autores consideraram incertezas quanto à extração e processamento e, portanto, propuseram um modelo de otimização robusto usando problemas de programação linear mista inteira. Eldert (2011) também apresentou um algoritmo para o problema estocástico baseado em algoritmos determinísticos de fluxo de rede. O método utiliza múltiplas simulações dos depósitos de minério para obter uma representação das incertezas geológicas. Lamghari e Dimitrakopoulos (2018) apresentam um método hiper-heurística, onde se tem um algoritmo que tenta encontrar um método de solução apropriado em um determinado ponto de decisão em vez de uma solução, combinando elementos de aprendizado por esforço e busca tabu, para resolução do problema de sequenciamento de céu aberto considerando a incerteza geológica.

Considerando o progresso alcançado e os resultados obtidos para os problemas propostos, agora era necessário usar novas linhas de pensamento sobre o uso de incertezas e, no melhor de nosso conhecimento, considerar que o problema de definição da cava final ótima é constituído de incertezas, não apenas em termos de incertezas geológicas, mas a mudança no preço do minério ao longo do tempo. Amankwah (2011) pondera que, a longo prazo, tanto a flutuação dos preços dos metais quanto a porcentagem de minério contida em cada bloco são incertos. Nesta linha de aplicação de incertezas para a resolução destes problemas, Chatterjee, Sethi e Asad (2016) trabalhou neste problema atribuindo incertezas em relação ao preço do commodity, propondo, para solução do problema, um algoritmo de corte mínimo para a cavidade final ótima e definição de *pushback*.

3.3 Posicionamento do presente trabalho

Assim, no contexto do planejamento de mina a céu aberto, o presente estudo irá enfocar o problema de sequenciamento de blocos para maximizar o VPL da extração, respeitando a precedência e limitando as restrições de recursos para um período. Nesse sentido, o problema de sequenciamento de blocos é bem explorado na literatura, sendo inicialmente tratado por meio de modelos matemáticos determinísticos que utilizam métodos exatos para programação inteira mista.

Pode-se ressaltar que, tanto quanto é do nosso conhecimento, não há estudo que considere, ao mesmo tempo, as incertezas inerentes ao processo e a dinâmica da tomada de decisão nesse tipo de problema. Os trabalhos que consideram as incertezas tratam o problema de forma estacionária, ou seja, não consideram dentro da modelagem matemática a possibilidade de reação ótima à realização das incertezas. Esta questão é, portanto, identificada como uma lacuna na literatura sobre programação de minas a céu aberto.

O tratamento do problema como um problema dinâmico de programação estocástica permite o que chamamos de gerenciamento ativo, desde a reavaliação da decisão a partir da percepção, no futuro, da incerteza. Portanto, considerar a existência de uma gestão ativa, neste contexto, significaria realizar planejamento inicial sabendo que no futuro isso será otimamente alterado para lidar com os novos cenários de informação.

4 Fundamentação teórica

O estudo presente necessitou da adoção de algumas metodologias para a resolução do problema de sequenciamento de mina à céu aberto. Para tal fim, foi levantado métodos dentro da literatura que servirão de base para o desenvolvimento do método de resolução do problema tratado. Foi utilizado da Programação Dinâmica Estocástica, para considerar, como dito em seções anteriores, a dinamicidade do sistema e das incertezas inerentes a este. Sendo o tratamento das incertezas dado pelo uso do processo geostático da Krigagem, para estimativa da concentração do minério e o Movimento Browniano Geométrico, para previsão do valor de mercado do minério.

4.1 Programação dinâmica estocástica

A programação dinâmica envolve problemas de otimização que surgem da necessidade da tomada de decisões, através da observação de informações que contribuem diretamente com a tomada de novas decisões, de maneira sequencial onde este ciclo pode se repetir durante um horizonte de tempo finito ou infinito. Além disso, há a possibilidade da inclusão de incertezas que são inerentes ao sistema estudado, para geração de informações que são mais fiéis à realidade, este tipo de problema pode ser denominado de problema de programação dinâmica estocástica (POWELL, 2007).

4.1.1 Elementos da modelagem da programação dinâmica estocástica

Para Powell (2007) os componentes apresentados, são os mínimos necessários para a modelagem de programas dinâmicos e estocásticos. Vale ressaltar, que estes elementos, são baseados no processo de decisão de Markov, que se trata de um processo estocástico, que consiste na tomada de uma ação em um determinado estado que irá gerar uma recompensa que determina o estado do próximo período através de uma função de transição probabilística (PUTERMAN, 2014). Podendo ser considerados como tais:

- **Estado:** utilizado para armazenar toda a informação necessária para a tomada de decisão e como a dinamicidade do sistema se da ao longo do tempo. Podendo ser definido matematicamente como: $S_t =$ estado de informação no tempo t;

- **Decisão:** as decisões e ações tomadas ao longo do sistema para representar como o processo será controlado. As decisões podem ser representadas por uma ação tomada $a \in A$;

- **Informação Exógena:** a informação que surge em cada período de tempo. O sistema estudado pode ter desde um único processo exógeno até um número significativo de processos que vão sendo disponibilizadas ao longo do horizonte de tempo. Considerando essas informações disponibilizadas, usaremos a seguinte notação: W_t = informação exógena disposta no intervalo de tempo t;

- **Função de transição:** essa função mostra como é a evolução de um estado S_t para um S_{t+1} dado uma decisão tomada no tempo t e a informação recebida entre o tempo t e $t+1$. Sendo representada por: $S_{t+1} = S^M(S_t, A_t, W_{t+1})$. Usamos a notação $S^M(\cdot)$ para representar o estado da função de transição, que representa um modelo da dinamicidade do sistema;

- **Função Objetivo:** essa função especifica os custos que estão sendo minimizados, ou as contribuições/ganhos sendo maximizados, em um horizonte de tempo. Podendo ser representado por: $C_{t+1}(S_t, a_t, W_{t+1})$ = contribuição no tempo t no estado S_t, tomando uma ação a_t, que depende da informação W_{t+1}

4.1.2 Princípio de otimalidade de Bellman

De acordo com o princípio estabelecido por Bellman (1966):

> Princípio da otimalidade: Uma política ótima tem a propriedade de que, seja qual for o estado inicial e a decisão inicial, as decisões restantes devem constituir uma política ótima em relação ao estado resultante da primeira decisão.

Podemos notar que os problemas de programação dinâmica podem ser solucionados, de maneira recursiva, onde temos a tomada de ações em subproblemas dos estágios correntes que servirão como entrada para solucionar o estado presente. Com isso o Powell (2007) traz a seguinte equação de Bellman, baseando-se em seu princípio:

$$V_t(S_t) \;=\; \max_{a_t \in A_t}(C_t(S_t, a_t) + \gamma * \sum_{s' \in S} \mathbb{P}(S_{t+1} = s' | S_t, a_t) V_{t+1}(s')) \tag{4.1}$$

Onde temos, o valor de estar em um determinado estado S_t, sendo igual ao valor máximo das decisões $a_t \in A_t$, considerando os custos C_t relacionados a tomada de decisão naquele período t, somados juntos a probabilidade de estar em um estado futuro S_{t+1} dado S_t e a_t, multiplicado pelo valor V_{t+1} de estar no estado futuro S_{t+1}, podendo ser descontado por um valor γ. Nessa forma os problemas podem ser resolvidas de forma recursiva.

4.1.3 Maldições da dimensionalidade

O termo "Maldições da dimensionalidade"foi cunhado por Bellman (1961), como uma tentativa de explicar a dificuldade otimizar um domínio de espaço através de algoritmos de enumeração exaustiva. Onde, ele disse:

> Se nosso objetivo é otimizar para um domínio de produto contínuo de algumas dúzias de variáveis, buscando exaustivamente o espaço discreto de busca definido por uma discretização grosseira, poderíamos facilmente nos deparar com o problema de fazer dezenas de trilhões de avaliações da função.

Bellman (1961) argumentou que essa maldição impedia, sob quase qualquer esquema computacional então previsível e argumentou em favor de seu método de programação dinâmica. Powell (2007) traz um conceito atualizado para as maldições da dimensionalidade, descrevendo elas como tais:

- Dimensão da variável do estado S_t, onde assumimos um tamanho N_1, com os elementos desse variável podendo assumir K_1 valores, então podemos ter até $K_1^{N_1}$ estados;
- Dimensão do conjunto de saídas, advindas das informações exógenas W_t presentes no problema tratado. Assumindo um tamanho N_2 para o conjunto W_t, com os seus elementos podendo assumir K_2 saídas, então podemos ter até $K_2^{N_2}$ saídas;
- Dimensão dos conjunto de ações x_t, podendo assumir um tamanho N_3 e os elementos deste conjunto assumindo K_3 ações realizáveis, é possível ter $K_3^{N_3}$ decisões possíveis.

Torna-se perceptível como as maldiçoes da dimensionalidade afeta o porte dos problemas de programação dinâmica estocástica. Sabendo disto, se torna necessário a utilização de métodos de aproximação. Onde se tem, algoritmos estabelecidos que busca tentam estimar o valor da tomada de decisão por meio da simulação de caminhos aleatórios do início até o fim do sistema. Enquanto em alguns casos, pode se definir políticas estabelecidas que definem o comportamento das decisões a partir das informações disponíveis naquele determinado estado (POWELL, 2007). Onde a otimalidade da política é determinada, caso satisfazer a busca pela melhor solução em todos os estados do problema.

4.2 Krigagem

De acordo com Cressie (1990), a krigagem se trata de um método de interpolação de dados, utilizado na geoestatística para a predição de um espaço usando observações retiradas de locais próximos. Sendo que este método produz uma função de interpolação baseada em um modelo de covariância ou variograma derivado dos dados, em vez de um modelo a priori da função de interpolação (CHILES; DELFINER, 2009).

Supondo que temos um conjunto de dados $Z = (Z(s_1),...,Z(s))'$, podendo ser considerado como observações feitas a partir de função randômica

$$\{Z(s) : s \in D\}, D \subset \mathbb{R}^d \tag{4.2}$$

sendo considerados em locais $s_1,...,s_n$. Assumimos também que

$$Z(s) = \mu + \delta(s); s \in D \tag{4.3}$$

onde $\delta(\cdot)$ é um processo estocástico com uma função de covariância conhecida,

$$C(s,u) = cov(Z(s),Z(u)); s,u \in D \tag{4.4}$$

Para realizar uma predição $Z(s_0)$, precisa ser levado em conta o tipo de krigagem que será realizada. Tendo:

- A **Krigagem Normal**, com μ desconhecida. Sendo então necessário utilizar a media local dos pontos amostrados.
- A **Krigagem Simples**, com μ conhecida. Sendo esta a menos condizente com a realidade, onde a expectativa do local observado geralmente não é conhecida na maioria das suas aplicações.

4.3 Movimento Browniano geométrico

Para Glasserman (2013) o Movimento Browniano se trata de um modelo fundamental para avaliação de um recurso financeiro. Onde o uso do Movimento Browniano Geométrico se dá através movimento Browniano exponenciado aceitando apenas valores positivos em sua função, algo desejavél quando está modelando preço de ações ou qualquer ativo limitado.

De acordo com Glasserman (2013) o Movimento Browniano Geométrico, pode ser descrita pela equação diferencial estocástica seguinte:

$$dX_t = \mu X_t d_t + \sigma X_t dW_t \tag{4.5}$$

Tendo, μ sendo a tendência, σ uma medida de variância e W_t sendo o movimento Browniano (também conhecido como, Processo de Wiener) responsável pelo passeio aleatório do processo. Com isso, temos, o primeiro termo (μX_t) sendo o valor do processo e o segundo termo (σX_t) como os eventos randomizadas que ocorrem durante o processo.

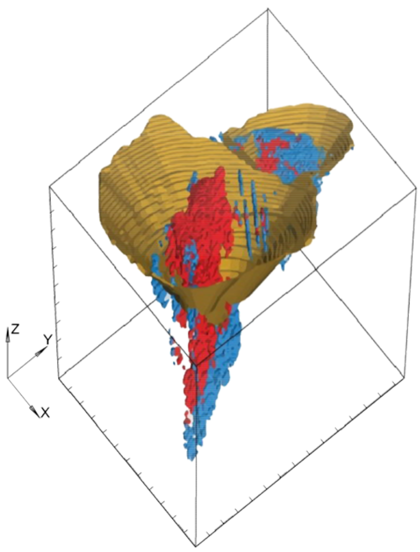
A Solução para 4.5, para um valor inicial $X_0 > 0$, pode ser dada por:

$$X_t = X_0 exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t) \tag{4.6}$$

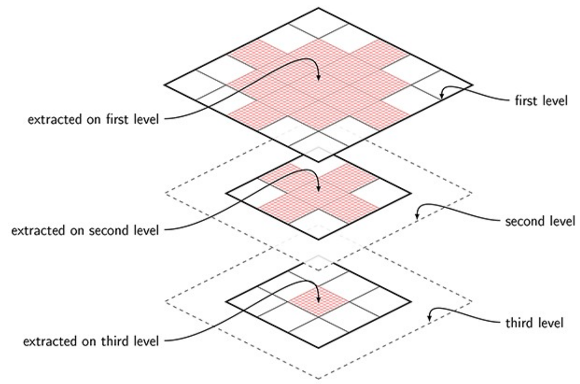
Notando que, X_t sempre assumirá valores positivos, por ele ser exponencial.

5 Modelagem matemática e descrição do problema de sequenciamento de mina a céu aberta

Para fins de modelagem matemática, representaremos uma mina a céu aberto como um conjunto de blocos de minério $\mathcal{B}$ dispostos em $\mathbb{R}^3$ (veja a Figura 1 $[a]$). Cada elemento $i \in \mathcal{B}$ tem associado um conjunto $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ de blocos que precisam ser extraídos antes de i para que este último se torne disponível (veja a Figura 1 $[b]$). Assim, $\mathcal{B}_i$ representa o conjunto de precedentes de $i \in \mathcal{B}$.



(a) Diagrama de uma mina a céu aberta



(b) Arcos de Precedência

Figura 1 – Diagrama de blocos e Relação de precedência

Fonte – Autor

Cada bloco tem um custo de extração c_i e uma relação estéril / minério e_i desconhecida até o momento da extração. A combinação de c_i, e_i e o preço do minério no mercado p, determina o valor do bloco v_i no momento da extração. Durante o estágio de planejamento, os valores v_i e e_i são estimados por $\hat{v}_i$ e $\hat{e}_i$, respectivamente.

O objetivo do problema é sequenciar a extração dos blocos $i \in \mathcal{B}$ para maximizar o valor presente líquido da atividade. Para tanto, restrições de capacidade, valor mínimo extraído e precedência de extração são consideradas para cada período de decisão, ou seja, para cada momento em que se tem a possibilidade de refazer o plano de extração.

5.1 Estado do sistema e Estágio de decisão

O estágio é definido como um instante de tempo no qual o sistema pode ser avaliado para tomada de decisão, que é representado como $k \in K$. O problema de mina a céu aberto (OPM), objeto de pesquisa deste estudo, foi modelado considerando o horizonte de planejamento finito, sendo este horizonte limitado ao período máximo de extração total da mina a céu aberto. O índice da sequencia de tempo estipulado como período representa os momentos em que a empresa decidirá quais blocos agregados serão extraídos e será inserida no horizonte de planejamento contínuo $T = [0, T_{max}]$.

Para isso, o conjunto K é delimitado como um conjunto de partições $K_n = \{kT | i_n ß \leq \} \subseteq T$ para que $t_1^i = 1$, $t_n^i = t_{n-1}^f$ e $t|K|^f = T_{max}$. Assim, o estágio n refere-se à partição $K_n = \left[t_n^i, t_n^f\right]$. Em todas as etapas, as informações do sistema necessárias para descrevê-las e avaliá-las definem o estado do sistema no momento atual. Em um problema de mina a céu aberto, o estado deve conter informações sobre os blocos que são exploráveis, bem como informações sobre o benefício estimado de extrair o bloco $i \in \mathcal{B}$. No presente trabalho, o estado do sistema no estágio n será representado como $S^{(n)}$ e conterá os seguintes parâmetros:

- Blocos com possibilidade de exploração: o conjunto $\mathcal{B}^{(n)}$ são os blocos que podem ser extraídos no estágio de decisão n;
- Estimativa da relação estéril / minério: o parâmetro $\hat{e}_i^{(n)}$ relata a estimativa estéril / minério do bloco i na etapa de decisão n;
- Valor do minério no mercado: o parâmetro $p^{(n)}$ refere-se ao valor do minério no estágio de decisão n;
- Benefício obtido com a extração dos blocos: o parâmetro $\hat{v}_i^{(n)}$ expressa o valor da extração do bloco i no estágio de decisão n, dada a sua relação do estéril / minério $\hat{e}_i^{(n)}$ e o preço $p^{(n)}$ do minério atual no mercado.

Assim, o estado do sistema no estágio n é representado pela expressão 5.1:

$$S^{(n)} = (\mathcal{B}^{(n)} = \bigcup_{r \in \mathcal{R}_d^{(n)}} v_i^{(n)}, e_i^{(n)}, p^{(n)}) \tag{5.1}$$

5.2 Incertezas

O retorno gerado com a extração de blocos geológicos em um processo de mina a céu aberto possui características incertas, já que seu valor depende de informações sobre o preço do minério no estágio n e a relação entre estéril / minério do bloco, que é conhecido com precisão apenas no momento da extração. Esta informação é considerada exógena ao processo de extração de minério.

Denotamos por informação $\omega^{(n+1)}$ as informações sobre a realização da incerteza no final do estágio n e no início do estágio $n+1$. A incerteza $\omega^{(n+1)}$ é representada pela tupla da expressão 5.2, onde $\mathcal{B}_z^{(n)}$ é o conjunto de blocos minados no estágio n, $\bar{e}_i^{(n)}, \forall i \in \ddagger^{(n)}$ os valores reais para a relação de $n+1$ o preço do minério revelou o estágio $n+1$.

$$w^{(n+1)} \;=\; (\bar{p}^{(n+1)}, \bar{e}_i^{(n)} \quad \forall i \in \mathcal{B}_z^{(n)}) \tag{5.2}$$

Existem outras fontes de incerteza no processo de extração de uma mina a céu aberto que não foram consideradas neste trabalho, como a disponibilidade de recursos e a produtividade da extração.

5.3 Decisão

Para cada bloco $i \in \mathcal{B}^{(n)}$ possível de ser extraído no estágio de decisão atual, uma variável binária $x_i^{(n)}$ é associada indicando que este bloco foi extraído em n. Uma vez extraído, o bloco gera imediatamente um valor $\bar{v}_i$, agora conhecido, referindo-se ao ganho de sua mineração.

Sendo que $u^{(n)}$ é uma decisão viável para o estado $S^{(n)}$ no estágio n, o retorno no final do estágio vem da aplicação de $u^{(n)}$ é dado pela expressão 5.3.

$$G_n(S^{(n)}, u^{(n)}) = \sum_{i \in \mathcal{B}^{(n)}} v_i * x_i \tag{5.3}$$

Como $U^{(n)}$ é o conjunto de possibilidades para as decisões no estágio n, $\Omega = \omega^1, ..., \omega^{|K|}$ é o caminho da incerteza e λ um fator de desconto usado para penalizar ganhos futuros, o objetivo do problema modelado neste estudo pode ser representado pela expressão 5.4.

$$Obj: \max_{u^{(n)} \in U^{(n)}} \left\{ \mathbb{E}_\Omega \left[\sum_{n \in K} \lambda^n G_n(S^{(n)}, u^{(n)}) \right] \right\} \tag{5.4}$$

Em cada estágio, a região de viabilidade das soluções $U^{(n)}$ é definida pelo conjunto de desigualdades (5.5 - 5.8).

$$x_i^{(n)} \leq x_j^{(n)}, \;\; \forall i \in \mathcal{B}^{(n)}, \forall j \in \mathcal{P}_i^{(n)} \tag{5.5}$$

$$\sum_{i \in B^{(n)}} a_{ik} x_i^{(n)} \leq C_k^+, \;\; \forall k \in \mathcal{K} \tag{5.6}$$

$$\sum_{i \in B^{(n)}} a_{ik} x_i^{(n)} \geq C_k^-, \ \forall k \in \mathcal{K} \tag{5.7}$$

A restrição 5.5 assegura que a relação de precedência entre blocos seja preservada. Como a_{ik} é o requisito de recurso de $k \in \mathcal{K}$ para a mineração do bloco i, as desigualdades 5.6 e 5.7 os limites superior e inferior do uso de cada tipo de recurso.

Finalmente, as equações em 5.8 informam os domínios das variáveis.

$$x_i^{(n)} \in \{0,1\} \ \ \forall i \in \mathcal{B}^{(n)}, \tag{5.8}$$

Dado que a decisão é definida por uma política $\pi(\cdot)$, ie, $u^{(n)} = \pi(S^{(n)})$, onde $S^{(n)}$ é um estado possível de ocorrer sob $\pi()$, Ω é o conjunto de todas as sequências de incerteza possíveis para o sistema e $S^{(n+1)}$ é um estado que é possível a partir da transição gerada por S, u e ω, a expressão 5.9 representa a Equação de Bellman para a política π e deriva o valor $V^{\pi,(n)}$ para estar em $S^{(n)}$.

$$V^{\pi,(n)}(S^{(n)}) = G(S^{(n)}, \pi(S^{(n)})) + \lambda E_{\omega}\{V^{\pi,(n+1)}(S^{(n+1)})|S^{(n)}, \pi(S^{(n)})\} \tag{5.9}$$

Desta forma, o objetivo do problema é encontrar a política ótima $\pi^* = (\pi^1, ..., \pi^{(|K|)})$ de um conjunto de políticas Π que maximiza o valor de estar no estado inicial $S^{(0)}$ no estágio 0, de acordo com a expressão 5.10.

$$\pi^* = \arg\max_{\pi \in \Pi} V^{\pi,(0)}(S^{(0)}) \tag{5.10}$$

5.4 Transição

A função de transição $f_T(S,u,w)$ determina como o sistema evolui ao longo dos estágios de decisão e, assim, determina a dinâmica do processo. Como $S^{(n)}$ é o estado presente, sua configuração depende do estado do sistema no estágio anterior $S^{(n-1)}$, da decisão $u^{(n-1)}$ no estágio anterior e também a influência da incerteza $w^{(n)}$ ocorreu no estágio atual.

Desta forma, a dinâmica descrita pela equação 5.11 representa a evolução do sistema após a aplicação do controle $u^{(n)}$ no estágio n para um próximo estado, existente no estágio $n+1$. Na Expressão 5.11, $f(S^{(n)}, u^{(n)}, w^{(n+1)})$ representa uma função recursiva para o estado no período $n+1$, com base em informações anteriores.

$$S^{(t+1)} = f(S^{(t)}, u^{(t)}, \omega^{(t+1)}) \tag{5.11}$$

Para o problema tratado, a decisão define quais blocos geológicos serão adicionados ao processo de extração. O benefício obtido a partir da extração pode ser alterado a partir de incertezas geológicas e de preço do minério. Assim, como $S^{(n)}$ é representado pela expressão 5.1, é necessário atualizar $\mathcal{B}^{(n)}$ baseado em $u^{(n)}$, $v_i^{(n)}$, $e_i^{(n)}$ e $p^{(n)}$ da realização da incerteza $w^{(n+1)}$. A figura 2 detalha o processo de transição.

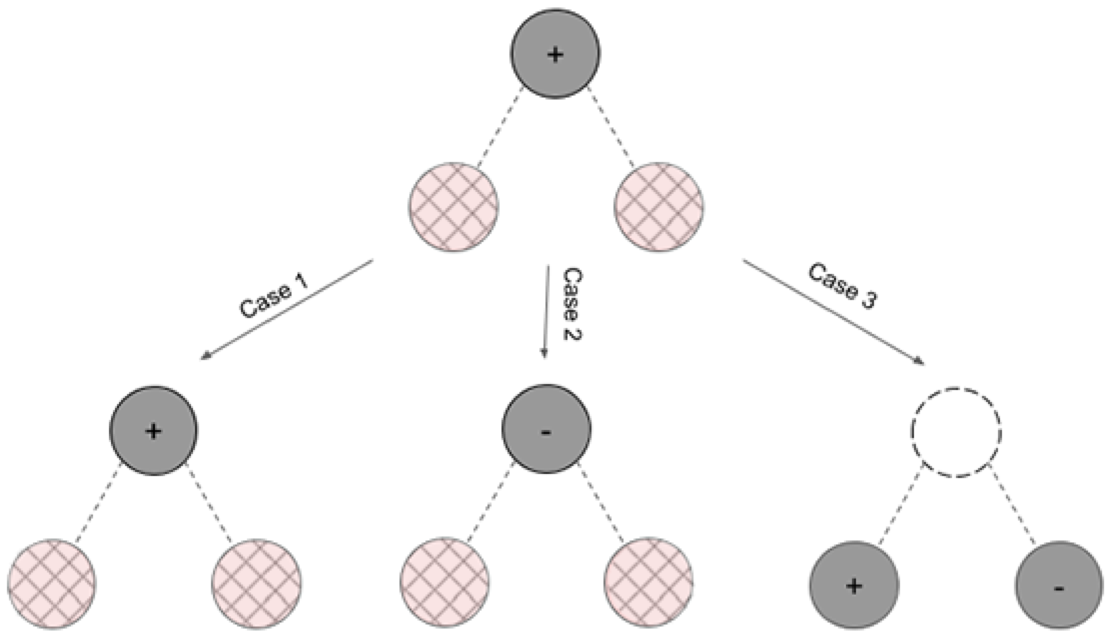


Figura 2 – Processo de decisão na operação de uma mina

Fonte – Autor

Em cada momento de decisão, existem duas situações iniciais para um dado elemento $i \in \mathcal{B}^{(n)}$: estar disponível para mineração no estágio atual ($i \in \mathcal{B}^{(n)}$), isto é, estar na superfície ou fazer parte do conjunto de blocos que podem ser alcançados dado o limite de extração, ou não estar disponível. Dado que um determinado conjunto de blocos está disponível, existem duas opções para a transição para o bloco: ser explorado (*case* 3) e não ser explorado (*case* 1 e *case* 2).

Se um bloco em particular i estiver na superfície do plano de exploração, sua proporção de estéril / minério $e_i^{(n)}$ é conhecida e, portanto, o benefício $v_i^{(n)}$ de sua extração não é influenciado pela incerteza geológica. Para blocos que não sejam de superfície, seu parâmetro $e_i^{(n)}$ é estimado e será influenciado pela incerteza geológica no momento da extração. Portanto, se for decidido não minerar um determinado bloco no estágio atual n, e ele está na superfície, o valor estéril / minério permanece para o período $n+1$ (*case* 1), que é $e_i^{(n)} = e_i^{(n+1)}$. Por outro lado, se o bloco não for superficial e, portanto, seu valor $e_i^{(n)}$ for estimado, o valor $e_i^{(n+1)}$ será atualizado considerando as informações (*case* 2).

A partir do momento que os blocos são extraídos em um determinado estágio n $(case\ 3)$, eles não são mais alocados como uma opção para o novo período de decisão e, também, blocos que não estavam disponíveis para mineração se tornam acessíveis.

6 Resultados e discussões

A importância da criação do *framework* se advém da necessidade de uma estrutura capaz de atualizar as informações exógenas que vão surgindo ao longo da transição entre os períodos ao realizar a simulação. Sabendo disso e a fim de proporcionar uma melhor compreensão do modelo proposto, esta seção apresentará um exemplo de aplicação que visa demonstrar a dinâmica da decisão ao longo das etapas. Demonstrando o processo decisório referente às ações referentes à seleção dos blocos a serem explorados no estágio atual, utilizando duas políticas míope e, após esse evento, a seleção dos blocos a serem extraídos e a dinâmica de transição para o próximo período. Além disso, será apresentada uma análise descritiva das replicações feitas para analisar o comportamento dos resultados gerados pela simulação das duas políticas.

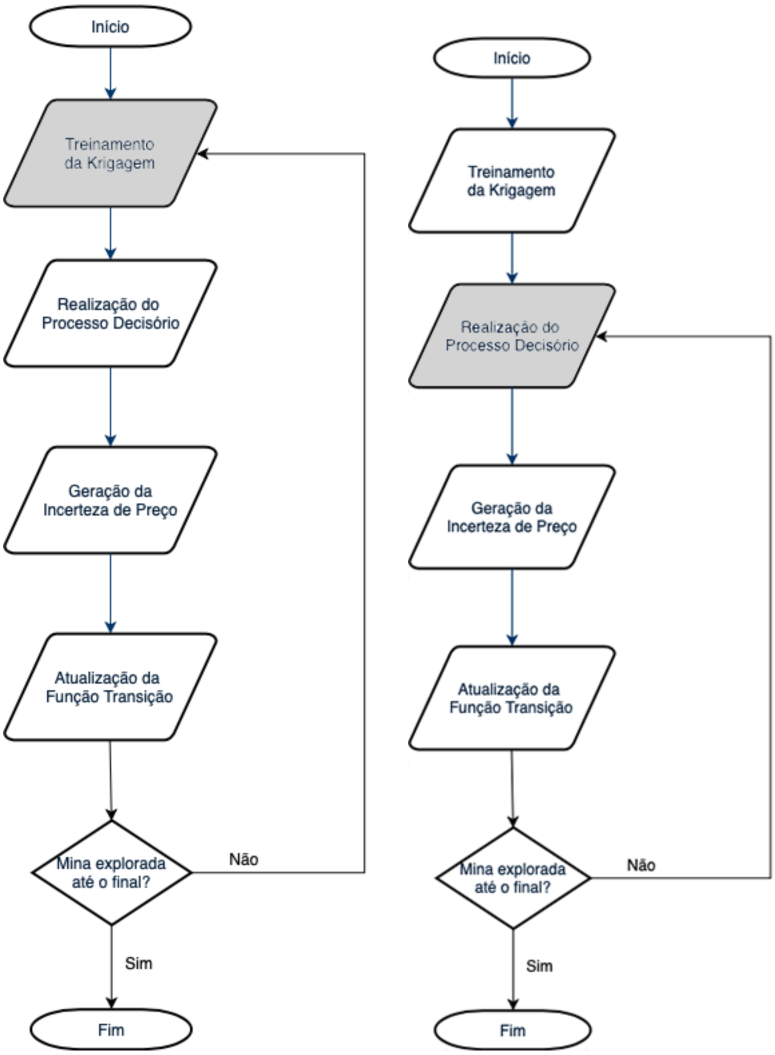
Foi realizada a criação manual de uma instância simulando uma mina com um total de 64 blocos, podendo ser representado por um conjunto $\mathcal{B} = (0, ..., 63)$, sendo esta instância servindo como base para realização de todos os testes. Sendo realizado 100 execuções, utilizando a instância criada, para observar o comportamento do sistema. A simulação foi implementado na linguagem Python versão 3.5, e os subproblemas exatos resolvidos com o software Gurobi versão 8.10 acadêmica. Os testes foram executados em um computador com processador Intel I5 – 4250U com 2 núcleos de 1.3GHz e 4 GB de memória RAM, utilizando sistema operacional macOS.

6.1 Aplicação do *framework*

Os conjuntos de blocos com possibilidade de serem explorados $\mathcal{B}^{(1)}$, bem como os valores conhecidos $v_i^{(1)}$ para os benefícios de extração dos blocos são usados para resolver duas variações miópicas do problema usando a função objetivo definida pela Expressão 5.4, desconsiderando a esperança $\mathbb{E}_{\Omega}$. Sendo necessário construir dos conjuntos $\mathcal{B}^{(n)}$ de blocos possíveis, $\mathcal{H}^{(n)}$ sendo o conjunto de blocos de superfície e $\mathcal{P}_j^{(n)}$ o conjunto de blocos que devem ser removidos antes de bloquear j.

Como pode ser observado na Figura 3 (a), a Política 1 é inicializada realizando o treinamento necessário para gerar a incerteza geológica $e_i^{(n)}$ para os blocos possíveis de serem explorados $\mathcal{B}^{(n)}$. Possibilitando realizar o processo decisório, selecionando os blocos a serem extraídos a partir da resolução do subproblema exato (5.4 - 5.8), gerando então o valor da incerteza do preço do minério $p^{(n)}$, atualizando o preço da tonelada de minério para o período atual.

Ao realizar a transição do estágio n para o estágio $n+1$, os parâmetros $e_i^{(n+1)}$, $p^{(n+1)}$ e $v_i^{(n+1)}$ as incertezas , e também os conjuntos $\mathcal{B}^{(n+1)}$, $\mathcal{H}^{(n+1)}$ e $\mathcal{P}_i^{(n+1)}$ são atualizados. O sistema é executado novamente até que todos os blocos contidos na mina sejam extraídos, onde estimativas de concentração estéril / minério são atualizadas para os demais blocos e toda a simulação é executada novamente. Enquanto na Política 2, como observado na Figura 3 (b), a diferença se encontra na geração dos valores da incerteza geológica, que ocorre apenas uma vez no início da política, gerando valores iniciais para todos os blocos da mina, que serão utilizadas ao longo do resto da execução da simulação, onde a função de transição é inicializada a partir do processo decisório até que toda a mina seja explorada.



(a) Fluxograma da Política 1 (b) Fluxograma da Política 2

Figura 3 – Fluxogramas

Fonte – Autor

6.2 Análise Descritiva

Com o intuito de analisar o comportamento das políticas míope propostas, foram realizadas 100 replicações das mesmas utilizando a instância criada manualmente. Podendo então, observar o valor médio obtido do VPL adquirido ao longo da extração completa da mina e o tempo médio de execução das simulações realizadas, juntamente com os seus respectivos valores de desvio padrão, sendo estes resultados apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados médios

	Política 1		Política 2	
	Valor da extração	Tempo de execução (s)	Valor da extração	Tempo de execução (s)
Média (μ)	R$ 39.085,45	864,24	R$ 14.036,49	110,72
Desvio Padrão (σ)	R$ 9.068,33	31,36	R$ 4.555,32	6,91

Afim de analisar a variação dos valores de extração, foi realizado uma análise utilizando o diagrama de caixas (*boxplot*), observado na figura 4, sendo perceptível valores atípicos (*outliers*), sendo representados por pontos, para a Política 1 e Política 2, respectivamente, no valor de R$ 68.995,95 e R$ 27.795,49, ambos podendo serem originadas da aleatoriedade dos processos estocásticos utilizados para geração das incertezas do sistema. Juntamente, apresentando os valores para o resumo dos cinco número (mínimo amostral, primeiro quartil, mediana, terceiro quartil e máximo amostral) demonstrados na Tabela 2. Com as informações apresentadas torna-se perceptível o ganho obtido entre as políticas em um modelo geológico com apenas 64 blocos onde se realiza a estimativa do estéril/ minério a cada período. Porém havendo um tempo de execução maior para a política 1, poderá acontecer a inviabilização do seu uso em instâncias reais, onde a política 2 se mostra destaque no tempo de execução. Surgindo então, a necessidade da criação de um política intermediária, onde a atualização da krigagem possa ser realizada a cada número determinado de períodos, onde possa ainda obter resultados de lucro com ganhos perceptíveis e tempo de execução que sejam viáveis.

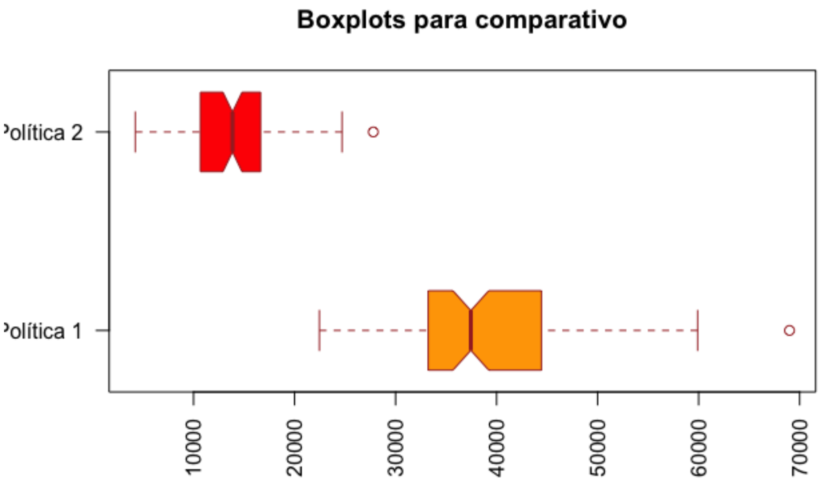


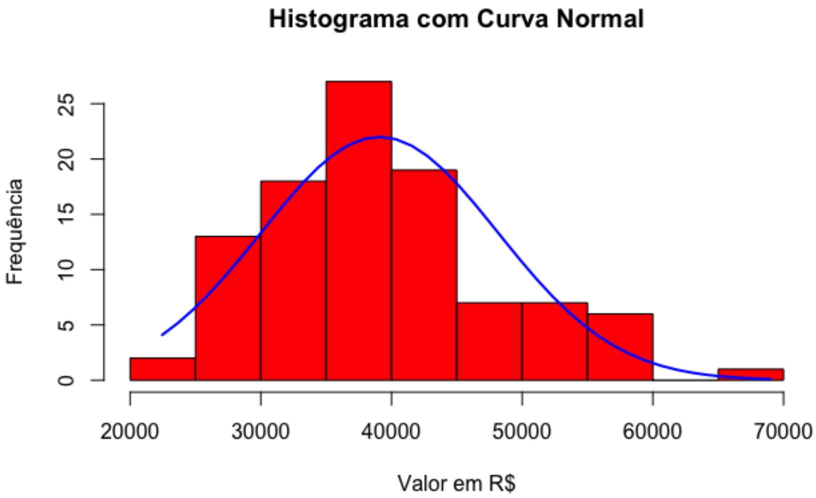
Figura 4 – Boxplot comparativo entre as políticas

Fonte – Autor

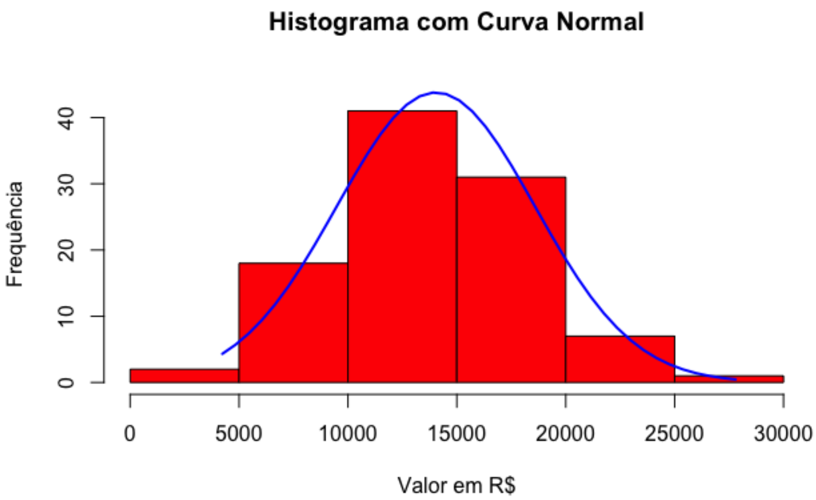
Como última análise realizada, com finalidade de trazer mais uma representação visual dos resultados obtidos mostrando o número de observações que estão dentro de um *range* de valores, utilizamos dos histogramas da Figura 5. Podendo observar que o comportamento de ambas as políticas propostas tendo valores que podem ser ajustados de acordo com uma distribuição normal, sendo esta distribuição a que mais se aproxima do formato dos resultados.

Tabela 2 – Resumo dos cinco números

	Resumo dos cinco números	
	Política 1	Política 2
Min.	R$ 22.455,71	R$ 4.233,68
Primeiro Quartil	R$ 33.230,36	R$ 10.671,40
Mediana	R$ 37.450,01	R$ 13.853,54
Terceiro Quartil	R$ 44.437,15	R$ 16.636,85
Max.	R$ 59.904,12	R$ 24.702,87



(a) Histograma da Política 1



(b) Histograma da Política 2

Figura 5 – Histogramas

Fonte – Autor

7 Conclusão e trabalhos futuros

O estudo presente apresentou um *framework* para resolução do problema de sequenciamento de mina a céu aberto, através da programação dinâmica estocástica. Com intuito de auxiliar na tomada de decisão para maximização do VPL da extração de blocos de minério. Conseguindo então, atingir o objetivo inicial do trabalho.

A contribuição do modelo proposto é justificado pela consideração das incertezas inerentes ao sistema, mais especificamente, as que se referem ao valor do minério e as concentrações da relação estéril / minério, além de considerar a natureza dinâmica do sistema.

Uma contribuição secundária do estudo, se dá pelo desenvolvimento de duas políticas para validarem o modelo proposto, podendo ser anotado o comportamento das duas. Onde a Política 1, apesar de trazer um VPL de extração mais alta apresenta um tempo de execução significativamente maior que a Política 2, que acaba trazendo valores de retorno para extração da mina menores. Criando então, a necessidade da formulação e avaliação de políticas de exploração diferentes (como por exemplo, políticas *lookahead*, as baseadas em aproximação de regras e as baseadas em aproximação do valor da função).

Para estudos futuros, torna-se necessário o desenvolvimento de técnicas de solução para o modelo proposto e, posteriormente, sua avaliação com outras técnicas já aplicadas, como (por exemplo, (JÉLVEZ et al., 2016; RAMAZAN, 2007). Juntos, sugere-se a experimentação de modelagem referente às incertezas do problema com métodos presentes na literatura (por exemplo, (DIMITRAKOPOULOS; FARRELLY; GODOY, 2002; CHATTERJEE; SETHI; ASAD, 2016). E por fim, a criação de um método aproximado, atuando através da aprendizagem do algoritmo, para encontrar uma política denominada ótima.

Referências

AMANKWAH, H. *Mathematical optimization models and methods for open-pit mining*. Tese (Doutorado) — Linköping University Electronic Press, 2011.

BELLMAN, R. Dynamic programming. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 153, n. 3731, p. 34–37, 1966.

BELLMAN, R. E. *Adaptive control processes: a guided tour*. [S.l.]: Princeton university press, 1961. v. 2045.

CHATTERJEE, S.; SETHI, M. R.; ASAD, M. W. A. Production phase and ultimate pit limit design under commodity price uncertainty. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 248, n. 2, p. 658–667, 2016.

CHICOISNE, R. et al. A new algorithm for the open-pit mine production scheduling problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 60, n. 3, p. 517–528, 2012.

CHILES, J.-P.; DELFINER, P. *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 497.

CRESSIE, N. The origins of kriging. *Mathematical Geology*, v. 22, n. 3, p. 239–252, Apr 1990. ISSN 1573-8868. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00889887>.

DAGDELEN, K. Optimum open pit mine production scheduling by lagrangian parameterization. *Proc. of the 19th APCOM*, p. 127–142, 1986.

DIMITRAKOPOULOS, R. *Advances in Applied Strategic Mine Planning*. Springer International Publishing, 2018. ISBN 9783319693194. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=xBKfswEACAAJ>.

DIMITRAKOPOULOS, R.; FARRELLY, C.; GODOY, M. Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open-pit design. *Mining Technology*, Taylor & Francis, v. 111, n. 1, p. 82–88, 2002.

ELDERT, J. V. Stochastic open pit design with a network flow algorithm: Application at escondida norte, chile. 2011.

ESPINOZA, D. et al. Minelib: a library of open pit mining problems. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 206, n. 1, p. 93–114, 2013.

GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 53.

IBRAM. *Informações sobre a econômia mineral brasileira 2015*. [S.l.], 2015.

JÉLVEZ, E. et al. Aggregation heuristic for the open-pit block scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 249, n. 3, p. 1169–1177, 2016.

JOHNSON, T. B. *Optimum open pit mine production scheduling*. [S.l.], 1968.

LAGOS, G. et al. Robust planning for an open-pit mining problem under ore-grade uncertainty. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 37, p. 15–20, 2011.

LAMGHARI, A.; DIMITRAKOPOULOS, R. Hyper-heuristic approaches for strategic mine planning under uncertainty. *Computers Operations Research*, 2018. ISSN 0305-0548. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054818302958>.

LERCHS, H.; GROSSMANN, L. F. Optimum design of open-pit mines. *Canadian Mining and Matallurgical Bulletin*, v. 58, n. 1, p. 47–54, 1965.

MEAGHER, C.; DIMITRAKOPOULOS, R.; AVIS, D. Optimized open pit mine design, pushbacks and the gap problem—a review. *Journal of Mining Science*, Springer, v. 50, n. 3, p. 508–526, 2014.

MORABITO, R.; PUREZA, V. Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações. In: . Elsevier, 2010. cap. 8, p. 168 – 198. ISBN 9788535235234. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=yY5uQgAACAAJ>.

NEWMAN, A. M. et al. A review of operations research in mine planning. *Interfaces*, Informs, v. 40, n. 3, p. 222–245, 2010.

OSANLOO, M.; GHOLAMNEJAD, J.; KARIMI, B. Long-term open pit mine production planning: a review of models and algorithms. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, Taylor & Francis, v. 22, n. 1, p. 3–35, 2008.

POWELL, W. B. *Approximate Dynamic Programming: Solving the curses of dimensionality*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. v. 703.

PUTERMAN, M. L. *Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.

RAMAZAN, S. The new fundamental tree algorithm for production scheduling of open pit mines. *European Journal of Operational Research*, v. 177, n. 2, p. 1153–1166, 2007. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:ejores:v:177:y:2007:i:2:p:1153-1166>.

SAMAVATI, M. et al. A new methodology for the open-pit mine production scheduling problem. *Omega*, Elsevier, v. 81, p. 169–182, 2018.

SOUZA, M. J. et al. A hybrid heuristic algorithm for the open-pit-mining operational planning problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 207, n. 2, p. 1041–1051, 2010.